سؤالات تشریحی
پاسخنامه
بخش ۱

۱- آسان

دقت کنید دو عبارت $(2x-y)^2$ و $(x-1)^2$، هر دو نامنفی هستند و جمع دو عبارت نامنفی زمانی صفر می‌شود که هر دو عبارت صفر باشند یعنی:

$$(x-1=0)\wedge(2x-y=0) \Rightarrow \begin{cases} x-1=0 \Rightarrow x=1 \\ 2x-y=0 \xrightarrow{x=1} y=2 \end{cases}$$

پس $x=1 \wedge y=2$

۲- متوسط

اگر گزاره (a عدد فرد است $\equiv p$) و (a^2 فرد است $\equiv q$) باید ثابت کنیم $q \Rightarrow p$

اما می‌دانیم

$$q \Rightarrow p \equiv (\sim p \Rightarrow \sim q)$$

یعنی ثابت می‌کنیم اگر a عددی زوج باشد $(\sim p)$ آنگاه a^2 زوج است $(\sim q)$

فرض: $a=2k$ حکم: $a^2=2k'$

$$a^2=(2k)^2=4k^2=2(2k^2)=2k'$$

۳- دشوار

اگر (n عددصحیح و n^2 مضرب ۳ $\equiv p$) و (n عددصحیح مضرب ۳ $\equiv q$) فرض کنیم می‌خواهیم ثابت کنیم $p \Rightarrow q$ و می‌دانیم $(p \Rightarrow q \equiv \sim q \Rightarrow \sim p)$ بنابراین به جای آن ثابت می‌کنیم اگر n عددصحیح باشد که n مضرب ۳ نباشد $(\sim q)$ آنگاه n^2 هم مضرب ۳ نیست $(\sim p)$.

فرض: $n=3k\pm1$ حکم: $n^2 \neq 3k'$

$$n^2=(3k\pm1)^2=9k^2\pm6k+1=3\overbrace{(3k^2\pm2k)}^{k'}+1$$
$$=3k'+1 \Rightarrow n^2 \neq 3k'$$

۴- آسان

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$p\wedge q$	$\sim(p\wedge q)$	$\sim p\vee\sim q$
د	د	ن	ن	د	ن	ن
د	ن	ن	د	ن	د	د
ن	د	د	ن	ن	د	د
ن	ن	د	د	ن	د	د

۵- متوسط

آ)

p	q	r	$q\vee r$	$p\wedge(q\vee r)$	$p\wedge q$	$p\wedge r$	$(p\wedge q)\vee(p\wedge r)$
د	د	د	د	د	د	د	د
د	د	ن	د	د	د	ن	د
د	ن	د	د	د	ن	د	د
د	ن	ن	ن	ن	ن	ن	ن
ن	د	د	د	ن	ن	ن	ن
ن	د	ن	د	ن	ن	ن	ن
ن	ن	د	د	ن	ن	ن	ن
ن	ن	ن	ن	ن	ن	ن	ن

ب)

p	q	r	$q\wedge r$	$p\vee(q\wedge r)$	$p\vee q$	$p\vee r$	$(p\vee q)\wedge(p\vee r)$
د	د	د	د	د	د	د	د
د	د	ن	ن	د	د	د	د
د	ن	د	ن	د	د	د	د
د	ن	ن	ن	د	د	د	د
ن	د	د	د	د	د	د	د
ن	د	ن	ن	ن	د	ن	ن
ن	ن	د	ن	ن	ن	د	ن
ن	ن	ن	ن	ن	ن	ن	ن

۶- متوسط

p	q	r	$q \Rightarrow r$	$p \Rightarrow (q \Rightarrow r)$	$p \wedge q$	$(p \wedge q) \Rightarrow r$
د	د	د	د	د	د	د
د	د	ن	ن	ن	د	ن
د	ن	د	د	د	ن	د
د	ن	ن	د	د	ن	د
ن	د	د	د	د	ن	د
ن	د	ن	ن	د	ن	د
ن	ن	د	د	د	ن	د
ن	ن	ن	د	د	ن	د

ب)

p	q	$\sim p$	$p \Leftrightarrow q$	$\sim (p \Leftrightarrow q)$	$\sim p \Leftrightarrow q$
د	د	ن	د	ن	ن
د	ن	ن	ن	د	د
ن	د	د	ن	د	د
ن	ن	د	د	ن	ن

۷- آسان

گزارهٔ p	گزارهٔ q	ارزش p	ارزش q	ارزش $(p \Rightarrow q)$	ارزش $(p \wedge q)$
عدد ۲ زوج است	$2 > 1$	د	د	د	د
عدد ۲ اول است	$1 \not< 2$	د	ن	ن	ن
$2 \in \{1, 2\}$	$2^2 = 3$	د	ن	ن	ن
عدد ۳ اول است	عدد ۷ اول است.	د	د	د	د

۸- دشوار

آ) در جبر گزاره‌ها برای ترکیب شرطی از هم‌ارزی $p \Rightarrow q \equiv \sim p \vee q$ استفاده می‌کنیم:

$$[(p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow r)] \wedge r \equiv [(\sim p \vee r) \wedge (\sim q \vee r)] \wedge r$$

$$\equiv [(\underbrace{\sim p \wedge \sim q}_{X}) \vee r] \wedge r \equiv$$ خاصیت جذب (یا همپوشانی) $(x \vee r) \wedge r \equiv r$

ب) $p \Leftrightarrow q \equiv (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$
$\equiv (\sim q \Rightarrow \sim p) \wedge (\sim p \Rightarrow \sim q) \equiv \sim p \Leftrightarrow \sim q$

۹- دشوار

آ) $p \Rightarrow (q \Rightarrow r) \equiv \sim p \vee (q \Rightarrow r) \equiv \sim p \vee (\sim q \vee r)$
$\equiv (\sim p \vee \sim q) \vee r \equiv \sim (p \wedge q) \vee r \equiv (p \wedge q) \Rightarrow r$

ب) $p \Rightarrow (q \Rightarrow r) \equiv \sim p \vee (q \Rightarrow r) \equiv \sim p \vee (\sim q \vee r)$
$\equiv \sim q \vee (\sim p \vee r) \equiv q \Rightarrow (\sim p \vee r) \equiv q \Rightarrow (p \Rightarrow r)$

۱۰- آسان

فرض: $\sim p \equiv F \Rightarrow P \equiv T , q \equiv F$

$$\sim (p \Rightarrow q) \vee (p \wedge q) \equiv \sim (T \Rightarrow F) \vee (T \wedge F)$$
$$\equiv \sim F \vee F \equiv T \vee F \equiv T$$

۱۱- دشوار

$$p \Rightarrow (q \Rightarrow (p \wedge q)) \equiv \sim p \vee (q \Rightarrow (p \wedge q))$$

$$\equiv \sim p \vee (\sim q \vee (p \wedge q)) \equiv \sim p \vee ((\sim q \vee p) \wedge \overbrace{(\sim q \vee q)}^{T})$$

$$\equiv \sim p \vee (\sim q \vee p) \equiv (\sim p \vee p) \vee \sim q \equiv T \vee \sim q \equiv T$$

۱۲- متوسط

آ) برای اینکه ثابت کنیم یک گزاره‌نما با سور $\forall$ نادرست است همواره باید مثال نقض بیاوریم و در این گزاره $x = 0$ یک مثال نقض است.

$$\sim (\forall x \in R ; x^2 > 0) \equiv \exists x \in R ; x^2 \le 0$$

ب) برای اینکه ثابت کنیم یک گزاره‌نمابا سور $\exists$ درست است، همواره باید عضوی پیدا کنیم که گزاره‌نما را به گزاره درست تبدیل کند یعنی مجموعه جواب تهی نباشد که $y = -1$، گزاره‌نمارا به گزاره درست تبدیل می‌کند.

$$\sim (\exists y \in R ; y < 0 \wedge y^2 \le 1) \equiv \forall y \in R ; \sim (y < 0 \wedge y^2 \le 1)$$
$$\equiv \forall y \in R ; y^2 \ge 0 \vee y^2 > 1$$

۱۳- متوسط

در گزاره (آ) سور عمومی $(\forall)$ وجود دارد بنابراین با آوردن یک مثال نقض گزاره‌نما نادرست می‌شود که $x = 1$ مثال نقض برای این گزاره است.

$$\sim (\forall x \in R ; \frac{x^2 - 1}{x - 1} = x + 1) \equiv \exists x \in R ; \frac{x^2 - 1}{x - 1} \ne x + 1$$

در گزاره (ب) سور وجودی $(\exists)$ وجود دارد بنابراین اگر مجموعه جواب تهی نباشد یعنی فقط بتوانیم یک عدد پیدا کنیم که گزاره‌نما را به گزاره درست تبدیل کند، گزاره درست می‌شود که با فرض $y = 3$ گزاره درست می‌شود.

$$\sim (\exists y \in R ; \frac{y - 3}{5} = 0) \equiv \forall y \in R ; \frac{y - 3}{5} \ne 0)$$

۱۴- متوسط

$A=\{۱,۲,۳,۴,۵\}$

آ) $x+۴=۱۰ \Rightarrow x=۶\notin A$

چون مجموعه جواب تهی است، (دقت کنیم که سور وجودی است) پس ارزش گزاره نادرست است.

ب) $x+۲\le ۹ \Rightarrow x\le ۷$

چون مجموعه جواب با دامنه متغیر برابر است (دقت کنیم که سور عمومی است) پس ارزش گزاره درست است.

۱۵- دشوار

آ) اگر $(p\equiv \forall x,y\in\mathbb{R}; xy=۰ \Rightarrow x=۰\vee y=۰)$ فرض کنیم p یک گزاره درست است و چنانچه

$(q\equiv \forall x,y\in\mathbb{R}; x^۲+y^۲=۰ \Rightarrow x=۰\vee y=۰)$ فرض کنیم q یک گزاره نادرست است.

(مثال نقض: $x=۰$ و $y=۱$ آنگاه $x^۲+y^۲\neq ۰$)

$(\forall x,y\in\mathbb{R}; xy=۰ \Rightarrow x=۰\vee y=۰)$
$\wedge(\forall x,y\in\mathbb{R}; x^۲+y^۲=۰ \Rightarrow x=۰\vee y=۰)$
$\equiv p\wedge q\equiv T\wedge F=F$

ب) اگر $(p\equiv \exists x\in\mathbb{N}; \frac{۵x^۲+۱}{x+۵}=۳)$ و $(q\equiv \forall x\in\mathbb{R}^+; x+\frac{۱}{x}\ge ۲)$ داریم:

$$\frac{۵x^۲+۱}{x+۵}=۳ \Rightarrow ۵x^۲+۱=۳x+۱۵ \Rightarrow ۵x^۲-۳x-۱۴=۰$$

$$(۵x+۷)(x-۲)=۰\Rightarrow \begin{cases} x=-\frac{۷}{۵}\notin\mathbb{N} & \text{غ ق ق}\\ x=۲\in\mathbb{N} \end{cases}$$

به ازای $x=۲$ گزاره p درست می‌شود و گزاره q همواره درست است.

$(\exists x\in\mathbb{N}; \frac{۵x^۲+۱}{x+۵}=۳) \Leftrightarrow (\forall x\in\mathbb{R}^+; x+\frac{۱}{x}\ge ۲)$
$\equiv p \Leftrightarrow q\equiv T \Leftrightarrow T\equiv T$

۱۶- آسان

آ) اگر $(p\equiv ۰<x<۱)$ و $(q\equiv x^۲<x)$

$\sim(p \Rightarrow q)\equiv\sim(\sim p\vee q)\equiv p\wedge\sim q$

پس نقیض گزاره به صورت «$۰<x<۱$ و $x^۲\ge x$» است.

ب) ابوالوفا محمد بوزجانی ریاضی‌دان نیست.

پ) $a\notin\{b,c,d\}$

ت) اگر ($p\equiv$ ۲ عدد زوج) و ($q\equiv$ π عدد گویا)

$\sim(p\vee q)\equiv\sim p\wedge\sim q$

بنابراین نقیض گزاره به صورت (۲ عدد فرد است و عدد π گنگ است)

۱۷- آسان

$\exists x\in\mathbb{R}, \forall y\in\mathbb{R}; x>y$

$\sim(\exists x\in\mathbb{R}, \forall y\in\mathbb{R}; x>y)\equiv\forall x\in\mathbb{R}, \exists y\in\mathbb{R}; x\le y$

۱۸- متوسط

اگر $(p\equiv\forall a,b\in\mathbb{Z}; a<b)$ و $(q\equiv\exists a,b\in\mathbb{Z}; a^۲>b^۲)$ فرض کنیم می‌دانیم عکس و نقیض گزاره $p \Rightarrow q$ به صورت $\sim q \Rightarrow \sim p$ است که داریم:

$\sim(\exists a,b\in\mathbb{Z}; a^۲>b^۲) \Rightarrow \sim(\forall a,b\in\mathbb{R}; a<b)$
$\equiv(\forall a,b\in\mathbb{Z}; a^۲\le b^۲) \Rightarrow (\exists a,b\in\mathbb{R}; a\ge b)$

۱۹- دشوار

آ) تنها عدد اول که مضرب ۵ هم باشد خود ۵ است

مجموعه جواب $=\{۵\}$

ب) $x+۱$ باید یکی از مقسوم‌علیه‌های طبیعی عدد ۱۲ باشد.

$x+۱\in\{۱,۲,۳,۴,۶,۱۲\} \Rightarrow x\in\{۰,۱,۲,۳,۵,۱۱\}$

که $۰\notin\mathbb{N}$ پس

مجموعه جواب $=\{۱,۲,۳,۵,۱۱\}$

پ)

$$\frac{۵x+۶}{x-۲}=\frac{۵x-۱۰+۱۰+۶}{x-۲}=\frac{۵(x-۲)}{x-۲}+\frac{۱۶}{x-۲}=۵+\frac{۱۶}{x-۲}$$

بنابراین $(x-۲)$ باید مقسوم‌علیه عدد ۱۶ شود $(x\ge ۱ \Rightarrow x-۲\ge -۱)$

$x-۲\in\{-۱,۱,۲,۴,۸,۱۶\} \Rightarrow$ مجموعه جواب $=\{۱,۳,۵,۶,۱۰,۱۸\}$

ت) چون به ازای هر $x>۰$ رابطه $x+\frac{۱}{x}\ge ۲$ برقرار است پس مجموعه جوب برای این گزاره‌نما تهی است.

۲۰- آسان

در پرتاب یک تاس فضای نمونه‌ای به صورت $S=\{۱,۲,۳,۴,۵,۶\}$ است که $n(S)=۶$

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)} \Rightarrow \frac{۱}{۳}=\frac{n(A)}{۶} \Rightarrow n(A)=۲$$

هر زیرمجموعه ۲ عضوی از فضای نمونه‌ای، گزاره‌نما را به یک گزاره درست تبدیل می‌کند.

$$\binom{۶}{۲}=\frac{۶!}{۴!\times ۲!}=۱۵$$

پاسخنامه سؤالات تستی

بخش ۱

۱- گزینه «۲» آسان

گزاره یک جمله خبری است و جملات امری و پرسشی و عاطفی نمی‌توانند گزاره باشند و در گزینه ۲، مقدس بودن عدد ۷۲ بار عاطفی و احساسی دارد.

۲- گزینه «۲» متوسط

جدول ارزش گزاره $(۳n+۱)$ دارای $۲^{۳n+۱}$ حالت است پس:

$$۲^{۳n+۱}=۱۲۸=۲^{۷}\Rightarrow ۳n+۱=۷\Rightarrow ۳n=۶\Rightarrow n=۲$$

جدول ارزش $(۵n-۱)$ گزاره دارای $۲^{۵n-۱}$ حالت است با فرض $n=۲$ داریم:

$$۲^{۵(۲)-۱}=۲^{۹}=۵۱۲$$

۳- گزینه «۴» آسان

همیشه اگر یک گزاره از تعداد گزاره‌ها کم کنیم تعداد سطرهای حذف شده با تعداد سطرهای باقی‌مانده برابر می‌شود یعنی در ابتدا ۳۲ سطر داشته‌ایم که چنانچه در ابتدا n گزاره داشته باشیم، خواهیم داشت:

$$۲^{n}=۳۲\Rightarrow ۲^{n}=۲^{۵}\Rightarrow n=۵$$

۴- گزینه «۳» متوسط

چنانچه n گزاره داشته باشیم، n ستون و ۲^{n} سطر خواهیم داشت که $n\times ۲^{n}$ خانه داریم که درون آن‌ها «ن» و «د» نوشته می‌شود که نصفی حرف «ن» و نصفی دیگر حرف «د» هستند. بنابراین تعداد «ن» و «د» با هم برابر $n\times ۲^{n-۱}$ هستند حال که $n=۵$ است.

$$\text{تعداد «ن»ها}=۵\times ۲^{۵-۱}=۵\times ۱۶=۸۰$$

۵- گزینه «۲» آسان

اگر هر عضو از عضوهای مجموعه جواب به جای متغیر، درگزاره‌نما قرار بگیرید، گزاره‌نما را به یک گزاره با ارزش درست تبدیل می‌کند.

$$\sqrt{۳x+۱}\le ۶\Rightarrow ۳x+۱\le ۳۶\Rightarrow ۳x\le ۳۵\Rightarrow x\le ۱۱/۶۶$$

$$۳x+۱\ge ۰\Rightarrow x\ge -\frac{۱}{۳}$$

چون مجموعه جواب زیرمجموعه دامنه متغیر است بنابراین ۱۱ عضو دارد.

$$\text{مجموعه جواب}=\{۱,۲,۳,\dots,۱۱\}$$

۶- گزینه «۴» آسان

$$\sim(p\Rightarrow q)\equiv\sim(\sim p\vee q)\equiv p\wedge\sim q$$

۷- گزینه «۱» آسان

$$(\sim p\Rightarrow\sim q)\wedge(p\vee q)\equiv(p\vee\sim q)\wedge(p\vee q)$$
$$\equiv p\vee(\sim q\wedge q)\equiv p\vee F\equiv p$$

۸- گزینه «۲» آسان

$$(\sim p\vee\sim q)\Rightarrow(p\wedge r)\equiv\sim(\sim p\vee\sim q)\vee(p\wedge r)$$
$$\equiv(p\wedge q)\vee(p\wedge r)\equiv p\wedge(q\vee r)$$

۹- گزینه «۱» دشوار

$$p\Leftrightarrow q\equiv(p\Rightarrow q)\wedge(q\Rightarrow p)\equiv(\sim p\vee q)\wedge(\sim q\vee p)$$
$$\equiv[(\sim p\vee q)\wedge\sim q]\vee[(\sim p\vee q)\wedge p]\equiv$$
$$[(\sim p\wedge\sim q)\vee\underbrace{(q\wedge\sim q)}_{F}]\vee[\underbrace{(\sim p\wedge p)}_{F}\vee(q\wedge p)$$
$$\equiv(\sim p\wedge\sim q)\vee(q\wedge p)\equiv$$
$$\sim(p\vee q)\vee(p\wedge q)$$

۱۰- گزینه «۲» دشوار

$$(\sim p\vee q)\Leftrightarrow q\equiv[(\sim p\vee q)\Rightarrow q]\wedge[q$$
$$\Rightarrow(\sim p\vee q)]\equiv[\sim(\sim p\vee q)\vee q]\wedge[\sim q\vee(\sim p\vee q)]$$
$$\equiv[(p\wedge\sim q)\vee q]\wedge[(\sim q\vee q)\vee\sim p]$$
$$\equiv[(p\vee q)\wedge\underbrace{(\sim q\vee q)}_{T}]\wedge[T\vee\sim p]\equiv$$
$$(p\vee q)\wedge T\equiv p\vee q$$

۱۱- گزینه «۳» متوسط

گزاره $p\Rightarrow q$ زمانی نادرست است که ($p\equiv T$ و $q\equiv F$) باشد و اگر q نادرست باشد $q\wedge X$ حتماً نادرست است پس $(p\Rightarrow r)\wedge q$ حتماً نادرست است.

۱۲- گزینه «۳» دشوار

به بررسی تک به تک گزینه‌ها می‌پردازیم:

گزینه «۱»: $(p\vee q)\vee(\sim q\vee\sim p)\equiv(p\vee\sim p)\vee(q\vee\sim q)\equiv T\vee T\equiv T$

گزینه «۲»: $(\sim p\wedge q)\vee(\sim p\vee q)\equiv[\underbrace{(\sim p\wedge q)\vee\sim p}_{\text{جذب}}]\vee q\equiv\sim p\vee q$

اگر $q\equiv T$ باشد، ارزش کل گزاره درست می‌شود.

گزینه «۳»: $(p\wedge\sim q)\wedge(\sim p\vee q)\equiv[(\sim p\vee q)\wedge p]\wedge\sim q$

$$\equiv[\underbrace{(\sim p\wedge p)}_{F}\vee(q\wedge p)]\wedge\sim q$$

$$\equiv(q\wedge p)\wedge\sim q\equiv(q\wedge\sim q)\wedge p\equiv F\wedge p\equiv F$$

با توجه به اینکه جواب تست مشخص شد، اما گزینه ۴ را هم بررسی می‌کنیم.

گزینه «۴»: $(p\vee\sim q)\wedge(\sim p\vee\sim q)\equiv(p\wedge\sim p)\vee\sim q$

$$\equiv F\vee\sim q\equiv\sim q$$

اگر $q\equiv F$ باشد $\wedge q\equiv T$ می‌شود.

۱۳- گزینه «۲» — دشوار

روش اول:

$$(P \Rightarrow q) \Rightarrow (\sim r \wedge p) \equiv (\sim p \vee q)$$
$$\Rightarrow (\sim r \wedge p) \equiv \sim(\sim p \vee q) \vee (\sim r \wedge p) \equiv$$
$$(p \wedge \sim q) \vee (\sim r \wedge p) \equiv (p \wedge \sim q) \vee (p \wedge \sim r) \equiv p \wedge (\sim q \vee \sim r)$$

روش دوم: می‌توانیم به تک به تک گزاره‌ها یک ارزشی به دلخواه بدهیم و نتیجه بدست آمده با گزینه‌ها را بررسی کنیم و هر گزینه‌ای که با جواب ما متفاوت بود حذف کنیم و این عمل را تا آنجا ادامه دهیم تا تنها یک گزینه برایمان باقی بماند.

به طور مثال اگر فرض کنیم $p \equiv q \equiv r \equiv T$ داریم:

$$(p \Rightarrow q) \Rightarrow (\sim r \wedge p) \equiv (T \Rightarrow T) \Rightarrow (F \wedge T) \equiv T \Rightarrow F \equiv F$$

حالا به بررسی گزینه‌ها می‌پردازیم:

گزینه «۱» :

$(p \Rightarrow q) \wedge r \equiv (T \Rightarrow T) \wedge T \equiv T \wedge T \equiv T$ حذف

گزینه «۲»: $p \wedge (\sim r \vee \sim q) \equiv T \wedge (F \vee F) \equiv T \wedge F \equiv F$

گزینه «۳»: $(p \wedge \sim q) \wedge (r \Rightarrow q) \equiv (T \wedge F) \wedge (T \Rightarrow T) \equiv F \wedge T \equiv F$

گزینه «۴»: $p \vee (q \vee \sim r) \equiv T \vee (T \vee F) \equiv T \vee T \equiv T$ حذف

بنابراین جواب گزینه ۲ یا ۳ است حال اگر $r \equiv p \equiv T$ و $q \equiv F$ فرض کنیم داریم:

$$(p \Rightarrow q) \Rightarrow (\sim r \wedge p) \equiv (T \Rightarrow F) \Rightarrow (F \wedge T) \equiv F \Rightarrow F \equiv T$$

حالا فقط گزینه ۲ و ۳ را بررسی می‌کنیم.

گزینه «۲»: $p \wedge (\sim r \vee \sim q) \equiv T \wedge (F \vee T) \equiv T \wedge T \equiv T$

گزینه «۳» :

$(p \wedge \sim q) \wedge (r \Rightarrow q) \equiv (T \wedge T) \wedge (T \Rightarrow F) \equiv T \wedge F \equiv F$ حذف

بنابراین گزینه «۲» صحیح است. (از این روش زمانی استفاده کنید که روابط جبر گزاره‌ها از یادتان رفته باشد.)

۱۴- گزینه «۳» — دشوار

روش اول:

$$\sim p \wedge [(p \Rightarrow q) \vee (p \Leftrightarrow q)]$$
$$\equiv \sim p \wedge [(\sim p \vee q) \vee [(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)]] \equiv$$
$$\sim p \wedge \underbrace{[(\sim p \vee q) \vee [(\sim p \vee q) \wedge (\sim q \vee p)]]}_{\text{جذب}} \equiv \sim \underbrace{p \wedge (\sim p \vee q)}_{\text{جذب}} \equiv \sim p$$

روش دوم: اگر فرض کنیم $p \equiv q \equiv T$ داریم:

$$\sim p \wedge \underbrace{[(p \Rightarrow q) \vee (p \Leftrightarrow q)]}_{X} \equiv F \wedge X \equiv F$$

واضح است که گزینه «۱» و «۲» حذف می‌شوند. اگر $p \equiv T$ و $q \equiv F$

$$\sim p \wedge \underbrace{[(p \Rightarrow q) \vee (p \Leftrightarrow q)]}_{X} \equiv F \wedge X \equiv F$$

که گزینه «۳» و «۴» را بررسی می‌کنیم:

گزینه «۳»: $\sim p \equiv F$

گزینه «۴»: $\sim q \equiv T$ حذف

پس گزینه «۳» صحیح است.

۱۵- گزینه «۴» — دشوار

زمانی $(\sim p \vee q)$ نادرست است که $\sim p \equiv q \equiv F$ بنابراین $p \equiv T$ است و چون $(p \Rightarrow r)$ نادرست است و p گزاره درست می‌باشد پس $r \equiv F$ حالا به بررسی تک به تک گزینه‌ها می‌پردازیم:

گزینه «۱»:

$$\sim[(p \Rightarrow q) \vee p] \sim r \equiv \sim[(T \Rightarrow F) \vee T] \vee T$$
$$\equiv \sim \underbrace{[F \vee T]}_{T} \vee T \equiv F \vee T \equiv T$$ حذف

گزینه «۲»: $r \Rightarrow [\underbrace{(p \wedge \sim q) \vee q}_{x}] \equiv F \Rightarrow x \equiv T$ حذف

گزینه «۳»: $p \wedge (r \Rightarrow \underbrace{(\sim p \vee q)}_{X}) \equiv T \wedge (F \Rightarrow X) \equiv T \wedge T \equiv T$

گزینه «۴»: $(p \wedge r) \vee \sim (r \Rightarrow \underbrace{(p \vee q)}_{X}) \equiv (T \wedge F) \vee \sim (F \Rightarrow X)$

$$\equiv F \vee \sim T \equiv F \vee F \equiv F$$

۱۶- گزینه «۴» — آسان

$$[(p \vee q) \wedge (p \Rightarrow q)] \equiv [(p \vee q) \wedge (\sim p \vee q)]$$
$$\equiv [(p \wedge \sim p) \vee q)] \equiv F \vee q \equiv q$$

۱۷- گزینه «۴» — آسان

$$(\sim p) \vee (p \Rightarrow q) \equiv \underbrace{\sim p \vee (\sim p \vee q)}_{\text{جذب}} \equiv \sim p \equiv F \Rightarrow P \equiv T$$

اگر $p \equiv T$ باشد گزاره $p \vee q$ همواره درست است.

۱۸- گزینه «۳» — متوسط

قسمت اول:

$$[(p \Rightarrow q) \Rightarrow p] \equiv (\sim p \vee q) \Rightarrow p \equiv$$
$$\sim(\sim p \vee q) \vee p \equiv \underbrace{(p \wedge \sim q) \vee p}_{\text{جذب}} \equiv p$$

قسمت دوم: $\underbrace{p \wedge (p \vee q)}_{\text{جذب}} \equiv p$

$$[(p \Rightarrow q) \Rightarrow p] \Leftrightarrow p \wedge (p \vee q) \equiv p \Leftrightarrow p \equiv T$$

۱۹- گزینه «۱» — متوسط

$$p \Rightarrow [q \Rightarrow \sim(p \Rightarrow \sim q)] \equiv \sim p \vee [\sim q \vee (\sim p \vee \sim q)]$$
$$\sim p \vee [\sim q \vee (p \vee q)] \equiv \sim p \vee [(\sim q \vee p) \wedge (\underbrace{\sim q \vee q}_{T})] \equiv$$
$$\sim p \vee (\sim q \vee p) \equiv (\sim p \vee p) \vee \sim q \equiv T \vee \sim q \equiv T$$

۲۰- گزینه «۲» — متوسط

$$\sim(p \wedge q) \wedge (p \Rightarrow q) \equiv (\sim p \vee \sim q) \wedge (\sim p \vee q) \equiv$$
$$\sim p \vee (\sim q \wedge q) \equiv \sim p \vee F \equiv \sim p$$

۲۱- گزینه «۳» — آسان

$$p \vee (\sim p \wedge q) \equiv F \vee (T \wedge F) \equiv F \vee F \equiv F$$
$$\sim q \wedge (\sim p \vee q) \equiv T \wedge (T \vee F) \equiv T \wedge T \equiv T$$

۲۲- گزینه «۲» آسان

سطر اول را در گزینه‌ها بررسی می‌کنیم:

گزینه «۱»: $p \Rightarrow q \equiv T \Rightarrow T \equiv T$ حذف

گزینه «۲»: $q \Rightarrow \sim p \equiv T \Rightarrow F \equiv F$

گزینه «۳»: $p \Rightarrow q \equiv T \Rightarrow T \equiv T$ حذف

گزینه «۴»: $\sim p \Rightarrow q \equiv F \Rightarrow T \equiv T$ حذف

با توجه به حذف ۳ گزینه، جواب گزینه ۲ است.

۲۳- گزینه «۳» آسان

با توجه به اینکه $p \Leftrightarrow q$ نادرست است پس $p \equiv T$ و $q \equiv F$ است و یا این که $p \equiv F$ و $q \equiv T$ می‌باشد. حال به بررسی تک به تک گزینه‌ها می‌پردازیم:

گزینه «۱»: $\sim p \Rightarrow q \equiv F \Rightarrow F \equiv T$ حذف

گزینه «۲»: $\sim q \Rightarrow p \equiv T \Rightarrow T$ حذف

گزینه «۳»: $p \wedge q \equiv T \wedge F \equiv F$ یا $p \wedge q \equiv F \wedge T \equiv F$

گزینه «۴»: $p \Leftrightarrow \sim q \equiv T \Leftrightarrow T \equiv T$

۲۴- گزینه «۴» دشوار

چون $p \Leftrightarrow q$ نادرست است پس یکی از گزاره‌ها درست و دیگری نادرست است و چون $p \Rightarrow q$ درست است بنابراین $p \equiv F$ و $q \equiv T$ است، حالا به بررسی تک به تک گزینه‌ها می‌پردازیم:

گزینه «۱»: $q \Rightarrow p \equiv T \Rightarrow F \equiv F$ حذف

گزینه «۲»: $p \vee \sim q \equiv F \vee F \equiv F$ حذف

گزینه «۳»: $p \wedge q \equiv F \wedge T \equiv F$ حذف

گزینه «۴»: $\sim p \wedge q \equiv T \wedge T \equiv T$

بنابراین جواب گزینه «۴» است.

۲۵- گزینه «۱» دشوار

سطر سوم را در گزینه ۴ قرار می‌دهیم:

$$((p \wedge q) \Rightarrow r) \Rightarrow [(q \Rightarrow (p \vee r)) \Rightarrow \sim((p \wedge r) \Rightarrow q)]$$
$$\equiv (\underbrace{(T \wedge F) \Rightarrow T}_{T}) \Rightarrow [F \Rightarrow \underbrace{(T \vee T))}_{T} \Rightarrow \sim(\underbrace{(T \wedge T) \Rightarrow F}_{F})]$$
$$\equiv T \Rightarrow (T \Rightarrow T) \equiv T \Rightarrow T \equiv T$$ حذف

سطر ۵ را در گزینه ۳ قرار می‌دهیم:

$$(r \Rightarrow (p \vee q)) \Rightarrow [((p \Rightarrow r) \Rightarrow (\sim p \wedge r)) \wedge q] \equiv$$
$$(T \Rightarrow \underbrace{(F \vee T)}_{T}) \Rightarrow [(\underbrace{(F \Rightarrow T)}_{T} \Rightarrow (T \wedge T)) \wedge T] \equiv$$ حذف
$$T \Rightarrow ((\underbrace{(T \Rightarrow T)}_{T} \wedge T) \equiv T \Rightarrow (T \wedge T) \equiv T \wedge T \equiv T$$

سطر ۲ را در گزینه ۲ قرار می‌دهیم:

$$(\sim r \Rightarrow (p \vee \sim q)) \Rightarrow ((p \Rightarrow p) \wedge (\sim q \wedge r))$$
$$\equiv (T \Rightarrow (T \vee F)) \Rightarrow ((T \Rightarrow T) \wedge (F \wedge F)) \equiv$$
$$(T \Rightarrow T) \Rightarrow (T \wedge F) \equiv T \Rightarrow F \equiv F$$

بنابراین گزینه «۱» صحیح است.

۲۶- گزینه «۱» دشوار

گزاره x در ۳ سطر درست و در ۵ سطر نادرست است، چون تعداد درست‌ها کمتر از تعداد نادرست است با حالت‌های که x گزاره درست است شروع می‌کنیم به عنوان مثال در سطر سوم $p \equiv r \equiv T$ و $q \equiv F$ و $x \equiv T$ است.

اگر داخل گزینه‌های ۲ و ۴ قرار دهیم، داریم:

گزینه «۲»: $(T \Rightarrow (T \vee F)) \Rightarrow ((T \vee F) \wedge (F \wedge F))$ $\equiv (T \Rightarrow T) \Rightarrow (T \wedge F) \equiv T \Rightarrow F \equiv F$ حذف

گزینه «۴»: $(T \Rightarrow (T \vee F)) \Rightarrow [((T \Rightarrow T) \Rightarrow (F \wedge T)) \wedge F]$ $\equiv (T \Rightarrow T) \Rightarrow [(T \Rightarrow F) \wedge F] \equiv$

$T \Rightarrow (F \wedge F) \equiv T \Rightarrow F \equiv F$ حذف

بنابراین این دو گزینه حذف می‌شوند، حالا سطر هفتم را در گزینه ۳ بررسی می‌کنیم:

گزینه «۳»: $[F \Rightarrow ((F \vee T) \Rightarrow (F \wedge T))] \Rightarrow (\sim (F \vee T) \wedge F)$ $\equiv [F \Rightarrow (T \Rightarrow T)] \Rightarrow (\sim T \wedge F)$

$\equiv (F \Rightarrow T) \Rightarrow (F \wedge F) \equiv T \Rightarrow F \equiv F$ حذف

بنابراین جواب گزینه «۱» است.

۲۷- گزینه «۳» متوسط

به بررسی تک به تک گزینه‌ها می‌پردازیم:

گزینه «۱»: $\sim (p \vee \sim q) \wedge r \equiv \sim (T \vee T) \wedge r \equiv F \wedge r \equiv F$

گزینه «۲»: $(p \vee \sim r) \wedge q \equiv \sim (T \vee \sim r) \wedge F \equiv F \wedge F \equiv F$

گزینه «۳»: $(p \wedge \sim r) \vee \sim q \equiv (T \wedge \sim r) \vee T \equiv \sim r \vee T \equiv T$

گزینه «۴»: $(q \wedge r) \vee \sim p \equiv (F \wedge r) \vee F \equiv F \vee F \equiv F$

۲۸- گزینه «۲» متوسط

$A: (p \wedge q) \Rightarrow \sim p \equiv (T \wedge F) \Rightarrow F \equiv F \Rightarrow F \equiv T$

$B: (p \vee \sim q) \Leftrightarrow (\sim p \wedge q) \equiv (T \vee T) \Leftrightarrow (F \wedge F) \equiv T \Leftrightarrow F \equiv F$

۲۹- گزینه «۲» متوسط

زمانی $p \Rightarrow (p \wedge q)$ نادرست است که $p \equiv T$ و $p \wedge q \equiv F$ باشد پس $p \equiv T$ و $q \equiv F$

$p \Leftrightarrow q \equiv T \Leftrightarrow F \equiv F$

$q \Rightarrow r \equiv F \Rightarrow r \equiv T$

۳۰- گزینه «۳» — دشوار

ابتدا ارزش گزاره $(p \Rightarrow q)\wedge(p \Rightarrow \sim q)$ را بدست می‌آوریم:

$$(p\Rightarrow q)\wedge(p\Rightarrow \sim q)\equiv(\sim p\vee q)\wedge(\sim p\vee\sim q)\equiv$$
$$\sim p\vee(q\wedge\sim q)\equiv\sim p\vee F\equiv\sim p$$

می‌دانیم $x \Leftrightarrow \sim p$ زمانی درست است که $x\equiv\sim p$ باشد.

۳۱- گزینه «۳» — متوسط

$a=b \Rightarrow a^2=b^2$ کافی

$a^2=b^2 \not\Rightarrow a=b$ غیر لازم

۳۲- گزینه «۴» — آسان

به جای x هر عدد حقیقی دلخواه را می‌توان قرار داد اما ممکن است به ازای بعضی از آن‌ها تساوی برقرار نشود (تساوی نادرست می‌شود) که تبدیل به گزاره نادرست می‌شود و مربوط به دامنه متغیر گزاره‌نما می‌شود.

۳۳- گزینه «۳» — متوسط

دامنه متغیر را با D و مجموعه جواب را با S نشان می‌دهیم:

$x-4\ge 0 \Rightarrow x\ge 4 \Rightarrow$ دامنه متغیر $=D=[4,+\infty)$

$\sqrt{x-4}<3 \Rightarrow x-4<9 \Rightarrow x<13 \xrightarrow{S\subset D}$ جواب

مجموعه $=S=[4,13]$

۳۴- گزینه «۲» — متوسط

$$\frac{x^2}{2|x|-3}=3 \Rightarrow x^2=6|x|-9 \Rightarrow x^2-6|x|+9=0$$

با فرض $|x|=t$ داریم:

$$t^2-6t+9=0 \Rightarrow (t-3)^2=0\Rightarrow t=3$$
$$\Rightarrow |x|=3\Rightarrow x=\pm3 \to S=\{-3,3\}$$

۳۵- گزینه «۱» — متوسط

باید دنبال گزینه‌ای باشیم که به ازای هر مقدار دلخواه و طبیعی x، حداقل یک مقدار طبیعی برای y یافت شود که در رابطه $y-x=6 \Rightarrow y=x+6$ این قاعده برقرار است با این وجود به بررسی سایر گزینه‌ها می‌پردازیم:

گزینه «۲»: $x=1\Rightarrow 1-y=6 \Rightarrow y=-5\notin\mathbb{N}$

گزینه «۳»: $x=7 \Rightarrow 7+y=6\Rightarrow y=-1\notin \mathbb{N}$

گزینه «۴»: $x=4\Rightarrow 4y=6\Rightarrow y=\frac{3}{2}\notin\mathbb{N}$

۳۶- گزینه «۱» — دشوار

$\forall x\in\mathbb{R}; x^2+2>2x$

$$x^2-2x+2>0\Rightarrow x^2-2x+1+1>0\Rightarrow (x-1)^2+1>0$$

بدیهی و همواره قابل قبول است

با این وجود به بررسی سایر گزینه‌ها می‌پردازیم:

معادله هیچ جوابی ندارد

گزینه «۲»: $\frac{x-1}{x}=x\Rightarrow x^2=x-1\Rightarrow x^2-x+1=0 \quad \Delta=1-4=-3<0$

گزینه «۳»: $\exists x\in\mathbb{R}; |x+\frac{1}{x}|<2$

می‌دانیم به ازای هر مقدار $x\in\mathbb{R}$ داریم: $|x+\frac{1}{x}|\ge2$، پس به ازای هیچ مقدار از $x\in\mathbb{R}$ رابطه برقرار نیست.

گزینه «۴»: به ازای $x=2$ این رابطه برقرار نیست پس ارزش سور عمومی نادرست است.

۳۷- گزینه «۴» — متوسط

به بررسی گزینه‌ها می‌پردازیم:

گزینه «۱»: به ازای $x=1$ و $y=3$ رابطه $5x+3y=8$ برقرار است.

گزینه «۲»: به ازای $x=-5$ و $y=-1$ رابطه $3x+2y=-17$ برقرار است.

گزینه «۳»: به ازای $x=41$ و $y=1$ رابطه $xy=41$ برقرار است.

گزینه «۴»: مجموع مربعات هیچ دو عدد صحیحی برابر ۷ نیست.

۳۸- گزینه «۳» — آسان

می‌دانیم $\sim(\forall x\in\mathbb{Z}; P(x))\equiv\exists x\in\mathbb{Z};\sim P(x)$ پس داریم:

$$\sim(\forall x\in\mathbb{Z}; |x-1|\ge\frac{3}{x^2+4})\equiv\exists x\in\mathbb{Z};|x-1|<\frac{3}{x^2+4}$$

۳۹- گزینه «۳» — دشوار

می‌دانیم $\sim(\sim p)=p$ و $\sim(p\vee q)\equiv\sim p\wedge\sim q$ و $p\Rightarrow q\equiv\sim p\vee q$

و $\sim(\forall x\in\mathbb{R}; P(x))\equiv\exists x\in\mathbb{R};\sim P(x)$

$$(x^2<y)\Rightarrow(x>1+y)\equiv\sim(x^2<y)\vee(x\ge1+y)$$

$$\sim(\forall x,y\in\mathbb{R};(x^2<y)\vee(x\ge1+y))\equiv$$
$$\exists x,y\in\mathbb{R};\sim(\sim(x^2<y)\vee(x\ge1+y))$$
$$\equiv\exists x,y\in\mathbb{R};(x^2<y)\wedge\sim(x\ge1+y)$$
$$\equiv\exists x,y\in\mathbb{R};(x^2<y)\wedge(x\le1+y)$$

۴۰- گزینه «۳» — دشوار

می‌دانیم $\sim(p\Leftrightarrow q)\equiv\sim p\Leftrightarrow q\equiv p\Leftrightarrow\sim q$

و $\sim(p\vee q)\equiv\sim p\wedge\sim q$

$$\sim(\forall x,y\in\mathbb{R};(x+y=5\Leftrightarrow x=2\vee y=3)$$
$$\equiv\exists x,y\in\mathbb{R};\sim(x+y=5\Leftrightarrow x=2\vee y=3)$$
$$\equiv\exists x,y\in\mathbb{R};(x+y=5\Leftrightarrow\sim(x=2\vee y=3)$$
$$\equiv\exists x,y\in\mathbb{R};(x+y=5\Leftrightarrow x\ne2\wedge y\ne3)$$

پاسخنامه

سؤالات تشریحی

بخش ۲

۱- متوسط

آ) عضوهای مجموعه A تشکیل یک دنباله حسابی با قدرنسبت ۴ می‌دهند و جمله اول این دنباله نیز عدد ۳ است با توجه به دستور دنباله حسابی که به صورت $t_n = a + (n-۱)d$ است داریم:

$$t_n = ۳ + (n-۱)\times ۴ = ۳ + ۴n - ۴ = ۴n - ۱$$

می‌دانیم در دنباله‌ها $n \in \mathbb{N}$ است.

$$A = \{۴n - ۱ \mid n \in \mathbb{N}\}$$

ب) مجموعه B یک مجموعه ۲ عضوی است که جمع دو عضو آن $S = ۲\sqrt{۲} - ۱ + ۲\sqrt{۲} + ۱ = ۴\sqrt{۲}$ و حاصلضرب این دو عضو به صورت $P = (۲\sqrt{۲} - ۱)(۲\sqrt{۲} + ۱) = ۸ - ۱ = ۷$ است، پس این دو عضو ریشه‌های معادله $x^۲ - Sx + P = ۰$ هستند که $x^۲ - ۴\sqrt{۲}x + ۷ = ۰$ است.

$$B = \{x \mid x \in \mathbb{R}\,,\, x^۲ - ۴\sqrt{۲}x + ۷ = ۰\}$$

۲- متوسط

آ) $|x| \le ۲ \Rightarrow -۲ \le x \le ۲ \xrightarrow{x\in\mathbb{Z}} x \in \{-۲, -۱, ۰, ۱, ۲\}$

عضوهای مجموعه A به صورت $(۲x - ۱)$ است که به جای x باید اعداد $(-۲, -۱, ۰, ۱, ۲)$ را قرار دهیم.

$$A = \{-۵, -۳, -۱, ۱, ۳\}$$

ب) نامعادله $x^۲ - ۳x - ۱۰ < ۰$ را حل می‌کنیم:

$$x^۲ - ۳x - ۱۰ = ۰ \Rightarrow (x-۵)(x+۲) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} x = ۵ \\ x = -۲ \end{cases}$$

x	$-\infty$		-۲		۵		$+\infty$
$x^۲-۳x+۱۰$		+	۰	−	۰	+	

$$x \in (-۲, ۵) \xrightarrow{x\in\mathbb{N}} x \in \{۱, ۲, ۳, ۴\}$$

عضوهای مجموعه B به صورت ۲^x است که به جای x اعداد ۱, ۲, ۳, ۴ را قرار می‌دهیم.

$$B = \{۲, ۴, ۸, ۱۶\}$$

۳- متوسط

اگر فرض کنیم مجموعه A دارای x عضو باشد آنگاه ۲^x زیرمجموعه دارد. حال اگر ۲ عضو به مجموعه A اضافه کنیم، تعداد عضوهای آن $(x+۲)$ می‌شود و $۲^{x+۲}$ زیرمجموعه دارد که طبق گفته مسئله داریم:

$$۲^{x+۲} - ۲^x = ۴۸ \Rightarrow ۲^x(۲^۲ - ۱) = ۴۸ \Rightarrow ۲^x \times ۳ = ۴۸$$
$$\Rightarrow ۲^x = ۱۶ = ۲^۴ \Rightarrow x = ۴$$

۴- متوسط

اگر فرض کنیم مجموعه A دارای x عضو باشد، آنگاه ۲^x زیرمجموعه دارد. حال اگر ۲ عضو از مجموعهٔ A حذف کنیم، تعداد عضوهای آن $(x-۲)$ می‌شود و $۲^{x-۲}$ زیرمجموعه دارد، که طبق گفته مسئله داریم:

$$۲^x - ۲^{x-۲} = ۳۸۴ \Rightarrow ۲^{x-۲}(۲^۲ - ۱) = ۳۸۴ \Rightarrow ۲^{x-۲} \times ۳ = ۳۸۴ \Rightarrow$$
$$۲^{x-۲} = ۱۲۸ = ۲^۷ \Rightarrow x - ۲ = ۷ \Rightarrow x = ۹$$

۵- متوسط

اگر تعداد عضوهای مجموعه A برابر x باشد، تعداد عضوهای مجموعه B برابر $(۱۲-x)$ است و مشخص است که تعداد زیرمجموعه‌های A برابر ۲^x و تعداد اعضای مجموعه توانی B، $۲^{۱۲-x}$ است که داریم:

$$\frac{۲^x}{۲^{۱۲-x}} = ۴ \Rightarrow ۲^{۲x-۱۲} = ۲^۲ \Rightarrow ۲x - ۱۲ = ۲ \Rightarrow ۲x = ۱۴ \Rightarrow x = ۷$$

۶- دشوار

آ) تعداد زیرمجموعه‌های سره و ناتهی یک مجموعه n عضوی $۲^n - ۲$ است پس مجموعهٔ A، $۲^۸ - ۲ = ۲۵۴$ زیرمجموعه سره و ناتهی دارد.

ب) تعداد زیرمجموعه‌های k عضوی یک مجموعه n عضوی برابر $\binom{n}{k}$ است.

$$\text{تعداد زیرمجموعه‌های ۵ عضوی A} = \binom{۸}{۵} = \frac{۸!}{۵} = \frac{۸!}{۵!\times ۳!} = \frac{۸\times۷\times۶\times۵!}{۵!\times۶} = ۵۶$$

پ) به کمک اصل ضرب مسئله را حل می‌کنیم. هر عضو از مجموعه A یا در زیرمجموعه مورد نظر قرار دارد و یا اینکه قرار ندارد، پس هر عضو برای قرار گرفتن در زیرمجموعه ۲ حالت دارد (کد ۰، ۱) ولی چون عدد ۵ در مجموعه مطلوب قرار دارد (فقط کد ۱) و اعداد ۱ و ۷ قرار ندارند (فقط کد ۰) پس دارای ۱ حالت هستند.

کد ۸ رقمی متناظر با زیرمجموعه مورد نظر=

$$\underbrace{۱}_{۰}\ \underset{\underset{۰\text{یا}۱}{\downarrow}}{\overset{۲}{۲}}\ \underset{\underset{۰\text{یا}۱}{\downarrow}}{\overset{۳}{۲}}\ \underset{\underset{۰\text{یا}۱}{\downarrow}}{\overset{۴}{۲}}\ \underbrace{۵}_{۱}\ \underset{\underset{۰\text{یا}۱}{\downarrow}}{\overset{۶}{۲}}\ \underbrace{۷}_{۰}\ \underset{\underset{۰\text{یا}۱}{\downarrow}}{\overset{۸}{۲}} = ۲^۵ = ۳۲$$

۷- دشوار

کد زیرمجموعه مورد نظر دارای دو عدد ۱ و سه عدد صفر است که دو عدد ۱ متوالی هستند که به صورت ۱۱,۰,۰,۰ می‌خواهند صف شوند.

$$\frac{4!}{3!}=4$$ = کد ۵ رقمی متناظر با زیرمجموعه

۸- آسان

حتماً $x+2y=5$ و $x-y=2$ بوده است تا $A=B$ شود.

$$\begin{cases}x-y=2\\x+2y=5\end{cases}\Rightarrow 3y=3\Rightarrow y=1,\ x=3$$

۹- آسان

هر دو مجموعه A و B، ۳ عضوی هستند.

$$3x+4y+1=5\Rightarrow 3x+4y=4$$
$$3x-2y+1=2\Rightarrow 3x-2y=1$$
$$\begin{cases}3x+4y=4\\-3x+2y=-1\end{cases}\Rightarrow 6y=3\Rightarrow y=\frac{1}{2}$$
$$3x-2(\frac{1}{2})=1\Rightarrow 3x=2\Rightarrow x=\frac{2}{3}$$

۱۰- آسان

اگر A مجموعهٔ n عضوی باشد داریم:

$$2^{n+4}-2^n=120\Rightarrow 2^n(2^4-1)=120$$
$$\Rightarrow 2^n\times 15=120\Rightarrow 2^n=8\Rightarrow n=3$$

تعداد زیرمجموعه‌های سره و ناتهی هر مجموعه n عضوی 2^n-2 است.

$6=2^3-2=$ تعداد زیرمجموعه‌های سره و ناتهی A

۱۱- آسان

اگر A یک مجوعهٔ n عضوی باشد داریم:

$$2^{n+3}-2^n=56\Rightarrow 2^n(2^3-1)=56$$
$$\Rightarrow 2^n\times 7=56\Rightarrow 2^n=8\Rightarrow n=3$$

۱۲- متوسط

روش اول: متمم مجموعه A به صورت $A'=\{x\in U\mid x\notin A\}$ تعریف می‌شود، حالا برای اثبات اینکه $B'\subseteq A'$ باید نشان دهیم $\forall x;(x\in B'\Rightarrow x\in A')$ بنابراین داریم:

$$\forall x;\ x\in B'\Rightarrow x\notin B\overset{A\subseteq B}{\Rightarrow} x\notin A$$
$$\Rightarrow x\in A'\Rightarrow B'\subseteq A'$$

روش دوم:

$$A\subseteq B\Rightarrow A\cap B=A\Rightarrow (A'\cap B)'=A'$$
$$\Rightarrow A'\cup B'=A'\Rightarrow B'\subseteq A'$$

۱۳- آسان

برای اثبات $\varnothing\subseteq A$ باید نشان دهیم $\forall x;(x\in\varnothing\Rightarrow x\in A)$

$x\in\varnothing$ مقدم گزاره شرطی $(x\in\varnothing\Rightarrow x\in A)$ است که ارزش آن همواره نادرست است، بنابراین به انتفاع مقدم ارزش گزاره شرطی درست است و $\varnothing\subseteq A$ است.

۱۴- متوسط

آ) باید ثابت کنیم اگر $x\in A-B$ باشد آنگاه $x\in A$ است.

$$\forall x;x\in(A-B)\Rightarrow x\in A\wedge x\neq B\Rightarrow x\in A$$

نتیجه: $\forall x;(x\in A-B\Rightarrow x\in A)\Rightarrow A-B\subseteq A$

ب) باید ثابت کنیم اگر $x\in A$ باشد، آنگاه $x\in A\cup B$ است.

$$\forall x;x\in A\Rightarrow x\in A\vee x\in B\Rightarrow x\in A\cup B$$

نتیجه: $\forall x;(x\in A\Rightarrow x\in A\cup B)\Rightarrow A\subseteq A\cup B$

۱۵- دشوار

آ) $\forall x;x\in(A\cup B)\Leftrightarrow x\in A\vee x\in B\Leftrightarrow x\in A\vee x\in B\Leftrightarrow x\in(B\cup A)$

بنابراین: $(\forall x;x\in(A\cup B)\Leftrightarrow x\in(B\cup A))$
$(A\cup B)\subseteq(B\cup A)\wedge(B\cup A)\subseteq(A\cup B)\Leftrightarrow A\cup B=B\cup A$

ب) $\forall x;x\in(A\cup B)'\Leftrightarrow x\notin(A\cup B)\Leftrightarrow x\notin A\wedge x\notin B$
$\Leftrightarrow x\in A'\wedge x\in B'\Leftrightarrow x\in(A'\cap B')$

بنابراین: $(\forall x;x\in(A\cup B)'\Leftrightarrow x\in(A'\cap B'))$
$\Rightarrow (A\cup B)\subseteq(A'\cap B')\wedge(A'\cap B')\subseteq(A\cup B)$

$$\Leftrightarrow (A\cup B)'=A'\cap B'$$

۱۶- دشوار

$$\forall x;x\in A\cup(B\cup C)\Leftrightarrow x\in A\vee x\in(B\cup C)$$
$$\Leftrightarrow x\in A\vee(x\in B\vee x\in C)\Leftrightarrow$$
$$(x\in A\vee x\in B)\vee x\in C\Leftrightarrow x\in(A\cup B)\vee x\in C$$
$$\Rightarrow x\in(A\cup B)\cup C$$

بنابراین: $(\forall x;x\in A\cup(B\cup C)\Leftrightarrow x\in(A\cup B)\cup C)$

$$\Leftrightarrow A\cup(B\cup C)\subseteq(A\cup B)\cup C\wedge(A\cup B)\cup C\subseteq A\cup(B\cup C)$$
$$\Leftrightarrow A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$$

۱۷- آسان

آ)
$$\left.\begin{matrix}B\subseteq B & \text{بدیهی}\\A\subseteq B & \text{فرض}\end{matrix}\right\}\Rightarrow(A\cup B)\subseteq B\cup B$$
$$\Rightarrow\left.\begin{matrix}(A\cup B)\subseteq B & \\B\subseteq(A\cup B) & \text{بدیهی}\end{matrix}\right\}\Rightarrow A\cup B=B$$

ب)
$$\left.\begin{matrix}\left.\begin{matrix}A\subseteq A & \text{بدیهی}\\A\subseteq B & \text{فرض}\end{matrix}\right\}\Rightarrow A\cap A\subseteq A\cap B\Rightarrow A\subseteq A\cap B\\(A\cap B)\subseteq A \quad \text{بدیهی}\end{matrix}\right\}\Rightarrow A\cap B=A$$

۱۸- دشوار

فرض: $\forall x ; (x \in A \Rightarrow x \in B)$

$\forall x ; (x \in (A\cup C)) \Rightarrow \forall x ; (x\in A \vee x \in C)$

$\xrightarrow{\text{فرض}} \forall x ; (x \in B \vee x\in C)$

$\Rightarrow \forall x ; (x \in (B\cup C))$

پس خواهیم داشت:

$\forall x ; (x \in (A\cup C) \Rightarrow x\in (B\cup C)) \Rightarrow A\cup C \subseteq B\cup C$

۱۹- دشوار

برای اثبات $A-B=\varnothing$ می‌خواهیم ثابت کنیم $A-B\subseteq\varnothing$ و $\varnothing\subseteq A-B$

$\forall x;(x\in(A-B)) \Rightarrow x\in A\wedge x\notin B$

$\xrightarrow{A\subset B} x\in B \wedge x\in B' \Rightarrow x\in (B\cap B') \Rightarrow x\in\varnothing$

بنابراین $(\forall x ; x\in(A-B) \Rightarrow x\in\varnothing)$ پس $A-B\subseteq\varnothing$ می‌باشد.

$$\left.\begin{array}{l} A-B\subseteq\varnothing \\ \text{بدیهی}\ \varnothing\subseteq(A-B)\end{array}\right\} \Rightarrow A-B=\varnothing$$

۲۰- متوسط

یادآوری نکات:

$A\cup B=B\cup A$ و $A\cap B=B\cap A$ و $A\cup A'=U$ و $A\cup\varnothing=A$

و $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$

و $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$

آ) $(A\cup B)\cap(B'\cup A)=(A\cup B)\cap(A\cup B')=A\cup\underbrace{(B\cap B')}_{\varnothing}=A\cup\varnothing=A$

ب) $(C\cap A)\cup(A'\cap C)=(C\cap A)\cup(C\cap A')=C\cap(A\cup A')=C\cap\varnothing=C$

۲۱- دشوار

※ نکته: $A\cup(A\cap B)=A$ و $A\cap(A\cup B)=A$ به قوامین جذب یا همپوشانی معروف است.

$(A\cap B)\cup((B\cup C)\cap\underbrace{[(B\cup A)\cap B]}_{\text{جذب}})=(A\cap B)\cup\underbrace{((B\cup C)\cap B)}_{\text{جذب}}$

آ) $=\underbrace{(A\cap B)\cup B}_{\text{جذب}}=B$

ب) $\underbrace{(A\cup B')\cap[(B\cap C)\cup(B'\cup A)]}_{\text{جذب}}=A\cup B'$

۲۲- متوسط

نکات: $A-B=A\cap B'$ و $A\cap B=B\cap A$ و $A\cap A=A$

و $A\cap A'=\varnothing$

آ) $A-B=A\cap B'=B'\cap A=B'-A'$

ب) $$\left.\begin{array}{l} x\subseteq A\wedge x\subseteq A' \Rightarrow (x\cap x)\subseteq(A\cap A') \Rightarrow x\subseteq\varnothing \\ \text{بدیهی}\ \varnothing\subseteq x\end{array}\right\}\Rightarrow x=\varnothing$$

۲۳- متوسط

نکات: $A-B=A\cap B'$ و $(A\cap B)'=A'\cup B'$

و $A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$

آ) $(A-B)'=(A\cap B')'=A'\cup B$

ب) $(A-B)-C=(A\cap B')\cap C'=(A\cap C')\cap B'$
$=(A\cap C')-B=(A-C)-B$

۲۴- دشوار

نکات: $A-B=A\cap B'$ و $(A\cap B)'=A'\cup B'$

و $(A\cap B)\cap(A\cap C)=A\cap(B\cap C)$ و $A\cap A'=\varnothing$ و $A\cap\varnothing=\varnothing$

و $A\cup\varnothing=A$

آ) $(A-B)\cap(A-C)=(A\cap B')\cap(A\cap C')=A\cap(B'\cap C')$
$=A-(B'\cap C')'=A-(B\cup C)$

ب) $(A\cap B)-(A\cap C)=(A\cap B)\cap(A\cap C)'=(A\cap B)\cap(A'\cup C')$
$=[(A\cap B)\cap A']\cup[(A\cap B)\cap C']$

$=[\underbrace{(A\cap A')}_{\varnothing}\cap B]\cup[A\cap(B\cap C')]=\varnothing\cup[A\cap(B-C)]$

$=A\cap(B-C)$

۲۵- دشوار

روش اول:

نکات:

$A\subseteq B \Leftrightarrow A\cup B=B$ و $A\cup(A\cap B)=A$ و $A\cap(A\cup B)=A$

و $A\subseteq B\Leftrightarrow A\cap B=A$

و $A\cap(A\cap B)=A\cap B$ و $A\cup(A\cup B)=A\cup B$

$$\left.\begin{array}{l} A\cup B=A\cap B\Rightarrow A\cap(A\cup B)=A\cap(A\cap B)\\ \Rightarrow A=A\cap B\Rightarrow A\subseteq B\\ A\cup B=A\cap B\Rightarrow A\cup(A\cup B)=A\cup(A\cap B)\\ \Rightarrow A\cup B=A\Rightarrow B\subseteq A\end{array}\right\}\Rightarrow A=B$$

روش دوم:

$$\left.\begin{array}{l} A\subseteq A\cup B \xrightarrow{A\cap B=A\cup B} A\subseteq A\cap B \Rightarrow A\subseteq B\\ B\subseteq A\cup B \xrightarrow{A\cap B=A\cup B} B\subseteq A\cap B\Rightarrow B\subseteq A\end{array}\right\}\Rightarrow A=B$$

۲۶- متوسط

نکات: $A\cap B=B\cap A$ و $(A\cap B)\cup(A\cap C)=A\cap(B\cup C)$

و $A\cup A'=U$ و $A\cap A'=\varnothing$ و $A\cap U=A$ و $A\cap\varnothing=\varnothing$

و $A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$

آ) $(A\cap B)\cup(B'\cap A)=(A\cap B)\cup(A\cap B')$
$=A\cap(B\cup B')=A\cap U=A$

ب) $(A'\cap B')\cap A=(A'\cap A)\cap B'=\varnothing\cap B'=\varnothing$

۲۷- دشوار

نکات:

$A\cap(A\cup B)=A$ و $A\cap(A\cap B)=A\cap B$ و $A-B=A\cap B'$

و $A\cap A'=\varnothing$ و $A\cup\varnothing=A$ و $A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$

آ) $(A'\cap B)\cup([(B\cap A)-B']\cap(B\cup A))$
$=(A'\cap B)\cup([(B\cap A)\cap B]\cap(B\cup A))=$

$(A'\cap B)\cup((A\cap B)\cap(A\cup B))=(A'\cap B)\cup[\underbrace{(A\cap(A\cup B))}_{\text{جذب}}\cap B]$

$=(A'\cap B)\cup(A\cap B)=(A'\cup A)\cap B=U\cap B=B$

ب) $(A\cup B)-B=(A\cup B)\cap B'=(A\cap B')\cup(B\cap B')$
$=(A-B)\cup\varnothing=A-B$

۲۸- متوسط

آ) $\begin{cases}A\subseteq x\\ A'\subseteq x\end{cases}\Rightarrow A\cup A'\subseteq x\cup x\Rightarrow\left.\begin{matrix}U\subseteq x\\ \text{بدیهی } x\subseteq U\end{matrix}\right\}$
$\Rightarrow x=U$

ب) نکات: $A\cup A'=U$ و $A\cap U=A$ و $A-B=A\cap B'$

و $(A\cap B)\cup(A\cap C)=A\cap(B\cup C)$

$(A-B)\cup(A\cap B)=(A\cap B')\cup(A\cap B)$
$=A\cap(B'\cup B)=A\cap U=A$

۲۹- متوسط

نکات: $(A\cap B)\cap(A\cap C)=A\cap(B\cap C)$ و $A-B=A\cap B'$

و $\varnothing\cup A=A$ و $A\cap A'=\varnothing$

آ) $(A-C)\cap(B-C)=(A\cap C')\cap(B\cap C')$
$=(A\cap B)\cap C'=(A\cap B)-C$

ب) $(A\cup B)-(A\cap B)=(A\cup B)\cap(A\cap B)'=(A\cup B)\cap(A'\cup B')$
$=[(A\cup B)\cap A']\cup[(A\cup B)\cap B']$

$=[\underbrace{(A\cap A')}_{\varnothing}\cup(B\cap A')]\cup[(A\cap B')\cup\underbrace{(B\cap B')}_{\varnothing}]$

$=(B\cap A')\cup(A\cap B')=(B-A)\cup(A-B)$

۳۰- آسان

$A\cap C=\{a\}$

$B\Delta C=\{\{b\},\{a,b\}\}$

۳۱- آسان

ابتدا مجموعه‌های $A_۱$ و $A_۲$ و $A_۳$ را مشخص می‌کنیم:

$A_۱=(-۱,۳)$ $\quad A_۲=(-\frac{۱}{۲},\frac{۵}{۲})$ $\quad A_۳=(-\frac{۱}{۳},\frac{۷}{۳})$

$\bigcup_{i=۱}^{۳}A_i=A_۱\cup A_۲\cup A_۳=(-۱,۳)$

$\bigcap_{i=۱}^{۳}A_i=A_۱\cap A_۲\cap A_۳=(-\frac{۱}{۳},\frac{۷}{۳})$

۳۲- متوسط

مجموعه‌های $A_۱$ و $A_۲$ و $A_۳$ و $A_۴$ را مشخص می‌کنیم:

$A_۱=\{m\mid m\in\mathbb{Z}, m\ge -۱, ۲^m\le ۱\}=\{-۱,۰\}$

$A_۲=\{m\mid m\in\mathbb{Z}, m\ge -۲, ۲^m\le ۲\}=\{-۲,-۱,۰,۱\}$

$A_۳=\{m\mid m\in\mathbb{Z}, m\ge -۳, ۲^m\le ۳\}=\{-۳,-۲,-۱,۰,۱\}$

$A_۴=\{m\mid m\in\mathbb{Z}, m\ge -۴, ۲^m\le ۴\}$
$=\{-۴,-۳,-۲,-۱,۰,۱,۲\}$

$\bigcup_{n=۱}^{۴}A_n=A_۱\cup A_۲\cup A_۳\cup A_۴=\{-۴,-۳,-۲,-۱,۰,۱,۲\}$

$\bigcap_{n=۱}^{۴}A_n=A_۱\cap A_۲\cap A_۳\cap A_۴=\{-۱,۰\}$

۳۳- آسان

مجموعه‌های $A_۱$ و $A_۲$ و $A_۳$ را مشخص می‌کنیم:

$A_۱=[۰,۳]$ $\quad A_۲=[-۱,۴]$ $\quad A_۳=[-۲,۵]$

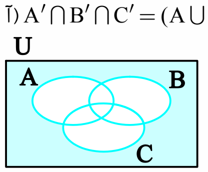
$\bigcup_{i=۱}^{۳}A_i=A_۱\cup A_۲\cup A_۳=[-۲,۵]$

$\bigcap_{i=۱}^{۳}A_i=A_۱\cap A_۲\cap A_۳=[۰,۳]$

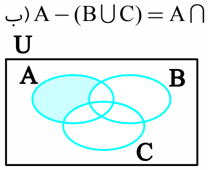
$\bigcup_{i=۱}^{۳}A_i-\bigcap_{i=۱}^{۳}A_i=[-۲,۵]-[۰,۳]=[-۲,۰)\cup(۳,۵]$

۳۴- آسان

آ) $A'\cap B'\cap C'=(A\cup B\cup C)'$

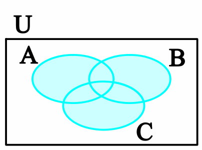


ب) $A-(B\cup C)=A\cap B'\cap C'$

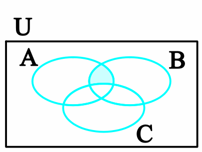


۳۵- آسان

آ) $A\cup B\cup C$



ب) $(A\cap B)-C=A\cap B\cap C'$



-۳۶ دشوار

مسئله را به کمک برهان خلف ثابت می‌کنیم:

اگر $A\times\varnothing\neq\varnothing$ (فرض خلف) در این صورت $A\times\varnothing$ حداقل دارای یک عضو مثل $(a\,,b)$ است

$$(a\,,b)\in A\times\varnothing \xrightarrow{\text{تعریف ضرب دکارتی}} a\in A\wedge b\in\varnothing$$

چون $b\in\varnothing$ یک تناقض است پس فرض خلف باطل و حکم برقرار است به همین ترتیب برای $\varnothing\times A=\varnothing$ به کمک برهان خلف داریم

اگر $\varnothing\times A\neq\varnothing$ (فرض خلف) در این صورت $\varnothing\times A=\varnothing$ حداقل دارای یک عضو مثل $(a\,,b)$ است.

$$(a\,,b)\in\varnothing\times A \xrightarrow{\text{تعریف ضرب دکارتی}} a\in\varnothing\wedge b\in A$$

چون $a\in\varnothing$ یک تناقض است پس فرض خلف باطل و حکم برقرار است.

-۳۷ متوسط

اگر $A=\varnothing$ و $B=\varnothing$ باشد حکم ثابت است حال فرض می‌کنیم $A\neq\varnothing$ و $B\neq\varnothing$ که به روش عضوگیری و ضرب دکارتی و با توجه به فرض $A\times B=B\times A$ ثابت می‌کنیم $A=B$

$$\forall x\in A\wedge\forall y\in B \xrightarrow{\text{تعریف ضرب دکارتی}} (x\,,y)\in A\times B$$
$$\xrightarrow{A\times B=B\times A} (x\,,y)\in B\times A \xrightarrow{\text{تعریف ضرب دکارتی}}$$
$$x\in B\wedge x\in A \Rightarrow A\subseteq B\wedge B\subseteq A \Rightarrow A=B$$

-۳۸ آسان

چون A و B دو مجموعه غیرتهی هستند بنابراین زمانی $A\times B=B\times A$ است که $A=B$ باشد، پس داریم: $x+1=5\Rightarrow x=4$

حال دو حالت داریم:

حالت ۱ $\begin{cases}y+2=4 \Rightarrow y=2\\ z=-2\end{cases} \Rightarrow x+y+z=4+2-2=4$

حالت ۲ $\begin{cases}y+2=-2 \Rightarrow y=-4\\ z=4\end{cases} \Rightarrow x+y+z=4-4+4=4$

در هر حالت $x+y+z=4$ است.

-۳۹ آسان

چون A و B دو مجموعه غیرتهی هستند بنابراین زمانی $A\times B=B\times A$ است که $A=B$ باشد، پس داریم:

حالت (۱):

$x-2y=6 \qquad t=3 \qquad x+5y=-1$

$$-1\begin{cases}x-2y=6\\ x+5y=-1\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}-x+2y=-6\\ x+5y=-1\end{cases} \Rightarrow 7y=-7 \Rightarrow y=-1$$

$x+2=6 \Rightarrow x=4$

حالت (۲):

$t=-1$

$$\begin{cases}x+5y=3\\ x-2y=6\end{cases} \Rightarrow 7y=-3 \to y=-\frac{3}{7}$$

$$x+\frac{6}{7}=6 \to x=\frac{36}{7}$$

-۴۰ آسان

$x-y=5$

$$x^2-y^2=15 \Rightarrow \overbrace{(x-y)}^{5}(x+y)=15 \Rightarrow x+y=3$$

$$\begin{cases}x-y=5\\ x+y=3\end{cases} \Rightarrow x=4\wedge y=-1$$

-۴۱ آسان

$$2^{x+y}=8=2^3 \Rightarrow x+y=3$$

$$x^2-y^2=18 \Rightarrow (x-y)(x+y)=18$$
$$\xrightarrow{x+y=3} 3(x-y)=18 \Rightarrow x-y=6$$

$$\begin{cases}x+y=3\\ x-y=6\end{cases} \Rightarrow x=4.5\wedge y=-1.5$$

-۴۲ متوسط

چون A مجموعهٔ ۳ عضوی و B دو عضوی است، مجموعه‌های $A\times B$ و $B\times A$، $3\times 2=6$ عضو به صورت زوج مرتب دارند.

$$A\times B=\{(2,4),(2,5),(4,4),(4,5),(6,4),(6,5)\}$$
$$B\times A=\{(4,2),(4,4),(4,6),(5,2),(5,4),(5,6)\}$$

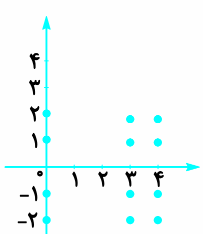
چون $(2,4)\in A\times B$ و $(2,4)\notin B\times A$ نیست پس $A\times B\neq B\times A$

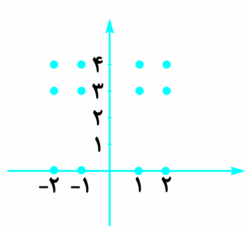
-۴۳ متوسط

ابتدا $B\times A=A\times B$ را می‌سازیم

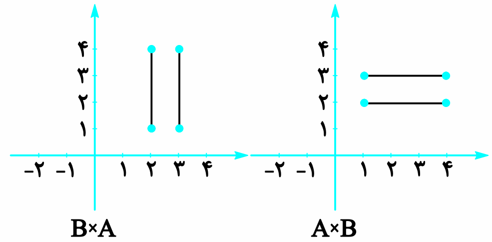
$$A\times B=\{(1,0),(1,3),(1,4),(-1,0),(-1,3),(-1,4),(2,0),(2,3),(2,4),(-2,0),(-2,3),(-2,4)\}$$

$$B\times A=\{(0,1),(0,-1),(0,2),(0,-2),(3,1),(3,-1),(3,2),(3,-2),(4,1),(4,-1),(4,2),(4,-2)\}$$

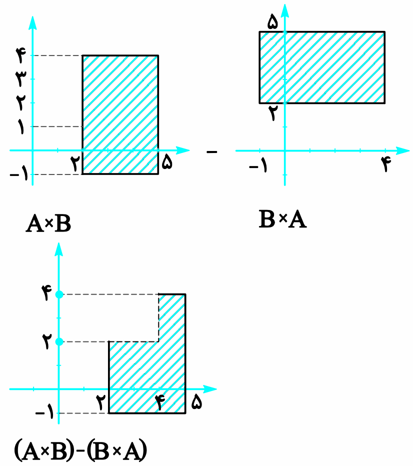

B×A


A×B

۴۴- متوسط



۴۵- دشوار



۴۶- متوسط

$A^۲ = A\times A = \{(۱,۱),(۱,۲),(۱,۳),(۲,۱),(۲,۲),$
$(۲,۳),(۳,۱),(۳,۲),(۳,۳)\}$

$A\times B = \{(۱,-۲),(۱,۱),(۱,۴),(۲,-۲),(۲,۱),$
$(۲,۴),(۳,-۲),(۳,۱),(۳,۴)\}$

$A^۲ - A\times B = \{(۱,۲),(۱,۳),(۲,۲),(۲,۳),(۳,۲),(۳,۳)\}$

۴۷- دشوار

ابتدا مجموعه A را مشخص می‌کنیم:

$|k-۱|\le ۱ \Rightarrow -۱\le k-۱\le ۱ \xrightarrow{+۱} ۰\le k\le ۲$
$\xrightarrow{k\in\mathbb{Z}} k\in\{۰,۱,۲\}$

چون عضوهای مجموعه A به صورت ۲^k است پس $A=\{۱,۲,۴\}$

$A\times B = \{(۱,۱),(۱,۳),(۲,۱),(۲,۳),(۴,۱),(۴,۳)\}$

$B^۲ = \{(۱,۱),(۱,۳),(۳,۱),(۳,۳)\}$

$A\times B - B^۲ = \{(۲,۱),(۲,۳),(۴,۱),(۴,۳)\}$

۴۸- دشوار

ابتدا اعضای مجموعه A و B را مشخص می‌کنیم:

$k\le ۳ \xrightarrow{k\in\mathbb{N}} k\in\{۱,۲,۳\}$

چون اعضای مجموعه A به صورت ۲^k است پس: $A=\{۱,۴,۸\}$

$|k|\le ۱ \Rightarrow -۱\le k\le ۱ \xrightarrow{k\in\mathbb{Z}} k\in\{-۱,۰,۱\}$

چون اعضای مجموعه B به صورت $k^۲$ است پس: $B=\{۱,۰,۱\}=\{۱,۰\}$

$A\Delta B = (A-B)\cup(B-A) = \{۴,۸\}\cup\{۰\} = \{۰,۴,۸\}$

$(A\Delta B)\times B = \{(۰,۰),(۱,۰),(۴,۰),(۴,۱),(۸,۰),(۸,۱)\}$

۴۹- دشوار

ابتدا مجموعه‌های A و B را مشخص می‌کنیم:

$x^۲ < ۱۱ \xrightarrow{x\in\mathbb{N}} x\in\{۱,۲,۳\}$

عضوهای مجموعه A همان x است پس: $A=\{۱,۲,۳\}$

$x^۲-۷x+۶=۰ \Rightarrow (x-۱)(x-۶)=۰ \Rightarrow x=۱ \vee x=۶$

عضوهای مجموعه B به صورت $(۲x-۱)$ است پس: $B=\{۱,۱۱\}$

مجموعه‌های $A^۲$ و $B^۲$ را بدست می‌آوریم:

$A^۲ = \{(۱,۱),(۱,۲),(۱,۳),(۲,۱),(۲,۲),(۲,۳),(۳,۱),(۳,۲),(۳,۳)\}$

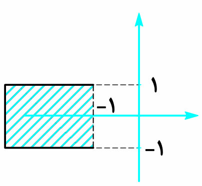
$B^۲ = \{(۱,۱),(۱,۱۱),(۱۱,۱),(۱۱,۱۱)\}$

$A^۲ - B^۲ = \{(۱,۲),(۱,۳),(۲,۱),(۲,۲),(۲,۳),(۳,۱),(۳,۲),(۳,۳)\}$

۵۰- متوسط

$B\times A = (-\infty,-۱)\times[-۱,۱] =$

$\{(x,y)\in R^۲ \mid x<-۱, -۱\le y\le ۱\}$



پاسخنامه سؤالات تستی

بخش ۲

۱- گزینه «۲» — آسان

چون $x \in A$ است در عبارت $\frac{x^2}{2}$ به جای x باید عضوهای مجموعه A را قرار دهیم و هر کدام که $\frac{x^2}{2} \in \mathbb{N}$ شود قابل قبول است.

$$x = -\frac{1}{4} \Rightarrow \frac{x^2}{2} = \frac{1}{32} \notin \mathbb{N} \qquad x = -3 \Rightarrow \frac{x^2}{2} = \frac{9}{2} \notin \mathbb{N}$$

$$x = \sqrt{2} \Rightarrow \frac{x^2}{2} = 1 \in \mathbb{N} \qquad x = 0 \Rightarrow \frac{x^2}{2} = 0 \in \mathbb{N}$$

$$x = 2 \Rightarrow \frac{x^2}{2} = 2 \in \mathbb{N} \qquad x = \sqrt{3} \Rightarrow \frac{x^2}{2} = \frac{3}{2} \notin \mathbb{N}$$

$$B = \{0, \sqrt{2}, 2\}$$

بنابراین مجموعه B دارای ۳ عضو است.

۲- گزینه «۲» — آسان

$$A_1 = \{m \in \mathbb{Z} : |m| \le 1 \ , \ 2^m \le 2\} = \{-1, 0, 1\}$$

$$A_4 = \{m \in \mathbb{Z} : |m| \le 4 \ , \ 2^m \le 8\} = \{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$$

$$A_6 = \{m \in \mathbb{Z} : |m| \le 6 \ , \ 2^m \le 12\} = \{-6, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$$

$$(A_6 - A_4) \cup A_1 = \{-6, -5\} \cup \{-1, 0, 1\} = \{-6, -5, -1, 0, 1\}$$

۳- گزینه «۱» — آسان

$$A_2 = \{m \in \mathbb{Z} \mid m \ge -1, 2^m < 2\} \Rightarrow \{-1, 0\}$$

$$A_4 = \{m \in \mathbb{Z} \mid m \ge -3, 2^m < 4\} \Rightarrow \{-3, -2, -1, 0, 1\}$$

$$A_2 \cap A_4 = \{-1, 0\}$$

۴- گزینه «۲» — آسان

مجموعه A دارای ۴ عضو است و $a \in A$ و $b \in A$ و $\{a\} \in A$ و $\{a, b\} \in A$ است پس گزینه (آ) نادرست و گزینه (ت) درست است. مجموعه A دارای $2^4 = 16$ زیرمجموعه است که $\{a\} \subseteq A$ (گزینه ب) درست و $\{\{b\}, a\} \not\subseteq A$ (گزینه پ) نادرست است.

۵- گزینه «۲» — آسان

چون $\{2\} \in B$ است و $A = \{2\}$ پس نتیجه می‌گیریم $A \in B$ (گزینه ۱) درست است.

$B = \{\{2\}, 3, 5\}$ و $\{\{2\}, 3, 5\} \in C$ است پس $B \in C$ است (گزینه ۳) درست است.

و مشخص که $A \subseteq C$ است.

۶- گزینه «۴» — آسان

$$x^2 + x = 3x \Rightarrow x^2 - 2x = 0 \Rightarrow x(x-2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$$

مجموعه $B = \{0, 2\}$ است پس $A - B = \{1, \{1\}, \{1, 2\}, \{2\}\}$ دارای ۴ عضو است.

$$\text{تعداد زیرمجموعه‌های سره و غیرتهی} = 2^n - 2 = 2^4 - 2 = 14$$

۷- گزینه «۳» — آسان

با توجه به اینکه $\{B\} = \{\{a, b\}\}$ می‌شود $A - \{B\} = \{a, b, \{a\}\}$ دارای ۳ عضو می‌شود.

$$\text{تعداد زیرمجموعه‌های سره و ناتهی } A - \{B\} = 2^n - 2 = 2^3 - 2 = 8 - 2 = 6$$

۸- گزینه «۲» — آسان

مجموعهٔ A دارای ۳ عضو است پس $P(A)$ دارای $2^3 = 8$ عضو خواهد بود و یک مجموعه ۸ عضوی $2^8 = 256$ زیرمجموعه دارد.

۹- گزینه «۱» — آسان

ابتدا اعضای دو مجموعه A و B را می‌نویسیم:

$$A = \{3, 5\}$$

$$|x - 1| \le 4 \Rightarrow -4 \le x - 1 \le 4 \xrightarrow{+1} -3 \le x \le 5$$

$$\xrightarrow{x \in W} B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$$

چون $A \subseteq B$ است پس $\forall x ; (x \in A \Rightarrow x \in B)$

۱۰- گزینه «۴» — متوسط

اگر فرض کنیم مجموعه A دارای n عضو است 2^n زیرمجموعه دارد که با حذف ۳ عضو از مجموعه A تعداد زیرمجموعه‌های آن 2^{n-3} می‌شود.

$$2^n - 2^{n-3} = 56 \Rightarrow 2^n(1 - 2^{-3}) = 56 \Rightarrow 2^n(1 - \frac{1}{n}) = 56$$

$$\Rightarrow 2^n \times \frac{7}{8} = 56 \Rightarrow 2^n = 64 \Rightarrow n = 6$$

اگر دو عضو به مجموعه A اضافه کنیم، مجموعه جدید ۸ عضو می‌شود و $2^8 = 256$ زیرمجموعه دارد.

$$\text{تعداد زیرمجموعه‌های اضافه شده} = 2^8 - 2^6 = 256 - 64 = 192$$

۱۱- گزینه «۲» متوسط

مجموعه $(k+3)$ عضوی $(2^{k+3}-1)$ زیرمجموعه غیرتهی دارد و مجموعه $(k-1)$ عضوی 2^{k-1} زیرمجموعه دارد.

$$2^{k+3}-1-2^{k-1}=239 \Rightarrow 2^k(2^3-2^{-1})=240$$

$$\Rightarrow 2^k(8-\frac{1}{2})=240 \Rightarrow 2^k(\frac{15}{2})=240$$

$$\Rightarrow 2^k=32 \Rightarrow 2^k=2^5 \Rightarrow k=5$$

۱۲- گزینه «۳» آسان

اگر فرض کنیم مجموعه A دارای n عضو باشد در این صورت 2^n زیرمجموعه داریم و با حذف ۳ عضو از A تعداد زیرمجموعه‌های آن 2^{n-3} می‌شود.

$$2^n-2^{n-3}=112 \Rightarrow 2^n(1-2^{-3})=112 \Rightarrow 2^n\times\frac{7}{8}=112$$

$$\Rightarrow 2^n=128=2^7 \Rightarrow n=7$$

می‌دانیم در یک مجموعه n عضوی تعداد زیرمجموعه‌های k عضوی برابر $\binom{n}{k}$ است.

$$\binom{7}{4}=\frac{7!}{4!\times 3!}=\frac{7\times6\times5\times4!}{4!\times6}=35$$

۱۳- گزینه «۴» متوسط

تعداد زیرمجموعه‌های یک مجموعه n عضوی 2^n است، پس اگر A مجموعه n عضوی باشد داریم:

$$2^n=512 \Rightarrow 2^n=2^9 \Rightarrow n=9 \Rightarrow |A|=9$$

$$(B\cup A')'=B'\cap A=A\cap B'=A-B$$

$$|A-B|=|A|-|A\cap B|=9-3=6$$

چون $(B\cup A')'$ دارای ۶ عضو است پس $2^6=64$ زیرمجموعه دارد.

۱۴- گزینه «۳» آسان

هر دو مجموعه ۳ عضوی هستند پس:

$$x-2=5 \Rightarrow x=7$$

$$\{z+1\}=\{x-1\} \xrightarrow{x=7} z+1=7-1 \Rightarrow z=5$$

$$\{2,4\}=\{y,z-3\} \xrightarrow{z=5} \{2,4\}=\{y,2\} \Rightarrow y=4$$

$$x+y+z=7+4+5=16$$

۱۵- گزینه «۲» آسان

$$\left.\begin{array}{l} A'\subseteq B' \Rightarrow B\subseteq A \\ A\subseteq B \end{array}\right\} \Rightarrow A=B$$

هر دو مجموعه هم دارای ۳ عضو هستند. پس داریم:

$$x=4,\ z-1=3 \Rightarrow z=4$$

$$\{z+x\}=\{x+2y\} \xrightarrow{x=z=4} \{8\}=\{4+2y\} \Rightarrow 4+2y=8$$
$$\Rightarrow 2y=4 \Rightarrow y=2$$

$$x+y+z=4+2+4=10$$

۱۶- گزینه «۲» آسان

$A'=\{1,4,6,8,9\}$ $\qquad$ $C'=\{2,3,5,6,7,8\}$

$A'-C=\{6,8\}$

$B\cup C'=\{1,2,3,5,6,7,8,9\}$

$A-(B\cup C')=\varnothing$

$(A'-C)\cup(A-(B\cup C'))=\{6,8\}\cup\varnothing=\{6,8\}$

چون ۲ عضو دارد پس $2^2=4$ زیرمجموعه دارد.

۱۷- گزینه «۲» آسان

$A=\{3,5,7,11,13,17,19\}$

$2^k<15 \xrightarrow{K\in\mathbb{N}} k=\{1,2,3\} \Rightarrow C=\{3,5,7\}$

$A\Delta B-C=\{1,3,7,9,11,19\}-\{3,5,7\}=\{1,9,11,19\}$

تعداد زیرمجموعه‌های k عضوی یک مجموعه n عضوی $\binom{n}{k}$ است.

$((A\Delta B)-C)$ تعداد زیرمجموعه‌های ۲ عضوی $=\binom{4}{2}=6$

۱۸- گزینه «۲» دشوار

چنانچه به روش کدگذاری زیرمجموعه A را مشخص کنیم، در زیرمجموعه مورد نظر چون ۳ عضوی است پس ۳ عدد ۱ و ۴ عدد صفر وجود دارد که هیچ دو عدد یکی نباید، کنار هم باشند، پس عدد ۱ باید بین اعداد صفر و در مثلث‌ها قرار بگیرند.

$\Delta\circ\Delta\circ\Delta\circ\Delta\circ\Delta$

از بین ۵ مثلث، باید ۳ تا انتخاب شود، عدد ۱ داخل آن قرار گیرد.

$\binom{5}{3}=10$

۱۹- گزینه «۲» دشوار

مجموعه $A_1=\{4\}$ به صورت کدگذاری به صورت $A_1=\{0,0,0,1,0,0,0,0\}$ است که باید ۲ عضو غیر از اعداد ۳، ۵ به آن اضافه شود و دقت کنیم که دو عضوی که اضافه می‌شوند هم متوالی نباشند پس این مجموعه به صورت کدگذاری به شکل $A_1=\{a,b,0,1,0,c,d,e\}$ می‌شود. (جای a، b، c، d، e باید صفر یا یک قرار دهیم)

روش اول انتخاب $=\underbrace{\binom{2}{1}}_{\text{از بین } b\text{ و }a}\times\underbrace{\binom{3}{1}}_{\text{از بین } e\text{ و }d\text{ و }c}=6$

روش دوم انتخاب: دو عضو (e,c) را انتخاب کنیم (۱ حالت)

$6+1=7$ تعداد زیرمجموعه‌ها

۲۰- گزینه «۳» دشوار

اگر مجموعه A دارای n عضو باشد و x از عضوهای مجموعه A به B منتقل کنیم، داریم:

$$\frac{۲^n}{۲^{n-x}}=۴ \Rightarrow ۲^x=۴ \Rightarrow x=۲$$

اگر مجموعه B دارای y عضو باشند و ۲ عضو از A به B منتقل شود داریم:

$$۲^{y+۲}=۵۱۲ \Rightarrow y+۲=۹ \Rightarrow y=۷$$

۲۱- گزینه «۳» دشوار

اگر تعداد عضوهای مجموعه‌های $(A-B)$ و $(A\cap B)$ و $(B-A)$ به ترتیب x و y و z باشد چون $A\cup B=(A-B)\cup(A\cap B)\cup(B-A)$ است پس:

$$n(A\cup B)=x+y+z$$

$$۲^{x+y+z}-۲^y=۴۹۶ \Rightarrow ۲^y(۲^{x+z}-۱)=۲^۴\times ۳۱ \Rightarrow \begin{cases} y=۴ \\ ۲^{x+z}-۱=۳۱ \end{cases}$$

$$۲^{x+z}=۳۲ \Rightarrow x+z=۵$$

بنابراین اگر $z=۰$ باشد $x_{max}=۵$

$$(A-B)\cup(A\cap B)=A \Rightarrow n(A)=n(A-B)+n(A\cap B)$$
$$=x+y=۵+۴=۹$$

۲۲- گزینه «۳» دشوار

فرض کنیم مجموعه A دارای m عضو و مجموعه B دارای n عضو باشند.

$$\frac{۲^m}{۲^n}=۱۶ \Rightarrow ۲^{m-n}=۲^۴ \Rightarrow m-n=۴ \Rightarrow m=n+۴ \ (I)$$

$$۲^{m+۱}-۲^{n+۳}=۷۶۸ \overset{(I)}{\Rightarrow} ۲^{n+۵}-۲^{n+۳}=۷۶۸$$

$$\Rightarrow ۳۲\times۲^n-۸\times۲^n=۷۶۸$$

$$۲۴\times۲^n=۷۶۸ \Rightarrow ۲^n=۳۲ \Rightarrow ۲^۵ \Rightarrow n=۵ \Rightarrow m=۹$$

$$A \text{ تعداد زیرمجموعه‌های دو عضوی }=\binom{۹}{۲}=۳۶$$

۲۳- گزینه «۴» آسان

اگر x، y، z سه عضو زیر مجموعه A باشند باید $y=\frac{z+x}{۲}$ باشد، بنابراین $x+z$ باید زوج باشند تا y یک عدد طبیعی شود، پس x و z هر دو باید زوج و یا هر دو باید فرد باشند.

در مجموعه A، ۱۵ عدد زوج و ۱۵ عدد دیگر فرد هستند، پس کل حالات برابر است با:

$$\binom{۱۵}{۲}+\binom{۱۵}{۲}=۲\binom{۱۵}{۲}=۲۱۰$$

۲۴- گزینه «۴» دشوار

$$A_۳=\{m\in ۲ \mid m\geq ۱-۳\ ,\ ۲^m\ ,\leq ۳(۳)\}=\{-۲,-۱,۰,۱,۲,۳\}$$

$$A_۲=\{m\in \mathbb{Z} \mid m\geq ۱-۲\ ,\ ۲^m\ ,\leq ۳(۲)\}=\{-۱,۰,۱,۲\}$$

چون $B\subseteq A_۳$ است پس مجموعه B، عضوی غیر از عضوهای مجموعه $A_۳$ ندارد و چون $B\not\subseteq A_۲$، بنابراین حتماً حداقل یکی از اعداد (۲– یا ۳) در B وجود دارد.

$$A_۳ \text{ تعداد کل زیرمجموعه‌های }=۲^۶=۶۴=|S|$$

$$\text{تعداد زیرمجموعه‌های از } A_۳ \text{ که شامل } (۲-,۳) \text{ نباشد.}=۲^۴=۱۶=|A'|$$

$$|A|=|S|-|A'|=۶۴-۱۶=۴۸$$

۲۵- گزینه «۳» دشوار

$$A-(B-C)=(A-B)-C \Rightarrow A-(B\cap C')=(A\cap B')\cap C' \Rightarrow$$
$$A\cap(B\cap C')'=(A\cap B')\cap C' \Rightarrow A\cap(B'\cup C)=(A\cap B')\cap C' \Rightarrow$$
$$(A\cap B')\cup(A\cap C)=(A\cap B')\cap C'$$

دو طرف تساوی را با $(A\cap C)$، اشتراک می‌گیریم:

$$\underbrace{(A\cap C)\cap[(A\cap B')\cup(A\cap C)]}_{\text{جذب}}=(A\cap B')\cap C'\cap(A\cap C)$$

$$\Rightarrow A\cap C=\varnothing$$

بنابراین مجموعه $C\subseteq A'$ باشد و مجموعه A'، $(۲^۳-۱=۷)$ زیر مجموعه غیرتهی دارد.

۲۶- گزینه «۴» دشوار

$$(B-A)\cap[(B\cup C)\cap(A-C)']=(B-A)\cap[(B\cup C)\cap(A\cap C')']=$$
$$(B-A)\cap[(B\cup C)\cap(A'\cup C)]=(B-A)\cap[(B\cap A')\cup C]=$$
$$\underbrace{(B-A)}_{x}\cap[\underbrace{(B-A)}_{x}\cup C]=B-A$$

پس $n(A)=۷$ و $n(B)=۵$ و $n(B-A)=۳$

$$n(A\cap B)=n(B)-n(B-A)=۵-۳=۲$$

$$n(A-B)=n(A)-n(A\cap B)=۷-۲=۵$$

و می‌دانیم مقدار زیرمجموعه‌های غیرتهی هر مجموعه n عضوی $(۲^n-۱)$ است پس مجموعه $(A-B)$، دارای $(۲^۵-۱=۳۱)$ زیرمجموعه غیرتهی است.

۲۷- گزینه «۳» دشوار

نکته: تعداد زیرمجموعه‌های k عضوی یک مجموعه n عضوی برابر $\binom{n}{k}$ است.

اگر فرض کنیم A یک مجموعه n عضوی باشد:

$$\binom{n}{۲}=۱۳+\binom{n-۲}{۲} \Rightarrow \frac{n(n-۱)}{۲}=۱۳+\frac{(n-۲)(n-۳)}{۲}$$

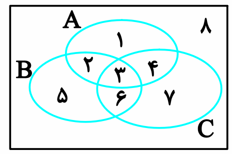
$$\xrightarrow{\times ۲} n^۲-n=۲۶+n^۲-۵n+۶$$

$$\Rightarrow ۴n=۳۲ \Rightarrow n=۸$$

$$\binom{۹}{۳}-\binom{۸}{۳}=۸۴-۵۶=۲۸$$

۲۸- گزینه «۲» دشوار

اگر نمودار ون را برای ۳ مجموعه رسم کنیم، ۵ ناحیه داریم:



$(A\cap B)\cup(B-C)=\{۲,۳\}\cup\{۲,۵\}=\{۲,۳,۵\}$

$(A\cap C)\cup B'=\{۳,۴\}\cup\{۱,۴,۷,۸\}=\{۱,۳,۴,۷,۸\}$

بنابراین برای اینکه دو مجموعه $(A\cap B)\cup(B-C)$ و $(A\cap C)\cup B'$ با هم برابر باشند باید ناحیه‌های $(۱,۲,۴,۵,۷,۸)$ تهی باشند و اعداد فقط در نواحی $(۳,۶)$ قرار گیرند.

$$\underset{عدد ۱}{۲}\times\underset{عدد ۲}{۲}\times\underset{عدد ۳}{۲}\times\underset{عدد ۴}{۲}\times\underset{عدد ۵}{۲}\times\underset{عدد ۶}{۲}=۶۴$$

۲۹- گزینه «۴» دشوار

مجموعه‌های مورد نظر به این صورت هستند که عضوهای ابتدا و انتهای آن‌ها $A_1=\{۱,۵\}$ و $A_2=\{۲,۶\}$ و $A_3=\{۳,۷\}$ و $A_4=\{۴,۸\}$ است حال باید داخل مجموعه‌های A_1 و A_2 و A_3 عدد ۴ را هم قرار دهیم تا به صورت $A_1=\{۱,۴,۵\}$ و $A_2=\{۲,۴,۶\}$ و $A_3=\{۳,۴,۷\}$ و $A_1=\{۴,۸\}$ شوند، داخل مجموعه A_1 اعداد ۲ و ۳ را می‌توان قرار داد یا قرار نداد.

$$\text{ساخت زیرمجموعه } A \text{ از } A_1=\underset{عدد ۲}{۲}\times\underset{عدد ۳}{۲}=۴$$

به همین ترتیب برای ساخت زیرمجموعه از باقی مجموعه‌ها داریم:

$$\text{ساخت زیرمجموعه } A \text{ از } A_2=\underset{عدد ۳}{۲}\times\underset{عدد ۵}{۲}=۴$$

$$\text{ساخت زیرمجموعه } A \text{ از } A_3=\underset{عدد ۵}{۲}\times\underset{عدد ۶}{۲}=۴$$

$$\text{ساخت زیرمجموعه } A \text{ از } A_4=\underset{عدد ۵}{۲}\times\underset{عدد ۶}{۲}\times\underset{عدد ۷}{۲}=۸$$

$$\text{کل زیرمجموعه‌ها}=۴+۴+۴+۸=۲۰$$

۳۰- گزینه «۲» دشوار

چون مجموعه A هر سه عضو $(۱,۵,۹)$ با مجموع ۱۵ را دارد پس مجموع باقی عضوهای، مجموعه A باید برابر $(۳۲-۱۵=۱۷)$ باشند چون $(۲+۳+۴+۶=۱۵<۱۷)$ است قطعاً مجموعه A باید حداقل یکی از عضوهای ۷ یا ۸ را داشته باشد که مجموعه A را به صورت‌های زیر می‌توان نوشت:

$A_2=\{۱,۵,۹,۷,۴,۶\}$ $A_1=\{۱,۵,۹,۷,۲,۸\}$

$A_4=\{۱,۵,۹,۳,۶,۹\}$ $A_3=\{۱,۵,۹,۲,۳,۴,۸\}$

۳۱- گزینه «۱» دشوار

$$(A\times B)-(A\times(B\cap C))=A\times(B-(B\cap C))=A\times(B\cap(B'\cup C'))=$$
$$A\times(\underbrace{(B\cap B')}_{\varnothing}\cup(B\cap C'))=A\times(B\cap C')$$

حال داریم:

$$[(A\times B)-(A\times(B\cap C))]\cap(A\times C)=[A\times(B\cap C')]\cap(A\times C)=$$
$$A\times[(B\cap C')\cap C]=A\times[B\cap\underbrace{(C\cap C')}_{\varnothing}]=A\times\varnothing=\varnothing$$

بنابراین این رابطه عضوی ندارد.

۳۲- گزینه «۱» آسان

باید دقت کرد دو عضو $\{a,b\}$ و $\{b,a\}$ یک عضو هستند بنابراین مجموعه مورد نظر ۳ عضوی است که در هر زیرمجموعه آن a و b می‌توانند باشند یا نباشند و $\{a,b\}$ نباید باشد.

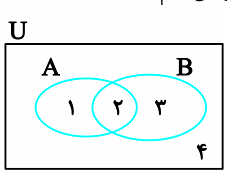
$$\text{تعداد زیرمجموعه‌ها}=\underset{a}{۲}\times\underset{b}{۲}\times\underset{\underset{نباشد}{\{a,b\}}}{۱}=۴$$

۳۳- گزینه «۳» متوسط

روش اول:

$$(A\cap(A'\cup B))\cup(B\cap(A'\cup B'))$$
$$=[\underbrace{(A\cap A')}_{\varnothing}\cup(A\cap B)]\cup[(B\cap A')\cup\underbrace{(B\cap B')}_{\varnothing}]$$
$$=(A\cap B)\cup(B\cap A')=(B\cap A)\cup(B\cap A')$$
$$=B\cap(A\cup A')=B\cap U=B$$

روش دوم: نمودار ون را برای دو مجموعه A و B رسم می‌کنیم و مانند شکل روبه‌رو ناحیه‌ها را با اعداد ۱ و ۲ و ۳ و ۴ مشخص می‌کنیم:



$A'\cup B=\{۳,۴\}\cup\{۲,۳\}=\{۲,۳,۴\}$

$A'\cup B'=\{۳,۴\}\cup\{۱,۴\}=\{۱,۳,۴\}$

$(A\cap(A'\cup B))\cup(B\cap(A'\cup B'))=\{۲\}\cup\{۳\}=\{۲,۳\}=B$

۳۴- گزینه «۱» متوسط

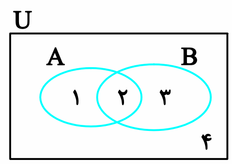
روش اول:

$$(B-A)'-A=(B\cap A')'\cap A'=(B'\cup A)\cap A'$$
$$=(B'\cap A')\cup\underbrace{(A\cap A')}_{\varnothing}=B'\cap A'$$

حالا متمم مجموعه را پیدا می‌کنیم:

$$[(B-A)'-A]'=(A'\cap B')'=A\cup B$$

روش دوم: نمودار ون را برای دو مجموعه A و B رسم می‌کنیم و مانند شکل روبه‌رو ناحیه‌ها را با اعداد ۱ و ۲ و ۳ و ۴ مشخص می‌کنیم:



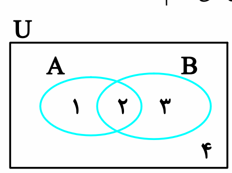
$$B-A=\{۳\} \Rightarrow (B-A)'=\{۱,۲,۴\}$$
$$\Rightarrow (B-A)'-A=\{۱,۲,۴\}-\{۱,۲\}=\{۴\}$$
$$[(B-A)'-A]'=\{۱,۲,۳\}=A\cup B$$

۳۵- گزینه «۱» متوسط

روش اول:

$$[\underbrace{A\cup(A\cap B)}_{\text{جذب}}]'\cap[(B\cap A)\cup(B-A)]$$
$$=(A)'\cap[(B\cap A)\cup(B\cap A')]=A'\cap[B\cap(A\cup A')]$$
$$=A'\cap[B\cap U]=A'\cap B=A'-B'$$

روش دوم: نمودار ون را برای دو مجموعه A و B رسم می‌کنیم و مانند شکل روبه‌رو ناحیه‌ها را با اعداد ۱ و ۲ و ۳ و ۴ مشخص می‌کنیم:



$$A\cup(A\cap B)=\{۱,۲\}\cup\{۲\}=\{۱,۲\} \Rightarrow [A\cup(A\cap B)]'=\{۳,۴\}$$
$$[(B\cap A)\cup(B-A)]=\{۲\}\cup\{۳\}=\{۲,۳\}$$
$$[A\cup(A\cap B)]'\cap[(B\cap A)\cup(B-A)]$$
$$=\{۳,۴\}\cap\{۲,۳\}=\{۳\}=A'-B'$$

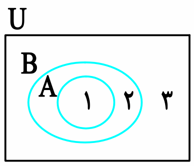
۳۶- گزینه «۲» متوسط

روش اول: مـــــــــی‌دانیم $A\Delta B=(A-B)\cup(B-A)$ و می‌دانیم $(B-A)\cup(A\cap B)=B$

$$(A\Delta B)\cup(A\cap B)=(A-B)\cup\underbrace{(B-A)\cup(A\cap B)}_{B}$$
$$=(A\cap B')\cup B=(A\cup B)\cap(B\cup B')$$
$$=(A\cup B)\cup U=A\cup B$$

چون $B'\subseteq A'$ است پس $A\subseteq B$ است بنابراین $A\cup B=B$

روش دوم: $B'\subseteq A' \Rightarrow A\subseteq B$ است و نمودار ون آن مطابق شکل روبه‌رو است:



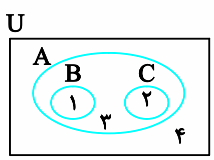
$$A\Delta B=\{۲\} \qquad A\cap B=\{۱\}$$
$$(A\Delta B)\cup(A\cap B)=\{۲\}\cup\{۱\}=\{۱,۲\}=B$$

۳۷- گزینه «۳» متوسط

روش اول: چون B و C دو مجموعه جدا از هم هستند پس $B\cap C=\varnothing$ و چون

$$(B\cup C)\subseteq A \Rightarrow B\subseteq A\wedge C\subseteq A$$
$$\underbrace{(A\cap B)}_{B\subseteq A}\Delta\underbrace{(A\cap C)}_{C\subseteq A}=B\Delta C=(B\cup C)-\underbrace{(B\cap C)}_{\varnothing}=B\cup C$$

شکل دوم: چون $B\subseteq A$ و $C\subseteq A$ و $B\cap C=\varnothing$ است نمودار ون این ۳ مجموعه به صورت شکل زیر است.



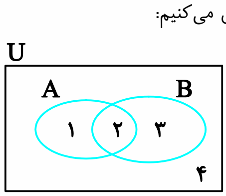
$$A\cap B=\{۱\}$$
$$A\cap C=\{۲\}$$
$$(A\cap B)\Delta(A\cap C)=\{۱\}\Delta\{۲\}=\{۱,۲\}=B\cup C$$

۳۸- گزینه «۱» متوسط

روش اول:

$$A-(B-(A\cap B))=A-(B\cap(A\cap B)')=A-(B\cap(A'\cup B'))=$$
$$A-[(B\cap A')\cup\underbrace{(B\cap B')}_{\varnothing}]=A-(B\cap A')=A\cap(B\cap A')'$$
$$=\underbrace{A\cap(B'\cup A)}_{\text{جذب}}=A$$

روش دوم: نمودار ون را برای دو مجموعه A و B رسم می‌کنیم و مانند شکل روبه‌رو ناحیه‌ها را با اعداد ۱ و ۲ و ۳ و ۴ مشخص می‌کنیم:



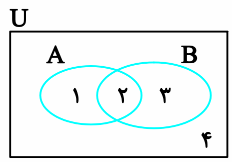
$$B-(A\cap B)=\{۲,۳\}-\{۲\}=\{۳\}$$
$$A-(B-(A\cap B))=\{۱,۲\}-\{۳\}=\{۱,۲\}=A$$

۳۹- گزینه «۱» — متوسط

روش اول:

$$(A-B)'\cap(A\cup B)\cap A'=(A\cap B')'\cap(A\cup B)\cap A'=$$
$$(A'\cup B)\cap(A\cup B)\cap A'$$
$$[\underbrace{(A'\cap A)}_{\varnothing}\cup B]\cap A'=B\cap A'=B-A$$

روش دوم: نمودار ون را برای دو مجموعه A و B رسم می‌کنیم و مانند شکل روبه‌رو ناحیه‌ها را با اعداد ۱ و ۲ و ۳ و ۴ مشخص می‌کنیم:



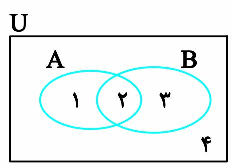
$$A-B=\{۱\}\Rightarrow (A-B)'=\{۲,۳,۴\}$$
$$(A-B)'\cap(A\cup B)\cap A'=\{۲,۳,۴\}\cap\{۱,۲,۳\}\cap\{۳,۴\}=\{۳\}=B-A$$

۴۰- گزینه «۴» — متوسط

روش اول:

$$(A\cap B')-(B-A)=(A\cap B')-(B\cap A')=(A\cap B')\cap(B\cap A')'=$$
$$(A\cap B')\cap(B'\cup A)=[\underbrace{A\cap(B'\cup A)}_{\text{جذب}}]\cap B'=A\cap B'=A-B$$

روش دوم: نمودار ون را برای دو مجموعه A و B رسم می کنیم و مانند شکل روبه‌رو ناحیه‌ها را با اعداد ۱ و ۲ و ۳ و ۴ مشخص می‌کنیم.



$$A\cap B'=\{۱\}$$
$$B-A=\{۳\}$$
$$(A\cap B')-(B-A)=\{۱\}-\{۳\}=\{۱\}=A-B$$

۴۱- گزینه «۱» — متوسط

$$A\cap B'=B\cap A'\Rightarrow A-B=B-A$$
$$A\Delta B=(A-B)\cup(B-A)=(A-B)\cup(A-B)=A-B$$
$$(A\Delta B)-A=(A-B)-A=(A\cap B')\cap A'=$$
$$(A\cap A')\cap B'=\varnothing\cap B'=\varnothing$$

۴۲- گزینه «۱» — متوسط

$$A\cup(B-A)=A\cup(B\cap A')=(A\cup B)\cap(A\cup A')=$$
$$(A\cup B)\cap U=A\cup B$$

حال داریم:

$$A\cup(B-A)=B\Rightarrow A\cup B=B\Rightarrow A\subseteq B$$

۴۳- گزینه «۱» — متوسط

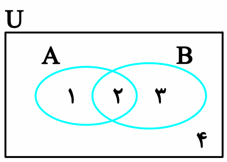
$$\forall x;(x\notin B'\Rightarrow x\notin A')\equiv\forall x;(x\in B\Rightarrow x\in A)\Rightarrow$$
$$B\subseteq A\Rightarrow\begin{cases}A\cap B=B\\A\cup B=A\end{cases}$$
$$(A\cap B)\cup(A\cup B)=B\cup A=A$$

۴۴- گزینه «۲» — متوسط

روش اول:

$$[(A\cap B)-A]\cup[(A\cup B)-B]=[(A\cap B)\cap A']\cup[(A\cup B)\cap B']=$$
$$[\underbrace{(A\cap A')}_{\varnothing}\cap B]\cup[(A\cap B')\cup\underbrace{(B\cap B')}_{\varnothing}]=$$
$$(\varnothing\cap B)\cup[(A\cap B')\cup\varnothing]=\varnothing\cup(A\cap B')=A\cap B'=A-B$$

روش دوم: نمودار ون را برای دو مجموعه A و B رسم می‌کنیم و مانند شکل روبه‌رو ناحیه‌ها را با اعداد ۱ و ۲ و ۳ و ۴ مشخص می‌کنیم:



$$[(A\cap B)-A]\cup[(A\cup B)-B]$$
$$[(A\cap B)-A]=\{۲\}-\{۱,۲\}=\varnothing$$
$$[(A\cup B)-B]=\{۱,۲,۳\}-\{۲,۳\}=\{۱\}$$
$$[(A\cap B)-A]\cup[(A\cup B)-B]=\varnothing\cup\{۱\}=\{۱\}=A-B$$

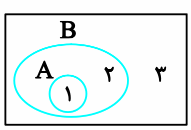
۴۵- گزینه «۴» — متوسط

بنابه قانون جذب داریم: $A\cup(A\cap B)=A$ و $B\cap(A\cup B)=B$ در نتیجه با توجه به فرض مسئله داریم:

$$A\cup(A\cap B)\subseteq B\cap(A\cup B)\Rightarrow A\subseteq B\Rightarrow A\cup B=B$$
$$A\cup(B-A)=A\cup(B\cap A')=(A\cup B)\cap(A\cup A')=B\cap U=B$$

که متمم آن B' می‌شود.

البته می‌توانستیم قسمت دوم را به کمک نمودار ون هم حل کنیم:



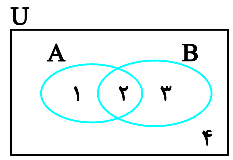
$A\cup(B-A)=\{۱\}\cup\{۲\}=\{۱,۲\}=B$ که متمم آن B' می‌شود.

۴۶- گزینه «۳» متوسط

روش اول:

$$[A\cap(A'\cup B)]\cup[B\cap(A'\cup B')]$$
$$=[\underbrace{(A\cap A')}_{\varnothing}\cup(A\cap B)]\cup[(B\cap A')\cup\underbrace{(B\cap B')}_{\varnothing}]$$
$$=(A\cap B)\cup(A'\cap B)=(A\cup A')\cap B=U\cap B=B$$

روش دوم: نمودار ون را برای دو مجموعه A و B رسم می‌کنیم و مانند شکل روبه‌رو ناحیه‌ها را با اعداد ۱ و ۲ و ۳ و ۴ مشخص می‌کنیم:



$A'\cup B=\{۳,۴\}\cup\{۲,۳\}=\{۲,۳,۴\}$

$A\cap(A'\cup B)=\{۱,۲\}\cap\{۲,۳,۴\}=\{۲\}$

$A'\cup B'=\{۳,۴\}\cup\{۱,۴\}=\{۱,۳,۴\}$

$B\cap(A'\cup B')=\{۲,۳\}\cap\{۱,۳,۴\}=\{۳\}$

$[A\cap(A'\cup B)]\cup[B\cap(A'\cup B')]=\{۲\}\cup\{۳\}=\{۲,۳\}=B$

۴۷- گزینه «۲» متوسط

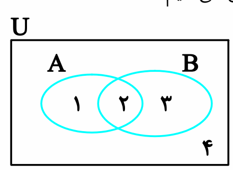
روش اول:

$$(A\cup B)'\cup(A-B)\cup(B-A)=(A'\cap B')\cup(A\cap B')\cup(B\cap A')=$$
$$[\underbrace{(A'\cup A)}_{U}\cap B']\cup(B\cap A')=B'\cup(B\cap A')$$
$$=\underbrace{(B'\cup B)}_{U}\cap(B'\cup A')=B'\cup A'$$

حالا متمم مجموعه را پیدا می‌کنیم:

$$(B'\cup A')'=B\cap A=A\cap B$$

روش دوم: نمودار ون را برای دو مجموعه A و B رسم می‌کنیم و مانند شکل روبه‌رو ناحیه‌ها را با اعداد ۱ و ۲ و ۳ و ۴ مشخص می‌کنیم:



$A\cup B=\{۱,۲,۳\}\Rightarrow(A\cup B)'=\{۴\}$

$(A\cup B)'\cup(A-B)\cup(B-A)=\{۴\}\cup\{۱\}\cup\{۳\}=\{۱,۳,۴\}$

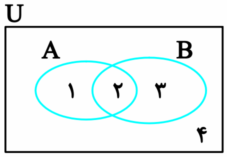
$[(A\cup B)'\cup(A-B)\cup(B-A)]'=\{۲\}=A\cap B$

۴۸- گزینه «۲» متوسط

روش اول:

$$[(A\cap B)\cup(A-B)]\cap[(B-A)\cap(A\cap B)]=$$
$$[(A\cap B)\cup(A\cap B')]\cap[(B\cap A')\cap(A\cap B)]$$
$$=[A\cap\underbrace{(B\cup B')}_{U}]\cap[(B\cap B)\cap\underbrace{(A'\cap A)}_{\varnothing}]=A\cap\varnothing=\varnothing$$

روش دوم: نمودار ون را برای دو مجموعه A و B رسم می‌کنیم و مانند شکل روبه‌رو ناحیه‌ها رابا اعداد ۱ و ۲ و ۳ و ۴ مشخص می‌کنیم:



$(A\cap B)\cup(A-B)=\{۲\}\cup\{۱\}=\{۱,۲\}$

$(B-A)\cap(A\cap B)=\{۳\}\cap\{۲\}=\varnothing$

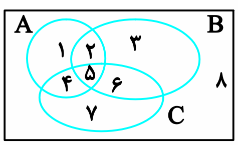
$[(A\cap B)\cup(A-B)]\cap[(B-A)\cap(A\cap B)]=\{۱,۲\}\cap\varnothing=\varnothing$

۴۹- گزینه «۱» متوسط

روش اول:

$$[[\underbrace{(A\cup B)\cap B}_{\text{جذب}}]\cup(A\cap B)]\cap(B\cup C)=[\underbrace{B\cup(A\cap B)}_{\text{جذب}}]\cap(B\cup C)$$
$$=\underbrace{B\cap(B\cup C)}_{\text{جذب}}=B$$

روش دوم: نمودار ون را برای ۳ مجموعه A و B و C مانند شکل رسم می‌کنیم و ۸ ناحیه به وجود آمده را نامگذاری می‌کنیم



$(A\cup B)\cap B=\{۱,۲,۳,۴,۵,۶\}\cap\{۲,۳,۵,۶\}=\{۲,۳,۵,۶\}$

$A\cap B=\{۲,۵\}$

$B\cup C=\{۲,۳,۴,۵,۶,۷\}$

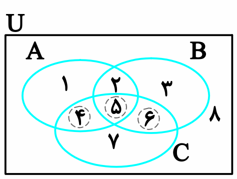
$[[(A\cup B)\cap B]\cup(A\cap B)]\cap(B\cup C)$

$=[\{۲,۳,۵,۶\}\cup\{۲,۵\}]\cap\{۲,۳,۴,۵,۶,۷\}=$

$\{۲,۳,۵,۶\}\cap\{۲,۳,۴,۵,۶,۷\}=\{۲,۳,۵,۶\}=B$

۵۰- گزینه «۴» دشوار

نمودار ون را برای ۳ مجموعه A و B و C رسم می‌کنیم و هر ناحیه را با یک عدد مشخص می‌کنیم، ناحیه‌های رنگ شده $\{۴,۵,۶\}$ است که حال به بررسی گزینه‌ها می‌پردازیم:



گزینه «۱»: $A\cap(B\cup C)=\{۱,۲,۴,۵\}\cap\{۲,۳,۴,۵,۶,۷\}=\{۲,۴,۵\}$ نادرست

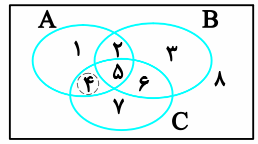
گزینه «۲»: $(A\cap B)\cup C=\{۲,۵\}\cup\{۴,۵,۶,۷\}=\{۲,۴,۵,۶,۷\}$ نادرست

گزینه «۳»: $A\cup(B\cap C)=\{۱,۲,۴,۵\}\cup\{۵,۶\}=\{۱,۲,۴,۵,۶\}$ نادرست

گزینه «۴»: $(A\cup B)\cap C=\{۱,۲,۳,۴,۵,۶\}\cap\{۴,۵,۶,۷\}=\{۴,۵,۶\}$ درست

۵۱- گزینه «۴» متوسط

نمودار ون را برای ۳ مجموعه A و B و C رسم می‌کنیم و هر ناحیه را با یک عدد مشخص می‌کنیم، ناحیه رنگ شده $\{۴\}$ است که حال به بررسی گزینه‌ها می‌پردازیم:



گزینه «۱»: $A\bigcap(B-C)=\{۱,۲,۴,۵\}\bigcap\{۲,۳\}=\{۲\}$ نادرست

گزینه «۲»: $(A\bigcap C')-B'=\{۱,۲\}-\{۱,۴,۷,۸\}=\{۲\}$ نادرست

گزینه «۳»: $A-(B\bigcap C)=\{۱,۲,۴,۵\}-\{۵,۶\}=\{۱,۲,۴\}$ نادرست

گزینه «۴»: $A\bigcap(C-B)=\{۱,۲,۴,۵\}\bigcap\{۴,۷\}=\{۴\}$ درست

۵۲- گزینه «۲» متوسط

مجموعه‌های $A_۱, A_۲, A_۳, \dots, A_۸$ را بدست می‌آوریم:

$$A_۱=\{m\in\mathbb{Z}\,|\,-۱\le m\le ۷\}=\{-۱,۰,۱,۲,۳,۴,۵,۶,۷\}$$

$$A_۲=\{m\in\mathbb{Z}\,|\,-۲\le m\le ۶\}=\{-۲,-۱,۰,۱,۲,۳,۴,۵,۶\}$$

$$A_۳=\{m\in\mathbb{Z}\,|\,-۳\le m\le ۵\}=\{-۳,-۲,-۱,۰,۱,۲,۳,۴,۵\}$$

$$\vdots$$

$$A_۸=\{m\in\mathbb{Z}\,|\,-۸\le m\le ۰\}$$
$$=\{-۸,-۷,-۶,-۵,-۴,-۳,-۲,-۱,۰\}$$

$$\bigcup_{i=۱}^{۸}A_i=A_۱\cup A_۲\cup A_۳\cup\dots\cup A_۸=\{-۸,-۷,-۶,\dots,۶,۷\}$$

$$\bigcap_{i=۱}^{۸}A_i=A_۱\cap A_۲\cap A_۳\cap\dots\cap A_۸=\{-۱,۰\}$$

$$\bigcup_{i=۱}^{۸}A_i-\bigcap_{i=۱}^{۸}A_i=\{-۸,-۷,-۶,-۵,-۴,-۳$$
$$,-۲,۱,۲,۳,۴,۵,۶,۷\}$$

مجموعه $\bigcup_{i=۱}^{۸}A_i-\bigcap_{i=۱}^{۸}A_i$ دارای ۱۴ عضو است.

۵۳- گزینه «۱» آسان

ابتدا مجموعه‌های $A_۱$ و $A_۲$ و $A_۵$ و $A_۷$ را بدست می‌آوریم:

$$A_۱=[-۱,۴]\qquad A_۲=[-۲,\tfrac{۷}{۲}]\qquad A_۵=[-۵,۲]\qquad A_۷=[-۷,۱]$$

$$A_۲\cap A_۵=[-۲,۲]\qquad A_۱\cap A_۷=[-۱,۱]$$

$$(A_۲\cap A_۵)-(A_۱\cap A_۷)=[-۲,-۱)\cup(۱,۲]$$

۵۴- گزینه «۳» آسان

مجموعه‌های $A_۱$ و $A_۲$ و $A_۳$ و $A_۴$ را بدست می‌آوریم:

$$A_۱=(-۱,۲)\qquad A_۲=(۲,۴)\qquad A_۳=(-۳,۶)\qquad A_۴=(۴,۸)$$

$$\bigcup_{i=۱}^{۴}A_i=A_۱\cup A_۲\cup A_۳\cup A_۴=(-۳,۸)$$

$$\Rightarrow\ \{-۲,-۱,۰,۱,۲,۳,۴,۵,۶,۷\}\subseteq\bigcup_{i=۱}^{۴}A_i$$

۱۰ عدد صحیح عضو مجموعه $\bigcup_{i=۱}^{۴}A_i$ هستند.

۵۵- گزینه «۱» آسان

اگر A و B و C سه مجموعه غیرتهی باشند داریم:

$$A\times C=B\times C\ \Rightarrow\ A=B$$

۵۶- گزینه «۱» آسان

$$\overbrace{(A\times \underbrace{B)\subset(B}_{\subseteq}\times A)}^{\subseteq}\ \Rightarrow\ \begin{cases}A\subseteq B\\ B\subseteq A\end{cases}\Rightarrow\ A=B$$

$$A\Delta B=A\Delta A=\varnothing$$

۵۷- گزینه «۳» متوسط

مجموعه‌های A و B را بدست می‌آوریم:

$$A=\{۲k-۱\,|\,\overbrace{k\in\mathbb{Z},۰\le k\le ۲}^{k\in\{۰,۱,۲\}}\}=\{-۱,۱,۳\}$$

$$B=\{x\,|\,x\in\mathbb{N},x^۲\le ۹\}=\{۱,۲,۳\}$$

$$A^۲=A\times A=\{(-۱,-۱),(-۱,۱),(-۱,۳),(۱,-۱)$$
$$,(۱,۱),(۱,۳),(۳,-۱),(۳,۱),(۳,۳)\}$$

$$B^۲=B\times B=\{(۱,۱),(۱,۲),(۱,۳),(۲,۱),(۲,۲)$$
$$,(۲,۳),(۳,۱),(۳,۲),(۳,۳)\}$$

$$B^۲-A^۲=\{(۱,۲),(۲,۱),(۲,۲),(۲,۳),(۳,۲)\}$$

چون مجموعه $B^۲-A^۲$ دارای ۵ عضو است پس $۲^۵=۳۲$ زیرمجموعه دارد.

۵۸- گزینه «۳» آسان

نکته: تعداد عضوهای مشترک دو مجموعه $A^۲$ و $B^۲$ برابر $|A\cap B|^۲$ است.

$$A\cap B=\{a,c,d\}$$

$$B^۲ \text{ و } A^۲ \text{ تعداد عضوهای مشترک}=(۳)^۲=۹$$

۵۹- گزینه «۱» — آسان

نکته: اگرمجموعه A دارای n عضو و مجموعه B دارای m عضو باشد $A\times B$ دارای $n\times m$ عضو است.

در حالت اول داریم: $|A\times B| = ۳\times ۵ = ۱۵$

در حالت دوم مجموعه A دارای ۶ و مجموعه B دارای ۸ عضو می‌شود که $|A\times B| = ۶\times ۸ = ۴۸$

بنابراین تفاضل تعداد عضوهای آن‌ها برابر $(۴۸ - ۱۵ = ۳۳)$ است.

۶۰- گزینه «۳» — آسان

اگر $(x , y) = (a , b)$ باشد $x = a$ و $y = b$ است.

$$۵^{۳y} = ۱۲۵ \Rightarrow ۵^{۳y} = ۵^{۳} \Rightarrow ۳y = ۳ \Rightarrow y = ۱$$

$$۲^{۳x+y} = ۶۴ \Rightarrow ۲^{۳x+y} = ۲^{۶} \xrightarrow{y=۱} ۳x + ۱ = ۶ \Rightarrow x = \frac{۵}{۳}$$

$$x + y = \frac{۵}{۳} + ۱ = \frac{۸}{۳}$$

۶۱- گزینه «۱» — متوسط

اعضای دو مجموعه A و B را بدست آوریم:

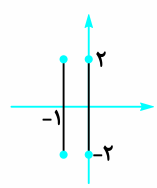
$$|۲x + ۱| < ۳ \Rightarrow -۳ < ۲x + ۱ < ۳$$

$$\xrightarrow{-۱} -۴ < ۲x < ۲ \Rightarrow -۲ < x < ۱$$

$$A = \{x \in \mathbb{Z} \mid |۲x + ۱| < ۳\} = \{x \in \mathbb{Z} \mid -۲ < x < ۱\} \Rightarrow A = \{-۱ , ۰\}$$

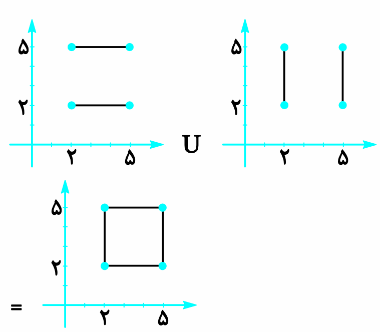
$$B = \{x \in \mathbb{R} \mid x^{۲} \le ۴\} = \{x \in \mathbb{R} \mid -۲ \le x \le ۲\} \Rightarrow B = [-۲ , ۲]$$

چون می‌خواهیم $A\times B$ را رسم کنیم، مجموعه A را روی محور x و مجموعه B را روی محور y نشان می‌دهیم.



۶۲- گزینه «۳» — متوسط

نمودارهای $A\times B$ و $B\times A$ را رسم می‌کنیم و سپس اجتماع این دو نمودار را بدست می‌آوریم:



شکل حاصل از اجتماع دو مجموعه محیط یک مربع به ضلع ۳ است.

$$\text{محیط} = ۴\times ۳ = ۱۲$$

۶۳- گزینه «۴» — دشوار

نکته: اگر $A\times B = B\times A \Rightarrow A = B$ یا $A = \varnothing$ یا $B = \varnothing$

چون A و B ناتهی هستند و $A\times B = B\times A$ است بنابراین $A = B$

مجموعه C چهار عضو از A کمتر دارد و چون $A = B$ است پس $B \ne C$

$B\times C = C\times B \Rightarrow B = C$ یا $B \ne \varnothing$ یا $C \ne \varnothing$

چون $B \ne C$ و $B \ne \varnothing$ است پس $C \ne \varnothing$ است و مجموعه B چهار عضو از مجموعه C بیشتر دارد بنابراین مجموعه B، چهار عضوی است.

۶۴- گزینه «۲» — متوسط

$A = \{۱ , ۳ , ۵ , ۷ , ۹\} \qquad B = \{۲ , ۳ , ۵ , ۷\}$

$A - B = \{۱ , ۹\} \qquad A \cap B = \{۳ , ۵ , ۷\}$

$$(A - B)\times (A \cap B) = \{(۱ , ۳) , (۱ , ۵) , (۱ , ۷) , (۹ , ۳) , (۹ , ۵) , (۹ , ۷)\}$$

۶۵- گزینه «۴» — دشوار

می‌دانیم تعداد زیرمجموعه‌های غیرتهی هر مجموعه n عضوی $۲^{n} - ۱$ است.

$$۲^{n} - ۱ = ۷ \Rightarrow ۲^{n} = ۸ \Rightarrow n = ۳ \Rightarrow n(A \cap B) = ۳$$

$$۲^{n} - ۱ = ۱۵ \Rightarrow ۲^{n} = ۱۶ \Rightarrow n = ۴ \Rightarrow n(A - B) = ۴$$

$$n(A - B)\times (B - A) = n(A - B)\times n(B - A)$$
$$\Rightarrow ۲۰ = ۴\times n(B - A) \Rightarrow n(B - A) = ۵$$

$$n(B - A) = n(B) - n(A \cap B) \Rightarrow ۵ = n(B) - ۳ \Rightarrow n(B) = ۸$$

$$\text{تعداد زیرمجموعه‌های ۳ عضوی B} = \binom{۸}{۳} = \frac{۸!}{۳!\times ۵!} = \frac{۸\times ۷\times ۶\times ۵!}{۶\times ۵!} = ۵۶$$

۶۶- گزینه «۳» — دشوار

با توجه به اینکه تابع f زیرمجموعه $A\times B$ است پس $D_f \subset A$ و $R_f \subset B$ است.

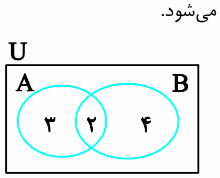
$$\left.\begin{array}{l} \{-۱ , ۲ , ۴ , ۵\} \subseteq A \Rightarrow n(A) \ge ۴ \\ \{۳ , ۶ , ۷\} \subseteq B \Rightarrow n(B) \ge ۳ \end{array}\right\}$$
$$\Rightarrow n(A)\times n(B) \ge ۱۲ \Rightarrow n(C) \ge ۱۲$$

پس تعداد عضوهای C نمی‌تواند ۸ یا ۱۰ باشد.

تعداد عضوهای C چون از حاصل‌ضرب ۲ عدد طبیعی بزرگ‌تر از ۱ بدست آمده بنابراین نمی‌تواند یک عدد اول یعنی ۱۷ باشد.

۶۷- گزینه «۳» — دشوار

نمودار ون را برای دو مجموعه A و B رسم می‌کنیم و در هر ناحیه تعداد عضوهای آن قسمت را می‌نویسیم که مطابق شکل می‌شود.



$$|(A \cap B')\times (A \cup B')'| = |A \cap B'|\times |(A \cup B')'| = |A - B|\times |A' \cap B|$$
$$= |A - B|\times |B \cap A'| = |A - B|\times |B - A| = ۳\times ۴ = ۱۲$$

۶۸- گزینه «۳» — دشوار

ابتدا اعضای دو مجموعه A و B را مشخص می‌کنیم:

$A=\{۲k-۱|k\in\mathbb{Z},۱\le k\le ۵\}=\{۱,۳,۵,۷,۹\}$

$|k-۳|\le ۲\Rightarrow -۲\le k-۳\le ۲\xrightarrow{+۳}۱\le k\le ۵$

$B=\{k\in\mathbb{Z}:|k-۳|\le ۲\}=\{۱,۲,۳,۴,۵\}$

$A\cap B=\{۱,۳,۵\}$

نکته: $|(A\times B)\cap(B\times A)|=|A\cap B|^۲$

$|(A\times B)\cap(B\times A)|=|A\cap B|^۲=۳^۲=۹$

۶۹- گزینه «۲» — دشوار

نکته: $|A^۲-B^۲|=|A|^۲-|A\cap B|^۲$

$|A^۲-B^۲|=|A|^۲-|A\cap B|^۲\Rightarrow ۱۱۹=۱۲^۲-|A\cap B|^۲\Rightarrow|A\cap B|^۲=۱۴۴-۱۱۹$

$\Rightarrow|A\cap B|^۲=۲۵\Rightarrow|A\cap B|=۵$

هر مجموعه n عضوی ۲^n زیرمجموعه دارد و چون $|A\cap B|$ دارای ۵ عضو است پس $۲^۵=۳۲$ زیرمجموعه دارد.

۷۰- گزینه «۳» — دشوار

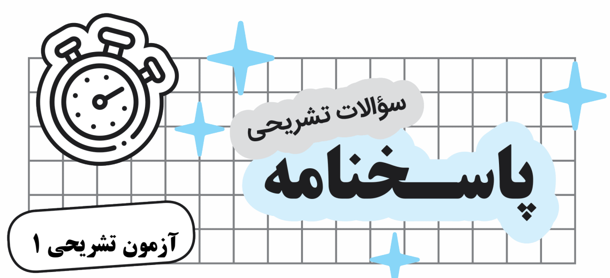
نکته: $|(A\times B)-(B\times A)|=|A||B|-|A\cap B|^۲$

و $|A\cup B|=|A|+|B|-|A\cap B|$

$|(A\times B)-(B\times A)|=|A||B|-|A\cap B|^۲$

$\Rightarrow ۱۱=۴\times ۵-|A\cap B|^۲\Rightarrow|A\cap B|^۲=۹\Rightarrow|A\cap B|=۳$

$|A\cup B|=|A|+|B|-|A\cap B|=۴+۵-۳=۶$



۱- آسان

آ) چون یک جمله خبری پس گزاره است.

ب) یک جمله خبری است پس گزاره است.

پ) یک جمله احساسی است و گزاره نیست.

ت) یک جمله پرسشی است و گزاره نیست.

۲- آسان

آ) سور ـ گزاره ب) انتفاعی مقدم – درست پ) ندارد

۳- متوسط

اگر گزاره شرطی $(p\wedge\sim q)\Rightarrow S$ نادرست باشد آنگاه $p\wedge\sim q\equiv T$ و $S\equiv F$ است و چون $p\wedge\sim q\equiv T$ است پس $p\equiv T$ و $q\equiv F$ است.

$(q\vee\sim s)\Rightarrow\sim p\equiv(F\vee T)\Rightarrow F\equiv T\Rightarrow F\equiv F$

۴- متوسط

آ) درست ـ اگر $x=۶$ باشد $\frac{x-۶}{۳}=۰$ می‌شود (سور وجودی)

$\sim(\exists x\mathbb{R};\frac{x-۶}{۳}=۰)\equiv\forall x\in\mathbb{R};\frac{x-۶}{۳}\neq ۰$

ب) درست ـ اگر (عدد ۹ اول است $p\equiv$) و (۲۵ گویا است $q\equiv$)

$p\vee q\equiv F\vee T\equiv T$

$\sim(p\vee q)\equiv\sim p\wedge\sim q$

نقیض: عدد ۹ اول نیست و ۲۵ گنگ است.

۵- متوسط

p	q	~p	~q	p ⇒ ~q	q ⇒ ~p
د	د	ن	ن	ن	ن
د	ن	ن	د	د	د
ن	د	د	ن	د	د
ن	ن	د	د	د	د

نتیجه می‌گیریم $p\Rightarrow\sim q\equiv q\Rightarrow\sim p$

۶- دشوار

$[(p\Rightarrow q)\wedge p]\Rightarrow q\equiv[(\sim p\vee q)\wedge p]$

$\Rightarrow q\equiv[\underbrace{(\sim p\wedge p)}_{F}\vee(q\wedge p)]\Rightarrow q$

$\equiv(q\wedge p)\Rightarrow q\equiv\sim(q\wedge p)\vee q\equiv(\sim q\vee\sim p)\vee q$

$\equiv(\sim q\vee q)\vee\sim p\equiv T\vee\sim p\equiv T$

۷- متوسط

تعداد زیرمجموعه‌های محض یک مجموعه n عضوی $(۲^n-۱)$ است و تعداد زیرمجموعه‌های یک مجموعه $(n-۳)$ عضوی $۲^{n-۳}$ است.

$۲^n-۱-۲^{n-۳}=۲۲۳\Rightarrow ۲^n(۱-\frac{۱}{۲^۳})=۲۲۴\Rightarrow ۲^n\times\frac{۷}{۸}=۲۲۴$

$\Rightarrow ۲^n=۲۵۶\Rightarrow ۲^n=۲^۸\Rightarrow n=۸$

۸- دشوار

آ) $(A\cap B)-(B\cap C)=(A\cap B)\cap(B\cap C)'=(A\cap B)\cap(B'\cup C')$

$=A\cap[B\cap(B'\cup C')]=A\cap[\underbrace{(B\cap B')}_{\varnothing}\cup(B\cap C')]$

$=A\cap(B\cap C')$

$=(A\cap B)\cap C'=(A\cap B)-C$

$=(A-B')-C$

ب) $A-(B\cap C)=A\cap(B\cap C)'=A\cap(B'\cup C')$
$=(A\cap B')\cup(A\cap C')=(A-B)\cup(A-C)$

۹- آسان

مجموعه‌های $A_۱$ و $A_۲$ و $A_۳$ را بدست می‌آوریم:

$A_۱=[۴,۵]$ $\quad A_۲=[۳,۴/۵]$ $\quad A_۳=[۲,\frac{۱۳}{۳}]$

$\bigcup_{i=۱}^{۳}A_i=A_۱\cup A_۲\cup A_۳=[۲,۵]$

۱۰- متوسط

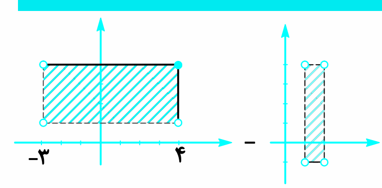
نکته: $A\times B=B\times A \Rightarrow A=\varnothing \vee B=\varnothing \vee A=B$

چون $A\neq\varnothing$ و $B\neq\varnothing$ است پس است

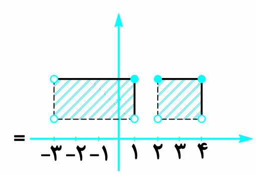
$x-۲=۲ \Rightarrow x=۴$

$y-۳=۳ \Rightarrow y=۶$

۱۱- آسان



A×B C×D



(A×B) − (C×D)

۱۲- متوسط

ابتدا اعضای مجموعه A را مشخص می‌کنیم:

$|k|\leq ۱ \Rightarrow -۱\leq k\leq ۱ \xrightarrow{k\in\mathbb{Z}} k\in\{-۱,۰,۱\}$

چون عضوهای مجموعه A به صورت ۲^k است پس: $A=\{\frac{۱}{۲},۱,۲\}$

$A\times B=\{(\frac{۱}{۲},۰),(\frac{۱}{۲},۱),(۱,۰),(۱,۱),(۲,۰),(۲,۱)\}$

$B^۲=\{(۰,۰),(۰,۱),(۱,۰),(۱,۱)\}$

$(A\times B)-B^۲=\{(\frac{۱}{۲},۰),(\frac{۱}{۲},۱),(۲,۰),(۲,۱)\}$

پاسخنامه سؤالات تشریحی

آزمون تشریحی ۲

۱- آسان

هر جمله خبری که شامل یک یا چند متغیر باشد و با جایگذاری مقادیری به جای متغیر به یک گزاره تبدیل شود، گزاره‌نما نامیده می‌شود.

۲- آسان

آ) مجموعه جواب

ب) نادرست ـ درست

$p\wedge q\equiv F\wedge q\equiv F$

انتفای مقدم $p \Rightarrow q\equiv F \Rightarrow q\equiv T$

پ) ۱۵

$۲^n-۱=۶۳ \Rightarrow ۲^n=۶۴ \Rightarrow n=۶$

تعداد زیرمجموعه‌های دو عضوی $=\binom{۶}{۲}=\frac{۶\times۵}{۲}=۱۵$

۳- متوسط

ابتدا مجموعه A را می‌نویسیم:

$A=\{-۴,-۳,-۲,-۱,۰,۱,۲,۳,۴\}$

اگر $x=۴$ باشد $x(x-۱)=۴\times۳=۱۲\not\leq ۵$، چون گزاره با سور عمومی است پس ارزش گزاره سوری نادرست است.

$\sim(\forall x\in A;x(x-۱)\leq ۵)\equiv \exists x\in A;x(x-۱)>۵$

۴- متوسط

$p \Rightarrow [(q \Rightarrow p)\wedge(\sim q \Rightarrow p)]$

p	q	$\sim q$	$q \Rightarrow p$	$\sim q \Rightarrow p$	$(q \Rightarrow p)\wedge(\sim q \Rightarrow p)$	$p \Rightarrow [(q \Rightarrow p)\wedge(\sim q \Rightarrow p)]$
د	د	ن	د	د	د	د
د	ن	د	د	د	د	د
ن	د	ن	ن	د	ن	د
ن	ن	د	د	ن	ن	د

-۵ دشوار

$p \Rightarrow (q\wedge r) \equiv \sim p \vee (q\wedge r) \equiv (\sim p \vee q)\wedge(\sim p\vee r)$

$\equiv (q\vee \sim p)\wedge(r\vee\sim p)$

$\equiv (\sim q \Rightarrow \sim p)\wedge(\sim r\Rightarrow \sim p)$

-۶ متوسط

اگر مجموعه A، n عضو داشته باشد ۲^n زیرمجموعه دارد و چنانچه ۳ عضو به مجموعه A اضافه کنیم تعداد زیرمجموعه‌های آن $۲^{n+۳}$ می‌شود.

$۲^{n+۳}-۲^n = ۴۴۸ \Rightarrow ۲^n(۲^۳-۱)=۴۴۸$

$\Rightarrow ۲^n\times ۷ = ۴۴۸ \Rightarrow ۲^n = ۶۴$

$۲^n = ۲^۶ \Rightarrow n=۶$

A تعداد زیرمجموعه‌های ۳ عضوی $=\binom{۶}{۳}=۲۰$

-۷ متوسط

مجموعه‌های $A_۱$ و $A_۲$ و $A_۳$ را بدست می‌آوریم:

$A_۱=(۱,۳)\ ,\ A_۲=(\frac{۱}{۲},۴)\ ,\ A_۳=(\frac{۱}{۳},۵)$

$\bigcap_{i=۱}^{۳} A_i = A_۱\cap A_۲\cap A_۳ = (\frac{۱}{۳},۳)$

-۸ متوسط

$A-B=\{x\in U\mid x\in A\wedge x\notin B\} \overset{A\subseteq B}{=} \{x\in U\mid x\in B\wedge x\in B'\}$

$=\varnothing \Rightarrow A-B=\varnothing$

-۹ دشوار

$(A-B)\cup(A\cap B)\cup(B-A)=(A\cap B')\cup(A\cap B)\cup(B\cap A')$

آ) $=[A\cap\underbrace{(B'\cup B)}_{U}]\cup(B\cap A')=$

$(A\cap U)\cup(B\cap A')=A\cup(B\cap A')=(A\cup B)\cap(A\cup A')$

$=(A\cup B)\cap U = A\cup B$

ب) $(A\cup B)\cap(A'\cap B')=[(A\cup B)\cap A']\cap B'$

$=[(A\cap A')\cup(B\cap A')]\cap B'=$

$[\varnothing\cup(B\cap A')]\cap B'=(B\cap A')\cap B'$

$=(B\cap B')\cap A'=\varnothing\cap A'=\varnothing$

-۱۰ متوسط

$A\times B = B\times A \Rightarrow A=\varnothing$ یا $B=\varnothing$ یا $A=B$

چون $A\neq\varnothing$ و $B\neq\varnothing$ است پس $A=B$

$\begin{cases} x+y=۵ \\ x-y=۳\end{cases} \Rightarrow x=۴, y=۱$

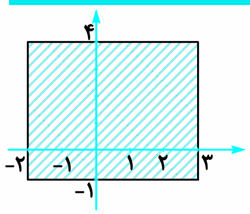
-۱۱ متوسط

$A\times B=\{(-۱,-۳),(-۱,-۱),(-۱,۱),(۰,-۳),(۰,-۱)$
$,(۰,۱),(۱,-۳),(۱,-۱),(۱,۱)\}$

$A^۲=\{(-۱,-۱),(-۱,۰),(-۱,-۱),(۰,-۱),(۰,۰)$
$,(۰,۱),(۱,-۱),(۱,۰),(۱,۱)\}$

$A^۲-A\times B=\{(-۱,۰),(۰,۰),(۱,۰)\}$

-۱۲ آسان



-۱۳ دشوار

آ) برهان خلف: اگر $A\times\varnothing\neq\varnothing$ باشد در این صورت $(x,y)\in A\times\varnothing$ باشد

$(x,y)\in A\times\varnothing \xrightarrow{\text{تعریف ضرب دکارتی}} (x\in A)\wedge\underbrace{(y\in\varnothing)}_{\text{تناقض}}$

پس فرض خلف باطل و $A\times\varnothing=\varnothing$ است به همین ترتیب ثابت می‌کنیم $\varnothing\times A=\varnothing$

ب) برهان خلف: اگر هیچ کدام از مجموعه‌های A و B تهی نباشند.

$\left.\begin{array}{l} A\neq\varnothing \Rightarrow \exists x\in A \\ B\neq\varnothing \Rightarrow \exists y\in B\end{array}\right\} \Rightarrow (x,y)\in A\times B \Rightarrow A\times B\neq\varnothing$ تناقض

پس فرض خلف باطل و از بین A و B حداقل یک مجموعه تهی است.

-۱ گزینه «۴» آسان

برای n گزاره در جدول ارزش گزاره‌ها ۲^n حالت وجود دارد.

$\left.\begin{array}{l} \text{تعداد حالات برای ۴ گزاره} = ۲^۴ = ۱۶ \\ \text{تعداد حالات برای ۷ گزاره} = ۲^۷ = ۱۲۸\end{array}\right\} \Rightarrow$ تعداد حالات اضافه شده $=۱۲۸-۱۶=۱۱۲$

۲- گزینه «۴» متوسط

به بررسی گزینه‌ها می‌پردازیم:

گزینه «۱»: دامنه متغیر $D=\{۱,۲,۳,۴,...\}$ و مجموعه جواب $D=\{۳,۶,۹,...\}$ است که $D\neq S$

گزینه «۲»: $۷x^۲-۳x-۴=۰ \Rightarrow (۷x+۴)(x-۱)=۰$
$\Rightarrow x=-\frac{۴}{۷}$ یا $x=۱$

دامنه متغیر $D=\mathbb{R}$ است و مجموعه جواب $S=\{-۱,\frac{۴}{۷}\}$ است که $D\neq S$ است

گزینه «۳»: دامنه متغیر $D=\{۱,۲,۳,۴,...\}$ و مجموعه جواب $S=\{۱۰,۱۱,۱۲,...,۹۹\}$ است که $D\neq S$

گزینه «۴»: هم دامنه متغیر و هم مجموعه جواب $D=S=\{۱,۲,۳,۴,۵,۶\}$ است.

۳- گزینه «۱» آسان

$$(q\Rightarrow p)\wedge(p\vee q)\equiv(\sim q\vee p)\wedge(q\vee p)$$
$$\equiv(\sim q\wedge q)\vee p\equiv F\vee p\equiv p$$

۴- گزینه «۱» دشوار

به بررسی تک به تک گزینه‌ها می‌پردازیم:

گزینه «۱»: $p\Rightarrow(p\vee q)\equiv\sim p\vee(p\vee q)\equiv(\sim p\vee p)\vee q$
$\equiv T\vee q\equiv T$

با این وجود برای آموزش بهتر سایر گزینه‌ها را هم بررسی می‌کنیم:

گزینه «۲»: $\sim p\Rightarrow(q\Rightarrow p)\equiv p\vee(\sim q\vee p)\equiv\sim q\vee p$

گزینه «۳»: $q\wedge(q\Rightarrow p)\equiv q\wedge(\sim q\vee p)\equiv(q\wedge\sim q)\vee(q\wedge p)$
$\equiv F\vee(q\wedge p)\equiv q\wedge p$

گزینه «۴»: $(p\vee q)\Rightarrow p\equiv\sim(p\vee q)\vee p\equiv(\sim p\wedge\sim q)\vee p$
$\equiv(\sim p\vee p)\wedge(\sim q\vee p)\equiv T\wedge(\sim q\vee p)\equiv\sim q\vee p$

۵- گزینه «۴» دشوار

گزاره $(P\wedge\sim p)$ همواره نادرست است و برای آن که گزاره $(P\Rightarrow q)\Leftrightarrow(P\wedge\sim p)$ همواره درست باشد باید $(p\Rightarrow q)$ هم نادرست باشد که $p\equiv T$ و $q\equiv F$ است. حال به بررسی تک به تک گزینه‌ها می‌پردازیم:

گزینه «۱»: $\sim q\Rightarrow\sim p\equiv T\Rightarrow F\equiv F$

گزینه «۲»: $P\wedge q\equiv T\wedge F\equiv F$

گزینه «۳»: $\sim p\wedge q\equiv F\wedge F\equiv F$

گزینه «۴»: $q\Rightarrow p\equiv F\Rightarrow T\equiv T$

۶- گزینه «۱» آسان

ابتدا خود گزاره را ساده می‌کنیم:

$$(P\wedge\sim q)\Rightarrow p\equiv\sim(p\wedge\sim q)\vee p\equiv(\sim p\vee q)\vee p$$
$$\equiv(\sim p\vee p)\vee q\equiv T\vee q\equiv T$$

پس نقیض این گزاره نادرست خواهد بود.

۷- گزینه «۴» دشوار

به بررسی گزینه‌ها می‌پردازیم (دقت کنید هر دو سور، سور وجودی هستند)

گزینه «۱»: $x=۱, y=۵\Rightarrow ۲x+y=۲(۱)+۵=۷$

گزینه «۲»: $x=-۱, y=۲\Rightarrow ۳x+۵y=۳(-۱)+۵(۲)=۷$

گزینه «۳»: $x=۱, y=۷\Rightarrow xy=۱\times۷=۷$

گزینه «۴»:

$x^۲+y^۲=۷\Rightarrow$ هیچ x و y عضو اعداد صحیح در این رابطه وجود ندارد:

۸- گزینه «۲» متوسط

❊ نکته ۱: $\sim(\forall x; P(x))\equiv\exists x;\sim p(x)$

❊ نکته ۲: $\sim(p\wedge q)\equiv\sim p\vee\sim q$

$$\sim(\forall x\in\mathbb{R};(\frac{x^۲+۱}{x-۱}\le ۰\wedge ۲x+۳=۰))$$
$$\equiv\exists x\in\mathbb{R};(\frac{x^۲+۱}{x-۱}>۰\vee ۲x+۳\neq۰)$$

۹- گزینه «۲» متوسط

مجموعه B تک عضوی است برای آنکه با مجموعه A برابر باشد، باید مجموعه A هم تک عضوی باشد. بنابراین در مجموعه A، $x^۲+x=۱۵-x$ است.

$$x^۲+x=۱۵-x\Rightarrow x^۲+۲x-۱۵=۰$$
$$\Rightarrow(x+۵)(x-۳)=۰\Rightarrow x=-۵ \text{ یا } x=۳$$

اگر $x=۳$ باشد $A=\{۱۲\}$ می‌شود پس

$۴a+۸=۱۲\Rightarrow ۴a=۴\Rightarrow a=۱$

اگر $x=-۵$ باشد $A=\{۲۰\}$ می‌شود پس

$۴a+۸=۲۰\Rightarrow ۴a=۱۲\Rightarrow a=۳$

۱۰- گزینه «۳» متوسط

تعداد زیرمجموعه‌های غیرتهی یک مجموعه $(k+۱)$ عضوی $(۲^{k+۱}-۱)$ است و تعداد زیرمجموعه‌های یک مجموعه $(k-۳)$ عضوی برابر $۲^{k-۳}$ است.

$$۲^{k+۱}-۱-۲^{k-۳}=۱۱۹\Rightarrow ۲^k(۲-۲^{-۳})=۱۲۰\Rightarrow ۲^k(۲-\frac{۱}{۸})=۱۲۰$$
$$\Rightarrow ۲^k\times\frac{۱۵}{۸}=۱۲۰\Rightarrow ۲^k=۶۴=۲^۶\Rightarrow k=۶$$

تعداد زیرمجموعه‌های ۳ عضوی یک مجموعه ۶ عضوی $=\binom{۶}{۳}=۲۰$

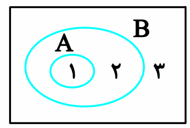
۱۱- گزینه «۲» — متوسط

نکته: $A\Delta B=(B-A)\cup(A-B)$ و $B'\subset A' \Rightarrow A\subset B$

روش اول:

$$(A\Delta B)\cup(A\cap B)=(B-A)\cup(A-B)\cup(A\cap B)$$
$$=(B\cap A')\cup(A\cap B')\cup(A\cap B)=$$
$$(B\cap A')\cup[A\cap\underbrace{(B'\cup B)}_{U}]=(B\cap A')\cup A=(B\cup A)\cap(A\cup A')$$
$$=(B\cup A)\cap U=B\cup A\overset{A\subset B}{=}B$$

روش دوم:



$A\Delta B=(A-B)\cup(B-A)=\varnothing\cup\{۲\}=\{۲\}$

$A\cap B=\{۱\}$

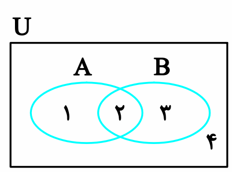
$(A\Delta B)\cup(A\cap B)=\{۱,۲\}=B$

۱۲- گزینه «۱» — متوسط

روش اول:

$$(A-B)'\cap(A\cup B)\cap A'=(A\cap B')'\cap(A\cup B)\cap A'$$
$$=\underbrace{[(A'\cup B)\cap A']}_{\text{جذب}}\cap(A\cup B)=$$
$$A'\cap(A\cup B)=(A'\cap A)\cup(A'\cap B)=\varnothing\cup(B\cap A')$$
$$=B\cap A'=B-A$$

روش دوم:



$A-B=\{۱\}\Rightarrow(A-B)'=\{۲,۳,۴\}$

$A\cup B=\{۱,۲,۳\}$

$A'=\{۳,۴\}$

$(A-B)\cap(A\cup B)\cap A'=\{۲,۳,۴\}\cap\{۱,۲,۳\}\cap\{۳,۴\}$

$=\{۳\}=B-A$

۱۳- گزینه «۳» — آسان

اگر $A=\{۱,۲\}$ و $B=\{۲,۳,۴\}$ و $C=\{۲,۵,۶\}$ باشد

$A\cap C=B\cap C=\{۲\}$

اما $A\neq B$ است.

۱۴- گزینه «۳» — متوسط

ابتدا مجموعه‌های $A_۱$ و $A_۲$ و $A_۳$ و $A_۴$ را مشخص می‌کنیم:

$A_۱=[۰,۲]$, $A_۲=[۱,۳]$, $A_۳=[۲,۴]$, $A_۴=[۳,۵]$

$$\bigcap_{i=۱}^{۳}A_n=A_۱\cap A_۲\cap A_۳=\{۲\}$$

$$\bigcup_{i=۱}^{۴}A_n=A_۱\cup A_۲\cup A_۳\cup A_۴=[۰,۵]$$

$$\bigcup_{i=۱}^{۴}A_n-\bigcap_{i=۱}^{۳}A_n=[۰,۵]-\{۲\}=\{x:۰\le x\le ۵,x\neq ۲\}$$

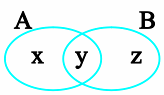
۱۵- گزینه «۳» — آسان

چون $A\cap B=\varnothing$ است یعنی A و B دو مجموعه جدا از هم هستند و $A-B=A$ و $B-A=B$ است.

$(A-B)\cup(B-A)=A\cup B$

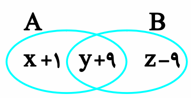
۱۶- گزینه «۲» — دشوار

حالت اول:



$n(A\cup B)=x+y+z=۲۵$

حالت دوم: چون B تغییر نکرده است باید $n(B)=y+z$ باشد.



$n(A\cup B)=x+۱+y+۹+z-۹=x+y+z+۱=۲۵+۱=۲۶$

۱۷- گزینه «۱» — آسان

$(A\times B)\cap(B\times A)=(A\cap B)^۲=\varnothing\Rightarrow A\cap B=\varnothing\Rightarrow A\subset B'$

$A-B=A\cap B'\overset{A\subset B'}{=}A$

۱۸- گزینه «۳» — متوسط

ابتدا مجموعه‌های A و B را مشخص می‌کنیم:

$A=\{x\in\mathbb{N},۵<x^۲<۵۰\}=\{۳,۴,۵,۶,۷\}$

$B=\{۳k-۲\mid k\in\mathbb{Z},۱\le k\le ۴\}=\{۱,۴,۷,۱۰\}$

$A\cap B=\{۴,۷\}$

با توجه به اینکه $(A\times B)\cap(B\times A)=|A\cap B|^۲$ پس این مجموعه ۴ عضو دارد و $۲^۴=۱۶$ زیرمجموعه دارد.

۱۹- گزینه «۳» — دشوار

$A-B=\{۲,۳,۵\}\Rightarrow|A-B|=۳$

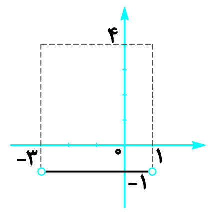
$|(A-B)\times(B-A)|=|A-B|\times|B-A|$

$\Rightarrow ۱۵=۳\times|B-A|\Rightarrow|B-A|=۵$

$|B|=|B-A|+|A\cap B|=۵+۲=۷$

۲۰- گزینه «۳» دشوار

روش اول: ابتدا نمودار $A\times B$ را رسم می‌کنیم و سپس اشتراک $A\times B$ را با $Z\times N$ بدست می‌آوریم که به صورت مجموعه زیر است:



$\{(-۲,۱),(-۲,۲),(-۲,۳),(-۱,۱),(-۱,۲)$
$,(-۱,۳),(۰,۱),(۰,۲),(۰,۳)\}$

روش ۲:

$(A\times B)\cap(Z\times N)=(A\cap Z)\times(B\cap N)=\{-۲,-۱,۰\}\times\{۱,۲,۳\}$

که دارای ۹ عضو است.

سؤالات تستی پاسخنامه

آزمون پلاس

۱- گزینه «۳»

اگر p و q و r به ترتیب سه گزاره «x مربع کامل است»، «x فرد است» و «باقی‌مانده تقسیم x بر عدد ۸ برابر ۱ است» باشد، به صورت زیر ساده می‌شوند:

$(p\wedge q)\ \Rightarrow\ r\equiv\sim(p\wedge q)\vee r$

نقیض گزاره فوق را بدست می‌آوریم:

$\sim(\sim(p\wedge q)\vee r)\equiv(p\wedge q)\wedge\sim r$

یعنی عدد x مربع کامل و فرد است و باقی‌مانده تقسیم x بر عدد ۸ برابر یک نیست.

۲- گزینه «۲»

اگر گزاره $p\ \Rightarrow\ (q\vee\sim r)$ یک گزاره نادرست باشد $p\equiv T$ و $q\vee\sim r\equiv F$ است که $q\equiv F$ و $r\equiv T$ است حال به بررسی تک به تک گزاره‌ها می‌پردازیم:

آ) $(p\wedge\sim q)\ \Leftrightarrow\ (p\wedge r)\equiv(T\wedge T)\ \Leftrightarrow\ (T\wedge T)\equiv T\ \Leftrightarrow\ T\equiv T$

ب) $(p\vee q)\ \Leftrightarrow\ p\equiv(T\ \vee\ F)\ \Leftrightarrow\ T\equiv T\ \Leftrightarrow\ T\equiv T$

پ) $(p\ \Rightarrow\ r)\ \Leftrightarrow\ \sim(q\wedge p)\equiv(T\ \Rightarrow\ T)\ \Leftrightarrow\ \sim(F\wedge T)\equiv T\ \Leftrightarrow\ T\equiv T$

ت) $(p\vee r)\ \Rightarrow\ (q\wedge p)\equiv(T\vee T)\ \Rightarrow\ (F\wedge T)\equiv T\ \Rightarrow\ F\equiv F$

۳- گزینه «۳»

می خواهیم در هر سطر ۳ تا (T) و یکی (F) و یا اینکه در هر سطر ۴ تا (T) کنار هم قرار دهیم و جایگشت آن‌ها را بدست آوریم:

تعداد حالات ۳ تا (T) و یکی F $=\dfrac{۴!}{۳!\times۱!}=۴$

تعداد حالات ۴ تا T $=\dfrac{۴!}{۴!}=۱$

تعداد حالاتی که تعداد (T)ها بیشتر از تعداد (F) است $=۴+۱=۵$

۴- گزینه «۲»

برای ۶ گزاره‌ای که داریم باید تعداد گزاره‌ها با ارزش درست حداقل ۳ گزاره باشد.

تعداد حالاتی که ۳ گزاره ارزش درست و ۳ گزاره ارزش نادرست داشته باشند

$=\dfrac{۶!}{۳!\times۳!}=۲۰$

تعداد حالاتی که ۴ گزاره ارزش درست و ۲ گزاره ارزش نادرست داشته باشند

$=\dfrac{۶!}{۴!\times۲!}=۱۵$

تعداد حالاتی که ۵ گزاره ارزش درست و ۱ گزاره ارزش نادرست داشته باشند

$=\dfrac{۶!}{۵!\times۱!}=۶$

تعداد حالاتی که هر ۶ گزاره درست باشند. $=\dfrac{۶!}{۶!}=۶$

تعداد کل حالات $=۲۰+۱۵+۶+۱=۴۲$

۵- گزینه «۴»

ارزش گزاره $p\ \Rightarrow\ (q\ \Rightarrow\ r)$ زمانی نادرست است که $p\equiv T$ و $(q\ \Rightarrow\ r)\equiv F$ است که $q\equiv T$ و $r\equiv F$ است. حال به بررسی تک به تک گزینه‌ها می‌پردازیم:

گزینه «۱»: $(p\wedge q)\ \Leftrightarrow\ p\equiv(T\wedge T)\ \Leftrightarrow\ T\equiv T\ \Leftrightarrow\ T\equiv T$ نادرست

گزینه «۲»: $(p\vee r)\ \Leftrightarrow\ q\equiv(T\vee F)\ \Leftrightarrow\ T\equiv T\ \Leftrightarrow\ T\equiv T$ نادرست

گزینه «۳»: $(p\wedge r)\ \Rightarrow\ p\equiv(T\wedge F)\ \Rightarrow\ T\equiv F\ \Rightarrow\ T\equiv T$ نادرست

گزینه «۴»: $(p\wedge\sim r)\ \Rightarrow\ \sim q\equiv(T\wedge T)\ \Rightarrow\ F\equiv T\ \Rightarrow\ F\equiv F$ درست

۶- گزینه «۱»

به بررسی گزینه‌ها می‌پردازیم:

$x^{۲}+y^{۲}=۱۴ \xrightarrow{x=۴} ۱۶+y^{۲}=۱۴ \Rightarrow y^{۲}=-۲$:گزینه «۲»

برای y مقداری وجود ندارد

$۳x^{۲}-y^{۲}=۲ \xrightarrow{x=۰} -y^{۲}=۲ \Rightarrow y^{۲}=-۲$:گزینه «۳»

برای y مقداری وجود ندارد

$۷x+y=۱۵ \xrightarrow{x=۳} y=-۶\notin \mathbb{N}$:گزینه «۴»

برای y مقداری وجود ندارد

بنابراین گزینه «۱» درست است.

$$y-۳x^{۲}=۱ \Rightarrow y=۱+۳x^{۲}$$

$$x\in\mathbb{Z} \Rightarrow x^{۲}\in W \Rightarrow ۳x^{۲}\in W \Rightarrow ۱+۳x^{۲}\in\mathbb{N} \Rightarrow y\in\mathbb{N}$$

۷- گزینه «۲»

هر یک از گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

آ) اگر ارزش A و B یکسان باشد $A \Leftrightarrow B$ حتماً درست است و برای اینکه کل گزاره درست باشد باید $C\vee D$ هم درست باشد پس C و D با هم نمی‌توانند نادرست باشند.

ب) اگر A و B دارای ارزش یکسان باشند پس $A \Leftrightarrow B$ حتماً درست است و برای درست بودن ارزش کل گزاره باید $C\vee D$ هم درست باشد که کافی است حداقل یکی از آن‌ها درست باشد و لزومی ندارد که هر دو گزاره با هم درست باشند.

پ) اگر A و B دارای ارزش متفاوت باشند پس $A \Leftrightarrow B$ حتماً نادرست است و برای درست بودن ارزش کل گزاره باید $C\vee D$ نادرست باشند پس C و D نباید درست باشند.

ت) اگر A و B دارای ارزش متفاوت باشند پس $A \Leftrightarrow B$ حتماً نادرست است و برای درست بودن ارزش کل گزاره باید $C\vee D$ نادرست باشد یعنی هم C و هم D نادرست باشد.

۸- گزینه «۳»

دو عدد فرد متوالی از مجموعه A به صورت‌های $A_{۱}=\{۱,۳\}$ و $A_{۲}=\{۳,۵\}$ و $A_{۳}=\{۵,۷\}$ است که باید ۱ عضو دیگر در آن‌ها اضافه کنیم تا یک مجموعه ۳ عضوی شود که برای هر کدام ۶ حالت داریم پس اینگونه به نظر می‌رسد که $(۳\times۶=۱۸)$ زیرمجموعه ۳ عضوی A هستند که حداقل ۲ عدد فرد متوالی در آن‌ها وجود دارد اما در این شمارش مجموعه‌های $\{۱,۳,۵\}$ و $\{۳,۵,۷\}$ دو مرتبه شمارش شده‌اند پس ۱۶ زیرمجموعه ۳ عضوی از A وجود دارد که حداقل ۲ عدد فرد متوالی در آن وجود دارد.

$\binom{۸}{۳}=۵۶$ = تعداد کل زیرمجموعه‌های ۳ عضوی

$۴۰=۱۶-۵۶$ = تعداد زیرمجموعه‌های ۳ عضوی فاقد ۲ عدد فرد متوالی

۹- گزینه «۴»

اگر زیرمجموعه مورد نظر را با کدگذاری بخواهیم نشان دهیم ۴ تا صفر و ۶ تا عدد ۱ وجود دارد که ابتدا ۴ تا صفر قرار می‌دهیم و حال می‌خواهیم در ۵ فضای که وجود دارد ۳ تا عدد ۱۱۱۱ و ۱ و ۱ را قرار دهیم:

فضا • فضا • فضا • فضا • فضا

$\binom{۵}{۳}=۱۰$ = تعداد حالات

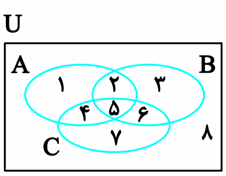
حال باید ۳ عدد ۱۱۱۱, ۱, ۱ را صف کنیم که $۳=\frac{۳!}{۲!}$ حالت می‌شود پس تعداد زیرمجموعه‌های مورد نظر $۳۰=۱۰\times۳$ می‌شود.

۱۰- گزینه «۳»

روش اول:

$$A-(B-C)=(A-B)-C \Rightarrow A\cap(B\cap C')'=(A\cap B')\cap C'$$
$$\Rightarrow A\cap(B'\cup C)=(A\cap B')\cap C'$$
$$\Rightarrow (A\cap B')\cup(A\cap C)=(A\cap B')\cap C'$$
$$\xrightarrow{\text{اشتراک با } A\cap C} \underbrace{[(A\cap B')\cup(A\cap C)]\cap(A\cap C)}_{\text{جذب}}$$
$$=(A\cap C)\cap(A\cap B')\cap C'$$
$$\Rightarrow (A\cap C)=A\cap\underbrace{(C\cap C')}_{\varnothing}\cap B'$$
$$\Rightarrow (A\cap C)=\varnothing$$
$$\Rightarrow A\cap C=\varnothing$$

روش دوم: نمودار ون را برای ۳ مجموعه A و B و C رسم می‌کنیم:



$B-C=\{۲,۳\}$ $\quad A-(B-C)=\{۱,۴,۵\}$

$A-B=\{۱,۴\}$ $\quad (A-B)-C)=\{۱\}$

از تساوی $A-(B-C)=(A-B)-C$ نتیجه می‌گیریم نواحی ۴ و ۵ تهی هستند یعنی $A\cap C=\varnothing$

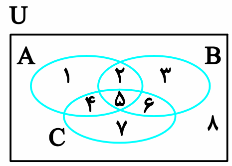
۱۱- گزینه «۳»

روش اول:

$$(A\cup B)-C=B \Rightarrow (A\cup B)\cap C' \xrightarrow{\cup C'} \underbrace{[(A\cup B)\cap C']\cup C'}_{\text{جذب}}=B\cup C'$$

$$\Rightarrow C'=B\cup C' \Rightarrow B\subseteq C'$$

روش دوم: نمودار ون را برای ۳ مجموعه A و B و C رسم می‌کنیم:



$(A\cup B)=\{۱,۲,۳,۴,۵,۶\}$

$(A\cup B)-C=\{۱,۲,۳\}$

$B=\{۲,۳,۵,۶\}$

با تساوی $(A\cup B)-C=B$ نتیجه می‌گیریم نواحی ۱ و ۵ و ۶ تهی هستند

حال به بررسی گزینه‌ها می‌پردازیم:

گزینه «۱»: $B\subseteq C \Rightarrow \{۲,۳\}\subseteq\{۴,۷\}$ نادرست

گزینه «۲»: $C\subseteq B \Rightarrow \{۴,۷\}\subseteq\{۲,۳\}$ نادرست

گزینه «۳»: $B\subseteq C' \Rightarrow \{۲,۳\}\subseteq\{۲,۳,۸\}$ درست

گزینه «۴»: $C'\subseteq B' \Rightarrow \{۲,۳,۸\}\subseteq\{۴,۷,۸\}$ نادرست

۱۲- گزینه «۲»

روش اول: می‌دانیم اگر $A\subseteq B \Rightarrow A\cap B=A$ پس داریم:

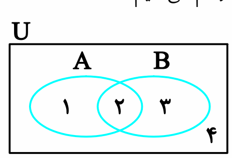
$$(A\cup B)\subseteq(A\cap B') \Rightarrow (A\cup B)\cap(A\cap B')=A\cup B$$

$$\Rightarrow \underbrace{[(A\cup B)\cap A]}_{\text{جذب}}\cap B'=A\cup B$$

$$\Rightarrow A\cap B'=A\cup B \xrightarrow{\cap B} (A\cap B')\cap B=\underbrace{(A\cup B)\cap B}_{\text{جذب}}$$

$$\Rightarrow A\cap(B'\cap B)=B \Rightarrow \varnothing=B$$

روش دوم: نمودار ون را برای ۲ مجموعه A و B رسم می‌کنیم:



$A\cup B=\{۱,۲,۳\}$

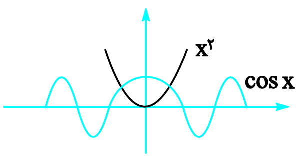
$A\cap B'=\{۱\}$

$(A\cup B)\subseteq A\cap B' \Rightarrow \{\text{ناحیه۱},\text{ناحیه۲},\text{ناحیه۳}\}\subseteq\{\text{ناحیه۱}\}$

یعنی نواحی ۲ و ۳ باید تهی باشند، پس $B=\varnothing$

۱۳- گزینه «۴»

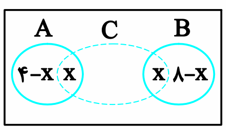
باید معادله $x^۲=\cos x$ را حل کنیم، برای این منظور دو تابع $f(x)=x^۲$ و $g(x)=\cos x$ را در یک دستگاه رسم می‌کنیم:



این دو منحنی همدیگر را در ۲ نقطه قطع می‌کنند. پس مجموعه A دو عضوی است و تعداد عضوهای مجموعه توانی A، $(۲^۲=۴)$ است بنابراین $P(A)$، $(۲^۴=۱۶)$ زیرمجموعه دارد.

۱۴- گزینه «۲»

نمودار ون برای دو مجموعه مطابق شکل است و از هر دو مجموعه باید به یک اندازه عضو در داخل مجموعه C وجود داشته باشد و چون C ناتهی است پس $x>۰$ است و حداکثر x برابر ۴ است.



تعداد حالات مجموعه C $=\binom{۴}{۱}\binom{۸}{۱}+\binom{۴}{۲}\binom{۸}{۲}+\binom{۴}{۳}\binom{۸}{۳}+\binom{۴}{۴}\binom{۸}{۴}=۴\times۸+۶\times۲۸+۴\times۵۶+۱\times۷۰$

$=۳۲+۱۶۸+۲۲۴+۷۰=۴۹۴$

۱۵- گزینه «۲»

$A\times B=B\times A \Rightarrow A=\varnothing \vee B=\varnothing \vee A=B$

چون $A\neq\varnothing$ و $B\neq\varnothing$ است پس $A=B$ است.

$\sqrt{d}=۶ \Rightarrow d=۳۶$

حتماً مجموعه A دارای ۳ عضو است و یکی از مجهولات عدد ۶ است.

$$\begin{cases} a-۲=۶ \Rightarrow a=۸ \\ ۲b+۱=۵ \Rightarrow b=۲ \\ c=-۱ \end{cases}$$

$a+b+c=۹$ (✓)

$$\begin{cases} a-۲=۶ \Rightarrow a=۸ \\ ۲b+۱=-۱ \Rightarrow b=-۱ \\ c=۵ \end{cases}$$

$a+b+c=۱۲$ (×)

$$\begin{cases} a-۲=۵ \Rightarrow a=۷ \\ ۲b+۱=۶ \Rightarrow b=۲/۵ \\ c=-۱ \end{cases}$$

$a+b+c=۸/۵$ (×)

$$\begin{cases} a-۲=-۱ \Rightarrow a=۱ \\ ۲b+۱=۶ \Rightarrow b=۲/۵ \\ c=۵ \end{cases}$$

$a+b+c=۸/۵$ (×)

$$\begin{cases} a-۲=-۱ \Rightarrow a=۱ \\ ۲b+۱=۵ \Rightarrow b=۲ \\ c=۶ \end{cases}$$

$a+b+c=۹$ (✓)

$$\begin{cases} a-۲=۵ \Rightarrow a=۷ \\ ۲b+۱=-۱ \Rightarrow b=-۱ \\ c=۶ \end{cases}$$

$a+b+c=۱۲$ (×)

۱۶- گزینه «۲»

ابتدا مجموعه‌های A و B را مشخص می‌کنیم:

$$\frac{۳}{۲} \le [\frac{x}{۲}] \le \frac{۷}{۲} \xrightarrow{[\frac{x}{۲}]\in\mathbb{Z}}$$

$$\begin{cases} [\frac{x}{۲}]=۲ \Rightarrow ۲\le\frac{x}{۲}<۳ \Rightarrow ۴\le x<۶ \\ [\frac{x}{۲}]=۳ \Rightarrow ۳\le\frac{x}{۲}<۴ \Rightarrow ۶\le x<۸ \end{cases} \Rightarrow ۴\le x<۸$$

یعنی $A=[۴,۸)$

$$|۲x-۱|<۵ \Rightarrow -۵<۲x-۱<۵ \xrightarrow{+۱} -۴<۲x<۶$$

$$\xrightarrow{\div ۲} -۲<x<۳ \Rightarrow B=(-۲,۳)$$

طول مجموعه $A=[۴,۸)$ برابر $L_A=۸-۴=۴$ و طول مجموعه $B=(-۲,۳)$ برابر $L_B=۳-(-۲)=۵$ است.

$$S_{A\times B}=L_A\times L_B=۴\times۵=۲۰$$

۱۷- گزینه «۲»

$$(x,y)\in(A\times B)-(C\times D) \Rightarrow (x,y)\in(A\times B)\wedge(x,y)\notin(C,D)$$

$$\left.\begin{array}{l}(x,y)\in(A\times B) \Rightarrow x\in A\wedge y\in B \\ (x,y)\notin(C\times D) \Rightarrow x\notin C\vee y\notin D\end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow x\notin(A\cap C)\vee y\notin(B\cap D)$$

$$\Rightarrow (x,y)\notin(A\cap C)\times(B\cap D)$$

بنابراین گزینه «۱» درست است.

$$\left.\begin{array}{l}x\in A \Rightarrow x\in(A\cup C) \\ y\in B \Rightarrow y\in(B\cup D)\end{array}\right\} \Rightarrow (x,y)\in(A\cup C)\times(B\cup D)$$

گزینه «۳» درست است.

حالا به بررسی گزینه ۴ می‌پردازیم برای این منظور اگر $(x,y)\in(A\times B)\cap(C\times B)$ باشد داریم:

$$(x,y)\in(A\times D)\cap(C\times D)$$

$$\Rightarrow (x,y)\in(A\times D)\wedge(x,y)\in(C\times D)$$

$$\Rightarrow (x\in A\wedge y\in D)\wedge(x\in C\wedge y\in D)$$

می‌دانیم حداقل یکی از گزاره‌های $x\in C$ و $y\in D$ نادرست است پس $(x,y)\notin(A\times D)\cap(C\times D)$

۱۸- گزینه «۳»

اگر بزرگ‌ترین عضو را b و کوچک‌ترین عضو را a فرض کنیم، آنگاه (a,b) یکی از حالت‌های زیر را دارد.

$(۲,۵),(۲,۷),(۲,۹),(۳,۷),(۳,۸),(۳,۱۰),(۴,۷),(۴,۹),(۴,۱۰)$
$,(۵,۸),(۵,۹),(۶,۹),(۶,۱۰),(۷,۱۰)$

تعداد زیرمجموعه‌های چهار عضوی هر یک از حالت‌های فوق با هم جمع می‌شود:

$$\binom{۲}{۲}+\binom{۴}{۲}+\binom{۶}{۲}+\binom{۳}{۲}+\binom{۴}{۲}+\binom{۶}{۲}+\binom{۲}{۲}+\binom{۴}{۲}+\binom{۵}{۲}$$
$$+\binom{۲}{۲}+\binom{۳}{۲}+\binom{۲}{۲}+\binom{۳}{۲}+\binom{۲}{۲}$$

$$=۱+۶+۱۵+۳+۶+۱۵+۱+۶+۱۰+۱+۳+۱+۳+۱=۷۲$$

۱۹- گزینه «۳»

اگر A مجموعه‌ای n عضوی باشد، تعداد زیرمجموعه‌های k عضوی A برابر $\binom{n}{k}$ است.

$$\binom{n}{۲}-\binom{n}{۱}=۵۴ \Rightarrow \frac{n(n-۱)}{۲}-n=۵۴ \Rightarrow n^۲-n-۲n=۱۰۸$$

$$\Rightarrow n^۲-۳n-۱۰۸=۰$$

$$\Rightarrow (n-۱۲)(n+۹)=۰ \Rightarrow \begin{cases} n=۱۲ \\ n=-۹ \text{ غ‌ق‌ق} \end{cases}$$

مجموعه A دارای ۱۲ عضو است که باید ۳ عضو غیر از عدد ۵ را انتخاب کنیم تا همواره با عدد ۵ یک زیرمجموعه ۴ عضوی از A ساخته شود.

$$\binom{۱۱}{۳}=۱۶۵$$

۲۰- گزینه «۴»

$$n(A^۲-B^۲)=n(A^۲)-n(A^۲\cap B^۲) \Rightarrow n(A^۲-B^۲)$$

$$=(n(A))^۲-(n((A\cap B))^۲ \Rightarrow$$

$$۴۶۵=۲۳^۲-n(A\cap B)^۲ \Rightarrow n(A\cap B)^۲=۶۴ \Rightarrow n(A\cap B)=۸$$

$$n(A-B)=n(A)-n(A\cap B)=۲۳-۸=۱۵$$