فصل اول

درس اول: آشنایی با منطق ریاضی

منطق ریاضی : دستور زبان ریاضی یا مطالعه ساختار جمله هایی است که در ریاضی به کار می روند.

مثال:

نکته : منطق ریاضی به بررسی دقیق استدلال ها می پردازد و اعتبار یک استدلال را مشخص می کند.

استدلال: هراستدلال ازچند جمله خبری تشکیل شده است که یکی ازآنها نتیجه استدلال و مابقی مفروضات استدلال هستند .

مثال: برای خرید های بالا <u>100</u> هزار تومان از یک فروشگاه اینترنتی <u>5</u> هزار تومان تخفیف می گیریم . آرمیتا از فروشگاه <u>125</u> هزار تومان خرید کرده است . در نتیجه او باید............

گزاره : همان طور که ملاحظه فرمودید هر استدلال از تعدادی جمله خبری تشکیل شده است هر جمله خبری می تواند دارای ارزش "درست" یا "نادرست" باشد

"به محتوای یک جمله خبری که در حال حاضر یا آینده ،داذپرای ارزش درست یا نادرست می باشد یک گزاره می گوییم"

[گزاره ها را معمولاً با r , q , p و... نشان می دهیم.]

ارزش گزاره : درست یا نادرست بودن یک گزاره را " ارزش گزاره " می گوییم .

گزاره درست را با **"د" یا "T"** و گزاره نادرست را با **"ن" یا "F"** نشان می دهیم.

مثال: هر یک از جملات زیر یک گزاره اصست ، ارزش آن را تعیین کنید.

الف) ایران یک کشور آسیایی است.

ب)هر عدد اول ، عددی فرد است.

ج) عدد 100 را می توان به صورت مجموع دو عدد اول نوشت.

د) هر عدد زوج بزرگتر از 2 را می توان به صورت حاصل جمع دو عدد اول نوشت

ه) رقم هزارم بعد از ممیز عددπ برابر 5 است .

حدس گلد باخ : هر عدد زوج بزرگتر از 2 را می توان به صورت حاصل جمع دو عدد اول نوشت.

توجه: حدس ها هم گزاره هستند زیرا یا ارزش درست دارند یا نادرست. اما درستی یا نادرستی ارزش آنها در حال حاضر برای ما مشخص نیست.

نکته 1. جملات پرسشی ،امری و عاطفی گزاره محسوب نمی شود. جملات خبری که درست یا نادرست بودن آنها به نظر یا سلیقه افراد مرتبط است، گزاره نیستند.

نکته2. یک گزاره نمی تواند هم ارزش درست و هم ارزش نادرست داشته باشد.

مثال: کدامیک از جملات زیر گزاره است ؟

الف) آیا زمستان هوا سرد است؟

ب)عددπ عددی گنگ است.

ج)لطفا از کلاس خارج شوید .

د)چه درختان پر شکوفه ای !

جدول ارزش گزاره ها :

ارزش یک گزاره مانند p را این گونه نشان می دهیم .

p
د
ن

جدول ارزش دو گزاره p و q

p	q
د	د
د	ن
ن	د
ن	ن

نکته :جدول ارزش هر گزاره دو حالت دارد . بنابراین جدول ارزش های n گزاره با توجه به اصل ضرب دارای $\underbrace{2\times2\times\ldots\times2\times2}_{n\text{تا}} = 2^n$ حالت می- باشد. به عنوان مثال : جدول ارزش 4 گزاره ....حالت دارد.

گزاره نما: هر جمله خبری که شامل یک یا چند متغیر است و با جایگذاری مقادیری بجای متغیر ها به گزاره تبدیل می شود، را گزاره نما می نامیم.

نکته1: گزاره نماها را بر حسب تعداد متغیر های بکار رفته در آنها، گزاره نما ها یک متغیره ، دو متغیره و... می نامیم.

به عنوان مثال « $۲x+۳y \geq ۹$ » یک گزاره نما دو متغیره است .

مثال: کدامیک از جملات زیر گزاره نما است ؟

الف) x عددی زوج است.

ب) حاصل جمع دو برابر عددی با عدد دیگری 7 است .

ج) 2 تنها عدد اول زوج است.

د) x پایتخت کشور y است .

ه) $x^۲+۴x \leq ۰$

و) سه برابر عددی برابر با 9 است.

نکته2: معادلات ونامعادلات همه گزاره نما هستند.

دامنه متغیر گزاره نما: مجموعه مقادیری که اگر هر یک از آنها را بجای متغیر های گزاره نما قرار دهیم ، گزاره نما به گزاره تبدیل می شود را دامنه متغیر گزاره نما می نامیم و آن را با D نشان می دهیم.

مثال: دامنه متغیر هر یک از گزاره نما های زیر را بنویسید .

الف) x عددی زوج است.

ب) $x^۲+۴x+۲<۰$

ج) $\sqrt{-x} \in z$

د) $\frac{x+۱}{x^۲-۱} \in N$

ه) $x \in z$

مجموعه جواب گزاره نما : مجموعه عضو هایی از دامنه متغیر است که به ازای آنها ، گزاره نما تبدیل به گزاره ای با ارزش درست می شود و آن را با S نشان می دهیم و همواره داریم: $S \subseteq D$

مثال: مجموعه جواب هر یک از گزاره نما ها زیر را تعیین کنید.

الف) $-\frac{۴}{x} \in N$

ب) $\frac{x}{x+1} \in Z$

ج) X عددی صحیح نیست.

د) $۴x^۲ + ۹x + ۵ = ۰$

ترکیب گزاره ها :

گزاره مرکب : گزاره ای است که از ترکیب دو یا چند گزاره به وسیله رابطه های گزاره ایی بدست می آید. مانند " 2 عددی اول است و 7 عددی فرد است"

رابطه ها گزاره ای عبارتند از:

الف) ناقص " ~ " به معنی " چنین نیست که "

ب) فاصل " $\vee$ " به معنی " یا "

ج) عاطف " $\wedge$ " به معنی " و"

د) شرطی " $\Rightarrow$" به معنی " اگر.... آن گاه "

ه) دو شرطی " $\Leftrightarrow$ " به معنی " اگر و تنها اگر "

نکته *:* نقیض تنها روی یک گزاره اثر می کند در حالی که رابطه های دیگر روی دو یا چند گزاره اثر می کنند.

نقیض یک گزاره : نقیض گزاره p را با " ~p" نشان می دهیم و می خوانیم " چنین نیست که p" مثلاً نقیض گزاره " 3 عددی اول است " می شود " سه عددی اول نیست"

p	~p
د	ن
ن	د

*ارزش گزاره ~p همیشه خلاف ارزش گزاره p است . یعنی : **دو گزاره هم ارز**

اگر دو گزاره p و q هم ارزش باشند به آنها " هم ارز " می گوییم و می نویسیم : $p \equiv q$

همیشه داریم: $p \equiv \sim(\sim p)$

p	~ P	~ (~p)
د	ن	د
ن	د	ن

ترکیب فصلی دو گزاره :

از ترکیب دو گزاره p و q با رابطه منطقی " $\vee$ " ترکیب فصلی دو گزاره تشکیل می شود که آن را بصورت $p \vee q$ می نویسیم و می خوانیم " p یا q"

مثلاً عبارت " 6 عددی صحیح است یا $\sqrt{۲}$ عددی حقیقی است " ترکیب فصلی دو گزاره است .

*** ارزش ترکیب فصلی** : اگر حداقل یکی از دو گزاره p یا q ارزش درست داشته باشند ، ترکیب فصلی $p \vee q$ ارزش درست دارد . مانند جدول زیر:

p	q	$p \vee q$
د	د	د
د	ن	د
ن	د	د
ن	ن	ن

از این ویژگی برای حل معادله ها می توان استفاده کرد . به عنوان مثال:

$$x(x+۲)=۰ \Rightarrow (x=۰) \vee (x+۲=۰)$$

ترکیب عطفی دو گزاره :

از ترکیب دو گزاره p و q با رابطه منطقی "$\wedge$" ترکیب عطفی دو گزاره تشکیل می شود که آن را بصورت " $p \wedge q$ " نشان می دهیم و می خوانیم " p و q "

مثلا عبارت " مبینا عضو گروه تئاتر مدرسه است و مریم عضو گروه سرود مدرسه است" ترکیب عطفی دو گزاره است .

ارزش ترکیب عطفی : ترکیب عطفی دو گزاره وقتی ارزش درست دارد که هر دو گزاره دارای ارزش درست باشند مانند جدول رو به رو

p	q	$p \wedge q$
د	د	د
د	ن	ن
ن	د	ن
ن	ن	ن

از این ویژگی برای حل معادلاتی نظیر $(۲x-y)^۲+(x-y)^۲=۰$ می توان استفاده کرد.

قوانین دمورگان:

درستی قوانین دمورگان را توسط منطق ریاضی نشان دهید:

$$\sim(p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q$$
$$\sim(p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q$$

یادآوری : در مجموعه ها داشتیم.

$(A\cup B)'=A'\cap B'$

$(A\cap B)'=A'\cup B'$

مثال: اگر ارزش گزاره های p و $\sim(p\wedge q)$ درست باشند،آنگاه ارزش گزاره q را تعیین کنید.

قوانین گزاره ها:

1) قوانین جابجایی

$$\begin{cases} p\vee q\equiv q\vee p \\ p\wedge q\equiv q\wedge p \end{cases}$$

2) قوانین شرکت پذیری

$$\begin{cases} (p\vee q)\vee r\equiv p\vee (q\vee r) \\ (p\wedge q)\wedge r\equiv p\wedge (q\wedge r) \end{cases}$$

3) قوانین توزیع پذیری

$$\begin{cases} p\wedge (q\vee r)\equiv (q\wedge q)\vee (p\wedge r) \\ p\vee (q\wedge r)\equiv (q\vee q)\wedge (p\vee r) \end{cases}$$

4) قوانین جذب

$$\begin{cases} p\vee (p\wedge q)\equiv p \\ p\wedge (p\vee q)\equiv p \end{cases}$$

5) قوانین دمورگان

$$\begin{cases} \sim (p\wedge q)\equiv \sim p\vee \sim q \\ \sim (p\vee q)\equiv \sim p\wedge \sim q \end{cases}$$

ترکیب شرطی دو گزاره : گزاره مرکب "$p \Longrightarrow q$" را ترکیب شرطی دو گزاره p وq می نامیم و می خوانیم " اگر p آنگاه q " در این ترکیب شرطی p را مقدم "فرض" و q را تالی " حکم" می نامیم. مثلا عبارت "اگر x عددی زوج باشد آنگاه x^2 نیز عددی زوج است" یک ترکیب شرطی است.

نکته : در گزاره شرطی $p \Longrightarrow q$ ، p شرط کافی برای q و q شرط لازم برای p است.

ارزش گزاره مرکب $p \Rightarrow q$: ارزش این ترکیب تنها هنگامی نادرست است که ارزش p درست و q نادرست باشد. مانند جدول رو به رو

p	q	$p \Rightarrow q$
د	د	د
د	ن	ن
ن	د	د
ن	ن	د

مثال: ارزش گزاره " اگر 2 عددی فرد باشدآنگاه 5>2 " به انتفای مقدم درست است.

نکته: در قضایا و مسائل هندسه با گزاره های شرطی زیادی مواجه شدیم. یک مثال بیاورید:

مثال: با استفاده از جدول ، هم ارزی زیر را نشان دهید.

$$\boxed{(p \Rightarrow q) \equiv (\sim p \vee q)}$$

عکس ترکیب شرطی: گزاره $q \Rightarrow p$ عکس ترکیب شرطی $p \Rightarrow q$ است.

عکس نقیض ترکیب شرطی: گزاره $\sim q \Rightarrow \sim p$ عکس نقیض ترکیب شرطی $p \Rightarrow q$ می باشد.

نکته: برای هر دو گزاره p وq داریم: (روی جدول درستی این هم ارزی را نشان دهید)

$$\boxed{(p \Rightarrow q) \equiv (\sim q \Rightarrow \sim p)}$$

نکته: گزاره های $(p\Rightarrow p)$ و $(p\vee\sim p)$ گزاره های همیشه درستند.

نکته: گزاره $p\wedge\sim p$ گزاره همیشه نادرست است.

نکته: برای هر دوگزاره p و q داریم:

$$\boxed{\sim(p\Rightarrow q)\equiv p\wedge\sim q}$$

مثال: ثابت کنید اگر $a\in z$ و a^2 زوج باشد ،آنگاه a عددی زوج است.(راهنمایی: از هم ارزی با عکس نقیض استفاده کنید)

ترکیب دو شرطی: برای دو گزاره p و q ، گزاره مرکب $(p\Rightarrow q)\wedge(q\Rightarrow p)$ را بصورت $p\Leftrightarrow q$ می نویسیم و می خوانیم " اگر p آنگاه q و برعکس " ،" p اگر و تنها اگر q " ،" p شرط لازم و کافی برای q است"

ارزش گزاره دو شرطی: گزاره $p\Leftrightarrow q$ تنها زمانی درست است که p و q هم ارزش باشند یعنی هر دو درست یا هر دو نادرست باشند مانند جدول روبه رو

p	q	$p\Leftrightarrow q$
د	د	د
د	ن	ن
ن	د	ن
ن	ن	د

نکته: هم ارزی زیر همیشه برقرارند:

$$\sim(p\Leftrightarrow q)\equiv\sim p\Leftrightarrow q\equiv p\Leftrightarrow\sim q$$
$$\sim(p\Leftrightarrow q)\equiv(p\wedge\sim q)\vee(q\wedge\sim p)$$

سور ها :

*عبارت های "به ازای هر" و"به ازای بعضی مقادیر" را سور می نامند.

*عبارت"به ازای هر" را سور عمومی می نامندو آن را با علامت $\forall$ نشان می دهند.

*عبارت"به ازای بعضی مقادیر" را سور وجودی می نامندو آن را با علامت $\exists$ نشان می دهند.

سور ها می توانند ابتدای گزاره نما قرار گیرند و گزاره نما را به گزاره ای با ارزش درست یا نادرست تبدیل کنند.

*گزاره نما شامل سور عمومی هنگامی درست است که هیچ مثال نقضی نداشته باشد. یعنی هر عضو از دامنه متغیر در گزاره نما صدق کند.

*گزاره نمای شامل سور وجودی هنگامی درست است که مجموعه جواب آنها تهی نباشد.

مثال: هر یک از سور های زیر را به زبان ریاضی بنویسید:

الف) برای هر عدد حقیقی x داریم $x^۲+۱\geq ۲x$

ب) مربع بعضی اعداد حقیقی کوچکتر از صفر است.

ج) بعضی اعداد اول، فردند.

د) هر عدد زوجی ، اول نیست.

ه) مربع برخی اعداد صحیح از خودشان کوچکتر است.

مثال: کدام گزینه درست است؟

1) $\forall x\in\mathbb{R}؛\dfrac{x^۲-۱}{x+۱}=x-۱$

2) $\forall x\in O;\ x^2=8q+1$

3) $\forall x\in E;\ x\notin P$

4) $\exists x\in\mathbb{R}؛|x|+۱\leq ۰$

نقیض گزاره های سوری:

اگر$p(x)$ یک گزاره نما باشد، نقیض گزاره $\forall x؛p(x)$ برابر است با $\exists x؛\sim p(x)$ و نقیض گزاره $\exists x؛p(x)$ برابر است با $\forall x;\sim p(x)$

$$\sim(\forall x;P(x))\equiv\exists x;\sim P(x)$$
$$\sim(\exists x;P(x))\equiv\forall x;\sim P(x)$$

مثال: نقیض گزاره " بعضی از رسانه ها حقیقت را وارونه جلوه می دهند" کدام است؟

1)بعضی از رسانه ها حقیقت را وارونه جلوه نمی دهند.

2)همه رسانه ها حقیقت را وارونه جلوه می دهند.

3)همه رسانه ها حقیقت را وارونه جلوه نمی دهند.

4)این طور نیست که هیچ رسانه ای حقیقت را وارونه جلوه ندهد.

مثال: نقیض گزاره های سوری زیر را بنویسید:

الف) هر آسیایی ، ایرانی است.

ب) به ازای هر عدد صحیح x اگر x فرد باشد آنگاه $3x+1$ زوج است.

ج) $\forall x \in (0,+\infty); x+\frac{1}{x} \geq 2$

د) $\exists x \in Z; |x|+1 \leq 0$

مجموعه مدارس سرای دانش (واحد فلسطین) **نام دبیر: لیلا رستگاریان** **شماره جلسه:** **نام درس: آمار و احتمال** **پایه: یازدهم ریاضی** **نام پشتیبان: خانم محمدی** **تاریخ جلسه: / /1401**	**مبحث** **مجموعه – زیرمجموعه** **صفحه کتاب درسی** **19 الی 25**

درس دوم

مجموعه – زیر مجموعه

مجموعه ها: در سال های گذشته با مفهوم مجموعه آشنا شدید. و نمایش مختلف مجموعه ها را آموختید. به عنوان مثال: مجموعه‌ی اعداد اول یک رقمی را به این صورت با نمایش اعضا می توان نشان داد: $A=\{۲,۳,۵,۷\}$

یا با گزاره نما به این صورت نشان داد: $A=\{x\in P \mid x<۱۰\}$

به هر شیء مجموعه یک عضو یا عنصر آن مجموعه می گوییم.

تعلق: اگر x عضو مجموعه A باشد، می نویسیم: $x\in A$ و اگر x عضو مجموعه ی A نباشد می نویسیم $x\notin A$

مثال: هر یک از مجموعه های زیر را با استفاده از گزاره نما بنویسید:

الف) $A=\{۱,۴,۹,۱۶,...\}$

ب) $B=\{۳,۶,۹,۱۲,...\}$

ج) $C=\left\{۰,\frac{۱}{۲},\frac{۲}{۳},\frac{۳}{۴},...\right\}$

د) $D=\{-۵,-۴,...,۲,۳\}$

مثال: مجموعه های زیر را با نوشتن اعضای آن ها مشخص کنید.

الف) $A=\{x\in \mathbb{Z} \mid |x|\leq ۲\}$

ب) $B=\{m\in \mathbb{Z} \mid m^{۳}=m\}$

ج) $C=\{m\in \mathbb{Z} \mid m^{۳}+۳m=۴m^{۲}\}$

نکته: تکرار اعضا یا عوض کردن ترتیب آن ها تأثیری در تعداد اعضای مجموعه ندارد.

زیر مجموعه:

تعریف: فرض کنید A و B دو مجموعه باشند. در این صورت مجموعه ی A را یک زیرمجموعه از B می نامیم، هرگاه هر عضو A ، عضوی از B باشد.

نمایش ریاضی A زیر مجموعه B است به صورت $A \subseteq B$ می باشد.

اگر عضوی در A باشد و در B نباشد در این صورت A زیرمجموعه B نیست و می نویسیم $A \not\subseteq B$

نمایش زیرمجموعه بودن با استفاده از نمادهای ریاضی:

$$B \subseteq A \Leftrightarrow \forall x \in B \Rightarrow x \in A$$

نمایش ریاضی زیر مجموعه نبودن:

$$B \not\subseteq A \Leftrightarrow \exists x \in B \wedge x \notin A$$

دو مجموعه مساوی: دو مجموعه ی A و B با مرجع U هنگامی باهم مساوی اند که هر عضو A ، عضوی از B باشد و هر عضو B ، عضوی از A باشد. به عبارت دیگر $A \subseteq B$ و $B \subseteq A$ باشد. با زبان ریاضی تساوی دو مجموعه را به این صورت نمایش می دهیم:

$$A = B \Leftrightarrow (A \subseteq B \wedge B \subseteq A)$$

نکته: برای سه مجموعه ی A و B و C اگر داشته باشیم $A \subseteq B$ و $B \subseteq C$ ، آن گاه داریم $A \subseteq C$. در واقع $A \subseteq B$ یعنی هر عضو A در B هست و $B \not\subseteq C$ یعنی هر عضو B در C هست. پس هر عضو A در C هم هست یعنی $A \subseteq C$

تعداد زیرمجموعه های یک مجموعه:

«اگر A یک مجموعه ی n عضوی باشد، آن گاه تعداد زیرمجموعه های A برابر با ۲^n می باشد.»

درستی این رابطه را بررسی کنید.

نکته: مجموعه همه زیر مجموعه های A ، **مجموعه ی توانی** A نامیده می شود و آن را با $P(A)$ نمایش می دهیم. اگر مجموعه A ، n عضو داشته باشد. مجموعه ی $P(A)$ ، ۲^n عضو دارد.

مجموعه های متناهی و نامتناهی: مجموعه ای که تعداد اعضای آن یک عدد حسابی باشد را مجموعه متناهی می نامیم و مجموعه ای که متناهی نباشد را مجموعه نامتناهی می گوییم.

مثال: اگر سه عضو از مجموعه ی متناهی A را حذف کنیم تعداد زیر مجموعه های آن 56 تا کمتر می شود. مجموعه ی A چند عضو دارد؟

مثال: تعداد زیرمجموعه های یک مجموعه $(2n+1)$ عضوی، 96 تا بیشتر از یک مجموعه ی $(2n-1)$ عضوی است. در این صورت n کدام است؟

نکته: تعداد زیرمجموعه های K عضوی یک مجموعه ی n عضوی برابر است با: $\binom{n}{K}$

$$\binom{n}{K}=\frac{n!}{(n-k)!k!}$$

مثال: مجموعه ی $A=\{1,2,3,...,10\}$ چند زیرمجموعه ی 3 عضوی دارد؟ این مجموعه چند زیرمجموعه ی 3 عضوی دارد به طوری که دقیقاً یکی از اعضای آن اول باشد؟

افراز یک مجموعه:

هرگاه مجموعه ای مانند A داشته باشیم که $A\neq\varnothing$ و زیرمجموعه هایی از A مانند $A_1,A_2,A_3,...,A_n$ داشته باشیم که اشتراک دو به دوی این زیرمجموعه ها $\varnothing$ باشد و هیچ کدام از این زیرمجموعه ها تهی نباشد و اجتماع همه این زیرمجموعه ها برابر A باشد، می گوییم: «مجموعه ی A به n زیر مجموعه $A_1,A_2,...,A_n$ **افراز** شده است.

پس برای افراز مجموعه A به n زیرمجموعه ی $A_1,A_2,...,A_n$ باید سه شرط روبرو برقرار باشد:

1) $\forall 1\leq i\leq n; A_i\neq\varnothing$

2) $\forall i,j (i\neq j); A_i\cap A_j=\varnothing$

3) $A_1\cup A_2\cup ...A_n=\bigcup_{i=1}^{n}A_i=A$

مثال: مجموعه اعداد صحیح را به سه زیر مجموعه افراز کنید.

مثال: مجموعه ی $\{a,b,c,d\}$ را به چند طریق می توان به 3 زیرمجموعه افراز کرد؟

مثال: تعداد افرازهای یک مجموعه 4 عضوی را بنویسید.

نکته: فرض کنید A را به یک زیرمجموعه ی n_1 عضوی، یک زیرمجموعه ی n_2 عضوی و ... افراز کرد، برابر است با: $\binom{n}{n_1}\times\binom{n-n_1}{n_2}\times\ldots$

تذکر: اگر K زیر مجموعه با تعداد اعضای یکسان در افراز وجود داشته باشد، حاصل را به $K!$ تقسیم می کنیم.

مثال: یک مجموعه ی 5 عضوی را به چند طریق می توان به 3 زیر مجموعه افراز کرد؟

مثال: یک مجموعه 7 عضوی را به چند طریق می توان به دو مجموعه 2 عضوی و یک مجموعه سه عضوی افراز کرد؟

ویژگی های مهم مجموعه ها:

1) $A\subseteq A$

2) $\varnothing\subseteq A$

3) $A\subseteq u$

4) $A\subseteq B, B\subseteq C\Rightarrow A\subseteq C$

5) $A\subseteq B\Leftrightarrow B'\subseteq A'$

6) $A\subseteq A\cup B$

7) $A\cap B\neq\varnothing\Rightarrow A-B\subseteq A, B-A\subseteq B$

8) $A\subseteq B\Rightarrow A-B=\varnothing$

9) $A\cap B\subseteq A$

10) $A\subseteq B\Rightarrow\begin{cases}A\cap C\subseteq B\cap C\\ A\cup C\subseteq B\cup C\end{cases}$

11) $A\subseteq B, C\subseteq D\Rightarrow\begin{cases}A\cup C\subseteq B\cup D\\ A\cap C\subseteq B\cap D\end{cases}$

12) $A\subseteq C, B\subseteq C\Rightarrow (A\cup B)\subseteq C$

اثبات چند ویژگی از ویژگی های مجموعه ها:

1) $A\subseteq B, B\subseteq C\Rightarrow A\subseteq C$

اثبات:

$$\forall x؛x\in A\xrightarrow{A\subseteq B}x\in B\xrightarrow{B\subseteq C}x\in C$$

در نتیجه داریم:

$$\forall x؛x\in A\Rightarrow x\in C$$
$$\Rightarrow A\subseteq C$$

(2

$$A \subseteq B \Rightarrow B' \subseteq A'$$

قبل از اثبات این رابطه ابتدا متمم مجموعه را به زبان یاضی بیان می کنیم:

$$A' = \{x \in U | x \notin A\}$$

یعنی اگر $x \in A$ آن گاه $x \notin A'$ یا اگر $x \in A'$ آن گاه $x \notin A$

اثبات: $\forall x؛(x \in B' \Rightarrow x \notin B \xrightarrow{A \subseteq B} x \notin A \Rightarrow x \in A')$

در نتیجه داریم: $\forall x؛(x \in B' \Rightarrow x \notin A') \Rightarrow B' \subseteq A'$

3) برای هر مجموعه ی دلخواه A داریم $\varnothing \subseteq A$ (تهی زیرمجموعه هر مجموعه ای است)

اثبات: باید نشان دهیم ارزش گزاره ی $\forall x؛(x \in \varnothing \Rightarrow x \in A)$ همواره درست است.

چون در این گزاره $x \in \varnothing$ گزاره ای همواره نادرست است، پس گزاره ی بالا به انتفای مقدم همواره درست است.

(4

$$A \subseteq A \cup B$$

اثبات: $\forall x؛(x \in A \Rightarrow x \in A \vee x \in B) \Rightarrow x \in A \cup B$

در نتیجه داریم: $\forall x؛(x \in A \Rightarrow x \in A \cup B) \Rightarrow A \subseteq A \cup B$

5) اگر $A \subseteq B, C \subseteq D$ آن گاه $A \cup C \subseteq B \cup D$

اثبات: می خواهیم نشان دهیم: $\forall x؛x \in A \cup C \Rightarrow x \in B \cup D$

$$x \in A \cup C \Rightarrow \begin{cases} x \in A \xrightarrow{A \subseteq B} x \in B \\ \vee \qquad\qquad\qquad \vee \\ x \in C \xrightarrow{C \subseteq D} x \in D \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{c} x \in B \vee x \in D \\ x \in B \cup D \end{array}$$

بنابراین داریم: $\forall x؛[x \in (A \cup C) \Rightarrow x \in (B \cup D)] \Rightarrow A \cup C \subseteq B \cup D$

6) اگر $B \subseteq C, A \subseteq C$ آن گاه $(A \cup B) \subseteq C$

اثبات:

$$\forall x؛[x \in A \cup B] \Rightarrow \begin{cases} x \in A \xrightarrow{A \subseteq C} x \in C \\ \qquad\qquad \vee \\ x \in B \xrightarrow{B \subseteq C} x \in C \end{cases} \Rightarrow x \in C$$

بنابراین داریم:

$\forall x ; x \in A \cup B \Rightarrow x \in C \Rightarrow (A \cup B) \subseteq C$

به طریق مشابه می توان دیگر ویژگی های مجموعه ها را هم اثبات کرد.

درس سوم

قوانین و اعمال بین مجموعه ها (جبر مجموعه ها)

یادآوری برخی قوانین در اعداد حقیقی

1) $\forall a,b,\in \mathbb{R};a+b=b+a$ خاصیت جابجایی

2) $\forall a,b,c\in \mathbb{R};\begin{cases} a+(b+c)=(a+b)+c \\ a\times (b\times c)=(a\times b)\times c \end{cases}$ خاصیت شرکت پذیری

خاصیت توزیع پذیری ضرب نسبت به جمع

3) $\forall a,b,c\in \mathbb{R};a\times (b+c)=(a\times b)+(a\times c)$

✓در درس اول نیز قوانینی مشابه همین قوانین، تحت عنوان قوانین گزاره ها بیان شد.

✓حال در این درس بررسی می کنیم که برای اجتماع و اشتراک مجموعه ها نیز قوانینی مشابه همین قوانین وجود دارد که قابل اثبات هستند.

✓برای مشاهده درستی این خواص در مجموعه ها می توان از نمودار ون کمک گرفت.

ابتدا درستی این روابط رای روی نمودار ون مشاهده می کنیم و سپس توسط روش عضوگیری دلخواه درستی آن را اثبات می کنیم.

1) خاصیت جابجایی:

$A\cap B=B\cap A \quad , \quad A\cup B=B\cup A$

2) خاصیت شرکت پذیری:

$A\cap (B\cap C)=(A\cap B)\cap C \quad , \quad A\cup (B\cup C)=(A\cup B)\cup C$

نمودار ون:

اثبات:

3) خاصیت توزیع پذیری اجتماع نسبت به اشتراک:

$$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$$

خاصیت توزیع پذیری اشتراک نسبت به اجتماع:

$$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$$

نمودار ون:

اثبات:

علاوه بر این تساوی ها، تساوی های دیگری نیز برای مجموعه ها برقرار است مانند:

1) $A\cup A'=U$ 2) $A\cap A'=\varnothing$

3) $A\cup U=U$ 4) $A\cap U=A$

حال با استفاده از این خواص و تساوی ها، می توان قضایا و تساوی های زیادی را روی مجموعه ها اثبات کرد.

مثال: ثابت کنید.

الف) $(A\cup B)\cap(B'\cup A)=A$

ب) $(C\cap A)\cup(A'\cap C)=C$

ج) $A\cup(B\cup A')=U$

د) $A-B=A\cap B'$

هـ) $(B'\cap A')\cap B=\varnothing$

و) $(A\cap B)\cup(B'\cap A)=A$

قضیه: برای هر دو مجموعه ی دلخواه A و B از مجموعه ی مرجع U داریم:

الف) $A \subseteq B \Leftrightarrow A \cup B = B$

ب) $A \subseteq B \Leftrightarrow A \cap B = A$

اثبات:

4) قوانین جذب (همپوشانی):

الف) $A \cup (A \cap B) = A$

ب) $A \cap (A \cup B) = B$

نمودار ون:

اثبات:

مثال: حاصل عبارت روبرو کدام است؟

$$(A \cap B) \cup ((B \cup C) \cap [(A \cup B) \cap B])$$

1) A 2) $A \cup B$ 3) B 4) $A' \cup B$

مثال: درستی تساوی های زیررا بررسی کنید.

الف) $A - B = B' - A'$

ب) $(A - B) \cap (B - A) = \varnothing$

ج) $(A - B) \cup (A \cap B) \cup (B - A) = A \cup B$

د) $(C \subseteq A) \wedge (C \subseteq A') \Rightarrow C = \varnothing$

هـ) $(A \cup B) - C = (A - C) \cup (B - C)$

5) قوانین دمورگان:

الف) $(A \cup B)' = A' \cap B'$

ب) $(A \cap B)' = A' \cup B'$

درستی این قوانین را با استفاده از روش عضوگیری دلخواه می توان نشان داد.

مثال: عبارت $\left[(A \cup (A \cup B)')\cap B\right] \cup A$ را ساده کنید.

مثال: متمم مجموعه $[A-(A-B)] \cup (A \cap B)'$ را به دست آورید.

مثال: (کتاب درسی): درستی تساوی های زیر را بررسی کنید.

الف) $A - (B - C) = (A - B) - C$

ب) $A - (B \cup C) = (A - B) \cap (A - C)$

ج) $A \cap (B - C) = (A \cap B) - (A \cap C)$

د) اگر $A \cup B = A \cap B$ آن گاه $A = B$

ضرب دکارتی بین دو مجموعه:

حاصل ضرب دکارتی مجموعه ی A در مجموعه B که به صورت $A\times B$ نشان می دهیم، مجموعه ای است از همه زوج های مرتب (x,y) به طوری که x عضوی از A و y عضوی از B باشد یعنی:

$$A\times B=\{(x,y)|x\in A\wedge y\in B\}$$

*حاصل ضرب دکارتی مجموعه A در خودش را با $A^{۲}$ نشان می دهیم.

مثال: اگر $B=\{۱,۲\}, A=\{۲,۳,۴\}$ باشد. در این صورت $A\times B$ و $B^{۲}$ را تشکیل دهید و نمودار مختصاتی هر یک از آن ها را رسم کنید.

نکته: در ضرب دکارتی خاصیت جابجایی وجود **ندارد**.یعنی $A\times B\neq B\times A$

نکته: در ضرب دکارتی $A\times B$ اگر مجموعه A، m عضو و مجموعه ی B، K عضو داشته باشد، آن گاه مجموعه $A\times B$، mk عضو دارد یعنی:

$$\left.\begin{matrix} n(A)=m \\ n(B)=k \end{matrix}\right\}\Rightarrow n(A\times B)=mk \qquad \boxed{n(A\times B)=|A\times B|}$$

مثال: با توجه به مجموعه های داده شده، نمودار هر یک از حاصل ضرب های $A\times B$ و $B\times A$ را رسم کنید.

الف) $A=\{۱,۴\}, B=\{۲,۶\}$

ب) $A=[۱,۵], B=[۲,۷]$

ج) $A=\mathbb{R}, B=\{-۲,۴\}$

ویژگی های مهم ضرب دکارتی:

1) $A\times\varnothing=\varnothing\times A=\varnothing$

2) $A\times B=B\times A\Rightarrow A=\varnothing\vee B=\varnothing\vee A=B$

3) ضرب دکارتی روی اجتماع، اشتراک و تفاضل دو مجموعه توزیع پذیر است.

الف) $A\times(B\cup C)=(A\times B)\cup(A\times C)$

ب) $A\times(B\cap C)=(A\times B)\cap(A\times C)$

ج) $A\times(B-C)=(A\times B)-(A\times C)$

4) اگر D,C,B,A چهار مجموعه غیر تهی باشند، داریم:

الف) $A=C,B=D\Leftrightarrow A\times B=C\times D$

ب) $A\subseteq C,B\subseteq D\Leftrightarrow A\times B\subseteq C\times D$

5)

$|(A\times B)\cap(B\times A)|=|A\cap B|^{۲}$

$|(A\times B)\cup(B\times A)|=۲|A||B|-|A\cap B|^{۲}$

$|(A\times B)-(B\times A)|=|A||B|-|A\cap B|^{۲}$

$|B^2-A^2|=|B|^2-|B\cap A|^2$

فصل دوم: احتمال

درس اول: مبانی احتمال

آمار و احتمال به چه کار می آیند؟

1- تعداد افراد با تحصیلات کمتر از دیپلم در شهر کرمان 580350 نفر است.

2- درآمد کارمندان یک شرکت چقدر است؟

3- تعداد دانش آموزان پایه یازدهم مدرسه ی ابرار که معدل بالای 19 دارند، 36 نفر است.

4- می دانیم 50 پرتقال در یک جعبه که 100 پرتقال دارد خراب می باشند. چند پرتقال از جعبه برداریم تا مطمئن شویم حداقل 1 پرتقال خراب است؟

5- امکان ظاهر شدن 2 رو در پرتاپ 5 سکه

6- از 15 کتاب موجود در کتابخانه 4 تا علمی، 5 تا داستانی و 6 تا تاریخی است. کتابی را به تصادف انتخاب می کنیم. احتمال این که این کتاب داستانی باشد، چقدر است؟

همان طور که ملاحظه می شود در سه مثال اول ما به بررسی یک جامعه می پردازیم و با استفاده از نمونه ها و داده ها و اطلاعات جمع آوری شده، نسبت به جامعه ی مورد نظر آگاهی و شناخت پیدا می کنیم، اما در مورد سه مثال دوم جامعه ما معلوم است و ما جامعه را با جزئیات می شناسیم و می خواهیم بدانیم نمونه هایی از آن جامعه چگونه خواهند بود. سه مثال اول نمونه هایی از کاربرد **علم آمار** می باشد و سه مثال دوم نمونه هایی از کاربرد **علم احتمال** می باشد.

به طور خلاصه می توان گفت: علم احتمال به بررسی یک نمونه ی نامعلوم از یک جامعه ی معلوم می پردازد و علم آمار به شناختن جامعه ی نامعلوم با استفاده از نمونه های جمع آوری شده ی معلوم می پردازد.

معمولاً در مسائل احتمال از عباراتی مانند «احتمال آن که» ، «امکان» ، «چقدر احتمال دارد ....» و ... استفاده می شود. و در مسائل آمار از عباراتی مانند «تعداد» ، «فراوانی» ، «میانگین» و ... استفاده می شود.

نگاهی گذرا بر علم احتمال:

به این جملات دقت کنید: «فردا به احتمال زیاد باران می بارد» ، «تیم پرسپولیس به احتمال 99 درصد قهرمان می شود» ، «مریم برای قبولی در المپیاد ریاضی شانس زیادی دارد» و ... همان طور که ملاحظه می شود در همه ی این مسائل به بیان یک حس کیفی پرداخته ایم و هرچند در برخی از آن ها از اعداد و ارقام هم استفاده کنیم ولی این ارقام و اعداد، واقعی نیستند. به این گونه مسائل که در آن ها احتمال بیان می شود ولی در عین حال این احتمال-ها کیفی می باشند، **احتمال کیفی** می گوییم. نمونه های بسیاری از آن را در زندگی روزمره مردم می بینیم، هر چند مبنای علمی ندارد.

علم احتمال این احتمال های کیفی را کمّی می کند و به آن ها عدد نسبت می دهد تا در چهارچوب علم ریاضی قرار گیرد و بتوان به کمک محاسبات ریاضی به نتایجی روشن تر و دقیق تر و قابل اتکا رسید.

مثال: برق کاری نیاز به یک لامپ سالم دارد. او دو جعبه لامپ دارد که در یکی از آن ها 35 لامپ و در دیگری 7 لامپ وجود دارد. اگر در جعبه ی اول 9 لامپ معیوب و در جعبه ی دوم 2 لامپ معیوب وجود داشته باشد، بهتر است برق کار از کدام جعبه لامپ بردارد؟ حال اگر برق کار به دو لامپ نیاز داشته باشد بهتر است از کدام جعبه دو لامپ بردارد؟

گذری بر مطالب گذشته:

1- آزمایش (پدیده) تصادفی: آزمایشی است که نتیجه آن را قبل از وقوع نمی توان به طور قطع مشخص کرد. مانند: پرتاپ تاس یا سکه

2- فضای نمونه ای: **مجموعه ی** تمام نتایج ممکن یک پدیده تصادفی را فضای نمونه ای می گویند. و آن را با S نشان می دهند. مثلاً در پرتاب سکه
S={پشت ، رو }

3- برآمد: به هر عضو فضای نمونه ای یک «**برآمد**» می گویند.

4- پیشامد: به هر **زیر مجموعه** از فضای نمونه ای یک «**پیشامد**» می گویند.

اگر فضای نمونه ای n عضو داشته باشد، برای آن می توان 2^n پیشامد تعریف کرد.

مثال: سه کارت داریم که روی آن ها حروف c,b,a نوشته شده است. فضای نمونه ای انتخاب دو کارت از این سه کارت را بنویسید.

مثال: فضای نمونه ای حاصل از پرتاب یک سکه و یک تاس را بنویسید؟

پیشامد ظاهر شدن عددی مضرب 3 روی تاس را بنویسید؟

5- اعمال روی پیشامدها: روی پیشامدها اعمالی مانند اجتماع، اشتراک، تفاضل و متمم را می توان انجام داد.

نکته: پیشامدی مانند A وقتی رخ می دهد که یکی از اعضای آن رخ داده باشد. مثلاً در پرتاب یک تاس با ظاهر شدن هر کدام از اعداد 2، 4 یا 6 پیشامد $A=\{۲,۴,۶\}$ رخ داده است.

نکته: با توجه به مفهوم «**رخ دادن یک پیشامد**»، اگر $A_۱, A_۲$ دو پیشامد از فضای نمونه ای S باشند، آن گاه:

الف) اگر $A_۱$ زیر مجموعه ی $A_۲$ باشد، رخ دادن $A_۱$ ، رخ دادن $A_۲$ را نتیجه می دهد

ب) رخ دادن پیشامد $A_۱ \cap A_۲$ ، یعنی هر دو پیشامد $A_۱, A_۲$ رخ داده است.

ج) رخ دادن پیشامد $A_۱ \cup A_۲$ ، یعنی حداقل یکی از دو پیشامد $A_۱$ یا $A_۲$ رخ دهد.

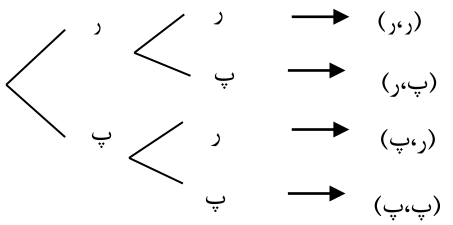
د) رخ دادن پیشامد $A_۱ - A_۲$ یعنی $A_۱$ رخ داده ولی $A_۲$ رخ نداده است یا به عبارت دیگر **فقط** $A_۱$ رخ داده است.

هـ) پیشامد A' (متمم A) یعنی A رخ نداده است.

مثال: دو تاس را با هم پرتاب می کنیم، اگر A پیشامد ظاهر شدن اعداد متمایز باشد، A' را بنویسید.

تشخیص فضای نمونه ای: برای تشخیص فضای نمونه ای بایستی تمامی حالت های ممکن را در نظر بگیریم. برای این منظور می توان از نمودار درختی استفاده کرد.

مثلاً حالت های پرتاب دو سکه



نکته: اگر فضای نمونه ای دو آزمایش به ترتیب $S_۱, S_۲$ باشد، آن گاه فضای نمونه ای مناسب برای آزمایشی که شامل هر دو آزمایش باشد، برابر است با ضرب دکارتی این دو آزمایش یعنی $S_۱ \times S_۲$. و تعداد عضوهای آن برابر است با:

$$n(S) = n(S_۱) \times n(S_۲)$$

مثال: فضای نمونه ای حاصل از پرتاب دو تاس به صورت زیر است:

$$S = \{۱,۲,۳,...,۶\} \times \{۱,۲,۳,...,۶\} = \{(۱,۱)(۱,۲)(۱,۳)...(۶,۶)\}$$

تعداد اعضای آن برابر است با: $n(S) = ۶ \times ۶ = ۳۶$

نکته: اگر $S_۱, S_۲, ..., S_n$ فضای نمونه ای n آزمایش باشند، آن گاه فضای نمونه ای مناسب برای آزمایشی که شامل همه ی آزمایش ها باشد عبارتست از: $S_۱ \times S_۲ \times ... \times S_n$

مثال: در پرتاب یک تاس، اگر عدد زوج بیاید، سکه ای را دوبار پرتاب می کنیم و اگر فرد بیاید سکه را 3 بار پرتاب می کنیم، فضای نمونه ای این آزمایش عبارتست از:

$$S = \{۲,۴,۶\} \times \{\text{ر،پ}\} \times \{\text{ر،پ}\} \cup \{۱,۳,۵\} \times \{\text{ر،پ}\} \times \{\text{ر،پ}\} \times \{\text{ر،پ}\}$$

اصول احتمال: برای محاسبه ی احتمال پیشامدها قوانینی وجود دارد که به آن ها اصول احتمال می گویند.

1- برای هر پیشامد A ، احتمال رخ دادن آن را با $P(A)$ نشان می دهند. $P(A)$ همیشه عددی است بین صفر و یک $[۰,۱]$

2- $P(S) = ۱$

3- برای هر دو پیشامد ناسازگار B, A $(A \cap B = \varnothing)$ داریم:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) \qquad P(A \cap B) = ۰$$

نکته: در یک فضای نمونه ای برآمدهای مختلف ممکن است احتمال برابر نداشته باشند.

مثال: ظرفی حاوی 3 مهره ی سفید و 4 مهره ی سیاه است. دو مهره به طور هم زمان خارج می کنیم. می توان فضای نمونه را این گونه در نظر گرفت:

S={دو مهره غیر هم رنگ و دو مهره ی هم رنگ}

آیا می توان گفت احتمال هر کدام 50 درصد است؟

قضایای احتمال:

1) $P(A') = ۱ - P(A) - ۱$

2) $P(\varnothing) = ۰$

3) اگر A و B و C پیشامدهایی دو به دو ناسازگار باشند آن گاه:

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C)$$

4) اگر $A_۱, A_۲, \ldots A_n$ پیشامدهایی دو به دو ناسازگار باشند آن گاه:

$$P(A_۱ \cup A_۲ \cup \ldots A_n) = P(A_۱) + P(A_۲) + \ldots + P(A_n)$$

5) اگر A و B دو پیشامد دلخواه باشند:

$$P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$$

6) اگر $A \subseteq B$ آن گاه:

الف) $P(A) \leq P(B)$

ب) $P(B - A) = P(B) - P(A)$

7) برای دو پیشامد دلخواه A و B داریم:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

8) برای سه پیشامد دلخواه A و B و C داریم:

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$$

اثبات قضایا:

درس دوم: احتمال غیر هم شانس

☑ به هر زیر مجموعه ی تک عضوی از فضای نمونه ای، یک **پیشامد ساده** می گوییم.

☑ اگر $\{a\}$ یک پیشامد ساده از فضای نمونه ای S باشد، احتمال وقوع $\{a\}$ را به جای $P\left(\{a\}\right)$ با $P(a)$ نشان می دهیم.

مثال: در پرتاب یک تاس که روی سه وجه آن عدد 1 و روی دو وجه آن عدد 2 و روی یک وجه آن عدد 3 حک شده است،

1) فضای نمونه ای را بنویسید.

2) احتمال آمدن عدد 1 چقدر است؟

3) احتمال آمدن اعداد 2 و 3 هر کدام چقدر است؟

4) مجموع احتمال تمام پیشامدهای ساده چقدر است؟

5) اگر پیشامد D مشاهده ی اعداد 1 و 2 باشد، $P(D)$ را به دست آورید و آن را با $P(۱)+P(۲)$ مقایسه کنید.

«هرگاه حداقل دو پیشامد ساده از فضای نمونه ای $S=\{S_۱,S_۲,...,S_n\}$ احتمال نابرابر داشته باشند، S را فضای نمونه ای با **احتمال غیر هم شانس** می گوییم.

ویژگی های احتمال غیر هم شانس:

در فضای نمونه ای متناهی با احتمال غیر هم شانس مانند $S=\{s_۱,s_۲,...,s_n\}$ ، اگر پیشامد $A=\{a_۱,a_۲,...,a_k\}$ را در نظر بگیریم، همواره داریم:

1) $۰\le P(A)\le ۱$

2) $P(S)=۱$

3) $P(A)=P(a_۱)+P(a_۲)+...+P(a_k)$

4) $P(S)=P(S_۱)+P(S_۲)+...+P(S_n)=۱$

مثال: در یک آزمایش تصادفی $S=\{x,y,z,t\}$ فضای نمونه ای است. اگر $P(\{y,z\})=\frac{۳}{۵}$, $P(x)=\frac{۱}{۵}$, $P(t)=\frac{۱}{۲}P(y)$ باشد، در این صورت احتمال وقوع هر یک از پیشامدهای $\{x,t\},\{z\}$ را بیابید؟

مثال: تاسی طوری ساخته شده است که احتمال رو شدن یک عدد دو برابر احتمال رو شدن عدد بعدی است. احتمال این که عدد 5 یا 6 بیاید چقدر است؟

درس سوم: احتمال شرطی

به مثال های زیر توجه کنید:

مثال 1: در پرتاب دو تاس می دانیم مجموع دو عدد رو شده کمتر از 6 است. با چه احتمالی دست کم یکی از تاس ها 1 آمده است؟

مثال 2: برای شرکت در آزمون سمپاد بایستی معدل بالای 19 داشته باشید. مدرسه ای 3 کلاس نهم دارد. (1-9 ، 2-9 ، 3-9) هر یک از این کلاس‌ها به ترتیب 32، 27 و 30 دانش آموز دارد. در هر یک از این کلاس ها به ترتیب 12، 10 و 14 نفر معدل بالای 19 دارند. دانش آموزی را به تصادف انتخاب می کنیم، اگر بدانیم این دانش آموز عضو کلاس (1-9) است، چقدر احتمال دارد که معدل بالای 19 داشته باشد؟

همان طور که در درس قبل ملاحظه کردید برای به دست آوردن احتمال وقوع پیشامد A از فضای نمونه ای S از رابطه ی $\frac{n(A)}{n(S)}$ استفاده می کنیم.
اما در دو مثال بالا ملاحظه می شود که فضای نمونه ای ما کاهش یافته است. به عبارتی بایستی S را کنار گذاشته و از فضای نمونه ای مانند B استفاده کنیم. B را اصطلاحاً **فضای نمونه ای کاهش یافته (فضای نمونه ای جدید)** می نامند.

احتمال شرطی: هرگاه در یک آزمایش تصادفی با فضای نمونه ای هم شانس S ، وقوع یک پیشامد مانند A مشروط به وقوع پیشامد دیگری مانند B باشد و احتمال وقوع پیشامد A را بخواهیم، با احتمال شرطی مواجهیم. در این جا برای محاسبه احتمال وقوع پیشامد A باید فضای نمونه ای S را کنار گذاشته و پیشامد B را به عنوان فضای نمونه ای جدید در نظر بگیریم و احتمال A را در این فضای نمونه ای جدید محاسبه کنیم.

☑ احتمال شرطی را با $P(A|B)$ نشان می دهند و مفهوم آن این است:
«احتمال وقوع پیشامد A به شرط آن پیشامد B رخ داده باشد»

محاسبه ی احتمال شرطی:

اگر A و B دو پیشامد در فضای نمونه ای S باشند و $P(B) \neq ۰$ ، آن گاه احتمال وقوع A به شرطی که بدانیم B رخ داده است، به صورت زیر محاسبه می شود:

$$P(A|B)=\frac{n(A\cap B)}{n(B)}$$

اگر صورت و مخرج رابطه ی بالا را بر $n(S)$ تقسیم کنیم، نتیجه می شود:

$$P(A|B)=\frac{\frac{n(A\cap B)}{n(S)}}{\frac{n(B)}{n(S)}}=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$$

در نتیجه احتمال A به شرط رخ دادن B برابر است با:

$$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}\qquad P(B)\neq ۰$$

نکته: اگر $P(B)=۰$ آن گاه هیچ پیشامدی به شرط B تعریف نمی شود.

نتایج حاصل از رابطه ی احتمال شرطی:

اگر A و B دو پیشامد با احتمال غیرصفر در S باشند آن گاه:

الف) اگر $A\subseteq B$ آن گاه:

$$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{P(A)}{P(B)}$$

ب) اگر $B\subseteq A$ آن گاه:

$$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{P(B)}{P(B)}$$

پ) اگر A' متمم A باشد، آن گاه:

$$P(A'|B)=\frac{P(A'\cap B)}{P(B)}=\frac{P(B-A)}{P(B)}=\frac{P(B)-P(A\cap B)}{P(B)}=۱-\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=۱-P(A|B)$$

در نتیجه داریم:

$$P(A'|B)=۱-P(A|B)$$

ت) اگر C پیشامدی با احتمال غیرصفر در S باشد. آن گاه:

$$P(A\cup B|C)=P(A|C)+P(B|C)-P(A\cap B|C)$$

* این رابطه مشابه رابطه ی $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$ است.

درستی این رابطه را نشان دهید.

مثال: دو تاس را پرتاپ می کنیم

الف) اگر بدانیم دست کم یک تاس 5 آمده است با چه احتمالی دو عدد رو شده متوالی اند؟

ب) اگر بدانیم حاصلضرب دو عدد رو شده $\frac{۴}{۱۱}$ دو رقمی است، با چه احتمالی دست کم یکی از تاس ها مضرب 3 است؟

مثال: از یک کیسه که در آن 5 مهره سفید، 3 مهره آبی و 2 مهره قرمز وجود دارد، یک مهره خارج می کنیم. اگر احتمال آبی بودن مهره $P(B)$ و احتمال قرمز بودن آن $P(R)$ باشد:

الف) $\frac{P(B)}{P(R)}$ را حساب کنید.

ب) اگر بدانیم توپ خارج شده سفید نیست، $\frac{P(B)}{P(R)}$ را مجدد حساب کنید.

قانون ضرب احتمال:

تعریف احتمال شرطی با یک طرفین وسطین ساده به فرمول زیر تبدیل می شود که به آن قانون ضرب احتمال می گوییم.

$$P(A\cap B)=P(A).P(B|A) \quad ؛ \quad P(A)>۰$$

مثال: فرض کنید در جعبه ای 3 سیب، 4 پرتقال و 5 لیمو قرار دارد. از جعبه دو میوه به ترتیب و بدون جایگذاری برمی داریم. احتمال این که میوه ی اول پرتقال و میوه ی دوم لیمو باشد، چقدر است؟

حل: طبق فرمول برای حل این سؤال بایستی احتمال این که میوه ی اول پرتقال باشد را در احتمال این که «میوه دوم لیمو باشد به شرط این که میوه اول پرتقال درآمده باشد»، ضرب می کنیم.

$$\begin{matrix} P(A)=\frac{۴}{۱۲} \\ P(B|A)=\frac{۵}{۱۱} \end{matrix} \Rightarrow P(A\cap B)=P(A)\times P(B|A)=\frac{۴}{۱۲}\times\frac{۵}{۱۱}=\frac{۵}{۳۳}$$

نکته: برای سه پیشامد A و B و C با احتمال غیرصفر، قانون ضرب احتمال را می توان این گونه نوشت:

$$P(A\cap B\cap C)=P(A).P(B|A).P(C|A\cap B)$$

اثبات:

$$P((A\cap B)\cap C)=P(A\cap B)\times P(C|A\cap B)=P(A).P(B|A).P(C|A\cap B)$$

❋ $P(C|A\cap B)$ یعنی احتمال رخ دادن پیشامد C به شرط آن که A و B هر دو اتفاق افتاده باشد.

مثال: در مثال قبل احتمال این که میوه ی اول پرتقال، میوه دوم لیمو و میوه ی سوم سیب باشد چقدر است؟

$$P(A\cap B\cap C)=P(A)\times P(B|A)\times P(C|A\cap B)$$
$$=\frac{۴}{۱۲}\times\frac{۵}{۱۱}\times\frac{۳}{۱۰}=\frac{۱}{۲۲}$$

مثال: یک دانش آموز در کنکورهای آزمایشی اگر روحیه خوبی داشته باشد به احتمال 80 درصد، تراز بالای 5000 می آورد و اگر روحیه اش ضعیف باشد، به احتمال 50 درصد تراز بالای 5000 می آورد. به علاوه اگر در یک کنکور تراز بالای 5000 بیاورد برای آزمون بعد روحیه ی خوبی دارد و اگر نیاورد روحیه اش ضعیف می شود. اگر دانش آموز ابتدا روحیه خوبی داشته باشد، احتمال این که او از سه آزمون متوالی دقیقاً در دوتای آخر تراز بالای 5000 بیاورد، چقدر است؟

احتمال این که در آزمون اول و سوم تراز بالای 5000 بیاورد، چقدر است؟

مثال: در کیسه ای 4 مهره ی قرمز و 3 مهره ی آبی وجود دارد. به تصادف یک مهره از کیسه خارج کرده و با مشاهده ی رنگ آن را کنار می گذاریم و سپس دو مهره خارج می کنیم. احتمال این که سه مهره ی انتخاب شده در دو مرحلهقرمز باشند، کدام است؟
(مسئله انتخاب بدون جایگذاری)

مثال: در کیسه ای 4 مهره ی قرمز و 5 مهره ی سفید وجود دارد. اگر به تصادف یک مهره از کیسه خارج کنیم و پس از مشاهده ی رنگ آن را به کیسه برگردانیم و سپس دو مهره خارج کنیم، احتمال این که هر سه مهره انتخاب شده در دو مرحله سفید باشند، کدام است؟ (مسئله انتخاب با جایگذاری)

مثال: در ظرفی 4 مهره سفید و 3 مهره سیاه است . دو مهره از ظرف بدون رویت خارج می کنیم، از 5 مهره باقیمانده یک مهره خارج می کنیم. با کدام احتمال این مهره سفید است؟

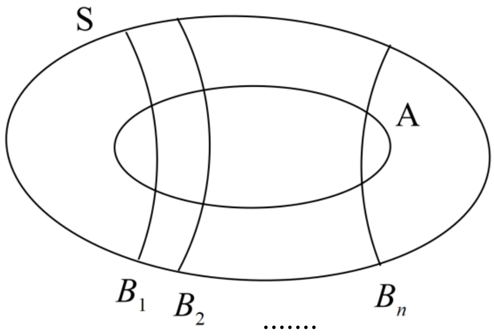
قانون احتمال کل:

اگر فضای نمونه ای S توسط پیشامدهای $B_1, B_2, \dots, B_n$ با احتمال های غیرصفر افراز شده است و A پیشامدی در S باشد، آن گاه احتمال وقوع پیشامد A برابر است با:

$$P(A) = P(A \cap B_1) + P(A \cap B_2) + P(A \cap B_3) + \dots + P(A \cap B_n)$$

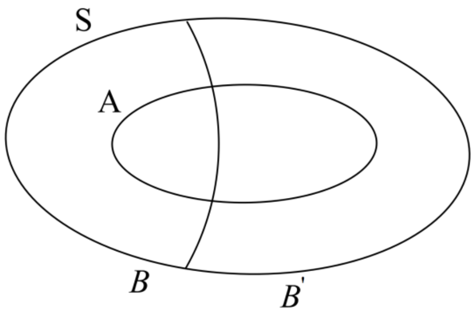
$$= P(B_1).P(A|B_1) + P(B_2).P(A|B_2) + P(B_3).P(A|B_3) + \dots + P(B_n).P(A|B_n) = \sum_{i=1}^{n} P(B_i).P(A|B_i)$$

قانون احتمال کل را روی نمودار ون به این صورت می توان نشان داد.



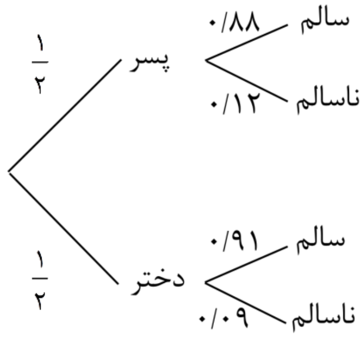
نکته: ساده ترین شکل قانون احتمال کل به این صورت می باشد که فضای نمونه ای S تنها به دو زیرمجموعه ی B_1, B_2 افراز شود. در این صورت $P(A)$ (A پیشامدی دلخواه در این فضای نمونه ای است) برابر است با:

$$P(A) = P(B).P(A|B) + P(B').P(A|B')$$



مثال: احتمال انتقال نوعی بیماری وراثتی از والدین به فرزند پسر $0/12$ و به فرزند دختر $0/09$ می باشد. والدینی که حامل این نوع بیماری هستند فرزندی به دنیا می آورند. مطلوبست احتمال آن که این فرزند سالم باشد.

حل: نمودار درختی این مثال را می توان این گونه نشان داد:



حال با توجه به نمودار درختی و فرمول احتمال کل داریم:

$$P(A)=P(B).P(A|B)+P(B').P(A|B')$$

$$P(A)=\frac{۱}{۲}\times\frac{۸۸}{۱۰۰}+\frac{۱}{۲}\times\frac{۹۱}{۱۰۰}=۰/۸۹۵$$

$P(A)$: احتمال سالم بودن

$P(A|B)$: احتمال سالم بودن به شرط دختر بودن

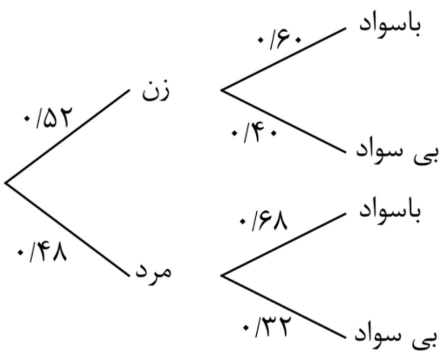
$P(A|B')$: احتمال سالم بودن به شرط پسر بودن

$P(B)$: دختر بودن

$P(B')$: پسر بودن

مثال: در یک دانشکده 55 درصد دانشجویان دختر و بقیه پسر هستند. می دانیم 60 درصد دختران و 64 درصد پسران تمام واحدها را پاس کرده اند. اگر یکی از دانشجویان را انتخاب کنیم، چند درصد احتمال دارد تمام واحدها را پاس کرده باشد؟

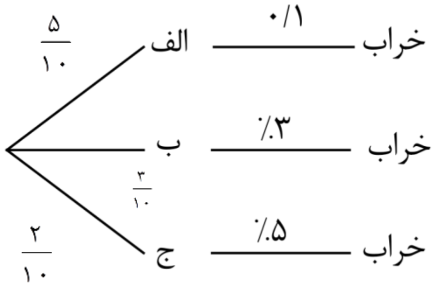
مثال: 52 درصد جمعیت کشوری را زنان و 48 درصد بقیه را مردان تشکیل می دهند. اگر 60 درصد زنان و 68 درصد مردان باسواد باشند، چند درصد افراد جامعه باسوادند؟



$$P(A)=۰/۵۲\times۰/۶+۰/۴۸\times۰/۶۸=۰/۶۳۸$$

یعنی 63/8 درصد افراد باسوادند.

مثال: میوه فروشی 10 صندوق سیب از 3 باغ مختلف خریده است. 5 صندوق از باغ (الف)، 3 صندوق از باغ (ب)، و 2 صندوق از باغ (ج)، احتمال آن که سیب های هر یک از این سه باغ خراب باشد، به ترتیب 10 درصد و 3 درصد و 5 درصد است. اگر سیبی از یکی از صندوق ها برداریم احتمال خراب بودن آن چقدر است؟



قانون بِیز:

توسط این قانون می توان $P(B|A)$ را برحسب $P(A|B)$ محاسبه کنیم. قانون بیز بیان می کند:

اگر A و B دو پیشامد با احتمال غیر صفر باشند آن گاه:

$$P(B|A) = \frac{P(B).P(A|B)}{P(A)}$$

اثبات:

$$P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{P(B).P(A|B)}{P(A)}$$ (با استفاده از قانون ضرب احتمال)

همچنین می توان به جای $P(A)$ در مخرج از قانون احتمال کل استفاده کنیم. در نتیجه داریم:

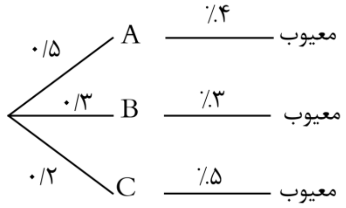
$$P(B|A) = \frac{P(B).P(A|B)}{P(B).P(A|B) + P(B')P(A|B')}$$

قانون بیز در حالت کلی به این صورت بیان می شود:

$$P(B_i|A) = \frac{P(B_i)P(A|B_i)}{P(A)} = \frac{P(B_i)P(A|B_i)}{\sum_{K=1}^{n} P(B_k)P(A|B_k)}$$

مثال: اگر در یک کارخانه سه ماشین A و B و C به ترتیب 50٪ ، 30٪ و 20٪ کالاها را تولید کنند و در میان تولیدات A و B و C به ترتیب 4٪، 3٪ و 5٪ کالای معیوب وجود داشته باشد. اگر کالایی را به تصادف انتخاب و مشاهده کنیم که معیوب است. چقدر احتمال دارد که تولید ماشین B باشد؟

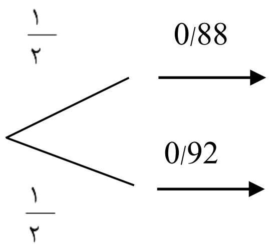
حل: ابتدا با استفاده از نمودار درختی احتمال معیوب بودن کالا را محاسبه می کنیم:



$$P(M)=۰/۵\times۰/۰۴+۰/۳\times۰/۰۳+۰/۲\times۰/۰۵=۰/۰۳۹$$

$$P(B|M)=\frac{P(B)P(M|B)}{P(M)}=\frac{۰/۳\times۰/۰۳}{۰/۰۳۹}\simeq۰/۲۳$$

مثال: احتمال انتقال نوعی بیماری ارثی از والدین به فرزند پسر 12 درصد و به فرزند دختر 8 درصد است. احتمال دختر بودن فرزندی که به دنیا بیاید و این بیماری را نداشته باشد، چقدر است؟



$$P(A)=\frac{۱}{۲}\times۰/۸۸+\frac{۱}{۲}\times۰/۹۲=۰/۹$$

سالم بودن

$$P(B|A)=\frac{\frac{۱}{۲}\times۰/۹۲}{۰/۹}=\frac{۳۳}{۴۵}$$

دختر

درس چهارم

پیشامدهای مستقل و وابسته

☑ پیشامدهای A و B را **مستقل** می گوییم، هرگاه وقوع یکی از آنها در احتمال وقوع دیگری تأثیری نداشته باشد. به عبارت دیگر A و B دو پیشامد مستقل هستند اگر و تنها اگر

$$\boxed{P(A\cap B)=P(A).P(B)}$$

به عنوان مثال در پرتاب یک تاس و یک سکه هم زمان، پیشامد رو آمدن سکه و عدد فرد آمدن تاس دو پیشامد مستقل هستند.

☑ دو پیشامدی که مستقل نباشند، **وابسته** نامیده می شوند.

☑ دو پیشامد A و B مستقل اند اگر و تنها اگر

$$\left.\begin{array}{ll} A\cap B\neq\varnothing & (۱)\\ P(A|B)=P(A) & (۲)\\ P(B|A)=P(B) & (۳)\end{array}\right\}$$

اگر دو پیشامد A و B مستقل باشند، آن گاه $\quad$ ۱) $P(A|B)=P(A)$

و با توجه به قانون احتمال شرطی داریم: $\quad$ ۲) $P(A|B)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(B)}$

با جایگذاری (1) در (2) خواهیم داشت:

$$P(A)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}\Rightarrow P(A\cap B)=P(A)\times P(B)$$

مثال: در پرتاب دو تاس، اگر A پیشامد مجموع 7 در برآمدهای دو تاس و B پیشامد مشاهده ی عدد 5 در تاس دوم باشد، مستقل بودن A و B را بررسی کنید.

مثال: اگر 75 درصد جامعه ای دارای چشم قهوه ای باشند و گروه خونی 40 درصد افراد جامعه O^+ باشد و یک نفر به طور تصادفی از بین آن ها انتخاب کنیم. احتمال این که این فرد دارای چشم قهوه ای یا گروه خونی O^+ باشد، چه قدر است؟

سه پیشامد مستقل: پیشامدهای A ، B و C را مستقل می گوییم، هرگاه چهار تساوی زیر برقرار باشند:

1) $P(A\cap B)=P(A).P(B)$

2) $P(A\cap C)=P(A).P(C)$

3) $P(B\cap C)=P(B).P(C)$

4) $P(A\cap B\cap C)=P(A).P(B).P(C)$

نکته: در حالت کلی پیشامد A_1 تا A_n را مستقل می گوییم هرگاه احتمال اشتراک هر تعداد از این پیشامدها با حاصل ضرب احتمال آن ها برابر باشد.

مثال: دو سکه و یک تاس را باهم پرتاب می کنیم. احتمال آن که سکه ها رو و تاس عدد 5 بیاید، چقدر است؟

مثال: اگر احتمال قبولی A و B و C در امتحان ریاضی پایان ترم به ترتیب $\frac{۱}{۳},\frac{۳}{۴},\frac{۳}{۵}$ باشد، احتمال آن که فقط یکی از سه نفر قبول شود، چقدر است؟

نکته: اگر A و B دو پیشامد مستقل از هم باشند، آن گاه پیشامدهای B,A' و نیز A',B' مستقل از یکدیگرند. یعنی:

$$P(A\cap B)=P(A).P(B)\Rightarrow\begin{cases}P(A'\cap B)=P(A').P(B)\\ P(A\cap B')=P(A).P(B')\\ P(A'\cap B')=P(A').P(B')\end{cases}$$

مثال: احتمال قبولی مینا در کنکور سراسری 0/8 و قبولی الهام 0/7 است. مطلوبست احتمال این که:

الف) هیچ کدام از آنها در کنکور سراسری قبول نشوند.

ب) حداقل یکی از آنها در کنکور قبول شود.

انتخاب های با جایگذاری و بدون جایگذاری:

مثال: محمد از جعبه ای که شامل 15 شکلات نارگیلی و 8 شکلات فندقی با ظاهر یکسان می باشد، دو شکلات پی در پی با چشم بسته برمی دارد. نارگیلی بودن شکلات اول را با A و فندقی بودن شکلات دوم را با B دهید.

الف) احتمال این که هر دو پیشامد رخ دهد چقدر است؟

ب) این دو پیشامد مستقل اند یا وابسته؟

در مثال قبل اگر محمد پس از دیدن شکلات اول آن را به جعبه برگرداند و شکلات دوم را بردارد، $P(B|A), P(B)$ را حساب کنید و مستقل بودن یا وابسته بودن A و B را بررسی کنید.

❋ «مستقل بودن یا وابسته بودن این مثال ها از ظاهر سؤال هم معلوم بود. در انتخاب های با جایگذاری پیشامدهای ما مستقل از همند و در انتخاب‌های بدون جایگذاری پیشامدهای ما وابسته اند.»

فصل سوم

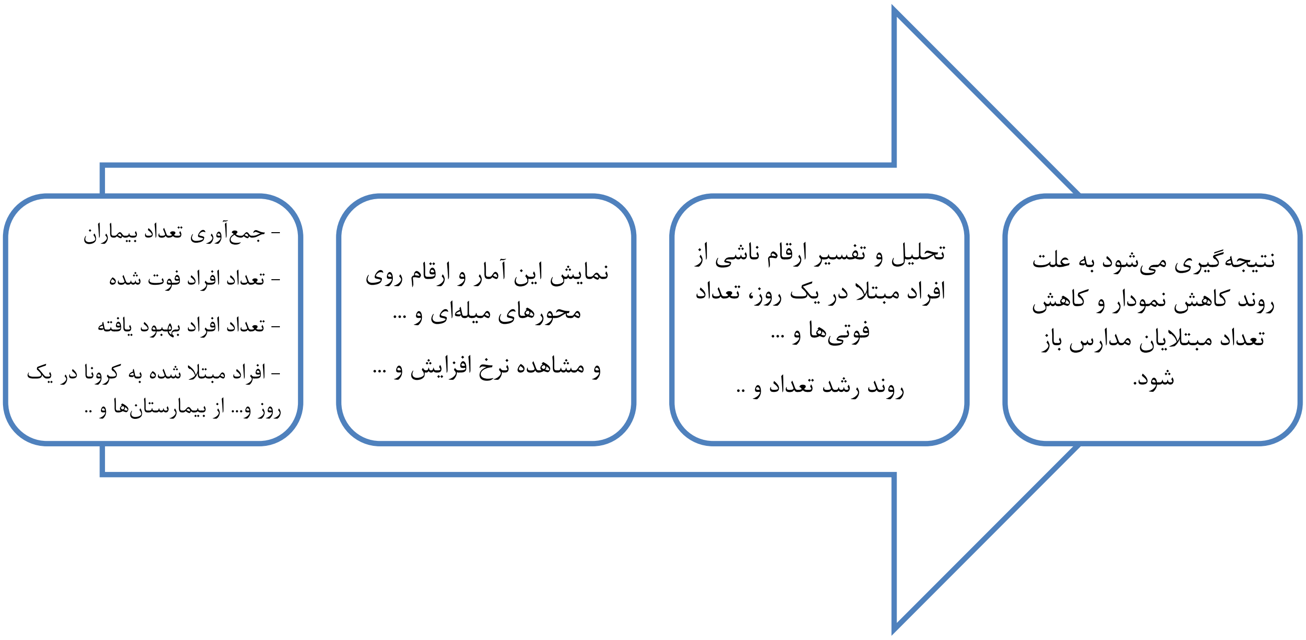
درس اول: توصیف و نمایش داده ها

مقدمه ای بر علم آمار، جامعه نمونه

تعریف آمار: مجموعه ای از اعداد و ارقام و اطلاعات است. مانند درجه ی حرارت یک شهر در روزهای مختلف فروردین

علم آمار: مجموعه روش‌هایی است که شامل جمع‌آوری اعداد و ارقام، سازماندهی و نمایش، تحلیل و تفسیر داده‌ها و در نهایت نتیجه‌گیری، قضاوت و پیش‌بینی مناسب در مورد **پدیده‌ها و آزمایش‌های تصادفی** می‌باشد.

مثال: سازمان بهداشت می‌خواهد تصمیم بگیرد که آیا به علت بیماری کرونا مدارس تعطیل بماند یا خیر؟

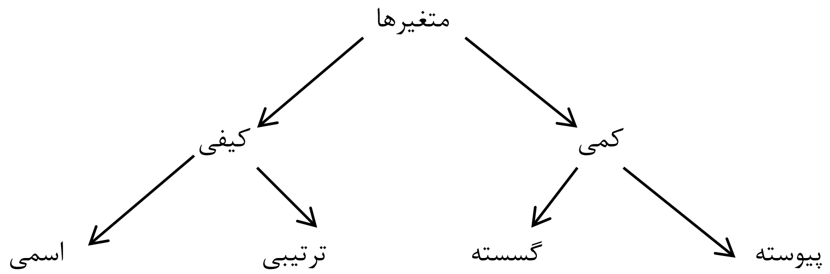


تعریف متغیر: متغیر ویژگی از اعضای یک جامعه است که بررسی و مطالعه می‌شود و معمولاً از یک عضو به عضو دیگر تغییر می‌کند. مثلاً در مورد هلوهای یک باغ، وزن هریک از هلوها یک متغیر است. کیفیت هر یک از هلوها، شیرینی هلو و ... هر کدام یک متغیر هستند.

مقدار متغیر: عددی را که به ویژگی یک عضویت داده می‌شود مقدار متغیر می‌گویند مثلاً وزن هر عدد هلو یک مقدار برای هلو است. مثلاً یک هلو

100 گرم و یکی 150 گرم است.

تقسیم‌بندی متغیرها:



در هر پژوهش برای شناخت یک ویژگی یا متغیر به جمع آوری داده نیاز داریم.

داده: واقعیت هایی درباره ی یک شیء یا فرد که در محاسبه، استنباط، برنامه ریزی و پیش بینی به کار می روند.

داده همان مقدار متغیر است. معمولاً متغیر در قالب یک سؤال پرسیده می شود و پاسخ هایی که به ازای آن سؤال دریافت می شود را داده می نامیم.

مثال: مطابق جدول زیر می توان در هر پژوهش متغیر و داده را مشخص کرد.

پژوهش	متغیر	داده
یک مربی ورزشی می خواهد رکورد دوی 450 متر شاگردان خود را ثبت کند. لذا از آنها تست می گیرد تا جواب سؤال «450 متر را در چه زمانی می دود؟» را بیابد.	مدت زمان دویدن مسافت 450 متر	۱′:۵۲″, ۱′:۵۶″, ۲′:۰۳″ ,...
برگزارکنندگان یک تور مسافرتی یک روزه می خواهند میزان علاقه شرکت کنندگان از آن تور یک روزه را ارزیابی کنند. بنابراین از شرکت-کنندگان در تور می پرسند «آیا از تور یک روزه راضی بوده اید؟»	میزان رضایت شرکت کنندگان از تور یک روزه	کاملاً راضی هستم، راضی هستم، نظری ندارم، اصلاً راضی نیستم

فراوانی یک داده (fi) : تعداد دفعاتی که هر داده مشخص می شود را فراوانی آن داده می گویند.

فراوانی نسبی یک داده (Fi) : با تقسیم فراوانی هر داده به تعداد کل داده ها (n)، **فراوانی نسبی** آن داده به دست می آید. اگر فراوانی نسبی را در صد ضرب کنیم، **درصد فراوانی نسبی** به دست می آید.

نکته: در یک بررسی آماری مجموع تمام فراوانی های نسبی برابر با یک و مجموع تمام درصدها برابر با 100 است.

نکته: بعد از گردآوری داده ها به تنظیم، رده بندی و خلاصه کردن آن ها می پردازیم.

به این منظور می توان از روش های زیر استفاده کرد:

الف) تهیه و تنظیم داده ها در جدول فراوانی

ب) رسم نمودارهای مختلف با استفاده از داده های جدول فراوانی

نکته: همیشه داده های خام به علت ظاهر نامنظمی که دارد، گویای مطلبی نیستند. برای آن که بتوان از آنها استفاده کرد، توسط جدول فراوانی به آن

نظم می دهیم. برای آشنایی با چگونگی رسم جدول فراوانی به مثال زیر توجه کنید:

مثال: تعداد کل مراجعین به یک مرکز درمانی در یک روز زمستانی که هوا نیز بسیار آلوده است، به این صورت است.

«18 نفر مشکلات تنفسی، 20 نفر مشکلات قلبی، 5 نفر حوادث رانندگی، 7 نفر دلایل دیگر»

جدول فراوانی این تعداد داده را رسم کنید.

علت مراجعه	شماره	فراوانی	فراوانی نسبی	درصد
تنفسی	1	18	$\frac{۱۸}{۵۰} = ۰/۳۶$	36
قلبی	2	20	$\frac{۲۰}{۵۰} = ۰/۴$	40
رانندگی	3	5	$\frac{۵}{۵۰} = ۰/۱$	10
دلایل دیگر	4	7	$\frac{۷}{۵۰} = ۰/۱۴$	14
تعداد کل		50	1	100

(جدول شماره 1)

ملاحظه می شود که به منظور سهولت در کار به هر کدام از داده ها یک عدد نسبت می دهیم.

نکته: برای گزارش فراوانی و درصد در داده های کمی پیوسته و گسسته با دامنه ی تغییرات بزرگ، باید ابتدا داده ها را دسته بندی کنیم. در دسته‌بندی باید توجه داشت که:

1- دسته ها طوری باشد که کمترین و بیشترین داده ها را دربر گیرد.

2- تعداد دسته ها متناسب با تعداد داده ها انتخاب شود.

مثال: قد دانش آموزان یک مدرسه را می توان در این جدول مشاهده کرد:

قد دانش آموزان	فراوانی	فراوانی نسبی
$۱۲۰ \leq H < ۱۳۰$	3	
$۱۳۰ \leq H < ۱۴۰$	5	
$۱۴۰ \leq H < ۱۵۰$	4	
$۱۵۰ \leq H < ۱۶۰$	9	
$۱۶۰ \leq H < ۱۷۰$	6	

(جدول شماره 2)

نمودارها:

الف) نمودار میله ای یا ستونی: در این نمودار کافیست داده ها را روی محور افقی و فراوانی داده ها را روی محور عمودی نشان دهیم. طول میله ها برابر فراوانی یک داده یا درصد آن می باشد. اگر داده ها کیفی باشند، شماره ی داده را روی محور افقی نشان می دهیم و اگر داده ها کمی باشد، مرکز دسته را روی محور افقی نشان می دهیم.

مثال: نمودار میله ای دو جدول بالا را رسم کنید. (در مورد جدول اول هر دو حالت بیماری برحسب فراوانی یا برحسب فراوانی نسبی را رسم کنید)

ب) نمودار دایره ای: در نمودار دایره ای هر قطاع درصد مربوط به هر داده را نشان می دهد.

برای محاسبه ی زاویه ی هر قطاع از رابطه روبرو استفاده می شود:

زاویه قطاع = فراوانی نسبی$\times$۳۶۰$^{\circ}$

مثال: نمودار دایره ای جدول اول را رسم کنید.

نکته: برای داده های کیفی و کمی گروه بندی شده، هم نمودار میله ای (ستونی) و هم نمودار دایره ای رسم می شود البته بهتر است نمودار دایره ای تنها برای متغیرهای کیفی ترسیم گردد.

نکته: اگر درصد یا فراوانی داده هایی که نمودار آنها را رسم می کنیم نزدیک به هم باشند، نمودار دایره ای نسبت به نمودار میله ای برای مقایسه مناسب تر است.

ج) نمودار بافت نگاشت (Histogram)

این نمودار تقریباً شبیه نمودار میله ای است با این تفاوت که روی محور xها به جای مرکز دسته ها حدود دسته را می نویسیم و مستطیل هایی رسم می کنیم که قاعده ی آن ها روی محور xها و برابر طول هر یک از دسته ها است و ارتفاع آن ها به موازات محور yها و متناسب با فراوانی دسته هاست.

مثال: نمودار بافت نگاشت جدول شماره 2 را رسم کنید.

تذکر: با توجه به نمودار بافت نگاشت می توان گفت:

$$\text{فراوانی نسبی هر دسته} = \frac{\text{مساحت مستطیل مربوط به آن دسته}}{\text{مساحت کل مستطیل}}$$

نکته: نمودار بافت نگاشت برای متغیرهای **کمی پیوسته** مناسب است.

در این نمودار در واقع سطح مستطیل ها متناسب با فراوانی دسته هاست.

درس دوم: معیارهای گرایش به مرکز

الف) میانگین داده ها:

مجموع داده ها:

برای به دست آوردن میانگین تعدادی داده ابتدا بایستی مجموع داده ها را به دست آوریم. مجموع داده ها را با $\sum$ (سیگما) نشان می دهیم و داریم:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = x_1 + x_2 + \ldots + x_n$$

$\sum_{i=1}^{n} x_i$ را می خوانیم (سیگمای i از 1 تا n ، x_i)

میانگین یا متوسط داده ها: برای بدست آوردن میانگین تعدادی داده بایستی مجموع داده ها را حساب کنیم و حاصل را بر تعداد داده ها تقسیم کنیم. میانگین داده های $x_1 + x_2 + \ldots + x_n$ برابر است با:

$$\boxed{\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}}$$

نکته: مجموع تفاضل داده ها از میانگین برابر صفر است.

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x}) = 0 \Rightarrow (x_1 - \bar{x}) + (x_2 - \bar{x}) + \ldots + (x_n - \bar{x}) = 0$$

میانگین وزنی: اگر داده های آماری ما اهمیت یکسانی نداشته باشند، برای نشان دادن اهمیت آن ها از ضرایبی هنگام محاسبه ی میانگین استفاده می کنیم.

اگر n داده ی $x_1, x_2, \ldots, x_n$ هر کدام به ترتیب دارای تعداد تکرار (وزن) $w_1, w_2, \ldots, w_n$ باشند، میانگین وزنی را با $\bar{x}_w$ نشان می دهیم و آن را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$\bar{x}_w = \frac{\sum_{i=1}^{n} w_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} w_i} = \frac{w_1 x_1 + w_2 x_2 + \ldots + w_n x_n}{w_1 + w_2 + \ldots + w_n}$$

مثال: زهرا در دروس ریاضی، فیزیک، شیمی، آمار، ادبیات و دین و زندگی به ترتیب نمرات 18، 16، 19/5، 17/5، 17 و 19 را آورده است. میانگین نمرات او را حساب کنید؟

حال اگر برای هر درس ضریبی مطابق جدول روبرو داشته باشیم، میانگین نمرات او را حساب کنید.

نام درس	ریاضی	فیزیک	شیمی	آمار	ادبیات	دین و زندگی
نمره	18	16	19/5	17/5	17	19
ضریب	4	4	3	2	1	1

نکته: اگر بخواهیم میانگین داده های کمی پیوسته را که گروه بندی شده اند، حساب کنیم، مرکز هر دسته را به جای x_i قرار می دهیم.

ب) میانه داده ها:

بعد از مرتب کردن داده ها از کوچک به بزرگ، عددی که در وسط داده ها قرار می گیرد میانه داده ها می باشد. و آن را با $Q_۲$ نشان می دهیم.
اگر تعداد داده ها فرد باشد عدد وسط را به عنوان میانه در نظر می گیریم و اگر تعداد داده ها زوج باشد، میانگین دو عدد وسط را به عنوان میانه در نظر می گیریم.

چارک ها: اگر داده ها را از کوچک به بزرگ مرتب کنیم میانه ی نیمه ی اول داده ها **چارک اول** $(Q_۱)$ و میانه ی نیمه ی دوم داده ها را چارک سوم $(Q_۳)$ می نامیم.

نکته: چارک دوم همانه میانه $(Q_۲)$ است.

مثال: میانه، چارک اول و چارک سوم را در داده های زیر به دست آورید:

1) ۱۶,۱۳,۱۴,۱۵,۱۶,۶,۱۹,۱۸,۲۰,۱۹,۲۰,۱۲,۱۷ / ۵,۱۳

2) ۶۵, ۶۳, ۵۸, ۶۴, ۹۸, ۷۶, ۷۲

ج) مُد (نما): مد یا نما داده ای است که بیشترین فراوانی را دارد.

مثال: اگر داده های آماری به صورت 1 و 3 و 2 و 3 و 4 و 1 و 3 و 2 و 5 و 1 و 1 باشند، مُد کدام داده است؟

نکته 1: اگر در یک سری داده همه ی داد ها دارای یک فراوانی باشند، آن گاه این داده ها دارای مد نیستند.

نکته 2: اگر در داده هایی، دو داده دارای بیشترین فراوانی باشند، آن گاه این داده ها دارای 2 مد هستند.

مثال: در هر سری از داده ها، مُد را بیابید.

داده های سری 1	3	5	5	10	7	3	4	3
داده های سری 2	5	3	2	8	3	1	5	7
داده های سری 3	1	7	3	1	3	6	7	6

نکته مهم: اگر همه ی داده های آماری را در عددی مانند $(a > ۰)$ ضرب کنیم و یا با عددی مانند b جمع کنیم، میانگین، میانه و مُد نیز در همان عدد ضرب می شوند و یا با همان عدد جمع می شوند.

جدید	اولیه	
$a\bar{x}+b$	$\bar{x}$	میانگین
ax_m+b	x_m	میانه
$am_{\circ}+b$	$x_{\circ}$	مُد

مثال: میانگین داده های زیر را حساب کنید.

$۳۰۰۰, ۲۵۰۰, ۳۵۰۰, ۵۰۰۰$

حل: ابتدا میانگین اعداد 5 و 3/5 و 2/5 و 3 را حساب کرده:

$$\frac{۳+۲/۵+۳/۵+۵}{۴}=\frac{۱۴}{۴}=۳/۵$$

و چون داده های ما همگی 1000 برابر این داده ها هستند، پس میانگین آنها می شود: $۳/۵\times ۱۰۰۰=۳۵۰۰$

مثال: میانگین داده های روبرو را حساب کنید.

$۲۸, ۲۹, ۳۲, ۳۰, ۳۱$

حل: ابتدا از همه ی داده ها 30 تا کم می کنیم و میانگین داده های جدید را حساب می کنیم.

x_i	28	29	32	30	31
$\bar{x}_i-۳۰$	-2	-1	2	0	1

$$\bar{x}'=\frac{-۲-۱+۲+۰+۱}{۵}=\frac{۰}{۵}=۰$$

حال به میانگین به دست آمده 30 تا اضافه می کنیم:

$\bar{x} = \bar{x}' + ۳۰ = ۰ + ۳۰ = ۳۰$

(داده های دور افتاده)

داده های دور افتاده، داده هایی هستند که مقدار آن ها بسیار بزرگ تر یا بسیار کوچک تر از بقیه داده هاست. داده دور افتاده از میانگین بسیار فاصله دارد.

نکته 1: میانگین تحت تأثیر داده های دور افتاده قرار می گیرد، در صورتی که میانه و مد تحت تأثیر داده های دور افتاده قرار نمی گیرند. بنابراین در صورت وجود داده دور افتاده میانه یا مد را گزارش می کنیم و در غیر این صورت میانگین را گزارش می کنیم.

مثال: داده های روبرو را در نظر بگیرید.

۸,۲۰,۱۹,۱۶,۱۷,۱۵

عدد 8 در میان این داده ها، داده ی دور افتاده است و میانگین را به بیراهه می برد.

*هنگامی که داده های دور افتاده داریم اگر موضوع بررسی مان امور تبلیغاتی، رسانه ای، لباس و ... باشد، سراغ مد می رویم و اگر بخواهیم درباره ی وضع داده ها نظر دهیم به سراغ میانه و چارک می رویم.

نکته: در تفسیر و تحلیل مسائل آماری، در نظر گرفتن تنها یک شاخص گرایش به مرکز کافی نیست. می بایست هر سه معیار میانگین، میانه و مُد محاسبه شود و بر اساس هدف مورد بررسی معیار مناسب انتخاب و از آن برای انجام تفسیر، قضاوت و پیش بینی استفاده شود.

مجموعه مدارس سرای دانش (واحد فلسطین)	مبحث
نام دبیر: لیلا رستگاریان شماره جلسه:	**معیارهای پراکندگی**
نام درس: آمار و احتمال پایه: یازدهم ریاضی	
نام پشتیبان: خانم محمدی تاریخ جلسه: / / 1401	صفحه کتاب درسی: 93 الی 101

درس سوم
معیارهای پراکندگی

در درس قبل با معیارهای گرایش به مرکز آشنا شدیم، این معیارها اطلاعاتی را پیرامون مرکز داده ها در اختیار ما قرار می دهند. گاه در توصیف داده ها لازم است از چگونگی پراکندگی آن نیز اطلاع داشته باشیم. در این درس با انحراف معیار، واریانس و ضریب تغییرات به عنوان معیارهای پراکندگی آشنا می شویم.

نکته: معیارهای پراکندگی شاخص هایی برای بیان میزان اختلاف داده ها از مرکز آن ها (یعنی میانگین) است.

دامنه تغییرات: دامنه ساده ترین معیار پراکندگی است و آن را با R نشان می دهیم و برابر است با اختلاف بیشترین و کمترین مقدار داده هاست.
($R = \max - \min$)

هرچه مقدار R بیشتر باشد، یعنی داده های ما پراکندگی بیشتری دارند.

نکته: اگر همه ی داده های آماری با عدد جمع شود دامنه تغییرات (R) تغییر نمی کند و اگر در عددی ضرب شوند دامنه ی تغییرات در قدرمطلق آن عدد ضرب می شود.

واریانس و انحراف معیار:

برای این که چگونگی پراکندگی داده ها را از میانگین بررسی کنیم ساده ترین کاری که می توان انجام داد این است که اختلاف همه ی داده ها را از میانگین حساب کرده (انحراف از میانگین) و آن ها را با یکدیگر جمع کنیم. اما ملاحظه می شود که **مجموع انحراف از میانگین ها برابر با صفر** است.

($\sum_{i=1}^{n} x_i - \bar{x} = 0$).

برای رفع این مشکل قدرمطلق انحراف از میانگین داده ها در نظر گرفته می شود، اما چون کار کردن با قدرمطلق آسان نیست پس توان دوم انحراف از میانگین داده ها را در نظر می گیریم.

واریانس: مجموع توان دوم اختلاف از میانگین داده ها تقسیم بر تعداد آن ها را واریانس می نامیم و آن را با « σ^2 » نشان می دهیم.

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} |x_i - \bar{x}|^2}{n}$$

البته واریانس داده های وزن دار به این صورت محاسبه می شود:

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} w_i (x_i - \bar{x})^2}{\sum_{i=1}^{k} w_i}$$

انحراف معیار: همان طور که ملاحظه می شود واحد واریانس مجذور واحد داده هاست و این معنای محسوسی ندارد. برای رفع این مشکل جذر واریانس را **انحراف معیار** می نامیم و آن را با σ نشان می دهیم.

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} w_i (x_i - \bar{x})^2}{\sum_{i=1}^{k} w_i}}$$

نکته: مقادیر واریانس و انحراف معیار همیشه مقداری مثبت هستند. اگر مقدار واریانس یا انحراف معیار **صفر** باشد، تمام داده ها باهم برابرند. هرچه مقدار σ^2 و σ بیشتر باشد، یعنی داده ها حول میانگین پراکنده ترند. و مقدارشان از همه دورتر است.

نکته: با استفاده از محاسبات جبری و استفاده از اتحاد مربع دو جمله ای می توان رابطه ی واریانس را به این صورت نیز نوشت:

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{n} - \bar{x}^2 = \frac{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}{n} - \bar{x}^2$$

مثال: انحراف معیار داده های 8، 11، 9، 13، 14 و 5 را به دست آورید.

	x_i	$(x_i - \bar{x})$	$(x_i - \bar{x})^2$
داده ها	8 11 9 13 14 5	-2 1 -1 3 4 -5	4 1 1 9 16 25
مجموع	610		56
میانگین	$\bar{x} = \frac{60}{6} = 10$		$\sigma^2 = \frac{56}{6} = 9/3$

مثال: واریانس داده های آماری دسته بندی شده در جدول زیر را به دست آورید.

x_i	1	3	5	7
w_i	6	2	8	4

	x_i	w_i	$x_i w_i$	$(x_i - \bar{x})$	$(x_i - \bar{x})^۲$	$w_i (x_i - \bar{x})^۲$
داده ها	1 3 5 7	6 2 8 4	6 6 40 28	-3 -1 1 3	9 1 1 9	54 2 8 36
مجموع		20	80			100
میانگین			$\bar{x} = \frac{۸۰}{۲۰} = ۴$			$\sigma^۲ = \frac{۱۰۰}{۲۰} = ۵$

مثال: مجموع 40 داده ی آماری برابر 100 و مجموع مجذورات این داده ها 340 است. انحراف معیار را به دست آورید.

$$\bar{x} = \frac{۱۰۰}{۴۰} = ۲/۵ \qquad \sum_{i=۱}^{۴۰} (x_i^۲) = ۳۴۰$$

$$\sigma^۲ = \frac{\sum_{i=۱}^{۴۰} (x_i^۲)}{n} = \bar{x}^۲ = \frac{۳۴۰}{۴۰} - (۲/۵)^۲ = ۲/۲۵$$

$$\sigma = \sqrt{\sigma^۲} = \sqrt{۲/۲۵} = ۱/۵$$

ضریب تغییرات داده ها:

ضریب تغییر داده ها معیاری است که از تقسیم انحراف داده ها (σ) به میانگین داده ها ($\bar{x}$) به دست می آید و آن را با نماد CV نشان می دهند.

$$CV = \frac{\sigma}{\bar{x}}$$

- ✓ هرچه ضریب تغییرات کمتر باشد، یعنی میزان پراکندگی داده ها کمتر خواهد شد که این موضوع برای ما مطلوب است.
- ✓ چون ضریب تغییرات از تقسیم دو شاخص با واحدهای یکسان به دست می آید، لذا **بدون واحد** است.
- ✓ اگر داده ها باهم برابر باشند، ضریب تغییرات صفر است و برعکس.
- ✓ اگر همه ی داده های آماری را در یک عدد ثابت ضرب کنیم، ضریب تغییرات تغییر نمی کند ولی اگر همه داده ها را با یک عدد ثابت جمع کنیم، ضریب تغییرات تغییر می کند.

مثال: اگر میانگین و ضریب تغییرات اندازه اضلاع مربع هایی 15 و 0/2 باشد، میانگین مساحت این مربع ها را بیابید.

$$\bar{x} = ۱۵ \qquad CV = ۰/۲$$

$$CV = \frac{\sigma}{\bar{x}} \Rightarrow ۰/۲ = \frac{\sigma}{۱۵} \Rightarrow \boxed{\sigma = ۳} \Rightarrow \sigma^۲ = ۹$$

$$\sigma^۲ = \frac{\sum_{i=۱}^{n} x_i}{n} - \bar{x}^۲ \Rightarrow ۹ = \frac{\sum_{i=۱}^{n} x_i^۲}{n} - ۱۵^۲ \Rightarrow \frac{\sum_{i=۱}^{n} x_i^۲}{n} = ۹ + ۲۲۵ = ۲۳۴$$

مثال: دو نفر در یک آزمایشگاه در 5 روز متوالی همزمان شروع به کار کردند. امتیازات دقت کاری آنان مطابق جدول زیر است. دقت کاری کدام یک بیشتر است؟

نفر اول	7	9	8	9	7
نفر دوم	10	8	6	7	9

مثال: برای داده های آماری $x_1, x_2, \ldots, x_n$ مقادیر میانگین و واریانس به ترتیب 5 و 4 محاسبه شده است. اگر به تمام داده ها یک واحد اضافه کنیم، درصد ضریب تغییرات داده های جدید چند است؟

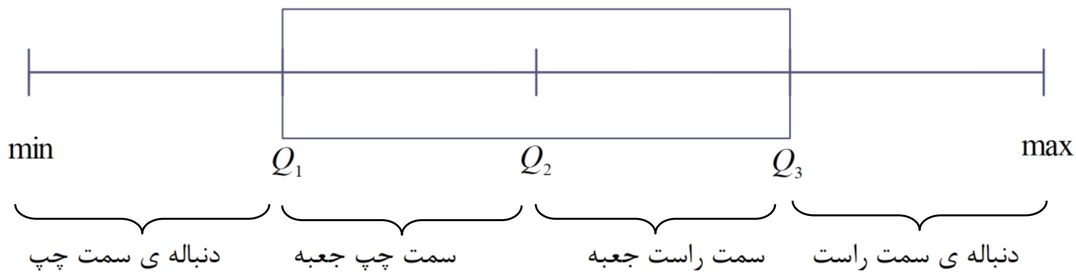
نمودار جعبه ای:

نموداری است تصویری که حدود داده ها را بر اساس 5 مقدار نمایش نمایش می دهد. این مقادیر عبارتند از: کوچکترین داده – چارک اول – میانه – چارک سوم – بزرگترین داده

✓ نمودار جعبه ای دارای چهار قسمت است: دنباله چپ – دنباله ی راست – سمت چپ جعبه – سمت راست جعبه

✓ بلند بودن طول هر قسمت نشان دهنده ی پراکندگی بیشتر داده ها در آن قسمت است.

✓ نمودار جعبه ای برای متغیرهای کمی پیوسته و یا کمی گسسته با دامنه ی تغییرات بزرگ رسم می شود.

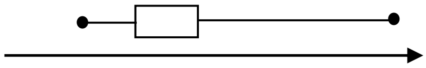


✓ تفاضل بین چارک سوم و چارک اول داده ها دامنه میان چارکی است که آن را با IQR نشان می دهیم.

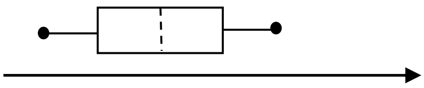
✓ تفاضل بین max (ماکزیمم) و min (مینیمم) داده ها را دنباله می نامند.

✓ نمودار جعبه ای به دلیل این که همزمان چند شاخص مختلف را نشان می دهد. برای مقایسه ی دو یا چند مجموعه داده مناسب است.

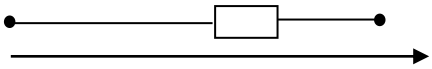
✓ در نمودار جعبه ای وجود داده های دورافتاده باعث افزایش طول دنباله ی نمودار می شود. به عنوان مثال در نمودار زیر یک یا چند داده ی دورافتاده در سمت راست جعبه وجود دارد.



✓ وجود دنباله های نامتقارن، نشان دهنده ی توزیع نامتقارن است.



توزیع متقارن



توزیع نامتقارن

مثال: نمودار جعبه ای داده های 12، 9، 3، 1، 7، 2، 5، 3، 4، 5 را رسم کنید.

ویژگی های معیارهای پراکندگی:

فرض کنید معیارهای پراکندگی مربوط به داده های $x_1, x_2, \ldots, x_n$ را در اختیار داشته باشیم، حال اگر هر یک از این داده ها در عدد ثابت a ضرب شوند و یا با عدد ثابت b جمع شوند، معیارهای پراکندگی برای داده های جدید مطابق جدول زیر به دست می آیند. در جدول زیر a و b اعداد ثابت و $a > 0$ است.

<table dir="rtl">
<tr><th></th><th>داده ها</th><th>$x_1, x_2, \ldots, x_n$</th><th>$x_1 + b, x_2 + b, \ldots, x_n + b$ (تمام داده ها در عدد b جمع شوند)</th><th>$ax_1, ax_2, \ldots, ax_n$ (تمام داده ها در عدد a ضرب شوند)</th><th>$ax_1 + b, ax_2 + b, \ldots, ax_n + b$ (تمام داده ها در عدد a ضرب شده و سپس با عدد b جمع شوند)</th></tr>
<tr><td rowspan="5">شاخص های پراکندگی</td><td>دامنه ی تغییرات</td><td>R</td><td>R (تغییر نمی کند.)</td><td>aR</td><td>aR</td></tr>
<tr><td>واریانس</td><td>σ^2</td><td>σ^2(تغییر نمی کند.)</td><td>$a^2\sigma^2$</td><td>$a^2\sigma^2$</td></tr>
<tr><td>انحراف معیار</td><td>σ</td><td>σ(تغییر نمی کند.)</td><td>$a\sigma$</td><td>$a\sigma$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">ضریب تغییرات</td><td rowspan="2">CV</td><td>اگر $b > 0$ باشد، CV کوچک‌تر می‌شود.</td><td rowspan="2">CV (تغییر نمی کند)</td><td>اگر $b > 0$ باشد، CV کوچک تر می‌شود.</td></tr>
<tr><td>اگر $b < 0$ باشد، CV بزرگ‌تر می‌شود.</td><td>اگر $b < 0$ باشد، CV بزرگ تر می‌شود.</td></tr>
</table>