دبیرستان علوی نام دبیر : لیلا رستگاریان — شماره جلسه: نام درس : حسابان ۱ — پایه: یازدهم ریاضی	مبحث: **مجموع جملات دنباله‌های حسابی و هندسی** صفحه کتاب درسی:

فصل اول حسابان

درس اول: مجموع جملات دنباله‌های حسابی و هندسی

یادآوری دنباله حسابی – جمله عمومی: $a_n = a_۱ + (n-۱)d$

نوشتن n واسطه‌ی حسابی بین دو عدد a و b

قانون اندیس‌ها در دنباله‌ی حسابی

مثال‌هایی از دنباله حسابی:

۱- در یک دنباله حسابی جمله‌ی هفتم برابر ۳۲ است و جمله‌ی دهم برابر ۴۴ است. جمله‌ی بیست و یکم چند است؟

۲- بین اعداد ۱۴ و ۴-، پنج واسطه‌ی حسابی بنویسید؟

۳- در یک دنباله حسابی مجموع جملات سوم و دهم برابر ۱۲۰ و جمله چهارم برابر ۴۰ است. جمله‌ی نهم را بیابید؟

۴- در یک دنباله حسابی جمله هشتم برابر ۱۴۰ و جمله پنجم چهاربرابر جمله دوم است. جمله بیست و پنجم را بیابید؟

۵- با توجه به دنباله‌ی $-۷,-۳,۱,۵$ به سوالات زیر پاسخ دهید.

الف) این دنباله چه نوع دنباله‌ای است؟

ب) قدرنسبت آن چقدر است؟

ج) جمله عمومی آن را بنویسید؟

د) جمله پانزدهم این دنباله چند است؟

هـ) جمله چندم برابر ۲۶۱ است؟

و) این دنباله چند جمله‌ی دو رقمی دارد؟

۶- در یک دنباله حسابی $a_۲ + a_۴ + a_۶ + a_۸ = ۲۰۰$ می‌باشد. مجموع جملات سوم و هفتم این دنباله چند است؟

مجموع جملات دنباله‌ی حسابی

مثال ۱: مجموع اعداد یک تا ۱۰۰۰ را به روش گاوس به دست آورید؟

مثال ۲: نشان دهید مجموع اعداد طبیعی از ۱ تا ۸ برابر است با: $\frac{n(n+۱)}{۲}$

نکته: مجموع n جمله‌ی اول دنباله‌ی حسابی با جمله اول و قدرنسبت d برابر است با :

$\boxed{S_n = \frac{n}{۲}(a_۱ + a_n)}$ یا $\boxed{S_n = \frac{n}{۲}(۲a_۱ + (n-۱)d)}$

اثبات: (روش گاوس)

مثال ۳: مجموع بیست جمله‌ی اول دنباله‌ی $-۵,-۳,-۱,...$ را به دست آورید.

مثال ۴: مجموع بیست جمله اول دنباله $-۲۱,-۱۷,-۱۳,...$ را بدست آورید.

مثال ۵: مجموع صد جمله اول دنباله $۳,۷,۱۱,۱۵,...$ را بدست آورید؟

مثال ۶: مجموع همه‌ی اعداد طبیعی دو رقمی مضرب ۷ را بدست آورید.

مثال ۷: مجموع چند جمله از دنباله $۷,۱۱,۱۵,...$ برابر ۳۴۸ می‌باشد؟

مثال ۸: در دنباله‌ی $۳,۹,۱۵,...$ حداقل چند جمله را جمع کنیم تا حاصل از ۳۰۰ بیشتر شود؟

مثال ۹: روی محیط دایره‌ی ۲۰ نقطه‌ی متمایز قرار دارد از هر نقطه به نقاط دیگر وصل می‌کنیم، تعداد کل وترهای تشکیل شده را به دست آورید.

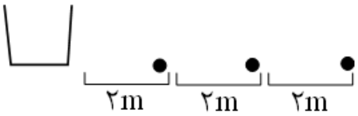
مثال ۱۰: مجموع n جمله‌ی اول یک دنباله حسابی به صورت $S_n = ۲n^۲ + ۳n$ می‌باشد. مطلوب است:

الف) جمله‌ی دهم این دنباله

ب) مجموع جملات از جمله‌ی هشتم تا جمله‌ی بیستم؟

ج) مجموع ۵ جمله‌ی دوم دنباله؟

مثال ۱۱: تعداد توپ به فواصل ۲ متر مطابق شکل در کنار یک سبد قرار دارند. دونده باید از کنار سبد شروع کرده و هر توپ را برداشته و به سبد بیندازد و به سراغ توپ بعدی بیاید. و به همین ترتیب .... اگر این دونده مجموعاً ۱۳۰۰ متر دویده باشد. تعیین کنید او چند توپ در سبد انداخته است؟



مثال ۱۲: در یک دنباله حسابی مجموع n جمله اول برابر $S_n = \frac{n}{۲}(۲n+۱)$ می‌باشد. جمله‌ی عمومی این دنباله را بیابید.

نکته: اگر S_nمجموع n جمله‌ی اول دنباله حسابی باشد آن گاه داریم:

۱) $S_۱ = a_۱$

۲) $a_n = S_n - S_{n-۱}$

نکته: همیشه مجموع n جمله‌ی اول دنباله حسابی به صورت $S_n = an^۲ + bn$ می‌باشد که در آن ضریب $n^۲$ برابر $\frac{d}{۲}$ و ضریب n برابر $a_۱ - \frac{d}{۲}$ می‌باشد. (چرا؟)

مثال ۱۳: مجموع n جمله اول یک دنباله حسابی $S_n = (۳a-۲)n^۲ + an + a - ۲$ می‌باشد. قدرنسبت این دنباله چند است؟

مثال: مجموع سه جمله اول یک دنباله حسابی متناهی ۲۷ و مجموع سه جمله‌ی آخر آن ۵۷ و مجموع تمام جملات آن ۱۱۲ می‌باشد. این دنباله چند جمله دارد؟

دنباله هندسی

یادآوری

- ✓ جمله عمومی دنباله هندسی

- ✓ نوشتن n واسطه هندسی بین دو عدد a و b

- ✓ اگر b واسطه هندسی بین دو عدد a و c باشد. آنگاه داریم:

- ✓ اگر جملات a_n و a_m از دنباله هندسی را داشته باشیم قدرنسبت برابر است با: $q^{n-m} = \frac{a_n}{a_m}$

- ✓ رابطه اندیس‌ها در دنباله‌ی هندسی اگر $m+n=s+r$ آنگاه $a_n a_m = a_s a_r$

مثال‌ها:

۱- جمله‌ی هفدهم دنباله هندسی $\frac{۱}{۸}, \frac{۱}{۱۶}, \frac{۱}{۳۲}, \ldots$ چند است؟

۲- جمله سوم دنباله هندسی ۲۱ و جمله‌ی ششم آن ۱۶۸ می‌باشد. جمله‌ی نهم این دنباله چند است؟

۳- در یک دنباله‌ی هندسی $a_۸ = ۶۰$ و $a_۳ = ۱۲$ و $a_۶ = ۳۶$ می‌باشد. جمله‌ی پنجم این دنباله چند است؟

۴- در یک دنباله‌ی هندسی با جملات مثبت و نزولی، جمله‌ی چهارم ۹ برابر جمله‌ی ششم آن است.اگر جمله‌ی سوم این دنباله ۱ باشد، جمله هشتم آن چند است؟

۵- در یک دنباله هندسی و غیرصعودی جمله سوم ۱۰ و جمله هفتم ۴۰ است. جمله‌ی دهم این دنباله چند است؟

۶- در دنباله هندسی $۲, x+۴, \frac{۱}{۲}x^۲+۱۶, \ldots$ جمله‌ی دهم چندبرابر جمله ششم است؟

۷-بین دو عدد ۶ و ۱۶۲، دوعدد چنان قرار دهید که چهار عدد حاصل، جملات متوالی یک دنباله هندسی شوند؟

مجموع جملات دنباله‌ی هندسی:

در دنباله‌ی هندسی با جمله‌ی اول a و قدرنسبت q مجموع n جمله‌ی اول این دنباله برابر است با:

$$\boxed{S_n = a\frac{q^n - ۱}{q - ۱}} \quad \text{یا} \quad \boxed{S_n = a\frac{۱ - q^n}{۱ - q}}$$

اثبات:

مثال ۱: مجموع ده جمله اول دنباله‌ی $۵,۱۰,۲۰,...$ را به دست آورید.

مثال ۲: اگر در یک دنباله‌ی هندسی جمله سوم ۲ و جمله ششم ۱۶ باشد، مجموع هفت جمله‌ی اول دنباله را بدست آورید.

مثال ۳: حداقل مقدار n چقدر باشد تا مجموع n جمله اول دنباله $۲,۳,\frac{۹}{۲},...$ از ۴۰ بیشتر شود؟

نکته: در دنباله هندسی اگر S_n مجموع n جمله اول و S_m مجموع m جمله اول باشد داریم:

$$\frac{S_n}{S_m} = \frac{۱ - q^n}{۱ - q^m}$$

نکته: در دنباله‌های هندسی داریم: $\frac{S_{۲n}}{S_n} = ۱ + q^n$

مثال ۴: اگر مجموع ۳ جمله اول دنباله هندسی ۳۵ و مجموع ۶ جمله اول آن ۳۱۵ باشد. مجموع ۱۲ جمله اول این دنباله چند است؟

مثال ۵: اگر مجموع ۸ جمله اول دنباله هندسی صعودی ۱۷ برابر مجموع چهارجمله اول آن باشد، قدرنسبت را حساب کنید.

مثال ۶: در دنباله هندسی داریم: $a_۱ + a_۵ = ۵۱$ و $a_۲ + a_۶ = ۱۰۲$، چند جمله‌ی این دنباله را جمع کنیم تا حاصل ۳۰۶۹ شود؟

مثال ۷: طول ضلع مربعی ۱ متر است. ابتدا نیمی از مساحت آن را رنگ کرده، سپس نیمی از مساحت باقی‌مانده را رنگ می‌زنیم و به همین ترتیب پس از چند مرحله حداقل $\frac{۹۷}{۱۰۰}$ مساحت مربع را رنگ زده‌ایم؟

دبیرستان علوی	**مبحث** معادلات درجه دوم
نام دبیر : لیلا رستگاریان **شماره جلسه:**	
نام درس : حسابان ۱ **پایه: یازدهم ریاضی**	**صفحه کتاب درسی**

فصل اول حسابان

درس دوم: معادلات درجه دوم

یادآوری: معادلات درجه دوم و روش‌های حل آن‌ها:

مثال ۱: معادلات زیر را حل کنید.

۱) $۳x^{۲} = ۵x - ۲$

۲) $۲x^{۲} = ۶x - ۴$

۳) $۲x^{۲} - ۴x + ۱ = ۰$

۴) $x^{۲} + ۲\sqrt{۳}x = ۱$

مثال ۲: اگر $x = -۱$ یک ریشه معادله‌ی $۴x^{۲} - mx - ۷ = ۰$ باشد. ریشه دیگر آن چند است؟

روابط بین ضرایب و ریشه‌های معادله درجه دوم:

اگر α و β ریشه‌های معادله‌ی درجه دوم $ax^۲+bx+c=۰$ باشند، آنگاه داریم:

$$\boxed{\alpha\beta=\frac{c}{a}} \quad \text{و} \quad \boxed{\alpha+\beta=\frac{-b}{a}}$$

درستی این دو رابطه را نشان دهید:

همچنین اگر معامله‌ی درجه دومی به صورت $x^۲-Sx+P=۰$ باشد، S مجموع ریشه‌های این معادله و p حاصل ضرب ریشه‌های این معادله می-باشند. (چرا؟)

مثال ۱: مجموع و حاصل ضرب ریشه‌های معادلات زیر را بنویسید:

۱) $۳x^۲-۵x+۲=۰$

۲) $۴x^۲-۳x-۷=۰$

۳) $x^۲-۲x+۱=۰$

۴) $۵x^۲+۶x-۸=۰$

مثال ۲: اگر $x=-۱$ یک ریشه معادله‌ی $۴x^۲-mx-۷=۰$ باشد، ریشه دیگر و مقدار m را به دست آورید.

مثال ۳: اگر $x=۳$ یک ریشه معادله‌ی $۲x^۲-mx+۲۸=۰$ باشد، مقدار m و ریشه دیگر معادله چند است؟

مثال ۴(مهم): اگر α و β ریشه‌های معادله درجه دوم $ax^۲+bx+c=۰$ باشند. نشان دهید:

(s مجموع ریشه‌ها و p حاصل ضرب ریشه‌هاست)

۱) $\alpha^۲+\beta^۲=s^۲-۲p$

۲) $\alpha^۳+\beta^۳=s^۳-۳ps$

۳) $\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}=\sqrt{s+۲\sqrt{p}}$

۴) $|\alpha-\beta|=\frac{\sqrt{۵}}{|a|}$

مثال ۵: موارد زیر را برحسب S و P بنویسید.

۱) $(\alpha-\beta)^{۲}$

۲) $\alpha\beta^{۲}+\beta\alpha^{۲}$

۳) $\alpha\beta^{۳}+\beta\alpha^{۳}$

۴) $(۲\alpha-۳)(۲\beta-۳)$

۵) $\frac{۱}{\alpha^{۲}}+\frac{۱}{\beta^{۲}}$

۶) $\frac{\alpha}{\beta+۱}+\frac{\beta}{\alpha+۱}$

۷) $\frac{\alpha}{\beta^{۲}}+\frac{\beta}{\alpha^{۲}}$

۸) $\frac{۱}{\sqrt{\alpha}}+\frac{۱}{\sqrt{\beta}}$

مثال۶: اگر α و βریشه‌های معادله $۲x^{۲}-۱۰x+۸=۰$ باشند. بدون حل معادله مقدار عددی عبارت‌های زیر را بیابید.

$$B=\frac{۱}{\sqrt{\alpha}}+\frac{۱}{\sqrt{\beta}} \qquad A=|\sqrt{\alpha}-\sqrt{\beta}|$$

تشکیل معادله درجه دوم وقتی که ریشه‌ها معلومند

روش اول: توسط رابطه‌ی $m^{۲}-Sx+p=۰$

روش دوم: اگر αو βریشه‌های معادله درجه دوم باشند داریم $(x-\alpha)(x-\beta)=۰$

مثال ۱: معادله درجه دومی بنویسید که ریشه‌های آن ۲ و ۵ باشد.

مثال ۲: معادله درجه دومی بنویسید که ریشه‌های آن $\sqrt{۳}-۲$ و $\sqrt{۳}+۲$ باشد.

مثال ۳: مستطیلی بسازید که محیط آن ۲۲ و مساحت آن ۲۸ باشد.

مثال ۴: محیط یک مستطیل ۳۳ و مساحت آن $۶۵cm^۲$ است. ابعاد مستطیل؟

مثال ۵: در معادله‌ی $۴x^۲ - ۱۶x + m = ۰$ یکی از ریشه‌ها ۲ واحد بیشتر از ریشه دیگر است. m و هر دو ریشه را بدست آورید.

مثال ۶: معادله‌ی درجه دومی بنویسید که ریشه‌های آن یک واحد بیشتر از دو برابر ریشه‌های معادله $x^۲ - ۳x + ۱ = ۰$ باشد.

مثال ۷: معادله درجه دومی بنویسید که ریشه‌های آن ۳ برابر ریشه‌های معادله‌ی $۲x^۲ + ۵x + ۴ = ۰$ باشد؟

مثال ۸: معادله‌ی درجه دومی بنویسید که ریشه‌های آن قرینه ریشه‌های معادله‌ی $x^۲ + x + ۲ = ۰$ باشد؟

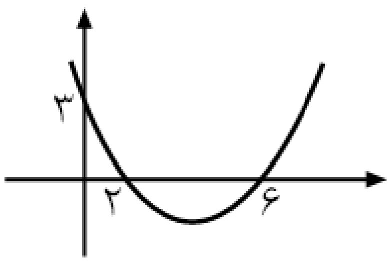
مثال ۹: معادله درجه دومی بنویسید که ریشه‌های آن معکوس ریشه‌های معادله $۲x^۲ - ۳x - ۱ = ۰$ باشد؟

تابع درجه دوم

صفرهای تابع درجه دوم: برای هرتابع f جواب‌های معادله $f(x)=0$ را صفرهای تابع می‌نامند. اگر نمودار $y=f(x)$ را رسم کنیم صفرهای تابع طول نقاطی است که تابع محور xها را قطع می‌کند.

نکته: اگر x' و x'' صفرهای تابع درجه دوم $f(x)=ax^2+bx+c$ باشند، تابع f را می‌توان به صورت $f(x)=a(x-x')(x-x'')$ نشان داد. (ثابت کنید)

مثال ۱: ضابطه سهمی زیر را رسم کنید.



مثال ۲: حدود m را چنان بیابید که تابع $f(x)=x^2-2mx+9$ دارای دو صفر متمایز باشد.

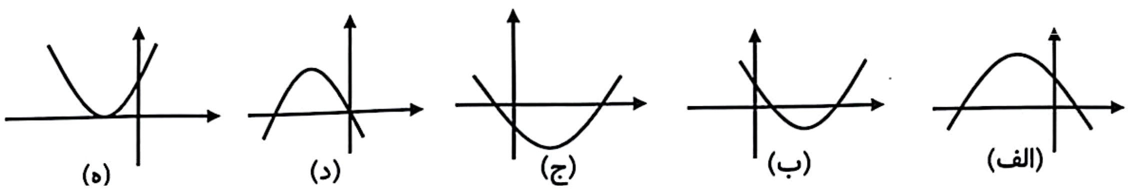
مثال ۳: به ازای چه مقادیر از x منحنی $f(x)=(m+5)x^2+4x+2$ همواره بالای محور xهاست.

نکته: اگر $x=a$ یکی از صفرهای تابع f(x) باشد، انگاه f(x) بر x-a بخش‌پذیر است و از تقسیم چندجمله‌ای f(x) بر x-a می‌توان دیگر صفرهای تابع را به دست آورد.

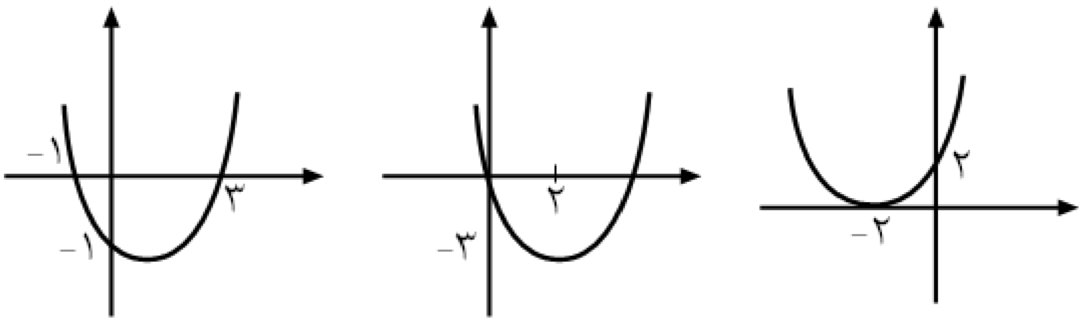
مثال ۴: اگر $x=1$ یک عامل $f(x)=x^3-8x^2+9x-2$ باشد، عامل‌های دیگر آن را بیابید.

مثال ۵: اگر $x=1$ یک صفر تابع $p(x)=x^3+(k+1)x^2-5x-2k$ باشد، صفرهای دیگر تابع را به دست آورید.

مثال ۶: با توجه به نمودار توابع داده شده در وجود و علامت ریشه‌ها بحث کنیدو علامت a، و b و c را مشخص کنید.



مثال ۷: باتوجه به نمودارهای زیر ضابطه‌ی تابع درجه دوم را بنویسید.



حل معادلات به کمک تغییر متغیر

برخی معادلات را به کمک یک تغییر متغیر می‌توان به یک معادله درجه دوم تبدیل کرد و به سادگی آن‌ها را حل کرد:

مثال ۸: معادلات زیر را حل کنید.

الف) $x^4 - 10x^2 + 16 = 0$

ب) $(x^2 - 1)^4 + (x^3 - 1)^2 - 2 = 0$

ج) $(1 - \frac{1}{x^2})^4 - 3(1 - \frac{1}{x^2})^2 = 0$

د) $(x - \frac{1}{x})^2 + 3(x - \frac{1}{x}) - 4 = 0$

مثال ۹: تابع با ضابطه‌ی $f(x) = x^2 - 4x - \frac{20}{x^2 - 4x} - 1$ چند صفر دارد؟

مثال ۱۰: صفرهای تابع $f(x) = (x^2 - 1)^2 + (x^2 - 1) - 2$ را به دست آورید.

مثال ۱۱: به ازای کدام مقدارهای k، معادله‌ی $x^4 - kx^2 + \frac{3 - 2k}{4} = 0$ دو ریشه دارد؟ (محدوده‌ی k را بدست آورید.)

روش هندسی حل معادلات

اگر f و g دو تابع باشند آن‌گاه طول نقطه‌های برخورد نمودارهای این دو تابع جواب‌های معادله‌ی $f(x)=g(x)$ می‌باشد و برعکس هر جواب این معادله طول یکی از نقطه‌های برخورد این دو نمودار است.

این روش‌حل معادله تعداد جواب‌ها و محل تقریبی (گاهی محل دقیق) جواب‌های معادله را به ما نشان می‌دهد.

مثال ۱۲: معادلات زیر را به روش هندسی حل کنید.

الف) $(x-۱)^۲=\frac{۱}{۲}x+۱$

ب) $|x|=x^۲-۲x$

ج) $\sqrt{x+۱}-x^۲+۱=۰$

د) $\sqrt{x}+۴x=x^۲+۵$

هـ) $\frac{۶-x}{x}=x-۲$

و) $|x-۱|+|x|=۲$

فصل اول حسابان

درس سوم: معادلات گویا و گنگ

۱) حل معادلات شامل عبارات گویا:

روش اول: برای حل معادلات بایستی فرم معادله را به صورت $\frac{P(x)}{Q(x)}=0$ درآورد و سپس با قراردادن $P(x)=0$ به شرط آن که $Q(x)\neq 0$ جواب‌های معادله را تعیین کرد.

روش دوم: ابتدا مخرج‌ها را تا حد امکان تجزیه کرده، کل معادله را در مخرج مشترک کسرها ضرب می‌کنیم تا مخرج کسرها از بین برود. سپس معادله به دست آمده را حل کرده در صورتی که مخرج کسرها را صفر نکند جواب آن را قبول می‌کنیم.

روش سوم: معادلات گویا اگر به صورت $\frac{A}{B}=\frac{C}{D}$ باشند می‌توان توسط طرفین وسطین آن‌ها را حل کرد و در نهایت جواب‌هایی که مخرج‌ها را صفر نمی‌کنند را بپذیریم.

مثال ۱: معادلات زیر را حل کنید.

الف) $\frac{x}{x-1}+\frac{3}{x+1}=\frac{9}{(x-1)(x+1)}$

ب) $\frac{2}{x}=5+\frac{x}{x-2}$

ج) $\frac{2x}{x^2-2x}=\frac{3}{x-1}$

د) $\frac{x-1}{2x}-\frac{1}{2x+1}=\frac{7-3x}{4x^2+2x}$

هـ) $\frac{1}{x^2+x}=\frac{1}{6}$

و) $\frac{2x-1}{x+1}=\frac{1}{3}$

ز) $\frac{x-۲}{x-۴}=\frac{x+۱}{x+۳}$

ح) $\frac{۲x^{۲}+۴}{۲x+۱}=x$

مثال ۲: مقدار k را طوری بیابید که یکی از جواب‌های معادله $\frac{x+k}{x-k}+\frac{x}{x+k}=۲$ برابر ۲- باشد.

مثال ۳: مقدار k را طوری بیابید که یکی از جواب‌های معادله $\frac{x+۱}{x}+\frac{k+۱}{x-۲}=۲k+۲$ برابر ۱ باشد.

نسبت طلایی: اگر در یک مستطیل با طول l و عرض w داشته باشیم $\frac{l}{w}=\frac{w+l}{l}$ آن‌گاه می‌گوییم در این مستطیل نسبت طلایی برقرار است.

نکته: نسبت طول به عرض در مستطیل طلایی برابر است با: $\frac{l}{w}=\frac{۱+\sqrt{۵}}{۲}$

مثال ۴: اگر محیط یک زمین ورزشی مستطیل شکل با نسبت طلایی برابر با ۲۰ متر باشد، طول و عرض مستطیل را به دست آورید؟

حل مسئله به کمک معادلات گویا

مثال ۵: مخزنی توسط دو شیر آب در ۶ ساعت کاملاً خالی می‌شود. اگر شیر اول و دوم به تنهایی مخزن را تخلیه کنند شیر اول ۵ ساعت زودتر از شیر دوم این کار را به اتمام می‌رساند. هرکدام از شیرها به تنهایی در چند ساعت این کار را انجام می‌دهند؟

مثال ۶: دو کارگر کاری را با هم در ۱۸ روز به اتمام می‌رسانند اگر هر کدام به تنهایی کار کنند کارگر اول کار را ۱۵ روز زودتر تمام می‌کند هریک از کارگرها به تنهایی کار را چند روزه تمام می‌کنند؟

مثال ۷: ۱۶۰ کیلوگرم محلول آب نمک با غلظت ۱۲ درصد داریم، تعیین کنید در هریک از حالت‌های زیر چگونه می‌توان این محلول را به غلظت ۲۰ درصد رساند؟

الف) نمک به اندازه کافی موجود باشد. ب) نمک نداشته باشیم و فقط بتوان آب محلول را تبخیر کرد.

ج) فقط ده کیلوکرم نمک داشته باشیم.

معادلات شامل عبارت‌های گنگ

معادلاتی که شامل عبارت‌های رادیکالی از مجهول باشند را معادلات گنگ (اصم) می‌نامیم.

مانند: $\sqrt{x}-\sqrt{2x-3}=1$

روش حل: برای حل این معادلات با توان رسانی (و در صورت نیاز تکرار این عمل) معادله را از حالت رادیکالی خارج کرده و آن را حل می‌کنیم.و در نهایت جواب‌های به دست آمده را در معادله چک می‌کنیم. زیرا ممکن است جواب‌های اضافی تولید شود یا جواب بدست آمده در دامنه‌ی تعریف قرار نگیرد.

مثال ۸: معادلات زیر را حل کنید.

الف) $\sqrt{2x-1}=2-x$

ب) $\sqrt{x}+\sqrt{x+4}=3$

د) $\sqrt{15+\sqrt{2x+8}}=5$

د) $\sqrt{x^2-4}+2\sqrt{x}=0$

هـ) $\sqrt{x^2-x}+|x^2-1|=0$

و) $\sqrt{x+1}-\dfrac{2}{\sqrt{x+1}}=1$

مثال ۹: معادله‌ی $\sqrt{x-2}+\sqrt{4-x}=x-5$ چند جواب دارد؟

تست ۱: مجموع ریشه‌های معادله‌ی $\sqrt{2x^2+5x+8}-\sqrt{2x^2+5x+1}=1$ کدام است؟

۱) ۴ ۲) $\dfrac{5}{2}$ ۳) ۴- ۴) $-\dfrac{5}{2}$

مثال ۱۰: عددی طبیعی بیابید که دو برابر جذر مجموع آن با ۲، از جذر مجموع آن با ۲۳ به اندازه یک واحد کمتر است.

فصل اول حسابان

درس چهارم: قدرمطلق و ویژگی‌های آن

قدرمطلق هر عدد حقیقی a را به صورت |a| نمایش می‌دهیم و داریم:

$$|a|=\begin{cases} a & a\ge 0 \\ -a & a<0 \end{cases}$$

ویژگی‌های قدرمطلق:

۱- $|a|\ge 0$

۲- $\sqrt{a^2}=|a|$

۳- $|-a|=|a|$

۴- $|a^2|=|a|^2=a^2$

۵- $|ab|=|a||b|$

۶- $|\frac{a}{b}|=\frac{|a|}{|b|}$

۷- $-|a|\le a\le |a|$

معادلات و نامعادلات شامل قدرمطلقی:

برای حل معادلات و شامل قدرمطلق می‌توان از تعریف قدرمطلق و ویژگی‌های زیر استفاده کنیم:

۱- اگر $a\ge 0$ و $|x|=a$ ، آن‌گاه $x=\pm a$.

۲- اگر $|x|=|a|$، آنگاه $x=\pm a$.

۳- اگر $a>0$ و $|x|<a$ آن گاه $-a<x<a$.

۴- اگر $a\ge 0$ و $|x|\le a$ آنگاه $-a\le x\le a$

۵- اگر $a>0$ و $|x|>a$ آنگاه $x>a$ یا $x<-a$

۶- اگر $a\ge 0$ و $|x|\ge a$ آنگاه $x\ge a$ یا $x\le -a$

مثال۱: نشان دهید برای هر عدد حقیقی مانند a و b داریم:

الف) $-|a|\le a\le |a|$

ب) $-|a|-|b|\le a+b\le |a|+|b|$

ج) $|a+b|\le |a|+|b|$ (نامساوی مثلثی)

رسم توابع قدرمطلقی

۱- رسم توابع قدرمطلقی توسط انتقال:

۲- رسم تابع به کمک تعیین علامت

مثال ۲: نمودار تابع $f(x)=|x+۱|+|x-۲|$ را رسم کنید.

مثال ۳: نمودار تابع $y=x-۳|x-۱|+۲$ را رسم کنید.

۳- رسم تابع‌های شامل قدرمطلق به فرم $f(x)=|g(x)|$:

ابتدا تابع $g(x)$ را رسم کرده سپس قسمت‌هایی از نمودار که پایین محور xها قرار دارد را نسبت به محور xها قرینه می‌کنیم.

مثال ۴: توابع زیر را رسم کنید.

الف) $y=|۲x-۴|$

ب) $y=|x^۲-۲x|$

ج) $y=|۱-x^۲|$

د) $y=|\sqrt{x}-۱|$

هـ) $y=||x+۲|-۳|$

حالت‌های خاص

۱- نمودار گلدانی: نمودار توابع به فرم $y=|x-a|+|x-b|$ $(a<b)$ به نمودار گلدانی معروف هستند. برای رسم ابتدا مربعی به ضلع (a-b) بالای محور xها رسم می‌کنیم که دو رأس آن طول a و b را داشته باشند. (ریشه‌های داخل هر قدرمطلق) سپس ضلع بالای این مربع کف گلدان را تشکیل می‌دهد، سپس وسط ضلع پایین مربع را پیدا کرده و از آن نقطه به دو سه ضلع بالای مربع دو نیم خط رسم می‌کنیم. تا کناره‌های گلدان مشخص شود.

مثال ۵: نمودار توابع زیر را رسم کنید.

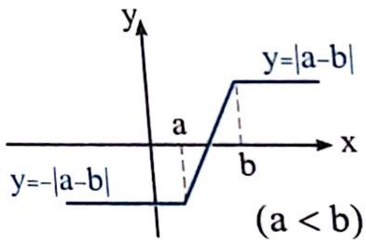
الف) $y=|x+۱|+|x-۳|$

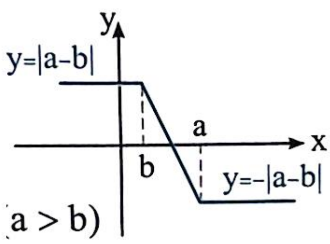
ب) $y=|۳x|+|۳x+۳|$

ج) $y=|۲x-۲|+|۲x-۴|$

مثال ۶: اگر $y=۲x+۳$ نمودار $y=|x-۲|+|x+a|$ را در بی شمار نقطه قطع کند، مقدار a را بیابید.

۲- نمودار سرسره‌ای یا آبشاری: نمودار توابع به فرم $y=|x-a|-|x-b|$ به صورت سرسره می‌باشند. برای رسم این تابع ابتدا ریشه‌های داخل قدرمطلق‌ها را بدست آورده سپس یک مربع به ضلع $|a-b|$ به سمت بالا و یک مربع به سمت پایین رسم می‌کنیم که نمودار یکی از حالت-های زیر می‌شود:





مثال ۷: نمودار توابع زیر را رسم کنید.

الف) $y=|x-۱|-|x-۲|$

ب) $y=|x+۱|-|x-۳|$

ج) $y=|x+۲|-|x-۳|$

مثال ۸: خط $y=ax+b$ نمودار $y=|x-۳|-|x-۶|$ را در بی شمار نقطه قطع می‌کند. a+b را بیابید؟

حل معادلات و نامعادلات قدرمطلقی

۱- روش جبری: الف) با استفاده از ویژگی‌های قدرمطلق – ب) به توان رساندن طرفین

۲- روش هندسی

نکته: جواب معادله‌هایی به فرم $|f(x)|=|g(x)|$ همان جواب‌های دو معادله $f(x)=g(x)$ و $f(x)=-g(x)$ هستند.

مثال ۹: معادله‌ی $|۴-x|=|۲-۳x|$ را حل کنید.

الف) با استفاده از ویژگی‌های قدرمطلق

ب) با توان دو رساندن طرفین

❄ مثال‌های کتاب درسی حل شود.

مثال ۱۰: معادلات زیر را حل کنید.

۱) $|۴-۲x|=۲$

۲) $||x-۳|-۱|=۳$

۳) $|x-۱|-|x+۳|=۵$

۴) $|x+۱|+|x-۳|=۳$

۵) $|۲x-۲|+|x-۳|=|x+۱|$

۶) $|۲x-۳|=۳-۲x$

۷) $|x|=x^{۲}-۳$

مثال ۱۱: اگر $y=۲$ باشد معادلات زیر را به روش هندسی و جبری حل کنید.

۱) $y=|x|+|۱-x|$

۲) $y=|۲-x|+|x+۱|$

مثال۱۲: معادلات زیر را به روش هندسی حل کنید.

۱) $|x+۱|=|x-۱|$

۲) $|x^۲-۱|=|۲x-۱|$

مثال۱۳: نامعادلات زیر را حل کنید.

۱) $|۲x-۱|\le ۷$

۲) $|۴-۳x|>۵$

۳) $|x^۲-۱|\le|x+۱|$

۴) $||x-۱|-۳|\le ۲$

۵) $|\frac{۲x-۳}{x+۲}|<۱$

۶) $|\frac{۱}{۲}x-۱|+|\frac{۱}{۲}x+۱|\ge|x|$

تست ۱: برد تابع $f(x)=|x+۲|-|x-۱|$ کدام است؟

۱) $[-۲,۱]$ ۲) $[-۱,۱]$ ۳) $[-۲,۲]$ ۴) $[-۳,۳]$

تست ۲: معادله $|x+۱|-|x-۲|=\sqrt{x}$ چند جواب دارد؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

دبیرستان علوی **نام دبیر : لیلا رستگاریان** **شماره جلسه:** **نام درس : حسابان ۱** **پایه: یازدهم ریاضی**	**مبحث** **هندسه تحلیلی** **صفحه کتاب درسی**

فصل اول حسابان

درس پنجم: هندسه تحلیلی

فاصله دو نقطه روی محور اعداد:

اگر طول دو نقطه A و B روی محور به ترتیب x_A و x_B باشد فاصله بین این دو نقطه برابر است با: $|AB|=|x_B-x_A|$

مثال: اگر دو نقطه‌ی $A(۲,-۳)$ و $B(۲,۱)$ دو انتهای قطر کوچک یک لوزی باشند و قطر بزرگ سه برابر قطر کوچک باشد. مساحت لوزی را حساب کنید.

فاصله دو نقطه در صفحه‌ی مختصات:

اگر نقاط A و B در صفحه‌ی مختصات با مختصات $A(x_A,y_A)$ و $B(x_B,y_B)$ باشند آنگاه طول پاره خط AB برابر است با: پ

$$|AB|=\sqrt{(x_B-x_A)^۲+(y_B-y_A)^۲}$$

مثال ۱: اگر سه نقطه A و B و C در صفحه مختصات به مختصات $A(۲,-۳)$ و $B(-۵,۳)$ و $C(۱,۵)$ قرار داشته باشند. طول پاره‌خط‌های AB و AC را بدست آورید؟

مثال۲: اگر طول پاره خط AB برابر ۵ باشد و $A(۵,m)$ و $B(۲,۳)$ باشند، مقدار m را به دست آورید؟

مختصات نقطه وسط یک پاره‌خط:

نقطه‌ی M وسط پاره خط AB می‌باشد. مختصات این دو نقطه برابر است با: $M(\frac{x_A+x_B}{۲},\frac{y_A+y_B}{۲})$

نکات مهم:

۱- فاصله‌ی نقطه‌ی از مبدأ مختصات برابر است با: $|OA|=\sqrt{x^۲+y^۲}$

۲- فاصله‌ی دو نقطه با طول‌های برابر، برابر است با اختلاف عرض آن دو نقطه $|AB|=|y_B-y_A|$

۳- فاصله‌ی دو نقطه با عرض‌های برابر، برابر است با اختلاف طول آن دو نقطه $|AB|=|x_B-x_A|$

۴- اگر A و B و C سه رأس یک مثلث باشند، مساحت مثلث از رابطه زیر به دست می‌آید.

$$S=\frac{۱}{۲}|x_A(y_B-y_C)+x_B(y_C-y_A)+x_C(y_A-y_B)|$$

۵- اگر a و b و c طول سه ضلع یک مثلث و p محیط مثلث باشد آن‌گاه مساحت مثلث از رابطه‌ی زیر به دست می‌آید:

$$S=\sqrt{\frac{p}{۲}(p-a)+\frac{p}{۲}(p-b)+\frac{p}{۲}(p-c)}$$

فاصله‌ی یک نقطه از یک خط:

فاصله نقطه‌ی $A(x_A,y_A)$ از خط به معادله‌ی $ax+by+c=۰$ برابر است با طول پاره‌خطی که از نقطه A بر خط عمود است و از رابطه

$$|AH|=\frac{|ax_A+by_A+c|}{\sqrt{a^۲+b^۲}}$$

مثال۳: فاصله نقطه‌ی $A(۱,-۴)$ از خط $۸x+۶y=k$ برابر ۴ است. مقدار k چقدر است؟

نکته: دو خط با شیب‌های m و m' در دستگاه مختصات وقتی برهم عمودند که داشته باشیم:

$$mm'=-۱ \quad \text{یا} \quad m'=-\frac{۱}{m}$$

به عبارت دیگر شیب دو خط عمود برهم قرینه و معکوس یکدیگرند.

نکته: شیب دو خط موازی با یکدیگر برابرند.

فاصله دو خط موازی از یک دیگر: فاصله‌ی دو خط موازی $ax+by+c=۰$ و $ax+by+c'=۰$ از رابطه‌ی $d=\frac{|c-c'|}{\sqrt{a^۲+b^۲}}$ بدست می‌آید. (چرا؟)

معادله‌ی خط وسط دو خط موازی: معادله‌ی خط وسط دو خط موازی به معادله‌های $ax+by+c=۰$ و $ax+by+c'=۰$ برابر است با:

$$ax+by+\frac{c+c'}{۲}=۰$$

مثال‌های این درس:

۱- اگر مبدأ مختصات نقاط $A(۱,۲)$ و $B(-۲,۲)$ سه رأس یک مثلث باشند. مساحت این مثلث در طول اضلاع آن را به دست آورید.

۲- اگر نقطه $A(۲,۳)$ رأس یک مربع و معادله‌ی یک ضلع آن $۳x-۴y=۹$ باشد، مساحت این مربع چقدر است؟

۳- معادله‌ی دایره‌ای را بنویسید که مرکز آن $A(۱,-۱)$ باشد و برخط $۳x-۴y+۸=۰$ مماس باشد.

۴- از نقطه‌ی $A\left|\begin{matrix}۱\\۲\end{matrix}\right.$ خط $۲x+y=۴$ را بر دایره‌ای به مرکز $O(۱,۱)$ مماس کرده‌ایم. فاصله‌ی A تا نقطه مماس چقدر است؟

۵- فاصله مبدأ مختصات از خط $۵x+۲y-۱=۰$ چقدر است؟

۶- فاصله‌ی نقطه‌ی $A(۲۰,۷)$ از دو خط $x=۳$ و $y=۵$ چقدر است؟

۷- دو خط $۳x+۲y=۱$ و $۲x-۳y=۲$ معادله‌های دو ضلع مستطیلند و نقطه‌ی $A(۲,۵)$ یک رأس مستطیل است. مساحت مستطیل را بیابید.

۸- نقطه‌ای روی محور طول‌ها بیابید که از دو خط $x+۲y+۱=۰$ و $x+۲y+۳=۰$ به یک فاصله باشد.

۹- مساحت مستطیلی را بیابید که اضلاع آن روی دو خط $x-۳y-۴=۰$ و $۳x+y=۱$ قرار دارد و یک رأس آن نقطه‌ی $A(۲,۱)$ است.