اصلاحیه

- فصل دوم - بخش ۱ تستی – سؤال ۵۴ – گزینه ۲ صحیح است.
- فصل دوم – بخش ۳ تستی – سؤال ۵۹ – گزینه ۱ صحیح است.
- فصل دوم – آزمون تستی پایانی – سوال ۱۶ – گزینه ۱ ۰/۴۲ است.

۱- آسان

آ) فضای نمونه‌ای ب) احتمال پ) برآمد

ت) پیشامد ث) علم آمار

۲- آسان

وقتی با جامعه ناشناس سروکار داریم شناختی جامعه با استفاده از نمونه‌ها و داده‌ها یک کار آماری است اما اگر جامعه را با جزئیات موردنیاز بشناسیم و بخواهیم بدانیم نمونه‌ای که از آن جامعه انتخاب کرده‌ایم چه خصوصیاتی دارد از علم احتمال استفاده می‌کنیم پس موارد (آ) و (ت) مربوط به علم احتمال موارد (ب) و (پ) مربوط به علم آمار است.

۳- متوسط

اگر فضای نمونه‌ای مسیر رفت را S_1 و فضای نمونه‌ای مسیر برگشت را S_2 بنامیم فضای نمونه‌ای کل برابر $\mathbf{S}$ است که:

$$S_1 = S_2 = \{0, 1, 2, 3, 4\}$$

$$S = S_1 \times S_2 = \{(0,0), (0,1), (0,2), (0,3), (0,4), (1,0), (1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (2,0), (2,1), (2,2), (2,3), (2,4), (3,0), (3,1), (3,2), (3,3), (3,4), (4,0), (4,1), (4,2), (4,3), (4,4)\} \Rightarrow n(s) = n(S_1) \times n(S_2) = 5 \times 5 = 25$$

۴- آسان

فضای نمونه‌ای برای احمد را S_1 و برای محمود را S_2 فرض می‌کنیم.

$$S_1 = S_2 = \{\text{قیچی، کاغذ، سنگ}\}$$

فضای نمونه‌ای کل بازی به صورت $S_1 \times S_2$ است

$S = S_1 \times S_2 =$ {(سنگ و کاغذ)و (قیچی و سنگ) و (کاغذ و سنگ) و(سنگ و سنگ)}

{(قیچی و قیچی) و (کاغذ و قیچی) و (سنگ و قیچی)و(قیچی و کاغذ) و (کاغذ و کاغذ)

که فضای نمونه‌ای برای این بازی ۹ عضور دارد.

اگر $\mathbf{A}$ را پیشامد آن فرض کنیم که احمد برنده می‌شود.

$A =$ {(کاغذ و قیچی) و (سنگ و کاغذ) و (قیچی و سنگ}

پیشامد $\mathbf{A}$، ۳ عضو دارد.

۵- آسان

آ)

$S =$ {باد نمی‌وزد، باد می‌وزد} × {مرطوب و خشک} × {گرم و سرد} ×

{غیر بارانی و بارانی} × {نیمه ابری و ابری، صاف} ⇨

$$|S| = ۲ \times ۲ \times ۲ \times ۳ \times ۲ = ۴۸$$

ب) اگر پیشامد گرم بودن هوا را $\mathbf{A}$ فرض کنیم داریم:

$A =$ {باد نمی‌وزد، باد می‌وزد} × {مرطوب و خشک} × {گرم} ×

{غیربارانی، بارانی} × {نیمه ابری و ابری، صاف} ⇨

$$|A| = ۱ \times ۲ \times ۲ \times ۳ \times ۲ = ۲۴$$

۶- آسان

فضای نمونه‌ای شامل حالت‌های مختلف قرار گرفتن بازیکنان در یک صف است که تعداد این حالت‌ها بنا به اصل ضرب $n(S) = ۱۴!$ است $۱۴!$ اولین نفری که وارد می‌شود بلند قدترین بازیکن است، پس ۱۳ نفر دیگر به $۱۳!$ می‌توانند وارد سالن شوند پس $n(A) = ۱۳!$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{۱۳!}{۱۴!} = \frac{۱۳!}{۱۴ \times ۱۳!} = \frac{۱}{۱۴}$$

۷- دشوار

۱- می‌دانیم $A \cap A' = \varnothing , A \cup A' = S$ است پس A', A دو پیشامد ناسازگار هستند.

$$P(A \cup A') = P(A) + P(A') \Rightarrow P(S) = P(A) + P(A')$$
$$\xrightarrow{P(S)=۱} ۱ = P(A) + P(A') \Rightarrow P(A') = ۱ - P(A)$$

۲- می‌دانیم $S' = \varnothing$ است و با توجه به قضیه فوق

$$P(S') = ۱ - P(S) \xrightarrow[P(S)=۱]{S'=\varnothing} P(\varnothing) = ۱ - ۱ \Rightarrow P(\varnothing) = ۰$$

۳- چون $A , B \cup C$ ناسازگار هستند داریم

$$P(A \cup B \cup C) = P(A \cup (B \cup C)) = P(A) + P(B \cup C) \quad (۱)$$

چون $\mathbf{B}$ و $\mathbf{C}$ هم ناسازگار هستند پس

$$P(B \cup C) = P(B) + P(C) \quad (۲)$$

از (۱) و (۲) نتیجه می‌گیریم

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C)$$

۸- دشوار

۱- چون $(A-B)\cap(A\cap B)=\varnothing$ است پس دو مجموعه $(A\cap B)\,,(A-B)$ ناسازگار هستند و داریم

$$(A\cap B)\cup(A-B)=(A\cap B)\cup(A\cap B')=A\cap(B\cup B')$$
$$=A\cap S=A$$

$$P(\underbrace{(A\cap B)\cup(A-B)}_{A})=P(A\cap B)+P(A-B)\ \Rightarrow\ P(A)$$
$$=P(A\cap B)+P(A-B)$$
$$\Rightarrow\ P(A-B)=P(A)-P(A\cap B)$$

۲- چون $B\cap(A-B)=\varnothing$ است پس دو مجموعه $A-B\,,B$ ناسازگار هستند و داریم

$$B\cup(A-B)=B\cup(A\cap B')=(B\cup A)\cap(B\cup B')$$
$$=(A\cup B)\cap S=A\cup B$$

$$P(B\cup(A-B))=P(B)+P(A-B)\Rightarrow P(A\cup B)$$
$$=P(B)+P(A-B)\quad(۱)$$

با توجه به قضیه (۱) می‌دانیم

$$P(A-B)=P(A)-P(A\cap B)\quad(۲)$$

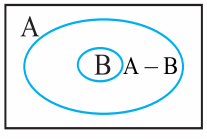
از (۱) و (۲) نتیجه می‌گیریم

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$$

۹- دشوار

آ) با توجه به این که $B\subseteq A$ است $B\cap(A-B)=\varnothing$ پس دو مجموعه $(A-B)\,,B$ ناسازگار هستند و $B\cup(A-B)=A$ است بنابراین داریم

$$P(\underbrace{B\cup(A-B)}_{A})=P(B)+P(A-B)$$
$$\Rightarrow\ P(A)=P(B)+P(A-B)$$
$$\Rightarrow\ P(A-B)=P(A)-P(B)$$



ب) می‌دانیم برای هر مجموعه دلخواه مثل $\mathbf{M}$ داریم پس

$$P(A-B)\geq 0\xrightarrow{\text{قسمت (آ)}}P(A)-P(B)\geq 0\ \Rightarrow\ P(A)\geq P(B)$$

۱۰- متوسط

$$P(A'\cup B')=1-P(A\cap B)\ \Rightarrow\ \frac{5}{7}=1-P(A\cap B)$$

$$\Rightarrow\ P(A\cap B)=\frac{2}{7}$$

$$P(A'\cup B)=P(A')+P(B)-P(A'\cap B)\ \Rightarrow\ P(A'\cup B)$$
$$=(1-P(A))+P(B)-P(B-A)\ \Rightarrow$$

$$P(A'\cup B)=1-\frac{3}{5}+P(B)-(P(B)-P(A\cap B))$$

$$\Rightarrow\ P(A'\cup B)=\frac{2}{5}+P(B)-P(B)+\frac{2}{7}$$

$$P(A'\cup B)=\frac{2}{5}+\frac{2}{7}=\frac{14+10}{35}=\frac{24}{35}$$

۱۱- متوسط

$$P(B)=1-P(B')=1-\frac{3}{5}=\frac{2}{5}$$

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$$

$$\Rightarrow\ \frac{6}{7}=\frac{4}{7}+\frac{2}{5}-P(A\cap B)\ \Rightarrow\ P(A\cap B)=\frac{2}{5}-\frac{2}{7}$$

$$\Rightarrow\ P(A\cap B)=\frac{4}{35}$$

$$P(B-A)=P(B)-P(A\cap B)=\frac{2}{5}-\frac{4}{35}=\frac{10}{35}=\frac{2}{7}$$

$$P(A'\cup B')=P(A\cap B)'=1-P(A\cap B)=1-\frac{4}{35}=\frac{31}{35}$$

۱۲- متوسط

$$P(A\cap B')=P(A-B)\ \Rightarrow\ P(A\cap B')=P(A)-P(A\cap B)$$

$$\Rightarrow\ \frac{1}{4}=P(A)-\frac{1}{3}\ \Rightarrow$$

$$P(A)=\frac{1}{4}+\frac{1}{3}=\frac{7}{12}$$

$$P(A')=1-P(A)=1-\frac{7}{12}=\frac{5}{12}$$

$$P(A'\cup B)=P(A')+P(B)-P(A'\cap B)$$
$$=P(A')+P(B)-P(B-A)$$
$$=P(A')+P(B)-(P(B)-P(A\cap B))$$

$$\Rightarrow\ P(A'\cup B)=P(A')+\cancel{P(B)}-\cancel{P(B)}+P(A\cap B)$$

$$\Rightarrow\ P(A'\cup B)=\frac{5}{12}+\frac{1}{3}=\frac{9}{12}=\frac{3}{4}$$

۱۳- متوسط

$$P(A)=1-P(A')=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$$

$$P(A-B)=P(A)-P(A\cap B)\ \Rightarrow\ \frac{1}{2}=\frac{2}{3}-P(A\cap B)$$

$$\Rightarrow\ P(A\cap B)=\frac{2}{3}-\frac{1}{2}=\frac{1}{6}$$

$$P(B-A')=P(A\cap B)=\frac{1}{6}$$

۱۴- متوسط

$$P(A)=۱-P(A')=۱-\frac{۱}{۵}=\frac{۴}{۵}$$

۱) $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$

$$\Rightarrow P(A\cup B)=\frac{۴}{۵}+\frac{۲}{۳}-\frac{۳}{۵}=\frac{۱۲+۱۰-۹}{۱۵}=\frac{۱۳}{۱۵}$$

۲) $P(A'\cap B')=P(A\cup B)'=۱-P(A\cup B)=۱-\frac{۱۳}{۱۵}$

$$\Rightarrow P(A'\cap B')=\frac{۲}{۱۵}$$

۳) $P(A\cap B')=P(A-B)=P(A)-P(A\cap B)=\frac{۴}{۵}-\frac{۳}{۵}=\frac{۱}{۵}$

۱۵- متوسط

آ) $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$

$$\Rightarrow ۰/۶=/۴+۰/۵-P(A\cap B) \Rightarrow P(A\cap B)=۰/۳$$

$$P(A\Delta B)=P(A\cup B)-P(A\cap B)=۰/۶-۰/۳$$

$$\Rightarrow P(A\Delta B)=۰/۳$$

ب) $P(A'\cap B')=P(A\cup B)'=۱-P(A\cup B)=۱-۰/۶=۰/۴$

۱۶- متوسط

هر بازی ۳ حالت اگر $S_۱, S_۲, S_۳$ فضای نمونه‌ای هر بازی باشند

$$S_۱=S_۲=S_۳=\{\text{باخت، مساوی، برد}\}$$

بنابراین فضای نمونه‌ای کل به صورت زیر است.

$$S=S_۱\times S_۲\times S_۳ \Rightarrow n(S)=۳\times ۳\times ۳=۲۷$$

اگر پیشامد هر ۳ بازی همراه برد باشد، داریم:

$$A=\{(\text{برد و برد و برد})\} \Rightarrow n(A)=۱$$

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۱}{۲۷}$$

۱۷- دشوار

اگر مجموعه **A** را اعداد بین ۱ تا ۱۰۰ مضرب ۲ و مجموعه **B** را اعداد بین ۱ تا ۱۰۰ مضرب ۳ درنظر بگیریم.

$$S=\{۱,۲,۳,\dots,۱۰۰\} \Rightarrow n(S)=۱۰۰$$

$$A=\{۲,۴,۶,\dots,۱۰۰\} \Rightarrow n(A)=[\frac{۱۰۰}{۲}]=۵۰$$

$$B=\{۳,۶,۹,\dots,۹۹\} \Rightarrow n(B)=[\frac{۱۰۰}{۳}]=۳۳$$

$$A\cap B=\{۶,۱۲,\dots,۹۶\} \Rightarrow n(A\cap B)=[\frac{۱۰۰}{۶}]=۱۶$$

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۵۰}{۱۰۰}=۰/۵ \quad P(B)=\frac{n(B)}{n(S)}=\frac{۳۳}{۱۰۰}=۰/۳۳$$

$$P(A\cap B)=\frac{n(A\cap B)}{n(S)}=\frac{۱۶}{۱۰۰}=۰/۱۶$$

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$$

$$=۰/۵+۰/۳۳-۰/۱۶=۰/۶۷$$

ب) $P(A-B)=P(A)-P(A\cap B)=۰/۵-۰/۱۶=۰/۳۴$

ج) $P(A'\cap B')=P(A\cup B)'=۱-P(A\cup B)$

$$=۱-۰/۶۷=۰/۳۳$$

۱۸- دشوار

اگر **A** و **B** دو زیرمجموعه از **S** باشند که **A** مضارب عدد ۳ و **B** مضارب عدد ۷ باشد، داریم:

$$A=\{۳,۶,۹,\dots,۱۹۸\} \Rightarrow n(A)=[\frac{۲۰۰}{۳}]=۶۶$$

$$B=\{۷,۱۴,۲۱,\dots,۱۹۶\} \Rightarrow n(B)=[\frac{۲۰۰}{۷}]=۲۸$$

$$A\cap B=\{۲۱,۴۲,۶۳,\dots,۱۸۹\} \Rightarrow n(A\cap B)=[\frac{۲۰۰}{۲۱}]=۹$$

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۶۶}{۲۰۰}=۰/۳۳ \quad P(B)=\frac{n(B)}{n(S)}=\frac{۲۸}{۲۰۰}=۰/۱۴$$

$$P(A\cap B)=\frac{n(A\cap B)}{n(S)}=\frac{۹}{۲۰۰}=۰/۰۴۵$$

آ) $P(A)=۰/۳۳$

ب) $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B) \Rightarrow P(A\cup B)$

$$=۰/۳۳+۰/۱۴-۰/۰۴۵ \Rightarrow P(A\cup B)=۰/۴۲۵$$

پ) $P(A-B)=P(A)-P(A\cap B)$

$$=۰/۳۳-۰/۰۴۵ \Rightarrow P(A-B)=۰/۲۸۵$$

۱۹- دشوار

آ) اگر زیرمجموعه موردنظر را با کدگذاری معلوم کنیم جای اعداد ۱ و ۵ و ۸ باید ۱ قرار دهیم و به جای اعداد ۴ و ۱۰ باید صفر قرار دهیم و به جای باقی اعداد (که در مجموعه با دایره نشان داده‌ایم) می‌توانیم صفر یا یک قرار دهیم.

$$A=\{۱,□,□,۰,۱,□,□,۱,□,۰\} \Rightarrow n(A)=۲^۵=۳۲$$

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۳۲}{۱۰۲۴}=\frac{۱}{۳۲}$$

ب) متمم این پیشامد آن است که زیرمجموعه‌های حداکثر ۲ عضوی **S** را حساب کنیم.

$$n(B')=\binom{۱۰}{۰}+\binom{۱۰}{۱}+\binom{۱۰}{۲}=۱+۱۰+۴۵=۵۶$$

$$P(B')=\frac{n(B')}{n(S)}=\frac{۵۶}{۱۰۲۴}=\frac{۷}{۱۲۸}$$

$$P(B)=۱-P(B')=۱-\frac{۷}{۱۲۸}=\frac{۱۲۱}{۱۲۸}$$

۲۰- آسان

آ) $A \cap B = \varnothing \Rightarrow$ A و B ناسازگار هستند.

ب) $A \cap B = \{(پ و پ و پ)\}$

چون $A \cap B = \varnothing$ است پس **A** و **B** ناسازگار نیستند.

پ) $A \cap B \neq \varnothing$

چون $A \cap B = \varnothing$ است پس **A** و **B** ناسازگار نیستند.

ت) $A \cap B = \varnothing$ A و B ناسازگار هستند.

۱- گزینه «۳» آسان

با توجه به تعریف بالا، تعداد دانش‌آموزان با یک خاصیت، مربوط به علم آمار است اما این که یک دانش‌آموز خاصی امروز کتاب گسسته را می‌خواهند، چون در حال بررسی امکان چنین رخدادی هستیم مربوط به علم احتمال است.

۲- گزینه «۲» دشوار

فضای نمونه‌ای مسیر رفت و مسیر برگشت به صورت $S_1 = S_2 = \{0, 1, 2, 3\}$ و فضای نمونه کل آزمایش $S_1 \times S_2$ است که ۱۶ عضو دارد، با توجه به این که حداقل در یک مسیر بدون مسافر حرکت نمی‌کند، پس حالتی که در هر دومسیر خالی حرکت کند را باید حذف کنیم، بنابراین فضای نمونه‌ای ۱۵ عضو دارد.

۳- گزینه «۳» آسان

$n(S) = ۳ \times ۳ = ۹$ $\begin{matrix}\text{احمد} = \{\text{قیچی، کاغذ، سنگ}\} \\ \text{عباس} = \{\text{قیچی، کاغذ، سنگ}\}\end{matrix}$

تعداد پیشامدها برابر $۲^۹ = ۵۱۲$ است.

۴- گزینه «۳» آسان

فضای نمونه‌ای پرتاب سکه‌های اول و دوم و سوم را به ترتیب S_1 , S_2 , S_3 می‌نامیم که

$S_1 = S_2 = S_3 = \{ر، پ\}$

اگر فضای نمونه‌ای پرتاب سه سکه را **S** بنامیم

$S = S_1 \times S_2 \times S_3 \Rightarrow |S| = ۲ \times ۲ \times ۲ = ۸$

هر زیرمجموعه از **S** یک پیشامد است و چون **S** دارای ۸ عضو است $(۲^۸ - ۱ = ۲۵۵)$ زیرمجموعه غیرتهی دارد.

۵- گزینه «۲» متوسط

روش اول: در پرتاب ۵ سکه حداقل باید ۳ سکه رو آمده باشد تا تعداد روهای ظاهر شده بیشتر از تعداد پشت‌ها باشد.

$$\left.\begin{array}{l} \text{تعداد حالات ۳ سکه رو} = \binom{۵}{۳} = ۱۰ \\ \text{تعداد حالات ۴ سکه رو} = \binom{۵}{۴} = ۵ \\ \text{تعداد حالات ۵ سکه رو} = \binom{۵}{۵} = ۱ \end{array}\right\} \Rightarrow$$

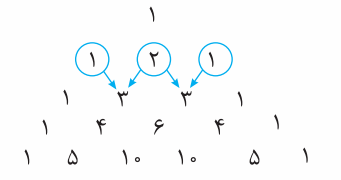
تعداد حالاتی که تعداد روها بیشتر از تعداد پشت‌ها باشد $= ۱۰ + ۵ + ۱ = ۱۶$

روش دوم: اگر سکه‌ای را **n** بار پرتاب کنیم ۲^n حالت داریم حال اگر **n** عددی فرد باشد، در نصف حالات (یعنی $۲^{n-۱}$ حالت) تعداد روها بیشتر از تعداد پشت‌ها است و در $۲^{n-۱}$ حالت دیگر تعداد پشت‌ها بیشتر از تعداد روها است.

تعداد حالاتی که تعداد روها بیشتر از تعداد پشت‌ها باشد $= ۲^{n-۱} \overset{n=۵}{=\!=} ۲^۴ = ۱۶$

روش سوم: هرگاه بحث در مورد سکه یا به دنیا آمدن فرزند باشد می‌توانیم از مثلث خیام استفاده کنیم؛ در این مثلث در سطر **i**ام، $(i+۱)$ عدد وجود دارد (مثلاً در سطر سوم، ۴ عدد وجود دارد) که عدد اول و آخر آن ۱ است و هر کدام از اعداد دیگر جمع دو عدد بالایی خود می‌باشند.

مثلث خیام در شش سطر اول به صورت شکل مقابل است.



چون ۵ سکه پرتاب کرده‌ایم باید به خط ۵ ام مثلث خیام رجوع کنیم در ۵ بار پرتاب ممکن است هیچ سکه‌ای رو نیاید تا این که هر ۵ سکه رو بیاید که تعداد حالات آن به صورت زیر است.

سطر چهارم مثلث خیام	۱	۵	۱۰	۱۰	۵	۱
تحلیل	صفر سکه رو ۵ سکه پشت	۱ سکه رو ۴ سکه پشت	۲ سکه رو ۳ سکه پشت	۳ سکه رو ۲ سکه پشت	۴ سکه رو ۱ سکه پشت	۵ سکه رو صفر پشت

تعداد حالاتی که تعداد سکه رو بیشتر از تعداد سکه پشت باشد $= ۱۰ + ۵ + ۱ = ۱۶$

۶- گزینه «۴» آسان

روش اول: کل حالات پرتاب ۶ سکه ($۶۴ = ۲^۶$) حالت است که در ۲ حالت (یکی آن که همه سکه‌ها پشت و دیگری آن که همه سکه‌ها رو آمده باشد) مورد قبول نیست پس

$۶۴ - ۲ = ۶۲$ تعداد حالاتی که هم سکه رو و هم سکه پشت داشته باشیم.

روش دوم: خط ششم مثلث خیام به صورت زیر است:

صفر پشت		۶	۱۵	۲۰	۱۵	۶	۱
تحلیل	صفر رو						خط ششم مثلث خیام

$۶ + ۱۵ + ۲۰ + ۱۵ + ۶ = ۶۲$ تعداد حالاتی که هم سکه رو و هم سکه پشت داشته باشیم.

۷- گزینه «۳» متوسط

روش اول:

$$\left.\begin{array}{l} \text{خانواده صفر دختر داشته باشد} = \binom{۵}{۰} = ۱ \\ \text{خانواده یک دختر داشته باشد} = \binom{۵}{۱} = ۵ \\ \text{خانواده دو دختر داشته باشد} = \binom{۵}{۲} = ۱۰ \end{array}\right\} \Rightarrow$$

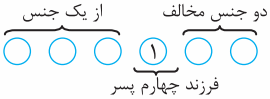
$۱ + ۵ + ۱۰ = ۱۶$ خانواده حداکثر ۲ دختر داشته باشد

روش دوم: سطر پنجم مثلث خیام را در نظر می‌گیریم.

سطر ۵ام	۱	۵	۱۰	۱۰	۵	۱
تعداد دختر	۰	۱	۲	۳	۴	۵

$n(A) = ۱ + ۵ + ۱۰ = ۱۶$

۸- گزینه «۲» دشوار



فرزند چهارم فقط یک حالت دارد (پسر است)، حال ۳ فرزند بزرگ‌تر همگی یا پسر یا دختر (۲ حالت) و فرزندان کوچک‌تر که از جنس مخالف هستند یا پسر و دختر یا دختر و پسر هستند پس ۲ حالت دارند

$n(A) = ۲ \times ۲ = ۴$

۹- گزینه «۱» متوسط

دو نوزاد اول پسر هستند پس ۱ حالت داریم، حال از ۵ نوزاد دیگر باید ۳ دختر به دنیا آمده باشند که به دو روش می‌توان پاسخ داد.

روش اول:

$$n(A) = \binom{۵}{۳} = ۱۰$$

روش دوم: به خط ۵ام مثلث خیام رجوع می‌کنیم

خط ۵ مثلث	۱	۵	۱۰	۱۰	۵	۱
تعداد دختر	۰	۱	۲	۳	۴	۵

$n(A) = ۱۰$

۱۰- گزینه «۲» آسان

روش اول:

در پرتاب دو تاس، مجموع اعداد ظاهر شده بین ۲ تا ۱۲ است پس برای آن که مجموع دو تاس مضرب عدد ۵ شود باید مجموع دو عدد ظاهر شده ۵ یا ۱۰ باشد.

$$A = \{(۱,۴), (۲,۳), (۳,۲), (۴,۱), (۴,۶), (۵,۵), (۶,۴)\} \Rightarrow n(A) = ۷$$

روش دوم:

اگر مجموع دو عدد ظاهر شده در پرتاب دو تاس را $\mathbf{x}$ فرض کنیم ($۲ \le x \le ۱۲$) تعداد عضوهای پیشامد $\mathbf{A}$ که مجموع دو تاس $\mathbf{x}$ شود از دستور زیر به دست می‌آید:

$$n(A) = \begin{cases} x - ۱ & ۲ \le x \le ۷ \\ ۱۳ - x & ۷ \le x \le ۱۲ \end{cases}$$

حال اگر $x = ۵$ باشد $n(A_۱) = x - ۱ = ۵ - ۱ = ۴$ و اگر $x = ۱۰$ باشد $n(A_۲) = ۱۳ - x = ۱۳ - ۱۰ = ۳$ است

$n(A) = n(A_۱) + n(A_۲) = ۴ + ۳ = ۷$

۱۱- گزینه «۳» دشوار

روش اول:

اگر مجموع اعداد ظاهر شده در پرتاب دو تاس را $\mathbf{x}$ فرض کنیم باید $x \in \{۲, ۳, ۵, ۷, ۱۱\}$ باشد

$$A = \{(۱,۱), (۱,۲), (۲,۱), (۱,۴), (۲,۳), (۳,۲), (۴,۱), (۱,۶),$$
$$(۲,۵), (۳,۴), (۴,۳), (۵,۲), (۶,۱), (۵,۶), (۶,۵)\} \Rightarrow n(A) = ۱۵$$

روش دوم:

اگر مجموع دو پرتاب تاس $\mathbf{x}$ شود تعداد پیشامدهای از دستور زیر حساب می‌شود

$$n(A) = \begin{cases} x - ۱ & ۲ \le x \le ۷ \\ ۱۳ - x & ۷ \le x \le ۱۲ \end{cases}$$

حال $\mathbf{x}$ باید $۲, ۳, ۵, ۷, ۱۱$ شود که مجموع دو تاس یک عدد اول شود

$$\left.\begin{array}{l} x = ۲ \Rightarrow n(A_۱) = x - ۱ = ۲ - ۱ = ۱ \\ x = ۳ \Rightarrow n(A_۲) = x - ۱ = ۳ - ۱ = ۲ \\ x = ۵ \Rightarrow n(A_۳) = x - ۱ = ۵ - ۱ = ۴ \\ x = ۷ \Rightarrow \begin{cases} n(A_۴) = x - ۱ = ۷ - ۱ = ۶ \\ n(A_۴) = ۱۳ - x = ۱۳ - ۷ = ۶ \end{cases} \\ x = ۱۱ \Rightarrow n(A_۵) = ۱۳ - x = ۱۳ - ۱۱ = ۲ \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$n(A) = n(A_۱) + n(A_۲) + n(A_۳) + n(A_۴) + n(A_۵)$

$\Rightarrow n(A) = ۱ + ۲ + ۴ + ۶ + ۲ = ۱۵$

۱۲- گزینه «۳» آسان

روش اول:

ابتدا تعداد عضوهای پیشامد آن که مجموع دو تاس ۵ باشد را محاسبه می‌کنیم.

$$A=\{(۱,۴),(۲,۳),(۳,۲),(۴,۱)\} \Rightarrow n(A)=۴$$

یا این که $n(A)=x-۱ \xrightarrow{x=۵} ۵-۱=۴$

حال بررسی می‌کنیم در بین گزینه‌ها کدام پیشامد ۴ عضوی است.

نادرست $x=۷ \Rightarrow n(B)=x-۱=۱۳-x=۷-۱=۶$ (گزینه ۱)

نادرست $x=۸ \Rightarrow n(B)=۱۳-x=۱۳-۸=۵$ (گزینه ۲)

درست $x=۹ \Rightarrow n(B)=۱۳-x=۱۳-۹=۴$ (گزینه ۳)

نادرست $x=۱۰ \Rightarrow n(B)=۱۳-x=۱۳-۱۰=۳$ (گزینه ۴)

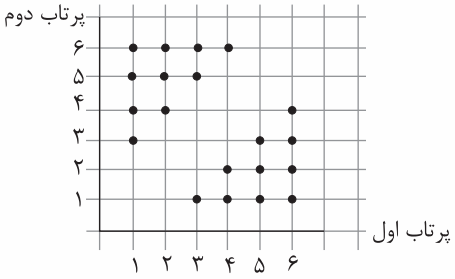
روش دوم:

نکته: هرگاه $x+y=۱۴$ شود دراین صورت تعداد عضوهای پیشامد آن که در پرتاب دوتاس مجموع اعداد ظاهر x شود با تعداد عضوهای پیشامد آن که مجموع دو تاس y شود برابر ست.

$$x+y=۱۴ \xrightarrow{y=۵} x+۵=۱۴ \Rightarrow x=۹$$

۱۳- گزینه «۴» آسان

پرتاب دو تاس ۳۶ حالت دارد و هرگاه بخواهیم تعداد عضوهای یک پیشامد در پرتاب دو تاس را به دست آوریم بهتر است از محورهای مختصات کمک بگیریم



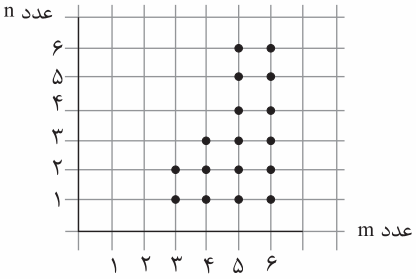
$$A=\{(۱,۳),(۱,۴),(۱,۵),(۱,۶),(۲,۴),(۲,۵),(۲,۶),(۳,۴),(۳,۵),(۳,۶),(۴,۱),(۴,۲),(۴,۶),(۵,۱),(۵,۲),(۵,۳),(۶,۱),(۶,۲),(۶,۳),(۶,۴)\} \Rightarrow n(A)=۲۰$$

۱۴- گزینه «۲» دشوار

زمانی یک معادله درجه دوم ۲ ریشه حقیقی دارد که $\Delta>۰$ باشد

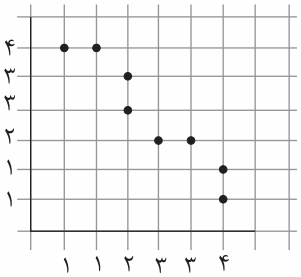
$$\Delta=m^۲-۴n>۰ \Rightarrow m^۲>۴n$$

$$A=\{(۳,۱),(۳,۲),(۴,۱),(۴,۲),(۴,۳),(۵,۱),(۵,۲),(۵,۳),(۵,۴),(۵,۵),(۵,۶),(۶,۱),(۶,۲),(۶,۳),(۶,۴),(۶,۵),(۶,۶)\}$$
$$\Rightarrow n(A)=۱۷$$



۱۵- گزینه «۱» آسان

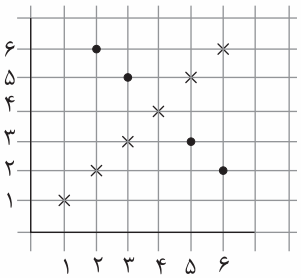
$$A=\{(۱,۴),(۱,۴),(۲,۳),(۲,۳),(۳,۲),(۳,۲),(۴,۱),(۴,۱)\}$$
$$\Rightarrow n(A)=۸$$



۱۶- گزینه «۱» آسان

این مسئله شبیه به پرتاب دو تاس است، اما یک تفاوت مهم دارد و آن این است که دو شماره یکسان ظاهر نمی‌شود چون مثلاً دو مهره با شماره ۱ وجود ندارد $(n(S)=۶\times۶-۶=۳۰)$

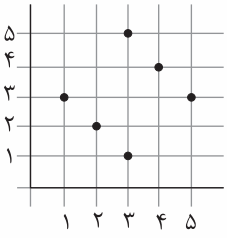
$$A=\{(۲,۶),(۳,۵),(۵,۳),(۶,۲)\}$$



۱۷- گزینه «۳» متوسط

تفاوت این مسئله با مسئله قبلی در این است که می‌تواند در هر دو انتخاب یک شماره ظاهر شود، یعنی دقیقاً مثل مسائل پرتاب دو تاس با این تفاوت که به جای ۶ عدد در این مسئله ۵ عدد داریم

$$A=\{(۱,۳),(۲,۲),(۳,۱),(۳,۵),(۴,۴),(۵,۳)\} \Rightarrow n(A)=۶$$

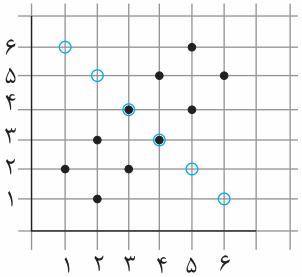


۱۸- گزینه «۲» — متوسط

روی محور مختصات اعضای پیشامد **A** را با نقطه توپر و اعضای پیشامد **B** را با دایره‌های توخالی نمایش می‌دهیم.

$$A-B=\{(1,2),(2,1),(2,3),(3,2),(4,5),(5,4),(5,6),(6,5)\}$$

پیشامد $A-B$ دارای ۸ عضو است.



۱۹- گزینه «۴» — آسان

تمام زیرمجموعه‌های **S** یک پیشامد برای این فضای نمونه‌ای است و چون عدد ۵ در این آزمایش ظاهر شده است تمام زیرمجموعه‌های از **S** که شامل عدد ۵ هستند جواب مسئله است که جواب مسئله $۲^{n-۱}=۲^{۶}=۶۴$ است یا

$$\text{تعداد حالات}=\underset{\text{عدد ۱}}{۲}\times\underset{\text{عدد ۲}}{۲}\times\underset{\text{عدد ۳}}{۲}\times\underset{\text{عدد ۴}}{۲}\times\underset{\text{عدد ۵}}{۱}\times\underset{\text{عدد ۶}}{۲}\times\underset{\text{عدد ۷}}{۲}=۶۴$$

۲۰- گزینه «۳» — آسان

$$\binom{n}{۳}=۴\binom{n}{۲}\Rightarrow\frac{n!}{(n-۳)!\times۳!}=۴\times\frac{n!}{(n-۲)!\times۲!}$$

$$\Rightarrow\frac{۱}{(n-۳)!\times۶}=\frac{۴}{(n-۲)\times(n-۳)!\times۲}\Rightarrow\frac{۱}{۶}=\frac{۲}{n-۲}$$

$$\Rightarrow n-۲=۱۲\Rightarrow n=۱۴$$

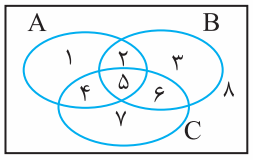
۲۱- گزینه «۳» — آسان

$$A_۱'\cup A_۲'=(A_۱\cap A_۲)'$$

$A_۱\cap A_۲$ یعنی $A_۱$, $A_۲$ همزمان رخ دهند و $(A_۱\cap A_۲)'$ یعنی $A_۱$, $A_۲$ همزمان رخ ندهند.

۲۲- گزینه «۳» — دشوار

نمودار ون را برای ۳ مجموعه A , B , C رسم می‌کنیم



معنی گزینه ۳ به صورت $A\cap(B\cup C)$ است

$$B\cup C=\{۲,۳,۴,۵,۶,۷\}$$

$$A\cap(B\cup C)=\{۱,۲,۴,۵\}\cap\{۲,۳,۴,۵,۶,۷\}=\{۲,۴,۵\}$$

۲۳- گزینه «۲» — آسان

تعداد حالاتی که ۴ قبل از ۶ می‌آید با تعداد حالاتی که ۶ قبل از ۴ می‌آید برابر است پس احتمال برابر $\frac{۱}{۲}$ است.

۲۴- گزینه «۴» — آسان

$$P(A\cap B')=P(A-B)=P(A)-P(A\cap B)$$

۲۵- گزینه «۱» — آسان

$$\left.\begin{array}{l}\text{می دانیم } P(B-A)=P(B)-P(A\cap B)\\ \text{فرض } P(B-A)=P(B)-P(A)\end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow P(A\cap B)=P(A)\Rightarrow A\cap B=A\Rightarrow A\subseteq B$$

۲۶- گزینه «۳» — متوسط

$$S=\{۱,۲,۳,۴,۵,۶,۷,۸,۹\}\Rightarrow n(S)=۹$$

$A=\{۱,۲,۳,۴,۶,۹\}\Rightarrow n(A)=۶$ پلاک مضرب ۳ یا بیشتر از ۴ نیست

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۶}{۹}=\frac{۲}{۳}$$

۲۷- گزینه «۳» — متوسط

۵:ریاضی $\rightarrow$ ۲

۳: تجربی $\rightarrow$ ۱

۸کل $\rightarrow$ ۳

$$n(A)=\binom{۵}{۲}\binom{۳}{۱}=۱۰\times۳=۳۰$$

$$n(S)=\binom{۸}{۳}=۵۶$$

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۳۰}{۵۶}=\frac{۱۵}{۲۸}$$

۲۸- گزینه «۴» — دشوار

$$n(S)=\underset{\text{به جز صفر}}{۹}\times۱۰\times۱۰=۹۰۰$$

$$n(A')=\underset{\downarrow}{۸}\times\underset{\downarrow}{۹}\times\underset{\downarrow}{۹}=۶۴۸$$

(۸: به جز ۲ و صفر، ۹: به جز ۲، ۹: به جز ۲)

$$P(A')=\frac{n(A')}{n(S)}=\frac{۶۴۸}{۹۰۰}=۰/۷۲$$

$$P(A)=۱-P(A')=۱-۰/۷۲=۰/۲۸$$

۲۹- گزینه «۳» — متوسط

$$n(S)=۷\times۷\times۷=۳۴۳$$

$$n(A)=۷\times۶\times۵=۲۱۰$$

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۲۱۰}{۳۴۳}=\frac{۳۰}{۴۹}$$

۳۰- گزینه «۲» متوسط

۱ ← ۳ گروه آزمایش اول

۱ ← ۳ گروه آزمایش دوم

۱ ← ۲ گروه آزمایش سوم

۱ ← ۱ گروه آزمایش چهارم

۴ ← ۹: کل افراد

$$n(A)=\binom{3}{1}\binom{3}{1}\binom{2}{1}\binom{1}{1}=3\times3\times2\times1=18$$

$$n(S)=\binom{9}{4}=126$$

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{18}{126}=\frac{1}{7}$$

۳۱- گزینه «۲» متوسط

۲ ← ۵ سفید ← ۰ یا ۲

۰ ← ۵ سیاه

۲ ← ۱۰ کل

$$n(A)=\binom{5}{3}\binom{5}{0}+\binom{5}{0}\binom{5}{2}=10+10=20$$

$$n(S)=\binom{10}{2}=45$$

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{20}{45}=\frac{4}{9}$$

۳۲- گزینه «۳» متوسط

۳ ← ۵: ادبیات

۲ ← ۷: تاریخ

۵ ← ۱۲ کل

$$n(A)=\binom{5}{3}\binom{7}{2}=10\times21=210$$

$$n(S)=\binom{12}{5}=\frac{12!}{5!\times7!}=\frac{12\times11\times10\times9\times8\times7!}{120\times7!}=11\times9\times8$$

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{210}{11\times9\times8}=\frac{35}{132}$$

۳۳- گزینه «۳» متوسط

۲ ← ۴: دانش‌آموز سال اول

۴ ← ۵: دانش‌آموز سال دوم

۶ ← ۹: کل دانش‌آموزان

$$n(A)=\binom{4}{2}\binom{5}{4}=6\times5=30$$

$$n(S)=\binom{9}{6}=84$$

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{30}{84}=\frac{5}{14}$$

۳۴- گزینه «۳» دشوار

متمم این پیشامد آن است که از هر دو گروه به تعداد مساوی انتخاب کنیم.

۲ ← ۴: گروه ریاضی

۲ ← ۶: گروه تجربی

۴ ← ۱۰: کل افراد

$$n(A')=\binom{4}{2}\binom{6}{2}=6\times15=90$$

$$n(S)=\binom{10}{4}=210$$

$$P(A')=\frac{n(A')}{n(S)}=\frac{90}{210}=\frac{3}{7}$$

$$P(A)=1-P(A')=1-\frac{3}{7}=\frac{4}{7}$$

۳۵- گزینه «۴» دشوار

$$n(S)=\underset{\text{به جز صفر}}{4}\times4\times3=48$$

برای این که تعداد اعداد زوج را پیدا کنیم یکبار یکان را صفر درنظر می‌گیریم

و بار دیگر یکان را زوج غیرصفر درنظر می‌گیریم.

$$\left.\begin{array}{l}\text{یکان صفر}=4\times3\times1=12\\ \text{یکان زوج غیر صفر}=3\times3\times\underset{\downarrow}{2}=18\\ \qquad\qquad\qquad\quad 2,4\end{array}\right\}\Rightarrow n(A)=12+18=30$$

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{30}{48}=\frac{5}{8}$$

۳۶- گزینه «۳» متوسط

۱ ← ۳: ارقام زوج

۲ ← ۲ ارقام فرد

۳ ← ۵ کل ارقام

$$n(A)=\binom{3}{1}\binom{2}{2}=3\times1=3$$

$$n(S)=\binom{5}{3}=10$$

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=0/3$$

۳۷- گزینه «۴» دشوار

۱ → ۱: تعداد نقطه‌ها در خط ۱

۱ → ۲: تعداد نقطه‌ها در خط ۲

۱ → ۳: تعداد نقطه‌ها در خط ۳

۱ → ۴: تعداد نقطه‌ها در خط ۴

۴ → تعداد کل نقطه‌ها $= ۱۰$

$$n(A) = \binom{۱}{۱}\binom{۲}{۱}\binom{۳}{۱}\binom{۴}{۱} = ۱\times۲\times۳\times۴ = ۲۴$$

$$n(S) = \binom{۱۰}{۴} = ۲۱۰$$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{۲۴}{۲۱۰} = \frac{۴}{۳۵}$$

۳۸- گزینه «۳» متوسط

متمم این پیشامد آن است که عدد ۶ ظاهر نشود.

$$n(S) = ۶\times۶\times۶ = ۲۱۶$$

$$n(A') = ۵\times۵\times۵ = ۱۲۵$$

$$P(A') = \frac{n(A')}{n(S)} = \frac{۱۲۵}{۲۱۶}$$

$$P(A) = ۱ - P(A') = ۱ - \frac{۱۲۵}{۲۱۶} = \frac{۹۱}{۲۱۶}$$

۳۹- گزینه «۳» دشوار

ابتدا به نظر می‌رسد که تعداد انتخاب دو کارت به صورت متوالی برابر $۲۱\times۲۰ = ۴۲۰$ است ولی در ۲۰ حالت زیر اعداد یکسانی ظاهر می شوند.

اعداد تکراری $= \{(۱,۱۱),(۱,۱۲),(۱,۱۳),\dots,(۱,۱۹),(۲,۱۱),(۲,۱۲),\dots,$
$(۲,۱۹),(۱۲,۱),(۱۱,۱),(۱۱,۲),(۱۱,۳),\dots,(۱۱,۹),(۲۱,۱),(۲۱,۲)$
$,\dots,(۲۱,۹),(۱,۲۱)\} \Rightarrow n(S) = ۴۲۰ - ۲۰ = ۴۰۰$

حال تعداد حالاتی که عدد ظاهر شده مضرب ۶ شود را باید محاسبه کنیم برای این منظور عدد موردنظر باید زوج باشد و مجموع ارقام آن نیز بر عدد ۳ بخش‌پذیر باشد.

عدد انتخابی اول ۱ $\Rightarrow$ عدد انتخابی دوم زوج به صورت $۳k+۲$ $= \{۲,۸,۱۴,۲۰\}$

عدد انتخابی اول ۲ $\Rightarrow$ عدد انتخابی دوم زوج به صورت $۳k+۱$ $= \{۴,۱۰,۱۶\}$

عدد انتخابی اول ۳ $\Rightarrow$ عدد انتخابی دوم زوج به صورت $۳k$ $= \{۶,۱۲,۱۸\}$

عدد انتخابی اول ۴ $\Rightarrow$ عدد انتخابی دوم زوج به صورت $۳k+۲$ $= \{۲,۸,۱۴,۲۰\}$

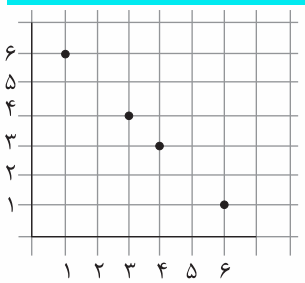
عدد انتخابی اول ۵ $\Rightarrow$ عدد انتخابی دوم زوج به صورت $۳k+۱$ $= \{۴,۱۰,۱۶\}$

$\vdots$

عدد انتخابی اول ۲۱ $\Rightarrow$ عدد انتخابی دوم زوج به صورت $۳k$ $= \{۶,۱۲,۱۸\}$

کل اعداد $= ۷(۴) + ۱۴(۳) = ۲۸ + ۴۲ = ۷۰$

۴۰- گزینه «۲» آسان



$$n(S) = ۶\times۶ = ۳۶$$

$$A = \{(۱,۶),(۳,۴),(۴,۳),(۶,۱)\} \Rightarrow n(A) = ۴$$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{۴}{۳۶} = \frac{۱}{۹}$$

۴۱- گزینه «۳» دشوار

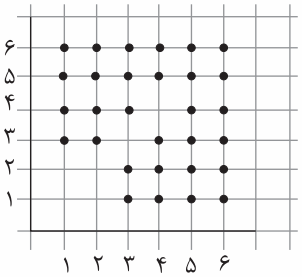
باید دقت کنیم عددهای **m** و **n** می‌توانند عدد ظاهر شده در پرتاب اول یا دوم باشند چون معادله دارای ۲ ریشه است پس $\Delta > ۰$

$$\Delta > ۰ \Rightarrow m^۲ - ۴n > ۰ \Rightarrow m^۲ > ۴n$$

اما ۶ عدد زیر تکراری هستند.

$$A = \{(۱,۳),(۱,۴),(۱,۵),(۱,۶),(۲,۳),(۲,۴),$$
$$(۲,۵),(۲,۶),(۳,۱),(۳,۲)$$
$$(۳,۴),(۳,۵),(۳,۶),(۴,۱),(۴,۲),(۴,۳),(۴,۵),$$
$$(۴,۶),(۵,۱),(۵,۲),(۵,۳)$$
$$(۵,۴),(۵,۵),(۵,۶),(۶,۱),(۶,۲),(۶,۳),(۶,۴),(۶,۵),(۶,۶)\}$$
$$\Rightarrow n(A) = ۳۰$$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{۳۰}{۳۶} = \frac{۵}{۶}$$



۴۲- گزینه «۱» دشوار

تعداد حالاتی که پیشامد مجموع دو تاس x می‌شود از دستور زیر محاسبه می‌شود

$$n(A)=\begin{cases}x-1 & 2\le x\le 7\\ 13-x & 7\le x\le 12\end{cases}$$

حال x باید برابر یکی از اعداد $\{2,3,5,7,11\}$ شود

$$n(A)=1+2+4+6+2=15$$

$$n(S)=6\times 6=36$$

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{15}{36}=\frac{5}{12}$$

۴۳- گزینه «۱» متوسط

روش اول:

تعداد حالاتی که پیشامد مجموع دو تاس x می‌شود از دستور زیر محاسبه می‌شود.

$$n(A)=\begin{cases}x-1 & 2\le x\le 7\\ 13-x & 7\le x\le 12\end{cases}$$

$$n(A)=4$$

$$n(S)=6\times 6=36$$

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{4}{36}=\frac{1}{9}$$

روش دوم:

$$A=\{(1,4),(2,3),(3,2),(4,1)\}\Rightarrow n(A)=4$$

$$n(S)=6\times 6=36$$

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{4}{36}=\frac{1}{9}$$

۴۴- گزینه «۱» آسان

$$n(S)=6!=720$$

برای به دست آوردن تعداد حالاتی که اعداد زوج و فرد یک در میان قرار گیرند ابتدا اعداد زوج را به $3!$ حالت صف می‌کنیم و سپس اعداد فرد را به $3!$ حالت صف می‌کنیم حال می‌توانیم یک عدد زوج را در ابتدا صف قرار دهیم یا این که یک عدد فرد را در ابتدا صف قرار دهیم پس

$$n(A)=3!\times 3!\times 2=72$$

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{72}{720}=0/1$$

۴۵- گزینه «۲» متوسط

باید مجموع دو عدد رو شده ۳ یا ۶ یا ۹ شود.

$$n(S)=\binom{6}{2}=15$$

$$A=\{(1,2),(1,5),(2,4),(3,6),(4,5)\}\Rightarrow n(A)=5$$

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{5}{15}=\frac{1}{3}$$

۴۶- گزینه «۳» متوسط

زمانی مجموع دو عدد فرد می‌شود که یکی از آنها زوج و دیگری فرد شود

۲: زوج ← ۱

۳: فرد ← ۱

۵: کل ← ۲

$$n(A)=\binom{2}{1}\binom{3}{1}=2\times 3=6$$

$$n(S)=\binom{5}{2}=10$$

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{6}{10}=0/6$$

۴۷- گزینه «۳» متوسط

زمانی مجموع دو عدد زوج است که هر دو عدد زوج یا هر دو عدد فرد باشند.

۳: زوج ← ۲ یا ۰

۳: فرد ← ۰ یا ۲

۶: کل ← ۲

$$n(A)=\binom{3}{2}\binom{3}{0}+\binom{3}{0}\binom{3}{2}=3+3=6$$

$$n(S)=\binom{6}{2}=15$$

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{6}{15}=\frac{2}{5}$$

۴۸- گزینه «۴» دشوار

اگر تصور کنیم ابتدا جای خانه خالی عدد ۶ می‌خواهیم و ۶ عدد را صف کنیم و سپس عدد ۶ را از داخل خانه‌ها حذف کنیم تعداد حالات برابر $6!$ است پس

$$n(S)=6!$$

خانه‌ها به دو صورت می توانند پر شوند.

۰	۰	۰	۰	۰	خالی	۰

خالی	۰	۰	۰	۰	۰	

حال دو عدد زوج به $2!$ طریق صف می‌شوند و تبدیل به یک عدد می‌شوند و با ۳ عدد فرد تشکیل ۴ می‌دهند و به $4!$ طریق صف می‌شوند و بنا به اصل ضرب داریم:

$$n(A)=2\times 2!\times 4!=4\times 4!$$

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{4\times 4!}{6!}=\frac{4\times 4!}{6\times 5\times 4!}=\frac{2}{15}$$

۴۹- گزینه «۱» **متوسط**

می‌دانیم اعداد مثل هم ظاهر نمی‌شود و چون دو مهره با هم بیرون می‌آید جایه‌جایی نداریم، پس:

$$n(s)=\binom{۶}{۲}=\frac{۶\times۵}{۲}=۱۵$$

$$n(A)=\{(۱,۲),(۲,۳),(۳,۴),(۴,۵),(۵,۶)\}=۵$$

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۵}{۱۵}=\frac{۱}{۳}$$

۵۰- گزینه «۴» **دشوار**

می‌دانیم $A\Delta B=(A\cup B)-(A\cap B)$

$$\Rightarrow P(A\Delta B)=P(A\cup B)-P(A\cap B)$$

$$\Rightarrow ۰/۶=P(A\cup B)-P(A\cap B)$$

$$P(A\cup B)=۰/۶+P(A\cap B)$$

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)\Rightarrow ۰/۶+P(A\cap B)$$

$$=۰/۸+۰/۴-P(A\cap B)\Rightarrow ۲P(A\cap B)=۰/۶\Rightarrow P(A\cap B)=۰/۳$$

$$P(B'\cap A)=P(A\cap B')=P(A-B)=P(A)-P(A\cap B)$$

$$=۰/۸-۰/۳=۰/۵$$

۵۱- گزینه «۲» **دشوار**

$$P(A\cap B')=P(A-B)\Rightarrow ۰/۲=P(A)-P(A\cap B)$$

$$\Rightarrow ۰/۲=۰/۶-P(A\cap B)\Rightarrow P(A\cap B)=۰/۴$$

$$P(A'\cap B)=P(B\cap A')=P(B-A)=P(B)-P(A\cap B)$$

$$=۰/۷-۰/۴=۰/۳$$

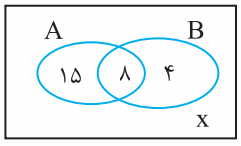
۵۲- گزینه «۳» **متوسط**

نمودار ون را برای این مسئله می‌کشیم

تاجر = **A**

اولین سفر = **B**

$$n(S)=۷۲$$



$$n(A'\cap B')=x$$

$$۱۵+۸+۴+x=۷۲\Rightarrow x=۴۵$$

$$P(A'\cap B')=\frac{n(A'\cap B')}{n(S)}=\frac{۴۵}{۷۲}=\frac{۵}{۸}$$

۵۳- گزینه «۳» **متوسط**

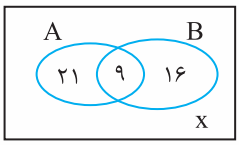
نمودار ون را برای این مسئله رسم می‌کنیم

$$۱۰۰=۲۱+۹+۱۶+x\Rightarrow x=۵۴$$

$$n(A'\cap B')=۵۴$$

$$P(A'\cap B')=\frac{n(A'\cap B')}{n(S)}=\frac{۵۴}{۱۰۰}=۰/۵۴$$

$$n(S)=۱۰۰$$



۵۴- گزینه «۲» **دشوار**

$$S=\{۱,۲,۳,\dots,۵۰۰\}\Rightarrow n(S)=۵۰۰$$

اگر **A** و **B** زیرمجموعه‌های **S** باشند و **A** مجموعه مضارب ۴ و **B** مجموعه مضارب ۶ باشد چون که $[۶,۴]=۱۲$ است، داریم:

$$n(A)=[\frac{۵۰۰}{۴}]=۱۲۵$$

$$n(A\cap B)=[\frac{۵۰۰}{[۶,۴]}]=[\frac{۵۰۰}{۱۲}]=۴۱$$

$$n(A-B)=n(A)-n(A\cap B)=۱۲۵-۴۱=۸۴$$

$$P(A-B)=\frac{n(A-B)}{n(S)}=\frac{۸۴}{۵۰۰}=۰/۱۶۸$$

۵۵- گزینه «۱» **دشوار**

تعداد مضارب **K** در مجموعه $\{m,m+۱,m+۲,\dots,n\}$ برابر

$$[\frac{n}{K}]-[\frac{m-۱}{K}]$$

$$n(A)=[\frac{۶۰۰}{۵}]-[\frac{۱۰۰}{۵}]=۱۲۰-۲۰=۱۰۰$$

$$n(B)=[\frac{۶۰۰}{۶}]-[\frac{۱۰۰}{۶}]=۱۰۰-۱۶=۸۴$$

$$n(A\cap B)=[\frac{۶۰۰}{[۶,۵]}]-[\frac{۱۰۰}{[۶,۵]}]=[\frac{۶۰۰}{۳۰}]-[\frac{۱۰۰}{۳۰}]=۲۰-۳=۱۷$$

$$n(A\Delta B)=n(A-B)+n(B-A)=n(A)+n(B)-۲n(A\cap B)$$

$$=۱۰۰+۸۴-۲\times۱۷=۱۵۰$$

$$n(S)=۶۰۰-۱۰۰=۵۰۰$$

$$P(A\Delta B)=\frac{n(A\Delta B)}{n(S)}=\frac{۱۵۰}{۵۰۰}=۰/۳$$

۱- آسان

i	رو	پشت
P(i)	x	۲x

$P(\text{رو})+P(\text{پشت})=۱ \Rightarrow x+۲x=۱ \Rightarrow ۳x=۱ \Rightarrow x=\frac{۱}{۳}$

$P(\text{رو})=x=\frac{۱}{۳} \quad P(\text{پشت})=۲x=\frac{۲}{۳}$

۲- متوسط

$P(۱)=P(۲)=۲P(۳)=۳P(۴)=۴P(۵)=۱۲x$

$\Rightarrow P(۱)=P(۲)=۱۲x , P(۳)=۶x , P(۴)=۴x , P(۵)=۳x$

i	۱	۲	۳	۴	۵
P(i)	۱۲x	۱۲x	۶x	۴x	۳x

$P(۱)+P(۲)+P(۳)+P(۴)+P(۵)=۱$

$\Rightarrow ۱۲x+۱۲x+۶x+۴x+۳x=۳۱$

$\Rightarrow ۳۷x=۱ \Rightarrow x=\frac{۱}{۳۷}$

$P(۳)=۶x=\frac{۶}{۳۷}$

۳- آسان

i	۱	۲	۳	۴	۵	۶
P(i)	x	۲x	۳x	۴x	۵x	۶x

$P(۱)+P(۲)+P(۳)+P(۴)+P(۵)+P(۶)=۱$

$\Rightarrow x+۲x+۳x+۴x+۵x+۶x=۱ \Rightarrow ۲۱x=۱ \Rightarrow x=\frac{۱}{۲۱}$

$P(\{\text{زوج}\})=P(۲)+P(۴)+P(۶)=۲x+۴x+۶x=۱۲x=\frac{۱۲}{۲۱}=\frac{۴}{۷}$

۴- آسان

i	۱	۲	۳	۴	۵	۶
P(i)	x	۳x	x	۳x	x	۳x

$P(۱)+P(۲)+P(۳)+P(۴)+P(۵)+P(۶)=۱$

$\Rightarrow x+۳x+x+۳x+x+۳x=۱ \Rightarrow ۱۲x=۱ \Rightarrow x=\frac{۱}{۱۲}$

$P(\{۲ , ۳\})=P(۲)+P(۳)=۳x+x=۴x=\frac{۴}{۱۲}=\frac{۱}{۳}$

۵- متوسط

i	x	y	z
P(i)	a	$a+\frac{۱}{۴}$	$a+\frac{۱}{۲}$

$P(x)+P(y)+P(z)=۱ \Rightarrow a+a+\frac{۱}{۴}+a+\frac{۱}{۲}=۱$

$\Rightarrow ۳a=۱-\frac{۱}{۲}-\frac{۱}{۴} \Rightarrow ۳a=\frac{۴-۲-۱}{۴} \Rightarrow$

$۳a=\frac{۱}{۴} \Rightarrow a=\frac{۱}{۱۲}$

$P(x)=a=\frac{۱}{۱۲} \quad P(y)=a+\frac{۱}{۴}=\frac{۱}{۱۲}+\frac{۱}{۴}=\frac{۱}{۳}$

$P(z)=a+\frac{۱}{۲}=\frac{۱}{۱۲}+\frac{۱}{۲}=\frac{۷}{۱۲}$

۶- متوسط

$S=\{x , y , z\} \Rightarrow P(x)+P(y)+P(z)=۱ \Rightarrow P(\{x , y\})+P(z)=۱$

$\Rightarrow \frac{۲}{۳}+P(z)=۱ \Rightarrow P(z)=\frac{۱}{۳}$

$P(\{x , z\})=\frac{۱}{۲} \Rightarrow P(x)+P(z)=\frac{۱}{۲} \Rightarrow P(x)+\frac{۱}{۳}=\frac{۱}{۲} \Rightarrow P(x)=\frac{۱}{۶}$

$P(\{x , y\})=\frac{۲}{۳} \Rightarrow P(x)+P(y)=\frac{۲}{۳} \Rightarrow \frac{۱}{۶}+P(y)=\frac{۲}{۳}-\frac{۱}{۶}$

$\Rightarrow P(y)=\frac{۱}{۲}$

۷- دشوار

$S=\{a , b , c , d , e\} \Rightarrow P(a)+P(b)+P(c)+P(d)+P(e)=۱$

$\Rightarrow P(\{a , b , c , d\})+P(e)=۱$

$\Rightarrow P(B)+P(e)=۱ \Rightarrow \frac{۳}{۵}+P(e)=۱ \Rightarrow P(e)=\frac{۲}{۵}$

$P(c)=P(\{a , b , e\})=P(\{a , b\})+P(e)=P(A)+P(e)=\frac{۲}{۷}+\frac{۲}{۵}$

$\Rightarrow P(c)=\frac{۲۴}{۳۵}$

$P(c)=۱-P(c')=۱-\frac{۲۴}{۳۵} \Rightarrow P(c')=\frac{۱۱}{۳۵}$

۸- متوسط

i	علی = A	رضا = R	حسین = H
P(i)	x	۳x	۲x

$P(A)+P(R)+P(H)=۱ \Rightarrow x+۳x+۲x=۱ \Rightarrow ۶x=۱ \Rightarrow x=\frac{۱}{۶}$

$P(A)=x=\frac{۱}{۶} \quad P(R)=۳x=\frac{۳}{۶}=\frac{۱}{۲} \quad P(H)=۲x=\frac{۲}{۶}=\frac{۱}{۳}$

ب) $P(\{R , H\})=P(R)+P(H)=۳x+۲x=۵x=\frac{۵}{۶}$

۹- دشوار

i	۱	۲	۳	۴	۵	۶
P	x	۵x	۱۱x	۱۹x	۲۹x	۴۱x

$P(۱)+P(۲)+P(۳)+P(۴)+P(۵)+P(۶)=۱$

$\Rightarrow x+۵x+۱۱x+۱۹x+۲۹x+۴۱x=۱\Rightarrow ۱۰۶x=۱\Rightarrow x=\frac{۱}{۱۰۶}$

آ) $P(۴)=۱۹x=\frac{۱۹}{۱۰۶}$

ب) $P(\{۵,۶\})=P(۵)+P(۶)=۲۹x+۴۱x=۷۰x=\frac{۷۰}{۱۰۶}=\frac{۳۵}{۵۳}$

۱۰- دشوار

i	۱	۲	۳	۴	۵
P	x	۳x	۵x	۷x	۹x

$P(۱)+P(۲)+P(۳)+P(۴)+P(۵)=۱ \rightarrow x+۳x+۵x+۷x+۹x=۱$

$\Rightarrow ۲۵x=۱ \Rightarrow x=\frac{۱}{۲۵}$

آ) $P(۱)=x=\frac{۱}{۲۵}, P(۲)=۳x=\frac{۳}{۲۵}, P(۳)=۵x=\frac{۵}{۲۵},$

$P(۴)=۷x=\frac{۷}{۲۵}, P(۵)=۹x=\frac{۹}{۲۵}$

ب) $P(\{۱,۳,۴\})=P(۱)+P(۳)+P(۴)=\frac{۱}{۲۵}+\frac{۵}{۲۵}+\frac{۷}{۲۵}=\frac{۱۳}{۲۵}$

$P(\{۲,۵\})=P(۲)+P(۵)=\frac{۳}{۲۵}+\frac{۹}{۲۵}=\frac{۱۲}{۲۵}$

درنتیجه خواهیم داشت:

$P(\{۱,۳,۴\})>P(\{۲,۵\})$

۱- گزینه «۳» متوسط

i	$m_۱$	$m_۲$	$m_۳$	$w_۱$	$w_۲$
P(i)	۲x	۲x	۲x	x	x

$P(m_۱)+P(m_۲)+P(m_۳)+P(w_۱)+P(w_۲)=۱$

$\Rightarrow ۲x+۲x+۲x+x+x=۱ \Rightarrow ۸x=۱ \Rightarrow x=\frac{۱}{۸}$

$P(w_۲)=x=\frac{۱}{۸}$

۲- گزینه «۳» آسان

$P(۱)=۲P(۲)=۳P(۳)=۴P(۴)=۱۲x \Rightarrow P(۱)=۱۲x, P(۲)=۶x,$
$P(۳)=۴x, P(۴)=۳x$

i	۱	۲	۳	۴
P(i)	۱۲x	۶x	۴x	۳x

$P(۱)+P(۲)+P(۳)+P(۴)=۱ \Rightarrow ۱۲x+۶x+۴x+۳x=۱$

$\Rightarrow ۲۵x=۱ \Rightarrow x=\frac{۱}{۲۵}$

$P(۱)=۱۲x=\frac{۱۲}{۲۵}$

۳- گزینه «۴» آسان

i	۱	۲	۳	۴	۵	۶
P(i)	x	۳x	x	۳x	x	۳x

$P(۱)+P(۲)+P(۳)+P(۴)+P(۵)+P(۶)=۱$

$\Rightarrow x+۳x+x+۳x+x+۳x=۱ \Rightarrow ۱۲x=۱ \Rightarrow x=\frac{۱}{۱۲}$

$P(\{۴,۵,۶\})=P(۴)+P(۵)+P(۶)=۳x+x+۳x=۷x=\frac{۷}{۱۲}$

۴- گزینه «۱» متوسط

i	۲	۳	۳	۴	۵	۶
P(i)	x	۲x	۲x	x	۲x	x

$P(۱)+P(۲)+P(۳)+P(۴)+P(۵)+P(۶)=۱$

$\Rightarrow x+۲x+۲x+x+۲x+x=۱ \Rightarrow ۹x=۱ \Rightarrow x=\frac{۱}{۹}$

$P(A)=P(۱)+P(۲)+P(۳)+P(۴)=x+۲x+۲x+x=۶x=\frac{۶}{۹}=\frac{۲}{۳}$

۵- گزینه «۲» متوسط

i	۱	۲	۳	۴	۵	۶
P(i)	x	$\frac{۱}{۲}x$	$\frac{۱}{۳}x$	$\frac{۱}{۴}x$	$\frac{۱}{۵}x$	$\frac{۱}{۶}x$

$P(۱)+P(۲)+P(۳)+P(۴)+P(۵)+P(۶)=۱$

$\Rightarrow x+\frac{۱}{۲}x+\frac{۱}{۳}x+\frac{۱}{۴}x+\frac{۱}{۵}x+\frac{۱}{۶}x=۱ \xrightarrow{\times ۶۰}$

$۶۰x+۳۰x+۲۰x+۱۵x+۱۲x+۱۰x=۶۰ \Rightarrow ۱۴۷x=۶۰ \Rightarrow x=\frac{۶۰}{۱۴۷}$

$P(۶)=\frac{۱}{۶}x=\frac{۱}{۶}\times\frac{۶۰}{۱۴۷}=\frac{۱۰}{۱۴۷}$

۶- گزینه «۱» آسان

i	a	b	c	d
P(i)	x	۲x	۴x	۸x

$P(a)+P(b)+P(c)+P(d)=۱ \Rightarrow x+۲x+۴x+۸x=۱$

$\Rightarrow ۱۵x=۱ \Rightarrow x=\frac{۱}{۱۵}$

$P(A)=P(b)+P(c)=۲x+۴x=۶x=\frac{۶}{۱۵}=\frac{۲}{۵}$

۷- گزینه «۴» آسان

i	a	b	c	d
P(i)	۶x	x	۶x	۳x

$P(a)+P(b)+P(c)+P(d)=۱ \Rightarrow ۶x+x+۶x+۳x=۱۶x=۱$

$\Rightarrow x=\frac{۱}{۱۶}$

$P(b)=x=\frac{۱}{۱۶}$

۸- گزینه «۴» آسان

اگر احتمال انتخاب شدن **B** برابر **x** باشد، داریم

i	A	B	C	D
P(i)	۳x	x	۲x	x

$P(A)+P(B)+P(C)+P(D)=۱ \Rightarrow ۳x+x+۲x+x=۱$

$\Rightarrow ۷x=۱ \Rightarrow x=\frac{۱}{۷}$

اگر **B** یا **C** برنده نشوند پس **A** یا **D** برنده شده‌اند.

$P(\{A , D\})=P(A)+P(D)=۳x+x=۴x=\frac{۴}{۷}$

۹- گزینه «۱» دشوار

چون مجموعه **A**، ۳ عضوی است پس $۸=۲^{۳}$ زیرمجموعه دارد.

$A_۱=\{\}$ $A_۲=\{۱\}$ $A_۳=\{۲\}$ $A_۴=\{۳\}$ $A_۵=\{۱,۲\}$ $A_۶=\{۱,۳\}$

$A_۷=\{۲,۳\}$ $A_۸=\{۱,۲,۳\}$

i	$A_۱$	$A_۲$	$A_۳$	$A_۴$	$A_۵$	$A_۶$	$A_۷$	$A_۸$
P(i)	۰	k	k	k	۲k	۲k	۲k	۳k

$P(A_۱)+P(A_۲)+P(A_۳)+P(A_۴)+P(A_۵)+P(A_۶)+P(A_۷)+P(A_۸)=۱$

$۰+k+k+k+۲k+۲k+۲k+۳k=۱ \Rightarrow ۱۲k=۱ \Rightarrow k=\frac{۱}{۱۲}$

$P(\{A_۲ , A_۳ , A_۴\})=k+k+k=۳k=\frac{۱}{۴}$

۱۰- گزینه «۲» دشوار

در ۳ بار پرتاب این سکه ۴ حالت کلی داریم:

$A_۱=(۱,۱,۱)$ یک حالت ← هر ۳ پرتاب ۱ ظاهر شود: حالت ۱

۳ حالت ← دوبار ۱ و یکبار ۲ :حالت ۲

$A_۲=(۱,۱,۲)$ $A_۳=(۱,۲,۱)$ $A_۴=(۲,۱,۱)$

۳ حالت ← دو بار ۲ و یکبار ۱ظاهر شود

$A_۵=(۲,۲,۱)$ $A_۶=(۲,۱,۲)$ $A_۷=(۱,۲,۲)$

$A_۸=(۲,۲,۲)$ ۱ حالت ← هر ۳ بار عدد ۲ ظاهر شود: حالت ۳

i	$A_۱$	$A_۲$	$A_۳$	$A_۴$	$A_۵$	$A_۶$	$A_۷$	$A_۸$
P(i)	۳x	۴x	۴x	۴x	۵x	۵x	۵x	۶x

$P(A_۱)+P(A_۲)+P(A_۳)+P(A_۴)+P(A_۵)+P(A_۶)+P(A_۷)+P(A_۸)=۱ \Rightarrow ۳x+۴x+۴x+۴x+۵x+۵x+۵x+۶x=۱$

$\Rightarrow ۳۶x=۱ \Rightarrow x=\frac{۱}{۳۶}$

$P(\{A_۵ , A_۶ , A_۷\})=P(A_۵)+P(A_۶)+P(A_۷)=۵x+۵x+۵x$

$=۱۵x=\frac{۱۵}{۳۶}=\frac{۵}{۱۲}$

۱۱- گزینه «۴» متوسط

$P(\{b , d\})=P(b)+P(d) \Rightarrow \frac{۱}{۲}=\frac{۱}{۳}+P(d)$

$\Rightarrow \frac{۱}{۲}-\frac{۱}{۳}=P(d) \Rightarrow P(d)=\frac{۱}{۶}$

$P(\{b , c\})=P(b)+P(c) \Rightarrow \frac{۲}{۳}=\frac{۱}{۳}+P(c) \Rightarrow P(c)=\frac{۱}{۳}$

$P(a)+P(b)+P(c)+P(d)=۱ \Rightarrow P(a)+\frac{۱}{۳}+\frac{۱}{۳}+\frac{۱}{۶}=۱$

$\Rightarrow P(a)+\frac{۵}{۶}=۱ \Rightarrow P(a)=\frac{۱}{۶}$

۱۲- گزینه «۱» متوسط

x	۰	۱	۲	۳	۴
P(x)	$\frac{\binom{۴}{۰}^{۲}}{a}$	$\frac{\binom{۴}{۱}^{۲}}{a}$	$\frac{\binom{۴}{۲}^{۲}}{a}$	$\frac{\binom{۴}{۳}^{۲}}{a}$	$\frac{\binom{۴}{۴}^{۲}}{a}$

$P(۰)+P(۱)+P(۲)+P(۳)+P(۴)=۱ \Rightarrow \frac{۱}{a}+\frac{۱۶}{a}+\frac{۳۶}{a}+\frac{۱۶}{a}+\frac{۱}{a}=۱$

$\Rightarrow \frac{۷۰}{a}=۱ \Rightarrow a=۷۰$

۱- آسان

ابتدا فضای نمونه‌ای پرتاب دو تاس را به پرتاب‌های که مجموع دو تاس بیشتر از ۹ شده است، کاهش می‌دهیم.

$$S_1=\{(4,6),(5,5),(5,6),(6,4),(6,5),(6,6)\} \Rightarrow n(S_1)=6$$

$$A=\{(4,6),(5,6),(6,4),(6,5),(6,6)\} \Rightarrow n(A)=5$$

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{5}{6}$$

۲- متوسط

آ) فضای نمونه‌ای را کاهش می‌دهیم (تاس قرمز، تاس سبز)

$$S_1=\{(4,6)(5,5),(6,4)\} \Rightarrow n(S_1)=3$$

$$A=\{(6,4)\} \Rightarrow n(A)=1$$

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{1}{3}$$

ب) فضای نمونه‌ای را کاهش می‌دهیم

$$S_2=\{(6,1),(6,2),(6,3),(6,4),(6,5),(6,6)\} \Rightarrow n(S_2)=6$$

$$B=\{(6,4)\} \Rightarrow n(B)=1$$

$$P(B)=\frac{n(B)}{n(S)}=\frac{1}{6}$$

۳- آسان

می‌دانیم {(پ، پ)} رخ نداده است پس آن را از فضای نمونه‌ای کم می‌کنیم.

$$S_1=\{(ر،ر،پ),(پ،پ،ر),(ر،پ،ر),(پ،ر،ر),(ر،ر،ر),(ر،پ،پ),(پ،ر،پ),(پ،پ،پ)\} \Rightarrow n(S_1)=7$$

$$A=\{(ر،ر،ر)\} \Rightarrow n(A)=1$$

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{1}{7}$$

۱۳- گزینه «۴» دشوار

i	۰	۱	۲	۳
P(i)	$\frac{\binom{5}{0}\binom{4}{3}}{a}$	$\frac{\binom{5}{1}\binom{4}{2}}{a}$	$\frac{\binom{5}{2}\binom{4}{1}}{a}$	$\frac{\binom{5}{3}\binom{4}{0}}{a}$

$$P(0)+P(1)+P(2)+P(3)=1 \Rightarrow \frac{1\times4}{a}+\frac{5\times6}{a}+\frac{10\times4}{a}+\frac{10\times1}{a}=1$$

$$\Rightarrow \frac{4+30+40+10}{a}=1$$

$$\Rightarrow \frac{84}{a}=1 \Rightarrow a=84$$

۱۴- گزینه «۴» دشوار

i	۱	۳	۳	۴	۵
P(i)	x	$\frac{x}{3}$	$\frac{x}{7}$	$\frac{x}{15}$	$\frac{x}{31}$

$$P(1)+P(2)+P(3)+P(4)+P(5)=1 \Rightarrow x+\frac{x}{3}+\frac{x}{7}+\frac{x}{15}+\frac{x}{31}$$

$$=1 \xrightarrow{\times 3255}$$

$$3255x+85x+465x+217x+105x=3255 \Rightarrow 5127x=3255$$

$$\Rightarrow x=\frac{3255}{5127}$$

$$P(2)=\frac{x}{3}=\frac{3255}{5127\times3}=\frac{1085}{5127}$$

۱۵- گزینه «۴» متوسط

a_k	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6
$P(a_k)$	$\frac{\binom{5}{0}}{a}$	$\frac{\binom{5}{1}}{a}$	$\frac{\binom{5}{2}}{a}$	$\frac{\binom{5}{3}}{a}$	$\frac{\binom{5}{4}}{a}$	$\frac{\binom{5}{5}}{a}$

$$P(a_1)+P(a_2)+P(a_3)+P(a_4)+P(a_5)+P(a_6)=1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{a}+\frac{5}{a}+\frac{10}{a}+\frac{10}{a}+\frac{5}{a}+\frac{1}{a}=1 \Rightarrow \frac{32}{a}=1$$

$$\Rightarrow a=32$$

$$P(A)=P(a_2)+P(a_3)+\frac{5}{a}+\frac{10}{a}=\frac{15}{a}=\frac{15}{32}$$

۴- متوسط

آ) با توجه به این که یکی از ۱۴ بازیکن، بلند قدترین بازیکن تیم است، احتمال این که، آن فرد همان باشد که ما تصادفاً انتخاب کرده باشیم $\frac{۱}{۱۴}$ است.

ب) اگر **A** پیشامد آن باشد که بازیکن اول بلند قدترین بازیکن تیم باشد طبق (آ) $P(A)=\frac{۱}{۱۴}$ است و چنانچه **B** پیشامد آن باشد که بازیکن اول بلند قدتر از بازیکن دوم باشد (چون قد هیچ دو نفری برابر نیست پس $P(B)=\frac{۱}{۲}$)

$$A\subseteq B \Rightarrow P(A\cap B)=P(A)=\frac{۱}{۱۴}$$

$$P(A\mid B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{\frac{۱}{۱۴}}{\frac{۱}{۲}}=\frac{۲}{۱۴}=\frac{۱}{۷}$$

۵- دشوار

$$\Rightarrow n(s)=\binom{۱۰}{۲}=۴۵$$

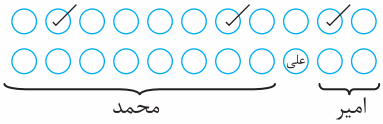
$$n(A)=\binom{۹}{۱}=۹$$

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۹}{۴۵}=\frac{۱}{۵}$$

$$\Rightarrow n(B)=\binom{۱}{۱}=۱$$

$$P(B)=\frac{n(B)}{n(S)}=\frac{۱}{۴۵}$$

۶- متوسط



$$n(S)=\binom{۱۱}{۳}=۱۶۵$$

$$n(A)=\binom{۸}{۱}\binom{۲}{۱}=۸\times۲=۱۶$$

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۱۶}{۱۶۵}$$

۷- آسان

می‌دانیم $P(A\mid B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$ است.

$$P(A_۱)\times P(A_۲\mid A_۱)P(A_۳\mid A_۱\cap A_۲)=P(A_۱)$$
$$\times\frac{P(A_۱\cap A_۲)}{P(A_۱)}\times\frac{P(A_۳\cap A_۲\cap A_۱)}{P(A_۱\cap A_۲)}=P(A_۱\cap A_۲\cap A_۳)$$

۸- دشوار

آ) $P(A_۱\cup A_۲\mid B)=\frac{P((A_۱\cup A_۲)\cap B)}{P(B)}=\frac{P(A_۱\cap B)\cup(A_۲\cap B)}{P(B)}$

$$=\frac{P(A_۱\cap B)+P(A_۲\cap B)-P((A_۱\cap B)\cap(A_۲\cap B))}{P(B)}$$

$$=\frac{P(A_۱\cap B)}{P(B)}+\frac{P(A_۲\cap B)}{P(B)}-\frac{P(\overbrace{(A_۱\cap A_۲)}^{\varnothing}\cap B)}{P(B)}$$
$$=P(A_۱\mid B)+P(A_۲\mid B)$$

ب) $P(A'\mid B)=\frac{P(A'\cap B)}{P(B)}=\frac{P(B-A)}{P(B)}=\frac{P(B)-P(A\cap B)}{P(B)}$

$$=\frac{P(B)}{P(B)}-\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=۱-P(A\mid B)$$

۹- آسان

اگر **A** پیشامد آن باشد که گوی اول سبز و **B** پیشامد آن باشد که گوی دوم سفید باشد

$$P(A)=\frac{۱}{۶}$$

برای محاسبه $(P(B\mid A))$ چون گوی اول سبز خارج شده پس حالا در کیسه ۳ گوی سفید و ۲ گوی قرمز داریم پس

$$P(B\mid A)=\frac{۳}{۵}$$

$$P(A\cap B)=P(A)\times P(B\mid A)=\frac{۱}{۶}\times\frac{۳}{۵}=\frac{۱}{۱۰}$$

۱۰- آسان

A را پیشامد آن که هر دو رو سبز و **B** را پیشامد آن که روی کارت مشاهده شده سبز است درنظر می‌گیریم

$$P(B)=\frac{۳}{۶} \Rightarrow P(B)=\frac{۱}{۲}$$

واضح است که $P(B\mid A)=۱$ است پس داریم:

$$P(A\cap B)=P(A)\times P(B\mid A)=\frac{۱}{۳}\times۱=\frac{۱}{۳}$$

$$P(A\mid B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{\frac{۱}{۳}}{\frac{۱}{۲}}=\frac{۲}{۳}$$

۱۱- دشوار

اگر **A** و **B** به ترتیب پیشامد آن باشند که علی و مازیار به ورزشگاه رفته باشند $P(A)=۰/۳ , P(B)=۰/۴$

$$P(A\mid B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)} \Rightarrow ۰/۰۸=\frac{P(A\cap B)}{۰/۴} \Rightarrow P(A\cap B)=۰/۰۳۲$$

$$P(A'\mid B')=\frac{P(A'\cap B')}{P(B')}=\frac{۱-P(A\cup B)}{۱-P(B)}$$

$$=\frac{۱-(P(A)+P(B)-P(A\cap B))}{۱-۰/۴}$$

$$=\frac{۱-(۰/۳+۰/۴-۰/۰۳۲)}{۰/۶}=\frac{۰/۳۳۲}{۰/۶}$$

$$\Rightarrow P(A'\mid B')=۰/۵۵۳$$

۱۲- آسان

$$\frac{P(B_i)P(A\mid B_i)}{P(A)}=\frac{P(B_i)\times\frac{P(A\cap B_i)}{P(B_i)}}{P(A)}=\frac{P(A\cap B_i)}{P(A)}=P(B_i\mid A)$$

۱۳- آسان

می‌دانیم $P(A\mid B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$

آ) $P(A'\mid A)=\frac{P(A'\cap A)}{P(A)}=\frac{P(\varnothing)}{P(A)}=\frac{۰}{P(A)}=۰$

ب) $P(A\cup B\mid A)=\frac{P(\overbrace{(A\cup B)\cap A}^{\text{جذب}})}{P(A)}=\frac{P(A)}{P(A)}=۱$

پ) $P(A\mid A\cap B)=\frac{P(A\cap(A\cap B))}{P(A\cap B)}=\frac{P((A\cap A)\cap B)}{P(A\cap B)}$

$$=\frac{P(A\cap B)}{P(A\cap B)}=۱$$

ت) می‌دانیم $A\subseteq B$ باشد آنگاه $A\cap B=A$

$$P(B\mid A)=\frac{P(B\cap A)}{P(A)}=\frac{P(A)}{P(A)}=۱$$

۱۴- دشوار

$$P(A'\mid B)=\frac{۱}{۳} \Rightarrow \frac{P(A'\cap B)}{P(B)}=\frac{۱}{۳} \Rightarrow \frac{P(B-A)}{P(B)}=\frac{۱}{۳}$$

$$\Rightarrow \frac{P(B)-P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{۱}{۳}$$

$$\Rightarrow \frac{P(B)}{P(B)}-\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{۱}{۳} \Rightarrow ۱-P(A\mid B)=\frac{۱}{۳} \Rightarrow P(A\mid B)=\frac{۲}{۳}$$

$$P(B'\mid A)=\frac{۲}{۵} \Rightarrow \frac{P(A\cap B')}{P(A)}=\frac{۲}{۵} \Rightarrow \frac{P(A-B)}{P(A)}=\frac{۲}{۵}$$

$$\Rightarrow \frac{P(A)-P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{۲}{۵}$$

$$\frac{P(A)}{P(A)}-\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{۲}{۵} \Rightarrow ۱-P(B\mid A)=\frac{۲}{۵} \Rightarrow P(B\mid A)=\frac{۳}{۵}$$

$$P(A\mid B)+P(B\mid A)=\frac{۲}{۳}+\frac{۳}{۵}=\frac{۱۰+۹}{۱۵}=\frac{۱۹}{۱۵}$$

نکته‌ای که از این تمرین آموختیم

$$P(A'\mid B)=۱-P(A\mid B)$$

$$P(B'\mid A)=۱-P(B\mid A)$$

۱۵- دشوار

$$P(A\mid B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)} \Rightarrow P(A\cap B)=P(B)\times P(A\mid B)=\frac{۵}{۱۶}\times\frac{۲}{۳}$$

$$\Rightarrow P(A\cap B)=\frac{۵}{۲۴}$$

$$P(B\mid A')=\frac{P(B\cap A')}{P(A')}=\frac{P(B-A)}{۱-P(A)}=\frac{P(B)-P(A\cap B)}{۱-P(A)}$$

$$\Rightarrow \frac{۱}{۵}=\frac{\frac{۵}{۱۶}-\frac{۵}{۲۴}}{۱-P(A)} \Rightarrow ۱-P(A)=\frac{۲۵}{۱۶}-\frac{۲۵}{۲۴}$$

$$\Rightarrow -P(A)=\frac{۷۵-۵۰-۴۸}{۴۸} \Rightarrow P(A)=\frac{۲۳}{۴۸}$$

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=\frac{۲۳}{۴۸}+\frac{۵}{۱۶}-\frac{۵}{۲۴}$$

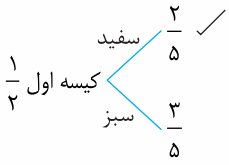
$$=\frac{۲۳+۱۵-۱۰}{۴۸}=\frac{۲۸}{۴۸}=\frac{۷}{۱۲}$$

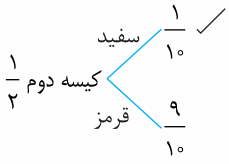
۱۶- آسان

۱) $\{۱\},\{۲\},\{۳\}$ ۲) $\{۱\},\{۲,۳\}$ ۳) $\{۲\},\{۱,۳\}$

۴) $\{۳\},\{۱,۲\}$ ۵) $\{۱,۲,۳\}$

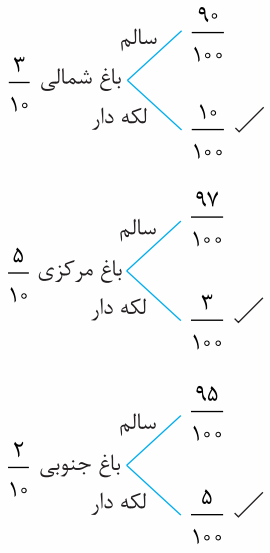
۱۷- آسان





$$P(\text{سفید})=\frac{۱}{۲}\times\frac{۲}{۵}+\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۱۰}=\frac{۱}{۵}+\frac{۱}{۲۰}=\frac{۵}{۲۰}=\frac{۱}{۴}$$

۱۸- متوسط

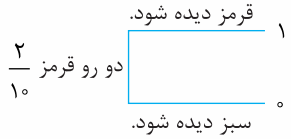


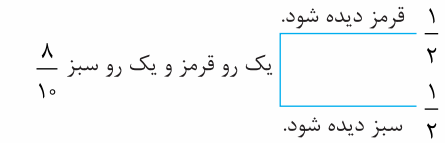
$$P(\text{لکه دار}) = \frac{۳}{۱۰}\times\frac{۱۰}{۱۰۰}+\frac{۵}{۱۰}\times\frac{۳}{۱۰۰}+\frac{۲}{۱۰}\times\frac{۵}{۱۰۰}=\frac{۳۰+۱۵+۱۰}{۱۰۰} \Rightarrow$$

$$P(\text{لکه دار}) = ۰/۰۵۵$$

۱۹- متوسط

اگر **A** پیشامد آن باشد که رنگ قرمز دیده شود و **B** پیشامد آن باشد هر دو رو کارت قرمز باشد، داریم:



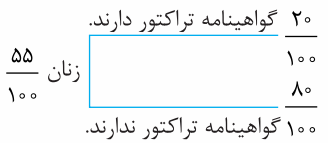


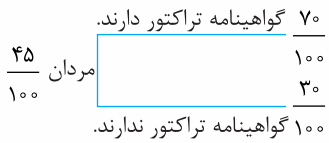
$$P(A) = \frac{۲}{۱۰}\times۱+\frac{۸}{۱۰}\times\frac{۱}{۲}=\frac{۱}{۵}+\frac{۲}{۵}=\frac{۳}{۵}$$

$$P(A\cap B) = \frac{۲}{۱۰}\times۱=\frac{۱}{۵}$$

$$P(B\mid A) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{\frac{۱}{۵}}{\frac{۳}{۵}}=\frac{۱}{۳}$$

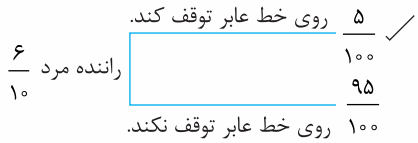
۲۰- متوسط

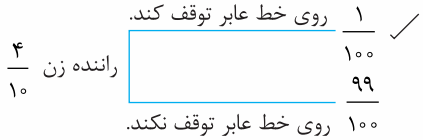




$$P(A = \text{گواهی نامه تراکتور دارند}) = \frac{۵۵}{۱۰۰}\times\frac{۲۰}{۱۰۰}+\frac{۴۵}{۱۰۰}\times\frac{۷۰}{۱۰۰}=\frac{۱۱۰+۳۱۵}{۱۰۰۰} \Rightarrow P(A) = ۰/۴۲۵$$

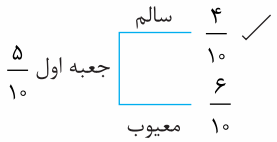
۲۱- متوسط

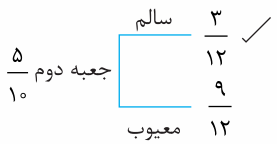




$$P(A = \text{روی خط عابر توقف کند}) = \frac{۶}{۱۰}\times\frac{۵}{۱۰۰}+\frac{۴}{۱۰}\times\frac{۱}{۱۰۰}=۰/۰۳۴$$

۲۲- متوسط





$$P(A = \text{معیوب}) = \frac{۵}{۱۰}\times\frac{۴}{۱۰}+\frac{۵}{۱۰}\times\frac{۳}{۱۲}=\frac{۱}{۵}+\frac{۱}{۸}=\frac{۸+۵}{۴۰}$$

$$\Rightarrow P(A) = \frac{۱۳}{۴۰}$$

۲۳- متوسط

اگر $n(S)$ تعداد کل واجدین شرایط و $n(A)$, $n(B)$ به ترتیب تعداد واجدین شرایط از شهرهای **A** و **B** باشند، پس $n(A)=۳n(B)$ است و داریم

$$n(A)+n(B)=n(S)\Rightarrow ۴n(B)=n(S)\Rightarrow \frac{n(B)}{n(S)}=\frac{۱}{۴},\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۳}{۴}$$

بنابراین احتمال این که فرد انتخاب شده بـه ترتیـب از شـهر **A** و **B** باشـد $\frac{۳}{۴}$ و $\frac{۱}{۴}$ است.

$(\frac{۳}{۴})$ A واجد شرایط شهر
- $\frac{۱}{۲}$ رای دهد. ✓
- $\frac{۱}{۲}$ رای ندهد.

$(\frac{۱}{۴})$ B واجد شرایط شهر
- $\frac{۸}{۱۰}$ رای دهد. ✓
- $\frac{۲}{۸}$ رای ندهد.

$$P(\text{رای دهد})=\frac{۳}{۴}\times\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۴}\times\frac{۸}{۱۰}=\frac{۳}{۸}+\frac{۱}{۵}=\frac{۱۵+۸}{۴۰}\Rightarrow$$

$$P(\text{رای دهد})=\frac{۲۳}{۴۰}$$

$$P(\text{از شهر A}\mid\text{رای دهنده})=\frac{P(\text{از شهر A})P(\text{رای دهنده}\mid\text{از شهر A})}{P(\text{رای دهنده})}$$

$$=\frac{\frac{۳}{۴}\times\frac{۱}{۲}}{\frac{۲۳}{۴۰}}=\frac{\frac{۳}{۸}}{\frac{۲۳}{۴۰}}=\frac{۱۵}{۲۳}$$

۲۴- متوسط

واکسن زده $\frac{۹}{۱۰}$
- مبتلا به بیماری شده $\frac{۲}{۱۰۰۰}$ ✓
- مبتلا به بیماری نشده $\frac{۹۹۸}{۱۰۰۰}$

واکسن نزده $\frac{۱}{۱۰}$
- مبتلا به بیماری شده $\frac{۱}{۱۰}$ ✓
- مبتلا به بیماری نشده $\frac{۹}{۱۰}$

$$P(\text{مبتلا به بیماری})=\frac{۹}{۱۰}\times\frac{۲}{۱۰۰۰}+\frac{۱}{۱۰}\times\frac{۱}{۱۰}=\frac{۱۸+۱۰۰}{۱۰۰۰۰}$$

$$\Rightarrow P(\text{مبتلا به بیماری})=۰/۰۱۱۸$$

۲۵- متوسط

خانم اکبری $\frac{۲}{۱۰}$
- بی‌غلط $\frac{۹}{۱۰}$
- غلط‌دار $\frac{۱}{۱۰}$ ✓

خانم برنا $\frac{۳}{۱۰}$
- بی‌غلط $\frac{۹۵}{۱۰۰}$
- غلط‌دار $\frac{۵}{۱۰۰}$ ✓

خانم چمنی $\frac{۵}{۱۰}$
- بی‌غلط $\frac{۹۹}{۱۰۰}$
- غلط‌دار $\frac{۱}{۱۰۰}$ ✓

$$P(\text{غلط داشته باشد}=A)=\frac{۲}{۱۰}\times\frac{۱}{۱۰}+\frac{۳}{۱۰}\times\frac{۵}{۱۰۰}+\frac{۵}{۱۰}\times\frac{۱}{۱۰۰}=\frac{۲۰+۱۵+۵}{۱۰۰۰}$$

$$\Rightarrow P(A)=۰/۰۴$$

اگر پیشامد این که کار نسخه‌خوانی خانم اکبری دارای غلـط باشـد را **B** فـرض کنیم داریم

$$P(B\mid A)=\frac{P(B).P(A\mid B)}{P(A)}=\frac{\frac{۲}{۱۰}\times\frac{۱}{۱۰}}{۰/۰۴}=\frac{۰/۰۲}{۰/۰۴}=۰/۵$$

۲۶- دشوار

کارت
- شماره ۱ $\frac{۱}{۴}$ دو بار رو آید. ۰
- شماره ۲ $\frac{۱}{۴}$ دو بار رو آید. $\frac{۱}{۴}$
- شماره ۳ $\frac{۱}{۴}$ دو بار رو آید. $\frac{\binom{۳}{۲}}{۸}=\frac{۳}{۸}$
- شماره ۴ $\frac{۱}{۴}$ دو بار رو آید. $\frac{\binom{۴}{۲}}{۱۶}=\frac{۳}{۸}$

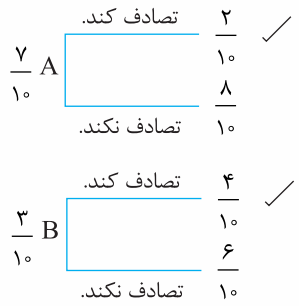
$$P(\text{شماره کارت ۳ باشد}\mid\text{۲ بار رو آید})$$

$$=\frac{P(\text{شماره کارت ۳ باشد})P(\text{۲ بار رو آید}\mid\text{شماره کارت ۳ باشد})}{P(\text{۲ بار رو آید})}$$

$$=\frac{\frac{۱}{۴}\times\frac{۳}{۸}}{\frac{۱}{۴}\times۰+\frac{۱}{۴}\times\frac{۱}{۴}+\frac{۱}{۴}\times\frac{۳}{۸}+\frac{۱}{۴}+\frac{۳}{۸}}=\frac{\frac{۳}{۳۲}}{\frac{۸}{۳۲}}=\frac{۳}{۸}$$

۲۷- متوسط

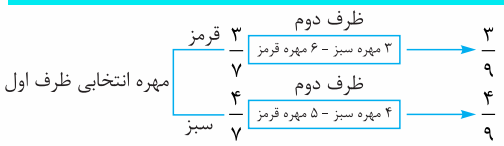
اگر **A** و **B** پیشامد بیمه‌گذاران کم خطر و پرخطر و **C** پیشامد تصادف کردن باشد، داریم:



$$P(C)=\frac{۷}{۱۰}\times\frac{۲}{۱۰}+\frac{۳}{۱۰}\times\frac{۴}{۱۰}\Rightarrow P(C)=۰/۲۶$$

$$P(B|C)=\frac{P(C)P(C|B)}{P(C)}=\frac{۰/۳\times۰/۴}{۰/۲۶}=\frac{۰/۱۲}{۰/۲۶}=\frac{۶}{۱۳}$$

۲۸- دشوار



$$P(\text{سبز})=\frac{۳}{۷}\times\frac{۳}{۹}+\frac{۴}{۷}\times\frac{۴}{۹}=\frac{۹+۱۶}{۶۳}=\frac{۲۵}{۶۳}$$

۲۹- دشوار

فرض کنیم ماکزیمم و مینیمم مجموعه $\{P(A|B_۱),P(A|B_۲),...,P(A|B_n)\}$ به ترتیب $P(A|B_t)$, $P(A|B_s)$ باشد. از قانون احتمال کل $P(A)$ را محاسبه می‌کنیم.

$$P(A)=P(B_۱)P(A|B_۱)+P(B_۲)P(A|B_۲)+...+P(B_n)P(A|B_n)$$

می‌دانیم

$$P(B_۱)P(A|B_t)\le P(B_۱)P(A|B_۱)\le P(B_۱)P(A|B_s)$$
$$P(B_۲)P(A|B_t)\le P(B_۲)P(A|B_۲)\le P(B_۲)P(A|B_s)$$
$$\vdots$$
$$P(B_n)P(A|B_t)\le P(B_n)P(A|B_n)\le P(B_n)P(A|B_s)$$

جمع می کنیم

$$:P(A|B_t)\underbrace{(P(B_۱)+P(B_۲)+...+P(B_n))}_{۱}$$
$$\le\underbrace{P(B_۱)P(A|B_۱)+P(B_۲)P(A|B_۲)+...+P(B_n)P(A|B_n)}_{P(A)}\le$$
$$P(A|B_s)\underbrace{(P(B_۱)+P(B_۲)+...+P(B_n))}_{۱}$$

$$P(A|B_t)\le P(A)\le P(A|B_s)\Rightarrow \min\{P(A|B_۱)...P(A|B_n)\}\le P(A)$$
$$\le\max\{P(A|B_۱),...,P(A|B_n)\}$$

۳۰- دشوار

یادآوری: $\frac{a}{b}\le\frac{c}{d}\Rightarrow\frac{a}{b}\le\frac{a+c}{b+d}\le\frac{c}{d}$

$$P(A|B)\le P(A|C)\Rightarrow\frac{P(A\cap B)}{P(B)}\le\frac{P(A\cap C)}{P(C)}$$
$$\Rightarrow\frac{P(A\cap B)}{P(B)}\le\frac{P(A\cap B)+P(A\cap C)}{P(B)+P(C)}\le\frac{P(A\cap C)}{P(C)}$$
$$\xrightarrow{\text{ناسازگار }C,B}P(|B)\le\frac{P(A\cap B)\cup(A\cap C)}{P(B\cup C)}\le P(A|C)$$
$$P(A|B)\le\frac{P(A\cap(B\cup C))}{P(B\cup C)}\le P(A|C)$$
$$\Rightarrow P(A|B)\le P(A|B\cup C)\le P(A|C)$$

۱- گزینه «۳» آسان

می‌دانیم ۴ حالت $\{(۶,۶),(۶,۳),(۳,۶),(۳,۳)\}$ امکان رخ داده‌اند، ندارند پس از فضای نمونه‌ای آنها را کم می‌کنیم.

$$n(S)=۶\times۶-۴=۳۲$$
$$A=\{(۱,۲),(۱,۵),(۲,۱),(۲,۴),(۴,۲),(۴,۵),(۵,۱),(۵,۴)\}$$
$$\Rightarrow n(A)=۸$$
$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۸}{۳۲}=\frac{۱}{۴}$$

۲- گزینه «۳» آسان

فضای نمونه‌ای کاهش می‌یابد و به صورت $S_۱=\{۲,۴,۶\}$ می‌شود. $n(S_۱)=۳$

$$A=\{۴,۶\}\Rightarrow n(A)=۲$$
$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۲}{۳}$$

۳- گزینه «۳» آسان

فضای نمونه‌ای کاهش می‌یابد و به صورت $S_۱=\{۱,۲,۴,۵\}$ می‌شود $n(S_۱)=۴$

$$A=\{۲\}\Rightarrow n(A)=۱$$
$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۱}{۴}$$

۴- گزینه «۱» آسان

می‌دانیم امکان این که $\{(۶,۶),(۶,۵),(۶,۴),(۵,۶),(۵,۵),(۴,۶)\}$ ظاهر شود وجود ندارد پس $n(S)=۶\times۶-۶=۳۰$

$$A=\{(۱,۱),(۱,۳),(۱,۵),(۳,۱),(۳,۳),(۳,۶),(۵,۱),(۵,۳)\}$$
$$\Rightarrow n(A)=۸$$

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۸}{۳۰}=\frac{۴}{۱۵}$$

۵- گزینه «۲» آسان

فضای نمونه‌ای را کاهش می‌دهیم

$$S=\{(۱,۱),(۱,۲),(۱,۳),(۱,۴),(۲,۱),(۲,۲),(۲,۳),(۳,۱),(۳,۲),(۴,۱)\} \Rightarrow n(S)=۱۰$$

$$A=\{(۱,۲),(۲,۱),(۲,۳),(۳,۲)\} \Rightarrow n(A)=۴$$

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۴}{۱۰}=\frac{۲}{۵}$$

۶- گزینه «۳» آسان

فضای نمونه‌ای را فقط به پرتاب دوم و چهارم کاهش می‌دهیم. (پرتاب چهارم و پرتاب دوم)

$$S=\{(ر،ر)،(پ،ر)،(ر،پ)،(پ،پ)\} \Rightarrow n(S)=۴$$

$$A=\{(پ،پ)\} \Rightarrow n(A)=۱$$

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۱}{۴}$$

۷- گزینه «۲» متوسط

$$P(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)} \Rightarrow ۰/۷=\frac{P(A\cap B)}{۰/۲} \Rightarrow P(A\cap B)=۰/۱۴$$

$$P(A'\cap B')=P(A\cup B)'=۱-P(A\cup B)$$
$$=۱-(P(A)+P(B)-P(A\cap B))=$$
$$۱-(۰/۲+۰/۲۲-۰/۱۴)=۰/۷۲$$

$$P(A')=۱-P(A)=۱-۰/۲=۰/۸$$

$$P(B'|A')=\frac{P(A'\cap B')}{P(A')}=\frac{۰/۷۲}{۰/۸}=۰/۹$$

۸- گزینه «۴» آسان

$$A\subset B \Rightarrow P(A\cap B)=P(A)=\frac{۱}{۳}$$

$$P(B\cap A')=P(B-A)=P(B)-P(A\cap B)=\frac{۳}{۴}-\frac{۱}{۳}=\frac{۵}{۱۲}$$

$$P(B|A')=\frac{P(B\cap A')}{P(A')}=\frac{\frac{۵}{۱۲}}{۱-\frac{۱}{۳}}=\frac{\frac{۵}{۱۲}}{\frac{۲}{۳}}=\frac{۱۵}{۲۴}=\frac{۵}{۸}$$

۹- گزینه «۳» متوسط

$$P(a)+P(b)+P(c)=\frac{۲}{۳} \Rightarrow \frac{۱}{۴}+P(b)+P(c)=\frac{۲}{۳}$$

$$\Rightarrow P(b)+P(c)=\frac{۲}{۳}-\frac{۱}{۴} \Rightarrow P(\{b,c\})=\frac{۵}{۱۲}$$

$$P(\{b,c,e\}|\{a,b,c\})=\frac{P(\{b,c,e\}\cap\{a,b,c\})}{P(\{a,b,c\})}$$

$$=\frac{P\{b,c\}}{\frac{۲}{۳}}=\frac{\frac{۵}{۱۲}}{\frac{۲}{۳}}=\frac{۱۵}{۲۴}=\frac{۵}{۸}$$

۱۰- گزینه «۴» دشوار

a_k	$a_۱$	$a_۲$	$a_۳$	$a_۴$	$a_۵$	$a_۶$
$P(a_k)$	$\frac{۲}{a}$	$\frac{۱}{a}$	۰	$\frac{۱}{a}$	$\frac{۲}{a}$	$\frac{۳}{a}$

$$P(a_۱)+P(a_۲)+P(a_۳)+P(a_۴)+P(a_۵)+P(a_۶)=۱$$

$$\Rightarrow \frac{۲}{a}+\frac{۱}{a}+۰+\frac{۱}{a}+\frac{۲}{a}+\frac{۳}{a}=۱ \Rightarrow \frac{۹}{a}=۱ \Rightarrow a=۹$$

$$P(\{a_۲,a_۴\}|\{a_۲,a_۳,a_۴\})=\frac{P(\{a_۲,a_۴\}\cap\{a_۲,a_۳,a_۵\})}{P(\{a_۲,a_۳,a_۵\})}$$

$$=\frac{P(a_۲)}{P(a_۲)+P(a_۳)+P(a_۵)}=\frac{\frac{۱}{a}}{\frac{۱}{a}+۰+\frac{۲}{a}}=\frac{\frac{۱}{a}}{\frac{۳}{a}}=\frac{۱}{۳}$$

۱۱- گزینه «۱» متوسط

اگر احتمال شرکت کردن امید و بهروز در مسابقه را با $P(A)$ ، $P(B)$ نشان دهیم: $P(A)=۰/۶$ ، $P(B)=۰/۳$

$$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)} \Rightarrow ۰/۵=\frac{P(A\cap B)}{۰/۳} \Rightarrow P(A\cap B)=۰/۱۵$$

$$P(A|B')=\frac{P(A\cap B')}{P(B')}=\frac{P(A-B)}{P(B')}=\frac{P(A)-P(A\cap B)}{۱-P(B)}$$

$$=\frac{۰/۶-۰/۱۵}{۱-۰/۳}=\frac{۰/۴۵}{۰/۷}=\frac{۹}{۱۴}$$

۱۲- گزینه «۱» دشوار

فضای نمونه‌ای را کاهش می‌دهیم، در پرتاب ۳ تاس در نصف حالات مجموع ۳ تاس فرد و در نصف دیگر حالات مجموع ۳ تاس زوج است.

$$n(S)=\frac{۱}{۲}\times۶^۳=۱۰۸$$

متمم این پیشامد آن است که عدد ۲ ظاهر نشود که ۲ حالت داریم یا هر سه عدد فرد $\{۱,۳,۵\}$ هستند و یا دو عدد زوج $|\{۴,۶\}$ و یک عدد فرد $\{۱,۳,۵\}$ است

$$n(A')=۳\times۳\times۳+\binom{۳}{۱}\times۳\times۲\times۲=۲۷+۳۶=۶۳$$

$$P(A')=\frac{n(A')}{n(S)}=\frac{۶۳}{۱۰۸}=\frac{۷}{۱۲}$$

$$P(A)=۱-P(A')=۱-\frac{۷}{۱۲}=\frac{۵}{۱۲}$$

۱۳- گزینه «۴» آسان

زمانی مجموع دو کارت زوج است که هر دوکارت زوج و یا هر دوکارت فرد باشند، پس فضای نمونه ای را کاهش می‌دهیم

زوج: ۴ → ۲ یا ۰
فرد: ۵ → ۰ یا ۲

$$n(S)=\binom{4}{2}+\binom{5}{2}=6+10=16$$

$$n(A)=\binom{5}{2}=10$$

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{10}{16}=\frac{5}{8}$$

۱۴- گزینه «۲» متوسط

ابتدا فضای نمونه‌ای را کاهش می‌دهیم

۴ سفید → ۰ یا ۳ یا ۴
۵ سیاه → ۴ یا ۱ یا ۰

$$n(S)=\binom{4}{0}\binom{5}{4}+\binom{4}{1}\binom{5}{3}+\binom{4}{3}\binom{5}{1}+\binom{4}{4}\binom{5}{5}=5+40+20+1=66$$

تعداد حالاتی که مهره‌های سفید بیشتر از تعداد مهره‌ها سیاه باشد را محاسبه می‌کنیم

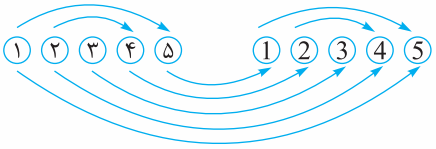
۴ سفید → ۳ یا ۴
۵ سیاه → ۱ یا ۰

$$n(A)=\binom{4}{3}\binom{5}{1}+\binom{4}{4}\binom{5}{0}=4\times5+1=21$$

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{21}{66}=\frac{7}{22}$$

۱۵- گزینه «۲» دشوار

مهره‌های سبز را با شماره‌های فارسی و مهره‌های زرد را با شماره‌های انگلیسی مشخص می‌کنیم.



فضای نمونه‌ای را کاهش می‌دهیم

$$S=\{(۱,۵),(۱,5),(۲,۴),(۲,4),(۳,3),(۴,2),(۵,1),(1,5),(2,4)\}\Rightarrow n(S)=9$$

$$A=\{(۱,۵),(۲,۴),(1,5),(2,4)\}\Rightarrow n(A)=4$$

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{4}{9}$$

۱۶- گزینه «۱» متوسط

حتماً لامپ‌های اول و دوم باید سالم و لامپ سوم معیوب است و بنا به قانون ضرب احتمال‌ها داریم:

$$P(A\cap B\cap C)=P(A)\times P(B\mid A)\times P(C\mid A\cap B)$$

A پیشامد آن است که لامپ اول سالم باشد $P(A)=\frac{6}{8}=\frac{3}{4}$

B پیشامد آن است که لامپ دوم سالم باشد و چون بار اول یک لامپ سالم خارج کرده‌ایم پس در جعبه ۵ لامپ سالم و ۲ لامپ معیوب داریم

$$P(B\mid A)=\frac{5}{7}$$

C پیشامد آن است که لامپ سوم معیوب باشد و چون ۲ لامپ سالم از جعبه خارج شده بنابراین داخل جعبه ۴ لامپ سالم و دو لامپ معیوب داریم

$$P(C\mid A\cap B)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$$

$$P(A\cap B\cap C)=\frac{3}{4}\times\frac{5}{7}\times\frac{1}{3}=\frac{5}{28}$$

۱۷- گزینه «۴» آسان

$$P(A\cap B)=P(A)\times P(B\mid A)$$

A پیشامد این که اولین مهره سفید باشد $P(A)=\frac{3}{8}$

B پیشامد این که دومین مهره سیاه باشد و چون اولین مهره سفید خارج شده است داخل جعبه ۲ مهره سفید و ۵ مهره سیاه داریم $P(B\mid A)=\frac{5}{7}$

$$P(A\cap B)=\frac{3}{8}\times\frac{5}{7}=\frac{15}{56}$$

۱۸- گزینه «۴» متوسط

$$P(A\cap B\cap C)=P(A\cap B)=P(A)\times P(B\mid A)\times P(C\mid A\cap B)$$

A پیشامد آن باشد که پرتاب اولش گل شود و چون روحیه او خوب است $P(A)=0/8$

B پیشامد آن باشد که پرتاب دومش گل نشود و چون روحیه او از گل شدن پرتاب اول خوب است $P(B\mid A)=0/2$

C پیشامد آن باشد که پرتاب سوم گل شود و چون روحیه او از گل نشدن پرتاب دوم بعد است پس $P(C\mid A\cap B)=0/6$

$$P(A\cap B\cap C)=0/8\times0/2\times0/6=0/096$$

۱۹- گزینه «۴» متوسط

رو باید در پرتاب اول یا سوم و یا پنجم ظاهر شود

$$P(\text{رو در پرتاب اول}) = \frac{۱}{۲}$$

$$P(\text{اولین رو در پرتاب سوم}) = P(\text{رو}) \times P(\text{پشت}) \times P(\text{پشت}) = \frac{۱}{۲} \times \frac{۱}{۲} \times \frac{۱}{۲} = \frac{۱}{۸}$$

$$P(\text{اولین رو در پرتاب پنجم}) = P(\text{رو}) \times P(\text{پشت}) \times P(\text{پشت}) \times P(\text{پشت}) \times P(\text{پشت}) = \frac{۱}{۲} \times \frac{۱}{۲} \times \frac{۱}{۲} \times \frac{۱}{۲} \times \frac{۱}{۲} = \frac{۱}{۳۲}$$

$$P(A) = P(\text{اولین رو در پرتاب اول}) + P(\text{اولین رو در پرتاب سوم}) + P(\text{اولین رو در پرتاب پنجم})$$

$$= \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۸} + \frac{۱}{۳۲} = \frac{۱۶+۴+۱}{۳۲} = \frac{۲۱}{۳۲}$$

۲۰- گزینه «۲» متوسط

روش اول:

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B \mid A)$$

اگر **A** پیشامد آن باشد که فرزند اول دوقلو نباشد $P(A) = \frac{۱}{۲}$

اگر **B** پیشامد آن باشد که فرزند اول دختر باشد $P(B \mid A) = \frac{۱}{۲}$

$$P(A \cap B) = \frac{۱}{۲} \times \frac{۱}{۲} = \frac{۱}{۴}$$

روش دوم:

اگر دو فرزند دوقلو را **x** فرض کنیم

$$S = \{(x , پ) , (x , د) ، (پ , x) , (د , x)\} \Rightarrow n(S) = ۴$$

$$A = \{(د , x)\} \Rightarrow n(A) = ۱$$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{۱}{۴}$$

۲۱- گزینه «۳» آسان

مجموعه **A** به دو مجموعه $B = \{O , O\}$ ، $C = \{O , O , O\}$ افراز می‌شود، ابتدا باید ۲ عضو از ۵ عضو مجموعه **A** را انتخاب کرده و داخل مجموعه **B** قرار دهیم: حال باید ۳ عضو باقی‌مانده در مجموعه **A** را در مجموعه **C** قرار دهیم پس داریم:

$$\text{تعداد افرازها} = \binom{۵}{۲}\binom{۳}{۳} = ۱۰ \times ۱ = ۱۰$$

۲۲- گزینه «۴» متوسط

تصور کنیم مجموعه **A** به ۳ مجموعه ۲ عضوی D , C , B افراز شود، ابتدا باید ۲ عضو از ۶ عضو مجموعه **A** را انتخاب کرده و داخل مجموعه **B** قرار دهیم حال باید از ۴ عضو باقی‌مانده در مجموعه **A**، ۲ عضو را انتخاب کرده و در مجموعه **C** قرار دهیم و در انتها هر ۲ عضو باقی‌مانده در مجموعه **A** را در مجموعه **D** قرار دهیم

$$\binom{۶}{۲}\binom{۴}{۲}\binom{۲}{۲} = ۱۵ \times ۶ \times ۱ = ۹۰$$

یکی از افرازها به صورت $B = \{۱ , ۲\} , C = \{۳ , ۴\} , D = \{۵ , ۶\}$ است این افراز با افراز $B = \{۳ , ۴\} , C = \{۱ , ۲\} , D = \{۵ , ۶\}$ تفاوت ندارد پس جواب به دست آمده را باید تقسیم بر تعداد جایگشت‌های D , C , B (یعنی $۳!$) کنیم.

$$\text{تعداد افرازها} = \frac{۹۰}{۳!} = \frac{۹۰}{۶} = ۱۵$$

۲۳- گزینه «۳» متوسط

$$\{-\} , \{-\} , \{-\} , \{-\} \Rightarrow \frac{\binom{۴}{۱}\binom{۳}{۱}\binom{۲}{۱}\binom{۱}{۱}}{۴!} = ۱$$

$$\{- , -\} , \{-\} , \{-\} \Rightarrow \frac{\binom{۴}{۲}\binom{۲}{۱}\binom{۱}{۱}}{۲!} = \frac{۶ \times ۲ \times ۱}{۲} = ۶$$

$$\{- , -\} , \{- , -\} \Rightarrow \frac{\binom{۴}{۲}\binom{۲}{۲}}{۲!} = \frac{۶ \times ۱}{۲} = ۳$$

$$\{- , - , -\} , \{-\} \Rightarrow \binom{۴}{۳}\binom{۱}{۱} = ۴$$

$$\{- , - , - , -\} \Rightarrow \binom{۴}{۴} = ۱$$

$$\text{تعداد کل افرازها} = ۱ + ۶ + ۳ + ۴ + ۱ = ۱۵$$

نکته: به علت زیاد بودن محاسبات تعداد کل افرازها بهتر است جدول زیر را حفظ کنیم

تعداد اعضای مجموعه	۲	۳	۴	۵	۶
تعداد افرازها	۲	۵	۱۵	۵۲	۲۰۳

۲۴- گزینه «۳» آسان

$$\text{تعداد افرازها} = \frac{\binom{۸}{۳} \times \binom{۵}{۳}}{۲!} \times \binom{۲}{۲} = \frac{۵۶ \times ۱۰}{۲} \times ۱ = ۲۸۰$$

۲۵- گزینه «۴» متوسط

نباید a باشد.

$$\text{تعداد افرازها} = \binom{۶}{۱} \times \frac{\binom{۶}{۳} \times \binom{۳}{۳}}{۲!} = ۶ \times \frac{۲۰ \times ۱}{۲} = ۶۰$$

↓

همه اعضا به غیر از a

۲۶- گزینه «۲» آسان

مجموعه A، ۴ عضوی است و باید تعداد افرازهای مجموعه A که فاقد مجموعه تک عضوی را به دست آورید.

تعداد افرازهای به‌صورت یک مجموعه ۴ عضوی $\Rightarrow \binom{4}{4}=1$

تعداد افرازها به صورت دو مجموعه ۲ عضوی $\Rightarrow \frac{\binom{4}{2}\binom{2}{2}}{2!}=3$

تعداد افرازها $=1+3=4$

۲۷- گزینه «۴» آسان

اگر بخواهیم یک مجموعه ۴ عضوی را به ۳ مجموعه افراز کنیم، فقط به صورت مجموعه ۱، ۱، ۲ عضوی می توان نوشت

تعداد افرازها $=\frac{\binom{4}{1}\binom{3}{1}}{2!}\times\binom{2}{2}=\frac{4\times3}{2}\times1=6$

۲۸- گزینه «۴» آسان

تعداد افرازها با مجموعه‌های ۱ عضوی و ۴ عضوی $=\binom{5}{1}\binom{4}{4}=5\times1=5$

تعداد افرازها با مجموعه‌های ۱، ۲، ۲ عضوی $=\binom{5}{1}\times\frac{\binom{4}{2}\binom{2}{2}}{2!}=5\times\frac{6\times1}{2}=15$

مجموع افرازها $=5+15=20$

۲۹- گزینه «۱» آسان

می‌دانیم $A\cup B\cup C=N$ ، $B\cap C=A\cap C=A\cap B=\varnothing$ حال به بررسی گزینه‌ها می‌پردازیم

گزینه ۱ $\Rightarrow \begin{cases}21=7k \Rightarrow 21\notin A, 21\notin B \Rightarrow 21\in C\\ 13=7k-1 \Rightarrow 13\notin A, 13\notin B \Rightarrow 13\in C\end{cases}$

گزینه ۲ $\Rightarrow \begin{cases}23=7k+2 \Rightarrow 23\in A\\ 13\in C\end{cases}$

گزینه ۳ $\Rightarrow \begin{cases}21\in C\\ 32=7k-3 \Rightarrow 32\in B\end{cases}$

گزینه ۴ $\Rightarrow \begin{cases}23\in A\\ 32=7k-3 \Rightarrow 32\in B\end{cases}$

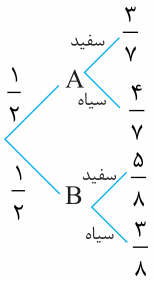
۳۰- گزینه «۲» دشوار

اگر $n(B)=x$ باشد $n(A)=2x$ است پس $n(S)=n(A)+n(B)=3x$

می‌باشد، بنابراین $P(A)=\frac{2}{3}, P(B)=\frac{1}{3}$ است.

۳۱- گزینه «۴» آسان

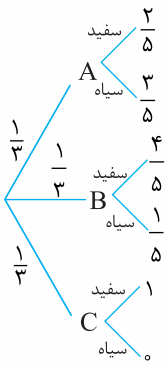
$$P(W)=\frac{1}{2}\times\frac{3}{7}+\frac{1}{2}\times\frac{5}{8}=\frac{3}{14}+\frac{5}{16}=\frac{24+35}{112}=\frac{59}{112}$$



۳۲- گزینه «۳» متوسط

$$P(W)=\frac{1}{3}\times\frac{2}{5}+\frac{1}{3}\times\frac{4}{5}+\frac{1}{3}\times1=\frac{2}{15}+\frac{4}{15}+\frac{1}{3}=\frac{2+4+5}{15}$$

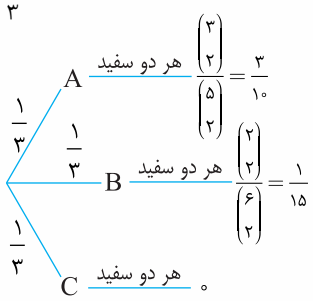
$$\Rightarrow P(w)=\frac{11}{15}$$

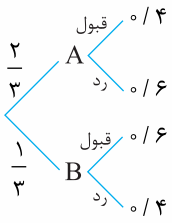


۳۳- گزینه «۱» متوسط

$$P(\text{هر دو سفید})=\frac{1}{3}\times\frac{3}{10}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{15}+\frac{1}{3}\times0 \Rightarrow$$

$$P(\text{هر دو سفید})=\frac{9+2}{90}=\frac{11}{90}$$





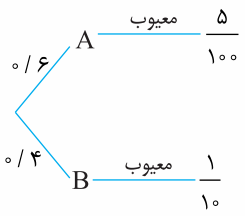
$$P(\text{قبول})=\frac{2}{3}\times\frac{4}{10}+\frac{1}{3}\times\frac{6}{10}=\frac{8+6}{30}=\frac{14}{30}=\frac{7}{15}$$

$$P(\text{قبول}\cap A)=\frac{2}{3}\times\frac{4}{10}=\frac{8}{30}=\frac{4}{15}$$

$$P(\text{قبول}\mid A)=\frac{P(\text{قبول}\cap A)}{P(\text{قبول})}=\frac{\frac{4}{15}}{\frac{7}{15}}=\frac{4}{7}=0/57$$

۳۴- گزینه «۳» آسان

$$P(\text{معیوب}) = \frac{۶}{۱۰}\times\frac{۵}{۱۰۰} + \frac{۴}{۱۰}\times\frac{۱}{۱۰} = \frac{۳}{۱۰۰} + \frac{۴}{۱۰۰} = ۰/۰۷$$

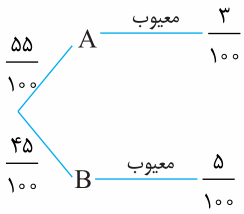


۳۵- گزینه «۱» متوسط

$$P(\text{معیوب}) = \frac{۵۵}{۱۰۰}\times\frac{۳}{۱۰۰} + \frac{۴۵}{۱۰۰}\times\frac{۵}{۱۰۰} = \frac{۳۳+۴۵}{۲۰۰۰} = \frac{۷۸}{۲۰۰۰}$$

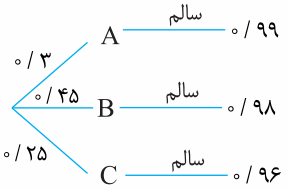
$$P(\text{معیوب} \cap A) = \frac{۵۵}{۱۰۰}\times\frac{۳}{۱۰۰} = \frac{۳۳}{۲۰۰۰}$$

$$P(A \mid \text{معیوب}) = \frac{P(A \cap \text{معیوب})}{P(\text{معیوب})} = \frac{\frac{۳۳}{۲۰۰۰}}{\frac{۷۸}{۲۰۰۰}} = \frac{۳۳}{۷۸} = \frac{۱۱}{۲۶}$$



۳۶- گزینه «۲» آسان

$$P(\text{سالم}) = ۰/۳\times۰/۹۹ + ۰/۴۵\times۰/۹۸ + ۰/۲۵\times۰/۹۶ = ۰/۹۷۸$$



۳۷- گزینه «۴» دشوار

فقط A قبول شود: $P(A \cap B' \cap C') = P(A)P(B')P(C')$

$$= \frac{۱}{۲}(۱-\frac{۱}{۳})(۱-\frac{۱}{۴}) = \frac{۱}{۲}\times\frac{۲}{۳}\times\frac{۳}{۴} = \frac{۱}{۴}$$

فقط B قبول شود: $P(A' \cap B \cap C') = P(A')P(B)P(C')$

$$= (۱-\frac{۱}{۲})\times\frac{۱}{۳}\times(۱-\frac{۱}{۴}) = \frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۳}\times\frac{۳}{۴} = \frac{۱}{۸}$$

فقط C قبول شود: $P(A' \cap B' \cap C) = P(A')P(B')P(C)$

$$= (۱-\frac{۱}{۲})(۱-\frac{۱}{۳})\times\frac{۱}{۴} = \frac{۱}{۲}\times\frac{۲}{۳}\times\frac{۱}{۴} = \frac{۱}{۱۲}$$

فقط یکی قبول شود: $P(A \cap B' \cap C') + P(A' \cap B \cap C') + P(A' \cap B' \cap C)$

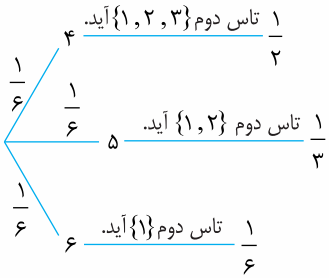
$$= \frac{۱}{۴} + \frac{۱}{۸} + \frac{۱}{۱۲} = \frac{۶+۳+۲}{۲۴} = \frac{۱۱}{۲۴}$$

$$P(A \mid \text{فقط یکی}) = \frac{P(A \cap \text{فقط یکی})}{P(\text{فقط یکی})} = \frac{\frac{۱}{۴}}{\frac{۱۱}{۲۴}} = \frac{۲۴}{۴۴} = \frac{۶}{۱۱}$$

۳۸- گزینه «۱» متوسط

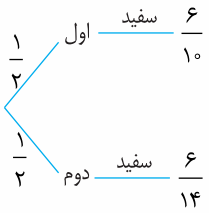
$$P(\text{مجموع دو تاس کمتر از ۸}) = \frac{۱}{۶}\times\frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۶}\times\frac{۱}{۳} + \frac{۱}{۶}\times\frac{۱}{۶} =$$

$$\frac{۳+۲+۱}{۳۶} = \frac{۶}{۳۶} = \frac{۱}{۶}$$



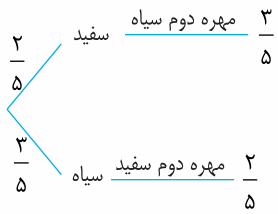
۳۹- گزینه «۲» آسان

$$P(\text{سفید}) = \frac{۱}{۲}\times\frac{۶}{۱۰} + \frac{۱}{۲}\times\frac{۶}{۱۴} = \frac{۳}{۱۰} + \frac{۳}{۱۴} = \frac{۲۱+۱۵}{۷۰} = \frac{۳۶}{۷۰} = \frac{۱۸}{۳۵}$$



۴۰- گزینه «۴» آسان

$$P(\text{فقط یکبار سفید}) = \frac{۲}{۵}\times\frac{۳}{۵} + \frac{۳}{۵}\times\frac{۲}{۵} = \frac{۱۲}{۲۵}$$

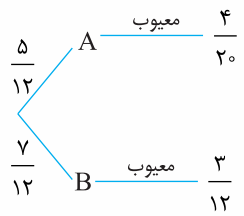


۴۱- گزینه «۲» دشوار

در جعبه جدید $n(A) = ۵$ ، $n(B) = ۷$ است و چون $n(S) = n(A) + n(B) = ۱۲$

است پس $P(A) = \frac{۵}{۱۲}$ ، $P(B) = \frac{۷}{۱۲}$ است

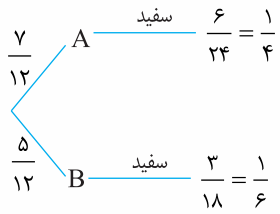
$$P(\text{معیوب}) = \frac{۵}{۱۲}\times\frac{۴}{۲۰} + \frac{۷}{۱۲}\times\frac{۳}{۱۲} = \frac{۱}{۱۲} + \frac{۷}{۴۸} = \frac{۴+۷}{۴۸} = \frac{۱۱}{۴۸}$$



۴۲- گزینه «۴» متوسط

در ظرف جدید $n(A)=۷$, $n(B)=۵$ است و چون $n(S)=n(A)+n(B)=۱۲$ است پس $P(A)=\frac{۷}{۱۲}$, $P(B)=\frac{۵}{۱۲}$ است.

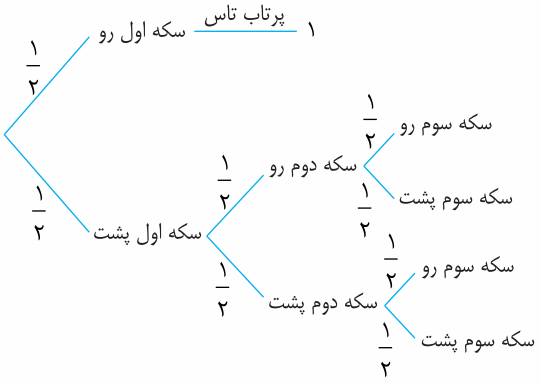
$$P(\text{سفید})=\frac{۷}{۱۲}\times\frac{۱}{۴}+\frac{۵}{۱۲}\times\frac{۱}{۶}=\frac{۷}{۴۸}+\frac{۵}{۷۲}=\frac{۲۱+۱۰}{۱۴۴}=\frac{۳۱}{۱۴۴}$$



۴۳- گزینه «۱» متوسط

$$P(\text{فقط یک سکه رو})=\frac{۱}{۲}\times۱+\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۲}\Rightarrow$$

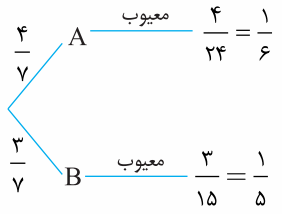
$$P(\text{فقط یک سکه رو})=\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۸}+\frac{۱}{۸}=\frac{۴+۱+۱}{۸}=\frac{۳}{۴}$$



۴۴- گزینه «۲» دشوار

در جعبه جدید $n(A)=۸$, $n(B)=۶$ است چون $n(S)=n(A)+n(B)=۱۴$ است پس $P(A)=\frac{۴}{۷}$, $P(B)=\frac{۳}{۷}$ است

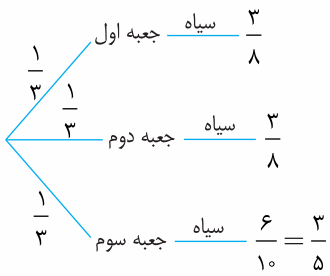
$$P(\text{معیوب})=\frac{۴}{۷}\times\frac{۱}{۶}+\frac{۳}{۷}\times\frac{۱}{۵}=\frac{۲}{۲۱}+\frac{۳}{۳۵}=\frac{۱۰+۹}{۱۰۵}=\frac{۱۹}{۱۰۵}$$



۴۵- گزینه «۱» متوسط

$$P(\text{سیاه})=\frac{۱}{۳}\times\frac{۳}{۸}+\frac{۱}{۳}\times\frac{۳}{۸}+\frac{۱}{۳}\times\frac{۳}{۵}=\frac{۱}{۸}+\frac{۱}{۸}+\frac{۱}{۵}\Rightarrow$$

$$P(\text{سیاه})=\frac{۵+۵+۸}{۴۰}=\frac{۱۸}{۴۰}=\frac{۹}{۲۰}$$



۴۶- گزینه «۳» دشوار

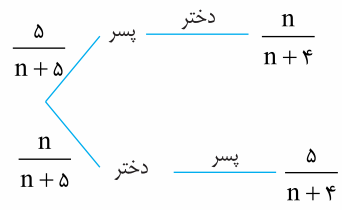
تعداد دانش‌آموزان دختر را $\mathbf{n}$ فرض می‌کنیم $(n>۵)$ بنابراین تعداد کل دانش‌آموزان $n+۵$ می‌شود

$$P(\text{غیر هم جنس})=\frac{۵}{n+۵}\times\frac{n}{n+۴}+\frac{n}{n+۵}\times\frac{۵}{n+۴}\Rightarrow\frac{۱۰}{۲۱}=\frac{۱۰n}{(n+۵)(n+۴)}$$

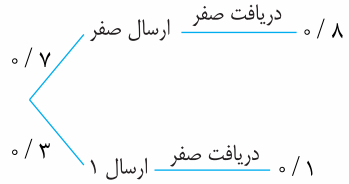
$$\Rightarrow ۲۱n=n^۲+۹n+۲۰\Rightarrow n^۲-۱۲n+۲۰=۰\Rightarrow(n-۲)(n-۱۰)=۰$$

$$\Rightarrow\begin{cases}n=۲ & \text{غ ق ق}\\ n=۱۰\end{cases}$$

تعداد کل دانش‌آموزان $=n+۵=۱۰+۵=۱۵$



۴۷- گزینه «۴» متوسط



$$P(\text{دریافت صفر})=۰/۷\times۰/۸+۰/۳\times۰/۱=۰/۵۹$$

$$P(\text{ارسال صفر}\cap\text{دریافت صفر})=۰/۷\times۰/۸=۰/۵۶$$

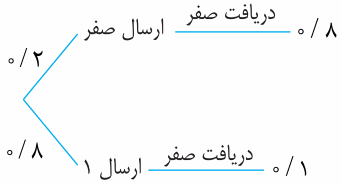
$$P(\text{ارسال صفر}\mid\text{دریافت صفر})=\frac{P(\text{ارسال صفر}\cap\text{دریافت صفر})}{P(\text{دریافت صفر})}=\frac{۰/۵۶}{۰/۵۹}=\frac{۵۶}{۵۹}$$

۴۸- گزینه «۲» متوسط

$P(\text{تصادف}) = ۰/۲ \times ۰/۶ + ۰/۸ \times ۰/۱ = ۰/۱۲ + ۰/۰۸ = ۰/۲$

$P(\text{پرخطر} \cap \text{تصادف}) = ۰/۲ \times ۰/۶ = ۰/۱۲$

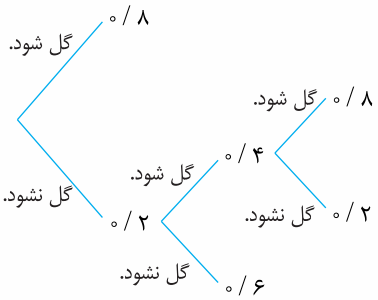
$P(\text{تصادف} \mid \text{پرخطر}) = \frac{P(\text{پرخطر} \cap \text{تصادف})}{P(\text{تصادف})} = \frac{۰/۱۲}{۰/۲} = ۰/۶$



۴۹- گزینه «۴» دشوار

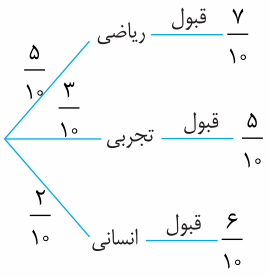
تیر اول شخص به خطا رفته است $P(A) = ۰/۲$ و در این حالت احتمال این که تیر دوم به هدف بنشیند $P(B \mid A) = ۰/۴$ و حالا احتمال این که تیر سوم هم به هدف بنشیند $P(C \mid A \cap B) = ۰/۸$ است پس

$P(A \cap B \cap C) = P(A)P(B \mid A)P(C \mid A \cap B) = ۰/۲ \times ۰/۴ \times ۰/۸ = ۰/۰۶۴$



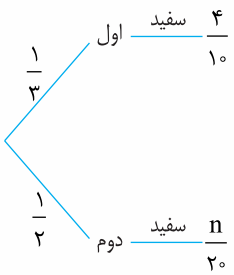
۵۰- گزینه «۱» آسان

$P(\text{قبولی}) = \frac{۵}{۱۰} \times \frac{۷}{۱۰} + \frac{۳}{۱۰} \times \frac{۵}{۱۰} + \frac{۲}{۱۰} \times \frac{۶}{۱۰} = \frac{۳۵ + ۱۵ + ۱۲}{۱۰۰} = ۰/۶۲$



۵۱- گزینه «۱» متوسط

$P(\text{سفید}) = \frac{۱}{۲} \times \frac{۴}{۱۰} + \frac{۱}{۲} \times \frac{n}{۲۰} \Rightarrow \frac{۱}{۲} = \frac{۲}{۱۰} + \frac{n}{۴۰} \Rightarrow \frac{n}{۴۰} = \frac{۳}{۱۰} \Rightarrow n = ۱۲$



۵۲- گزینه «۴» دشوار

اگر تعداد مهره‌های آبی **n** باشد، تعداد مهره‌های قرمز $(n+۱)$ و تعداد کل مهره‌ها $(۲n+۱)$ است.

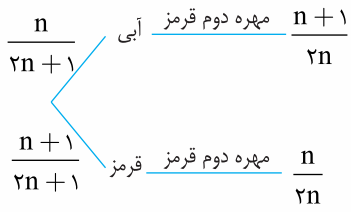
$P(\text{مهره دوم قرمز}) = \frac{n}{۲n+۱} \times \frac{n+۱}{۲n} + \frac{n+۱}{۲n+۱} \times \frac{n}{۲n} = \frac{۲n+۲}{۴n+۲} \Rightarrow$

$P(\text{مهره دوم قرمز}) = \frac{n+۱}{۲n+۱}$

$P(\text{مهره دوم قرمز} \cap \text{مهره اول آبی}) = \frac{n}{۲n+۱} \times \frac{n+۱}{۲n} = \frac{n+۱}{۴n+۲}$

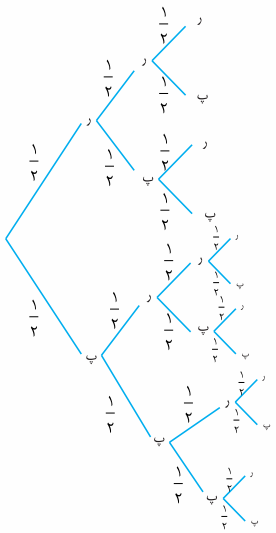
$P(\text{مهره اول آبی} \mid \text{مهره دوم قرمز}) = \frac{P(\text{مهره دوم قرمز} \cap \text{مهره اول آبی})}{P(\text{مهره دوم قرمز})}$

$= \frac{\frac{n+۱}{۴n+۲}}{\frac{n+۱}{۲n+۱}} = \frac{۲n+۱}{۲(۲n+۱)} = \frac{۱}{۲}$



۵۳- گزینه «۲» دشوار

$P(\text{پرتاب های مثل هم}) = \frac{۱}{۲} \times \frac{۱}{۲} \times \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۲} \times \frac{۱}{۲} \times \frac{۱}{۲} = \frac{۱}{۸} + \frac{۱}{۱۶} = \frac{۳}{۱۶}$

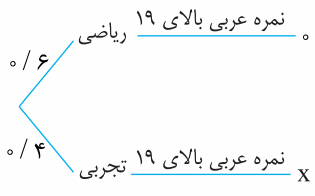


۵۴- گزینه «۳» دشوار

$P(\text{نمره عربی بالای ۱۹}) = ۰/۴$

$۰/۴ = ۰/۶ \times ۰/۲ + ۰/۴ \times x \Rightarrow ۰/۴ = ۰/۱۲ + ۰/۴x \Rightarrow ۰/۲۸ = ۰/۴x$

$\Rightarrow x = ۰/۷$



۵۵- گزینه «۲» دشوار

اگر تعداد مهره‌های سبز در کیسه دوم برابر x قرض کنیم داریم:

$$P(\text{سبز}) = \frac{۱}{۲}\times\frac{۲}{۶}+\frac{۱}{۲}\times\frac{x}{۴+x} \Rightarrow \frac{۷}{۱۵}=\frac{۱}{۶}+\frac{x}{۸+۲x} \Rightarrow$$

$$\frac{۷}{۱۵}-\frac{۱}{۶}=\frac{x}{۸+۲x} \Rightarrow \frac{۳}{۱۰}=\frac{x}{۸+۲x} \Rightarrow ۱۰x=۲۴+۶x \Rightarrow$$

$$۴x=۲۴ \Rightarrow x=۶$$

- $\frac{۱}{۲}$ اول — سبز — $\frac{۲}{۶}$
- $\frac{۱}{۲}$ دوم — سبز — $\frac{x}{۴+x}$

۵۶- گزینه «۳» متوسط

$$P(\text{شیر}) = \frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۴}\times\frac{۱}{۳}+\frac{۱}{۴}\times ۱=\frac{۱}{۴}+\frac{۱}{۱۲}+\frac{۱}{۴}=\frac{۳+۱+۳}{۱۲} \Rightarrow$$

$$P(\text{شیر})=\frac{۷}{۱۲}$$

- $\frac{۱}{۲}$ سالم — شیر — $\frac{۱}{۲}$
- $\frac{۱}{۴}$ خراب ۱ — شیر — $\frac{۱}{۳}$
- $\frac{۱}{۴}$ خراب ۲ — شیر — ۱

۵۷- گزینه «۳» متوسط

$$P(\text{سفید}) = \frac{۵}{۹}\times\frac{۸}{۱۸}+\frac{۴}{۹}\times\frac{۷}{۱۸}=\frac{۴۰+۲۸}{۱۶۲}=\frac{۶۸}{۱۶۲}=\frac{۳۴}{۸۱}$$

- $\frac{۵}{۹}$ سفید — سفید در ظرف دوم — $\frac{۸}{۱۸}$
- $\frac{۴}{۹}$ سیاه — سفید در ظرف دوم — $\frac{۷}{۱۸}$

۵۸- گزینه «۱» آسان

$$P(\text{سفید}) = \frac{۲}{۳}\times\frac{۳}{۶}+\frac{۱}{۳}\times\frac{۲}{۶}=\frac{۶+۲}{۱۸}=\frac{۸}{۱۸} \Rightarrow P(\text{سفید})=\frac{۴}{۹}$$

- $\frac{۲}{۳}$ سفید — سفید در ظرف دوم — $\frac{۳}{۶}$
- $\frac{۱}{۳}$ سیاه — سفید در ظرف دوم — $\frac{۲}{۶}$

۵۹- گزینه «۱» دشوار

- $\frac{۲}{۳}$ از جعبه اول سفید خارج شود. — حداقل ۱ مهره سفید از جعبه دوم خارج شود. — $\frac{\binom{۵}{۲}+\binom{۵}{۱}\binom{۵}{۱}}{\binom{۱۰}{۲}}=\frac{۳۵}{۴۵}$
- $\frac{۱}{۳}$ از جعبه اول سیاه خارج شود. — حداقل ۱ مهره سفید از جعبه دوم خارج شود. — $\frac{\binom{۴}{۲}+\binom{۴}{۱}\binom{۶}{۱}}{\binom{۱۰}{۲}}=\frac{۳}{۴۵}$

$$P(\text{حداقل ۱ سفید}) = \frac{۲}{۳}\times\frac{۳۵}{۴۵}+\frac{۱}{۳}\times\frac{۳۰}{۴۵}=\frac{۷۰+۳۰}{۱۳۵}=\frac{۱۰۰}{۱۳۵}=\frac{۲۰}{۲۷}$$

۶۰- گزینه «۳» دشوار

مجموع دو تاس بیشتر از ۹ :

$$\{(۴,۶),(۵,۵),(۶,۴),(۵,۶),(۶,۵),(۶,۶)\} \Rightarrow P(A)=\frac{۶}{۳۶}=\frac{۱}{۶}$$

$$P(\text{قرمز}) = \frac{۱}{۶}\times\frac{۱}{۳}\times\frac{۵}{۱۰}+\frac{۱}{۶}\times\frac{۲}{۳}\times\frac{۶}{۱۰}+\frac{۵}{۶}\times\frac{۴}{۹}\times\frac{۶}{۱۰}+\frac{۵}{۶}\times\frac{۵}{۹}\times\frac{۷}{۱۰}$$

$$=\frac{۱۵+۳۶+۱۲۰+۱۷۵}{۵۴۰}=\frac{۳۴۶}{۵۴۰}=\frac{۱۷۳}{۲۷۰}$$

- $\frac{۱}{۶}$ مجموع دو تاس بیشتر از ۹
  - $\frac{۱}{۳}$ ظرف اول
    - آبی — قرمز ظرف دوم — $\frac{۵}{۱۰}$
    - قرمز — قرمز ظرف دوم — $\frac{۶}{۱۰}$
  - $\frac{۲}{۳}$ ظرف اول
- $\frac{۵}{۶}$ مجموع دو تاس کمتر از ۹
  - $\frac{۴}{۹}$ ظرف دوم
    - آبی — قرمز ظرف اول — $\frac{۶}{۱۰}$
    - قرمز — قرمز ظرف اول — $\frac{۷}{۱۰}$
  - $\frac{۵}{۹}$ ظرف دوم

۶۱- گزینه «۲» دشوار

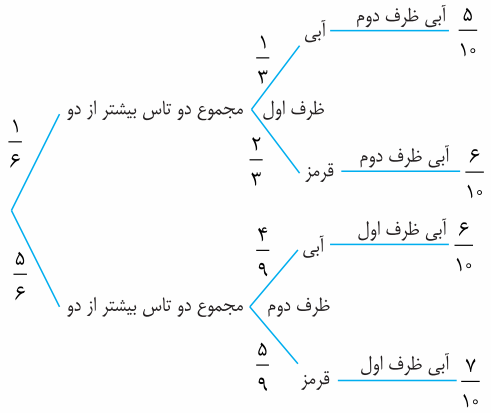
مجموع دو تاس ۷ یا ۱۰

$= \{(۱,۶),(۲,۵),(۳,۴),(۴,۳),(۵,۲),(۶,۱),(۴,۶),(۵,۵),(۶,۴)\}$

$\Rightarrow P(A) = \frac{۹}{۳۶} = \frac{۱}{۴}$

$P(\text{آبی}) = \frac{۱}{۴}\times\frac{۱}{۳}\times\frac{۵}{۱۰} + \frac{۱}{۴}\times\frac{۲}{۳}\times\frac{۴}{۱۰} + \frac{۳}{۴}\times\frac{۴}{۹}\times\frac{۴}{۱۰} + \frac{۳}{۴}\times\frac{۵}{۹}\times\frac{۳}{۱۰}$

$= \frac{۱۵+۲۴+۴۸+۴۵}{۳۶۰} = \frac{۱۳۲}{۳۶۰} = \frac{۱۱}{۳۰}$

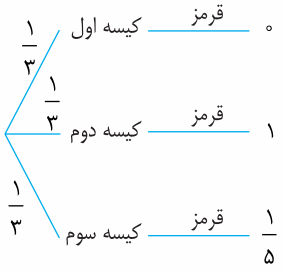


۶۲- گزینه «۴» متوسط

$P(\text{قرمز}) = \frac{۱}{۳}\times۱ + \frac{۱}{۳}\times\frac{۱}{۵} = \frac{۵+۱}{۱۵} = \frac{۲}{۵}$

$P(\text{کیسه دوم} \cap \text{قرمز}) = \frac{۱}{۳}\times۱ = \frac{۱}{۳}$

$P(\text{قرمز} \mid \text{کیسه دوم}) = \frac{P(\text{کیسه دوم} \cap \text{قرمز})}{P(\text{قرمز})} = \frac{\frac{۱}{۳}}{\frac{۲}{۵}} = \frac{۵}{۶}$

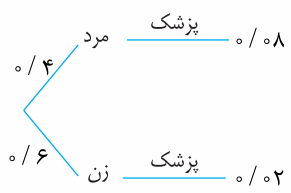


۶۳- گزینه «۳» متوسط

$P(\text{پزشک}) = ۰/۴\times۰/۰۸ + ۰/۶\times۰/۰۲ = ۰/۰۳۲ + ۰/۰۱۲ = ۰/۰۴۴$

$P(\text{زن} \cap \text{پزشک}) = ۰/۶\times۰/۰۲ = ۰/۰۱۲$

$P(\text{زن} \mid \text{پزشک}) = \frac{P(\text{زن} \cap \text{پزشک})}{P(\text{پزشک})} = \frac{۰/۰۱۲}{۰/۰۴۴} = \frac{۳}{۱۱}$

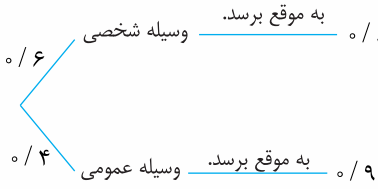


۶۴- گزینه «۴» متوسط

$P(\text{به موقع برسد}) = ۰/۶\times۰/۸۵ + ۰/۴\times۰/۹ = ۰/۵۱ + ۰/۳۶ = ۰/۸۷$

$P(\text{وسیله شخصی} \cap \text{به موقع برسد}) = ۰/۶\times۰/۸۵ = ۰/۵۱$

$P(\text{به موقع برسد} \mid \text{وسیله شخصی}) = \frac{P(\text{وسیله شخصی} \cap \text{به موقع برسد})}{P(\text{به موقع برسد})} = \frac{۰/۵۱}{۰/۸۷} = \frac{۱۷}{۲۹}$



۶۵- گزینه «۱» دشوار

اگر **A** پیشامد آن باشد که گروه خونی هر دو فرزند **O** باشد و $B_۱$, $B_۲$, $B_۳$ به ترتیب پیشامد آن باشد که خانواده دو پسر، یک پسر و یک دختر و دو دختر باشد داریم:

$P(B_۱) = P(B_۳) = \frac{۱}{۴} \quad P(B_۲) = \frac{۱}{۲}$

$P(A) = P(B_۱)P(A \mid B_۱) + P(B_۲)P(A \mid B_۲) + P(B_۳)P(A \mid B_۳)$

$= \frac{۱}{۴}\times\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۵} + \frac{۱}{۴}\times\frac{۱}{۵}\times\frac{۱}{۵}$

$\Rightarrow P(A) = \frac{۱}{۱۶} + \frac{۱}{۲۰} + \frac{۱}{۱۰۰} = \frac{۲۵+۲۰+۴}{۴۰۰} = \frac{۴۹}{۴۰۰}$

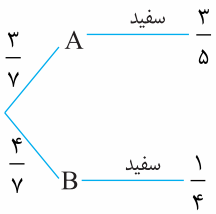
$P(B_۱ \mid A) = \frac{P(B_۱ \cap A)}{P(A)} = \frac{P(B_۱)P(A \mid B_۱)}{P(A)} = \frac{\frac{۱}{۴}\times\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۲}}{\frac{۴۹}{۴۰۰}}$

$= \frac{۴۰۰\times۱}{۴۹\times۱۶} = \frac{۲۵}{۴۹}$

۶۶- گزینه «۱» دشوار

داخل ظرف دوم ۴ مهره وجود دارد و چنانچه ۳ مهره از ظرف اول برداریم و داخل ظرف دوم بریزیم تعداد کل مهره‌ها داخل ظرف دوم ۷ تا می‌شود که $n(S) = ۷ , n(A) = ۳ , n(B) = ۴$ (**A** ظرف اول و **B** ظرف دوم است) پس $P(A) = \frac{۳}{۷} , P(B) = \frac{۴}{۷}$ است.

$P(\text{سفید}) = \frac{۳}{۷}\times\frac{۳}{۵} + \frac{۴}{۷}\times\frac{۱}{۴} = \frac{۹}{۳۵} + \frac{۱}{۷} = \frac{۹+۵}{۳۵} = \frac{۲}{۵}$



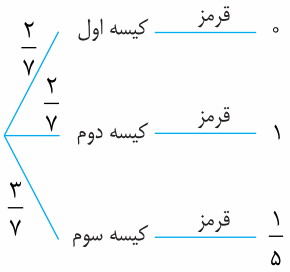
۶۷- گزینه «۲» دشوار

بعد از قرار دادن مهره‌ها در کیسه سوم تعداد کل مهره‌ها داخل این کیسه ۷ تا می‌شود $(n(S)=۷)$ که ۲ مهره برای کیسه اول $(n(A)=۲)$ و دو مهره برای کیسه دوم $(n(B)=۲)$ و ۳ مهره برای کیسه سوم $(n(C)=۳)$ است

بنابراین $P(A)=\frac{۲}{۷}, P(B)=\frac{۲}{۷}, P(C)=\frac{۳}{۷}$ است

$$P(\text{سفید})=\frac{۲}{۷}\times\frac{۲}{۵}+\frac{۲}{۷}\times\frac{۱}{۵}+\frac{۳}{۷}\times۱=\frac{۴+۲+۱۵}{۳۵}$$

$$P(\text{سفید})=\frac{۳}{۵}$$

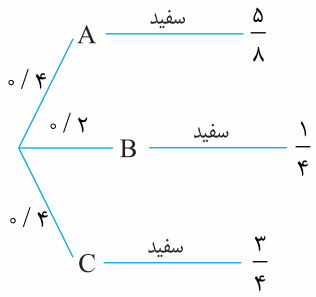


۶۸- گزینه «۳» دشوار

بعد از قرار دادن مهره‌ها در کیسه سوم تعداد کل مهره‌ها داخل این کیسه ۱۰ تا می‌شود $(n(S)=۱۰)$ که ۴ مهره برای کیسه اول $(n(A)=۴)$ و دو مهره برای کیسه دوم $(n(B)=۲)$ و ۴ مهره برای کیسه سوم $(n(C)=۴)$ است

بنابراین $P(A)=۰/۴, P(B)=۰/۲, P(C)=۰/۴$

$$P(\text{سفید})=\frac{۴}{۱۰}\times\frac{۵}{۸}+\frac{۲}{۱۰}\times\frac{۱}{۴}+\frac{۴}{۱۰}\times\frac{۳}{۴}=\frac{۵+۱+۶}{۲۰}=۰/۶$$

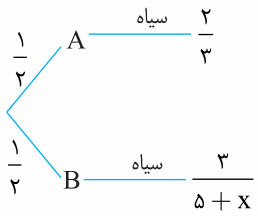


۶۹- گزینه «۱» دشوار

تعداد مهره‌های را که به کیسه دوم اضافه کرده‌ایم را $\mathbf{x}$ فرض می‌کنیم و چون احتمال سفید و سیاه بودن مهره با هم برابر است $P(\text{سفید})=P(\text{سیاه})=\frac{۱}{۲}$

$$P(\text{سیاه})=\frac{۱}{۲}\times\frac{۲}{۳}+\frac{۱}{۲}\times\frac{۳}{۵+x}\Rightarrow\frac{۱}{۲}=\frac{۱}{۳}+\frac{۳}{۱۰+۲x}\Rightarrow$$

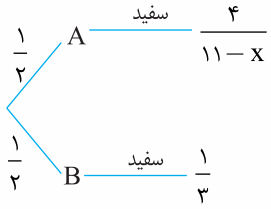
$$\frac{۱}{۶}=\frac{۳}{۱۰+۲x}\Rightarrow ۱۰+۲x=۱۸\Rightarrow ۲x=۸\Rightarrow x=۴$$



۷۰- گزینه «۴» دشوار

اگر تعداد مهره‌های سیاهی که از کیسه اول خارج می‌کنیم را $\mathbf{x}$ فرض کنیم و چون احتمال سفید یا سیاهی بودن مهره با هم برابر است، $P(\text{سفید})=P(\text{سیاه})=\frac{۱}{۲}$

$$P(\text{سفید})=\frac{۱}{۲}\times\frac{۴}{۱۱-x}+\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۳}\Rightarrow\frac{۱}{۲}=\frac{۲}{۱۱-x}+\frac{۱}{۶}\Rightarrow\frac{۱}{۳}=\frac{۲}{۱۱-x}$$
$$\Rightarrow ۱۱-x=۶\Rightarrow x=۵$$



۱- آسان

آ) $P(A\cap B)=P(A)\times P(B)$

ب) مستقل

پ) ناسازگار ـ صفر

۲- متوسط

$$n(S)=\overset{\text{تاس}}{۶}\times\overset{\text{سکه}}{۲}=۱۲$$

$$A=\{(۶,\text{پ}),(۶,\text{ر})\}\Rightarrow n(A)=۲\quad P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۲}{۱۲}=\frac{۱}{۶}$$

$$B=\{(۱,\text{ر}),(۲,\text{ر}),(۳,\text{ر}),(۴,\text{ر}),(۵,\text{ر}),(۶,\text{ر})\}$$
$$\Rightarrow n(B)=۶\quad P(B)=\frac{n(B)}{n(S)}=\frac{۶}{۱۲}=\frac{۱}{۲}$$

$$A\cap B=\{(۶,\text{ر})\}\Rightarrow n(A\cap B)=۱\quad P(A\cap B)=\frac{n(A\cap B)}{n(S)}=\frac{۱}{۱۲}$$

$P(A\cap B)=P(A)\times P(B)\Rightarrow\frac{۱}{۱۲}=\frac{۱}{۶}\times\frac{۱}{۲}$. A و B مستقل هستند.

۳- متوسط

$n(S) = \overset{\text{تاس اول}}{۶} \times \overset{\text{تاس دوم}}{۶} = ۳۶$

$A = \{(۳,۱),(۳,۲),(۳,۳),(۳,۴),(۳,۵),(۳,۶)\}$

$\Rightarrow n(A) = ۶ \quad P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{۶}{۳۶} = \frac{۱}{۶}$

$B = \{(۱,۶),(۲,۵),(۳,۴),(۴,۳),(۵,۲),(۶,۱)\}$

$\Rightarrow n(B) = ۶ \quad P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{۶}{۳۶} = \frac{۱}{۶}$

$A \cap B = \{(۳,۴)\} \Rightarrow n(A \cap B) = ۱ \quad P(A \cap B) = \frac{n(A \cap B)}{n(S)} = \frac{۱}{۳۶}$

$P(A \cap B) = P(A) \times P(B) \Rightarrow \frac{۱}{۳۶} = \frac{۱}{۶} \times \frac{۱}{۶}$ A و B مستقل هستند.

۴- آسان

خیر ـ چون **A** و **B** ناتهی هستند پس $P(A) \neq ۰, P(B) \neq ۰$ است

بنابراین $P(A) \times P(B) \neq ۰$ و چون **A** و **B** ناسازگار است $P(A \cap B) = ۰$

است پس

$P(A \cap B) \neq P(A) \times P(B) \Rightarrow$ A و B مستقل نیستند.

۵- آسان

خیر ـ به عنوان مثال اگر

$S = \{۱,۲,۳,۴,۵,۶\}, A = \{۲,۳,۵\}, B = \{۵,۶\}$

آنگاه $A \cap B = \{۵\}$ است که $P(A) = \frac{۱}{۲}, P(B) = \frac{۱}{۳}, P(A \cap B) = \frac{۱}{۶}$

است که $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$ است که **A** و **B** مستقل هستند.

اگر $E = \{۲\}, F = \{۶\}$ آنگاه $E \subseteq A, F \subseteq B$ است

و $P(E) = P(F) = \frac{۱}{۶}, E \cap F = \varnothing$ است بنابراین $P(E \cap F) = ۰$ است و

E و **F** مستقل نیستند $P(E \cap F) \neq P(E) \times P(F)$

۶- دشوار

چون **A** و **B** مستقل هستند پس $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$

آ) $P(B \cap A') = P(B - A) = P(B) - P(A \cap B) = P(B) - P(A) \times P(B)$

$= P(B)(۱ - P(A)) = P(A) \times P(A')$

$\Rightarrow P(B \cap A') = P(B) \times P(A') \Rightarrow$ A' و B مستقل هستند

ب) $P(A' \cap B') = P(A \cup B)' = ۱ - P(A \cup B)$

$= ۱ - (P(A) + P(B) - P(A \cap B))$

$= \underbrace{۱ - P(A)}_{P(A')} - P(B) + P(A) \times P(B)$

$= P(A') - P(B)(۱ - P(A)) = P(A) - P(B)P(A')$

$= P(A')(۱ - P(B)) = P(A')P(B')$

$P(A' \cap B') = P(A') \times P(B') \Rightarrow$ A', B' مستقل هستند

۷- آسان

$n(S) = ۱۰$

$A = \{۲,۴,۶,۸,۱۰\} \Rightarrow n(A) = ۵$

$B = \{۳,۶,۹\} \Rightarrow n(B) = ۳$

$A \cap B = \{۶\} \Rightarrow n(A \cap B) = ۱$

$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{۵}{۱۰} = \frac{۱}{۲}$

$P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{۳}{۱۰}$

$P(A \cap B) = \frac{n(A \cap B)}{n(S)} = \frac{۱}{۱۰}$

$P(A \cap B) \neq P(A) \times P(B) \Rightarrow \frac{۱}{۱۰} \neq \frac{۳}{۱۰} \times \frac{۱}{۲} \Rightarrow$

A و **B** مستقل نیستند یعنی وابسته هستند.

۸- متوسط

اگر **A** پیشامد قبولی زهرا و **B** پیشامد قبولی ریحانه در درس فیزیک

باشد $P(A) = ۰/۹, P(B) = ۰/۷$ و چون **A** و **B** مستقل هستند

$P(A \cap B) = P(A) \times P(B) = ۰/۹ \times ۰/۷ = ۰/۶۳$

چون احتمال قبولی حداقل یک نفر را می‌خواهیم پس $P(A \cup B)$ مطلوب ما

است.

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = ۰/۹ + ۰/۷ - ۰/۶۳ = ۰/۹۷$

۹- متوسط

اگر **A** پیشامد آن باشد که محمد به هدف بزند و **B** پیشامد آن باشد که

مرتضی به هدف بزند، $P(A) = \frac{۵}{۷}, P(B) = \frac{۷}{۱۰}$ است و چون **A** و **B** مستقل

هستند

$P(A \cap B) = P(A) \times P(B) = \frac{۵}{۷} \times \frac{۷}{۱۰} = \frac{۱}{۲}$

حداقل یکی به هدف بزند یعنی $A \cup B$

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{۵}{۷} + \frac{۷}{۱۰} - \frac{۱}{۲}$

$= \frac{۵۰ + ۴۹ - ۳۵}{۷۰} = \frac{۶۴}{۷۰} = \frac{۳۲}{۳۵}$

۱۰- دشوار

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۵}{۱۳}$$

اگر بخواهیم $P(B|A)$ را محاسبه کنیم باید ۱ مهره آبی از جعبه خارج کنیم، حال ۴ مهره آبی و ۸ مهره قرمز داریم و احتمال قرمز خارج شدن از آن را محاسبه کنیم

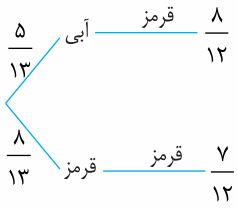
$$P(B|A)=\frac{۸}{۱۲}=\frac{۲}{۳}$$

$$P(A\cap B)=P(A)\times P(B|A)=\frac{۵}{۱۳}\times\frac{۲}{۳}=\frac{۱۰}{۳۹}$$

ب)

$$P(B)=\frac{۵}{۱۳}\times\frac{۸}{۱۲}+\frac{۸}{۱۳}\times\frac{۷}{۱۲}=\frac{۱۰}{۳۹}+\frac{۱۴}{۳۹}=\frac{۲۴}{۳۹}=\frac{۸}{۱۳}$$

A و B مستقل نیستند $\Rightarrow P(B|A)\neq P(B)\Rightarrow \frac{۲}{۳}\neq\frac{۸}{۱۳}$



۱۱- دشوار

$$P(B)=\frac{n(B)}{n(S)}=\frac{۵}{۱۳}$$

اگر بخواهیم $P(B|A)$ را محاسبه کنیم چون مهره اول را به کیسه برگردانیم پس ۵ مهره آبی و ۸ مهره قرمز داریم

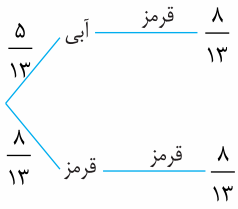
$$P(B|A)=\frac{۸}{۱۳}$$

ب)

$$P(A\cap B)=P(A)\times P(B|A)=\frac{۵}{۱۳}\times\frac{۸}{۱۳}=\frac{۴۰}{۱۶۹}$$

$$P(B)=\frac{۵}{۱۳}\times\frac{۸}{۱۳}+\frac{۸}{۱۳}\times\frac{۸}{۱۳}=\frac{۴۰+۶۴}{۱۶۹}=\frac{۱۰۴}{۱۶۹}=\frac{۸}{۱۳}$$

A و B مستقل هستند $\Rightarrow P(B|A)=P(B)$



۱۲- متوسط

با توجه به مستقل بودن جنسیت فرزندان داریم

آ) $P(\text{دختر دختر دختر دختر})=P(\text{دختر})\times P(\text{دختر})\times P(\text{دختر})\times P(\text{دختر})$

$$=\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۲}=\frac{۱}{۱۶}$$

ب) $P(\text{دختر پسر پسر دختر})=P(\text{دختر})\times P(\text{پسر})\times P(\text{پسر})\times P(\text{دختر})$

$$=\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۲}=\frac{۱}{۱۶}$$

پ) قرار گرفتن دو دختر در این خانواده ۶ $=\binom{۴}{۲}$ حالت میسر است که احتمال هر کدام از این حالت‌ها همان $\frac{۱}{۱۶}$ است پس

$$P(C)=۶\times\frac{۱}{۱۶}=\frac{۳}{۸}$$

۱۳- متوسط

با توجه به اینکه مسئله بدون جایگذاری انجام شده و بی‌سواد بودن فرد دوم مستقل از بی‌سواد بودن فرد اول نیست ولی چون انتخاب از یک جامعه پرجمعیت انجام می‌شود می‌توان فرض کرد که بی‌سواد بودن افراد انتخاب شده، مستقل از یکدیگر است و احتمال بی‌سواد بودن هر کدام ۰/۲ است.

$P(\text{۵ نفر بی سواد بودن هر})=P(\text{نفر اول بی سواد})\times P(\text{نفر دوم بی سواد})$
$\times P(\text{نفر سوم بی سواد})\times P(\text{نفر چهارم بی سواد})$
$\times P(\text{نفر ۵ام بی سواد})$

$P(\text{۵ نفر بی سواد بودن هر})=۰/۲\times۰/۲\times۰/۲\times۰/۲\times۰/۲=۰/۰۰۰۳۲$

۱۴- دشوار

اگر پیشامدهای $\mathbf{A}$ و $\mathbf{B}$ موفقیت عمل روی بیمارهای ۱ و ۲باشد $P(A)=۰/۶\ ,\ P(B)=۰/۸$ است و با توجه به این که $\mathbf{A}$ و $\mathbf{B}$ مستقل هستند داریم

آ) $P(A\cap B)=P(A)\times P(B)=۰/۶\times۰/۸=۰/۴۸$

ب) $P(A'\cap B')=P(A')\times P(B')=(۱-P(A))\times(۱-P(B))$

$=(۱-۰/۶)(۱-۰/۸)=۰/۴\times۰/۲=۰/۰۸$

پ) $P(A'\cap B)=P(A')\times P(B)=(۱-P(A))\times P(B)$

$=(۱-۰/۶)\times(۰/۸)=۰/۴\times۰/۸=۰/۳۲$

۱۵- آسان

اگر پیشامد $\mathbf{A}$ رو آمدن سکه و $\mathbf{B}$ و $\mathbf{C}$ پیشامد ظاهر شدن عدد ۶ در پرتاب‌های دوم وس وم باشد با توجه به اینکه $\mathbf{A}$ و $\mathbf{B}$ و $\mathbf{C}$ مستقل هستند.

$$P(A\cap B\cap C)=P(A)\times P(B)\times P(C)=\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۶}\times\frac{۱}{۶}=\frac{۱}{۷۲}$$

۱۶- دشوار

پاسخ درست به هر سوال مستقل از سوال دیگر است

آ) $P(A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_{10}) = P(A_1) \times P(A_2) \times ... \times P(A_{10})$

$= \underbrace{\frac{1}{5} \times \frac{1}{5} \times ... \times \frac{1}{5}}_{\text{۱۰ تا}} = (\frac{1}{5})^{10}$

ب) $P(A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_5 \cap A'_6 \cap A'_7 \cap ... A'_{10})$

$= P(A_1) \times P(A_2) \times ... \times P(A_5) \times P(A'_6) \times P(A'_7) \times ... \times P(A'_{10})$

$= \frac{1}{5} \times \frac{1}{5} \times ... \times \frac{1}{5} \times \frac{4}{5} \times \frac{4}{5} \times ... \times \frac{4}{5} = (\frac{2}{5})^{10}$

قرار گرفتن ۵ پاسخ درست از ۱۰ سوال به $\binom{10}{5}$ طریق میسر است و احتمال هر کدام هم $(\frac{2}{5})^{10}$ است.

$P(C) = \binom{10}{5} \times (\frac{2}{5})^{10}$

۱۷- دشوار

آ) $P(\text{مهره دوم قرمز}) \times P(\text{مهره اول قرمز}) = P(\text{مهره دوم قرمز} \cap \text{مهره اول قرمز})$

$= \frac{3}{6} \times \frac{3}{6} = \frac{1}{4}$

ب) $P(\text{حداقل یک آبی}) = P(\text{غیر آبی} \cap \text{آبی}) + P(\text{آبی} \cap \text{غیر آبی})$

$+ P(\text{آبی} \cap \text{آبی}) = P(\text{آبی}) \times P(\text{غیر آبی}) + P(\text{غیر آبی}) \times$

$P(\text{آبی}) + P(\text{آبی}) \times P(\text{آبی}) = \frac{2}{6} \times \frac{4}{6} + \frac{4}{6} \times \frac{2}{6} + \frac{2}{6} \times \frac{2}{6} = \frac{8+8+4}{36} = \frac{20}{36} = \frac{5}{9}$

$P(\text{همرنگ}) = P(\text{هر دو زرد}) + P(\text{هر دو قرمز}) + P(\text{هر دو آبی})$

$= P(\text{مهر دوم آبی} \cap \text{مهر اول آبی})$

$+ P(\text{مهر دوم زرد} \cap \text{مهر اول زرد}) + P(\text{مهر دوم قرمز} \cap \text{مهر اول قرمز})$

$= \frac{2}{6} \times \frac{2}{6} + \frac{3}{6} \times \frac{3}{6} + \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{4+9+1}{36} = \frac{14}{36} = \frac{7}{18}$

۱۸- متوسط

پیشامد سالم بودن لامپ $\mathbf{j}$ ام را با A_j و پیشامد ناسالم لامپ $\mathbf{i}$ اُم را با A'_i نشان می‌دهیم

آ) $P(A'_1 \cap A'_2 \cap A'_3) = P(A'_1) \times P(A'_2) \times P(A'_3) = \frac{3}{12} \times \frac{2}{11} \times \frac{1}{10} = \frac{1}{220}$

ب) $P(A'_1 \cup A'_2 \cup A'_3) = 1 - P(A_1 \cap A_2 \cap A_3)$

$= 1 - (\frac{9}{12} \times \frac{8}{11} \times \frac{7}{10}) = 1 - \frac{21}{55} = \frac{34}{55}$

۱۹- آسان

پیشامد موفق بودن دارو روی نفر $\mathbf{j}$ را با A_j و پیشامد ناموفق بودن دارو روی نفر $\mathbf{i}$ام را با A'_j نشان می‌دهیم

$P(A'_1 \cap A'_2 \cap A'_3 \cap ... \cap A'_{10}) = P(A'_1) \times P(A'_2) \times P(A'_3)$

$\times ... \times P(A'_{10}) = \underbrace{\frac{1}{10} \times \frac{1}{10} \times ... \times \frac{1}{10}}_{\text{۱۰ تا}} = (\frac{1}{10})^{10}$

۲۰- دشوار

$\frac{P(A \cap B)}{P(A \cap B')} = \frac{0/1}{0/4} \Rightarrow \frac{P(A) \times P(B)}{P(A) \times P(B')} = \frac{1}{4} \Rightarrow \left.\begin{matrix} P(B') = 4P(B) \\ P(B) + P(B') = 1 \end{matrix}\right\}$

$\Rightarrow P(B) = 0/2, P(B') = 0/8$

$P(A \cap B) = 0/1 \Rightarrow P(A) \times P(B) = 0/1 \Rightarrow P(A) \times 0/2 = 0/1$

$\Rightarrow P(A) = 0/5$

$P(A \cup B') = P(A) + P(B') - P(A \cap B')$

$= 0/5 + 0/8 - P(A) \times P(B')$

$= 1/3 - (0/5 \times 0/8) = 1/3 - 0/4 = 0/9$

۱- گزینه «۱» متوسط

پیشامدها را می‌نویسیم:

$A = \{1, 6\} \Rightarrow P(A) = \frac{1}{3}$

$B = \{1, 3, 5\} \Rightarrow P(B) = \frac{1}{2}$

$C = \{5, 6\} \Rightarrow P(C) = \frac{1}{3}$

$D = \{2, 3, 5\} \Rightarrow P(D) = \frac{1}{2}$

$E = \{1, 2\} \Rightarrow P(E) = \frac{1}{3}$

چون $A \cap D = \varnothing$ است پس $\mathbf{A}$ و $\mathbf{D}$ ناسازگار هستند و مستقل نیستند و داریم

$A \cap B = \{1\} \Rightarrow P(A \cap B) = \frac{1}{6} = P(A) \times P(B) \Rightarrow A, B$ مستقل هستند

$A \cap C = \{6\} \Rightarrow P(A \cap C) = \frac{1}{6} \neq P(A) \times P(C) \Rightarrow A, C$ وابسته هستند

$A \cap E = \{1\} \Rightarrow P(A \cap E) = \frac{1}{6} \neq P(A) \times P(E) \Rightarrow A, E$ وابسته هستند

۲- گزینه «۳» آسان

اگر **A** و **B** نا تهی باشند $P(A)\neq 0$ و $P(B)\neq 0$ است پس $P(A)\times P(B)\neq 0$ و چنانچه **A** و **B** مستقل باشند $P(A\cap B)=P(A)\times P(B)\neq 0$ است دیگر **A** و **B** ناسازگار نیستند.

۳- گزینه «۴» متوسط

چون **A** و **B** مستقل هستند پس A' و B' هم مستقل هستند

$$P(A\cap B)=P(A)\times P(B)\Rightarrow 0/24=0/4P(B)\Rightarrow P(B)=0/6$$

$$P(A')=1-P(A)=1-0/4=0/6$$

$$P(B')=1-P(B)=1-0/6=0/4$$

$$P(A'\cup B')=P(A')+P(B')-P(A'\cap B')$$
$$=0/6+0/4-P(A')\times P(B')$$
$$=1-0/6\times 0/4=0/76$$

۴- گزینه «۱» آسان

$$P(A\cap B)=P(A)\times P(B)=\frac{2}{3}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{6}$$

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=\frac{2}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{6}=\frac{8+3-2}{12}=\frac{9}{12}$$

۵- گزینه «۲» آسان

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)\Rightarrow 0/4$$
$$=0/2+P(B)-P(A)\times P(B)\Rightarrow 0/2=P(B)-0/2P(B)\Rightarrow$$
$$0/2=0/8P(B)\Rightarrow P(B)=0/25$$

۶- گزینه «۳» آسان

$$P(A\cap B)=P(A)\times P(B)=\frac{1}{3}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{12}$$

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{12}$$
$$=\frac{4+3-1}{12}=\frac{6}{12}\Rightarrow P(A\cup B)=\frac{1}{2}$$

۷- گزینه «۳» دشوار

$$\frac{P(A\cap B)}{P(A\cap B')}=\frac{0/6}{0/2}\Rightarrow\frac{P(A)\times P(B)}{P(A)\times P(B')}=3$$
$$\Rightarrow\left.\begin{matrix}P(B)=3P(B')\\P(B)+P(B')=1\end{matrix}\right\}\Rightarrow P(B)=0/75\,,\,P(B')=0/25$$

$$P(A\cap B)=P(A)\times P(B)\Rightarrow 0/6=P(A)\times 0/75\Rightarrow P(A)=0/8$$

اگر **A** و **B** مستقل باشند B' و **A** هم مستقل هستند.

$$P(A\cup B')=P(A)+P(B')-P(A\cap B')$$
$$=0/8+0/25-P(A)\times P(B')$$
$$=1/05-0/8\times 0/25=1/05-0/2\Rightarrow P(A\cup B')=0/85$$

۸- گزینه «۳» دشوار

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)\Rightarrow 0/6=P(A)+P(B)-0/1$$
$$\Rightarrow P(A)+P(B)=0/7=S$$
$$P(A\cap B)=P(A)\times P(B)\Rightarrow 0/1=P(A)\times P(B)=P\Rightarrow P=0/1$$

$P(A)\,,\,P(B)$ ریشه‌های معادله $x^2-Sx+P=0$ هستند.

$$x^2-0/7x+0/1=0$$

$$\Delta=b^2-4ac\Rightarrow\Delta=0/49-0/4=0/09$$

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2x}=\frac{0/7\pm 0/3}{2}\Rightarrow\begin{cases}x=0/5\\x=0/2\end{cases}$$

چون $P(B)<P(B')\,,\,P(B)+P(B')=1$ است پس $P(B)=0/2$

۹- گزینه «۴» آسان

اگر **A** و **B** دو پیشامد مستقل B' و **A** هم مستقل هستند.

$$P(B')=1-P(B)=1-0/4=0/6$$

$$P(A-B)=P(A\cap B')=P(A)\times P(B')=0/6\times 0/6=0/36$$

۱۰- گزینه «۱» متوسط

$$P(A-B)=P(A)\times P(B')\Rightarrow P(A\cap B')=P(A)\times P(B')$$

$\Rightarrow A\,,\,B'$ مستقل هستند

چون **A** و B' مستقل هستند پس A' و **B** هم مستقل هستند

$$P(B-A)=P(B\cap A')=P(B)\times P(A')=P(B)(1-P(A))$$
$$=\frac{1}{4}(1-\frac{3}{5})=\frac{1}{4}\times\frac{2}{5}=\frac{1}{10}$$

۱۱- گزینه «۳» متوسط

اگر **A** و **B** دو پیشاند مستقل باشند آنگاه $A'\,,\,B'$ هم مستقل هستند و پیشامد آنکه حداقل یکی از آنها رخ ندهد $A'\cup B'$ است.

$$P(A')=1-P(A)=\frac{1}{3}$$

$$P(B')=1-P(B)=\frac{1}{4}$$

$$P(A'\cap B')=P(A')\times P(B')=\frac{1}{3}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{12}$$

$$P(A'\cup B')=P(A')+P(B')-P(A'\cap B')=\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{12}$$
$$=\frac{4+3-1}{12}=\frac{1}{2}$$

۱۲- گزینه «۱» دشوار

پیشامد آنکه دقیقا یکی از پیشامدهای **A** یا **B** رخ دهد $A\Delta B$ است که $P(A\Delta B)=P(A-B)+P(B-A)$ است و اگر **A** و **B** مستقل باشند **A** با B' و **B** با A' هم مستقل هستند

$$P(A')=1-P(A)=1-\frac{2}{5}=\frac{3}{5}$$

$$P(B')=1-P(B)=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$$

$$P(A-B)=P(A\cap B')=P(A)\times P(B')=\frac{2}{5}\times\frac{3}{4}=\frac{6}{20}=0/3$$

$$P(B-A)=P(B\cap A')=P(B)\times P(A')=\frac{1}{4}\times\frac{3}{5}=\frac{3}{20}=0/15$$

$$P(A\Delta B)=P(A-B)+P(B-A)=0/3+0/15=0/45$$

۱۳- گزینه «۴» متوسط

چون $P(B|A')=P(B)$ است بنابراین **B** با A' مستقل است

پس $P(A|B')=P(A)=\frac{1}{4}$

$$P(A')=1-P(A)=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$$

$$P(A'\cup B)=P(A')+P(B)-P(A'\cap B)$$
$$=P(A')+P(B)-P(A')\times P(B)$$
$$=\frac{3}{4}+\frac{3}{5}-\frac{3}{4}\times\frac{3}{5}=\frac{15+12-9}{20}=\frac{18}{20}=0/9$$

۱۴- گزینه «۴» آسان

چون **A** و **B** مستقل هستند پس **A** با B' هم مستقل است بنابراین

$$P(B'|A)=P(B')=1-P(B)=1-\frac{2}{5}=\frac{3}{5}$$

۱۵- گزینه «۱» آسان

چون **A** و **B** مستقل هستند پس **A** و B' هم مستقل هستند

و $P(A|B')=P(A)=\frac{1}{3}$

$$P(A\cap B)=P(A)\times P(B)=\frac{1}{15}=\frac{1}{3}\times P(B)\Rightarrow P(B)=\frac{1}{5}$$

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)\Rightarrow P(A\cup B)=\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{15}$$

$$=\frac{5+3-1}{15}=\frac{7}{15}$$

۱۶- گزینه «۲» دشوار

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=\frac{2}{5}-P(A)\times P(B)$$

زمانی $P(A\cup B)$ کم‌ترین مقدار است که $P(A)\times P(B)$ بیشترین مقدار باشد

و برای این منظور باید $P(A)=P(B)=\frac{1}{5}$ باشد

$$P(A\cup B)=\frac{2}{5}-\frac{1}{5}\times\frac{1}{5}=\frac{10-1}{25}=\frac{9}{25}=0/36$$

۱۷- گزینه «۳» دشوار

$$P(A-B)=P(A)-P(A\cap B)\Rightarrow P((A-B)|C)$$
$$=P(A|C)-P((A\cap B)|C)=\frac{1}{5}$$

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)\Rightarrow P((A\cup B)|C)$$
$$=P(A|C)+P(B|C)-P((A\cap B)|C)$$

$$\Rightarrow\frac{1}{2}=\frac{1}{5}+P(B|C)$$

$$P(B|C)=0/5-0/2\Rightarrow P(B|C)=0/3$$

چون **B** و **C** مستقل هستند پس $P(B|C)=P(B)$ بنابراین $P(B)=0/3$

۱۸- گزینه «۱» دشوار

فرض کنیم $P(A)=P(B)=x$ باشد چون **A** و **B** مستقل هستند $P(A\cap B)=P(A)\times P(B)=x^2$

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)\Rightarrow\frac{7}{16}=x+x-x^2$$

$$\Rightarrow x^2-2x+\frac{7}{16}=0$$

$$\Delta=b^2-4ac=(-2)^2-4(1)(\frac{7}{16})=4-\frac{7}{4}=\frac{9}{4}$$

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{2\pm\frac{3}{2}}{2}\Rightarrow\begin{cases}x_1=1/75\ \text{غ ق ق}\\x_2=0/25\end{cases}$$

چون **A** و **B** مستقل هستند پس A' و **B** هم مستقل می‌باشند بنابراین

$$P(A'|B)=P(A')=1-P(A)=1-x=0/375$$

۱۹- گزینه «۱» دشوار

چون $P(A|B)=P(A)$ پس **A** و **B** مستقل هستند.

$$P(B-A)=P(B)-P(A\cap B)\Rightarrow\frac{1}{5}=P(B)-P(A)\times P(B)$$

$$\Rightarrow\frac{1}{5}=P(B)-\frac{1}{3}P(B)\Rightarrow\frac{1}{5}=\frac{2}{3}P(B)\Rightarrow P(B)=\frac{3}{10}$$

$$P(A\cap B)=P(A)\times P(B)=\frac{1}{3}\times\frac{3}{10}=\frac{1}{10}$$

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=\frac{1}{3}+\frac{3}{10}-\frac{1}{10}$$

$$=\frac{10+9-3}{30}=\frac{16}{30}=\frac{8}{15}$$

۲۰- گزینه «۴» دشوار

$$P(A\cap B)=P(A)\times P(B)=0/4$$

$$P(A'\cap B)=P(A')\times P(B)\Rightarrow 0/1=(1-P(A))P(B)$$

$$\Rightarrow 0/1=P(B)-\underbrace{P(A)\times P(B)}_{0/4}\Rightarrow P(B)=0/5$$

$$P(A)\times P(B)=0/4\Rightarrow P(A)\times 0/5=0/4\Rightarrow P(A)=0/8$$

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=0/8+0/5-0/4=0/9$$

۲۱- گزینه «۳» دشوار

چون **A** و **B** مستقل هستند $P(A\mid B)=P(A)=\frac{۳}{۴}$

$P(A-B)=P(A)-P(A\cap B) \Rightarrow \frac{۱}{۱۰}=\frac{۳}{۴}-P(A\cap B)$

$\Rightarrow P(A\cap B)=\frac{۳}{۴}-\frac{۱}{۱۰}=\frac{۱۳}{۲۰}$

$P(A\cap B)=P(A)\times P(B) \Rightarrow \frac{۱۳}{۲۰}=\frac{۳}{۴}P(B) \Rightarrow P(B)=\frac{۱۳}{۱۵}$

$P(B-A)=P(B)-P(A\cap B)=\frac{۱۳}{۱۵}-\frac{۱۳}{۲۰}=\frac{۱۳}{۶۰}$

$P(B\mid A)=P(B)=\frac{۱۳}{۱۵}$

$P(B-A)+P(B\mid A)=\frac{۱۳}{۶۰}+\frac{۱۳}{۱۵}=\frac{۱۳+۵۲}{۶۰}=\frac{۶۵}{۶۰}=\frac{۱۳}{۱۲}$

۲۲- گزینه «۴» متوسط

$۴P(A\mid B)=۱ \Rightarrow ۴P(A)=۱ \Rightarrow P(A)=\frac{۱}{۴} \Rightarrow P(A')=\frac{۳}{۴}$

$۵P(B\mid A)=۱ \Rightarrow ۵P(B)=۱ \Rightarrow P(B)=\frac{۱}{۵} \Rightarrow P(B')=\frac{۴}{۵}$

$P(A'\cap B')=P(A')\times P(B')=\frac{۳}{۴}\times\frac{۴}{۵}=\frac{۳}{۵}$

$P(A'\cup B')=P(A')+P(B')-P(A'\cap B')=\frac{۳}{۴}+\frac{۴}{۵}-\frac{۳}{۵}$

$=\frac{۱۵+۱۶-۱۲}{۲۰}=\frac{۱۹}{۲۰}=۰/۹۵$

۲۳- گزینه «۱» متوسط

چون **A** و **B** مستقل هستند پس A', B, A', B' هم مستقل هستند.

$\left.\begin{matrix}P(A'\mid B)=P(A')\\P(B'\mid A')=P(B')\end{matrix}\right\} \Rightarrow P(A'\mid B)+P(B'\mid A)=P(A')+P(B')$

$=۱-P(A)+۱-P(B)=۲-\underbrace{(P(A)+P(B))}_{\frac{۶}{۵}}=\frac{۴}{۵}$

۲۴- گزینه «۴» دشوار

چون **A** و **B** مستقل هستند پس $P(A\cap B)=P(A)\times P(B)$ و

می‌دانیم $(A\Delta B)\cap(A\cup B)=A\Delta B$ است

$P(A\Delta B\mid A\cup B)=\frac{۱}{۳} \Rightarrow \frac{P((A\Delta B)\cap(A\cup B))}{P(A\cup B)}=\frac{۱}{۳}$

$\Rightarrow \frac{P(A\Delta B)}{P(A\cup B)}=\frac{۱}{۳}$ (۱)

چون **A** و **B** هم شانس هستند پس $P(A)=P(B)=x$

$P(A\Delta B)=P(A-B)+P(B-A)$

$=P(A)-P(A\cap B)+P(B)-P(A\cap B)$

$=P(A)+P(B)-۲P(A)\times P(B)=۲x-۲x^۲$ (۲)

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=P(A)+P(B)-P(A)\times P(B)$

$=x+x-x^۲=۲x-x^۲$ (۳)

از (۱) و (۲) و (۳) داریم:

$\frac{۲x-۲x^۲}{۲x-x^۲}=\frac{۱}{۳} \Rightarrow \frac{۲-۲x}{۲-x}=\frac{۱}{۳} \Rightarrow ۶-۶x=۲-x$

$\Rightarrow ۴=۵x \Rightarrow x=\frac{۴}{۵}$

$\Rightarrow P(B)=\frac{۴}{۵}$

۲۵- گزینه «۴» دشوار

$P(A'\cup B')=P(A)P(B')+P(A') \Rightarrow P(A')+P(B')-P(A'\cap B')$

$=P(A)\times P(B')+P(A') \Rightarrow$

$P(A'\cap B')=P(B')-P(A)P(B')=P(B')(۱-P(A))$

$\Rightarrow P(A'\cap B')=P(B')P(A')$

پس A', B' مستقل هستند بنابراین **A** و **B** نیز مستقل هستند.

$P(A\Delta B)=P(A-B)+P(B-A)$

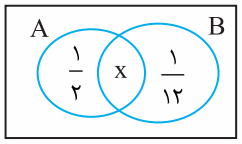
$=P(A)-P(A\cap B)+P(B)-P(A\cap B)=P(A)+P(B)-۲P(A\cap B)$

$P(A)+P(B)-۲P(A)P(B)$

۲۶- گزینه «۴» دشوار

اگر $P(A\cap B)$ را **x** فرض کنیم داریم

$P(A)=\frac{۱}{۲}+x \qquad P(B)=\frac{۱}{۱۲}+x$



چون **A** و **B** مستقل هستند، داریم

$P(A\cap B)=P(A)\times P(B) \Rightarrow x=(\frac{۱}{۲}+x)(\frac{۱}{۱۲}+x)$

$\Rightarrow x=\frac{۱}{۲۴}+\frac{۷}{۱۲}x+x^۲ \xrightarrow{\times ۲۴} ۲۴x^۲-۱۰x+۱=۰$

$\Delta=۱۰۰-۴(۲۴)=۴ \Rightarrow \sqrt{\Delta}=۲$

$x=\frac{۱۰\pm ۲}{۴۸} \Rightarrow \begin{cases}x=\frac{۱}{۴}\\x=\frac{۱}{۶}\end{cases}$

اگر $x=\frac{۱}{۴}$ باشد $P(A\cap B)=\frac{۱}{۴}, P(B)=\frac{۱}{۳}, P(A)=\frac{۳}{۴}$

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=\frac{۳}{۴}+\frac{۱}{۳}-\frac{۱}{۴}=\frac{۹+۴-۳}{۱۲}=\frac{۵}{۶}$

اگر $x=\frac{۱}{۶}$ باشد $P(A\cap B)=\frac{۱}{۶}, P(B)=\frac{۱}{۴}, P(A)=\frac{۲}{۳}$

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=\frac{۲}{۳}+\frac{۱}{۴}-\frac{۱}{۶}$

$=\frac{۸+۳-۲}{۱۲}=\frac{۹}{۱۲}=\frac{۳}{۴}$

۲۷- گزینه «۲» دشوار

چون $\{b , c\} , \{a , b\}$ مستقل هستند داریم:

$$P(\{a , b\} \cap \{b , c\}) = P(\{a , b\}) \times P(\{b , c\})$$

$$\Rightarrow P(b) = \frac{۲}{۳} \times \frac{۳}{۵} \Rightarrow P(b) = \frac{۲}{۵}$$

$$P(\{a , b\}) = P(a) + P(b) \Rightarrow \frac{۲}{۳} = P(a) + \frac{۲}{۵} \Rightarrow P(a) = \frac{۴}{۱۵}$$

$$P(\{b , c\}) = P(b) + P(c) \Rightarrow \frac{۳}{۵} = \frac{۲}{۵} + P(c) \Rightarrow P(c) = \frac{۱}{۵}$$

$$P(a) + P(b) + P(c) + P(d) = ۱ \Rightarrow \frac{۴}{۱۵} + \frac{۲}{۵} + \frac{۱}{۵} + P(d) = ۱$$

$$\Rightarrow P(d) = \frac{۲}{۱۵}$$

۲۸- گزینه «۱» متوسط

بـــه هـــدف خـــوردن تیرهـــای **A** و **B** مســـتقل از هـــم هســـتند پس

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B) = \frac{x}{۲}$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$\Rightarrow \frac{۵}{۶} = \frac{۱}{۲} + x - \frac{x}{۲} \Rightarrow \frac{۱}{۳} = \frac{x}{۲} \Rightarrow x = \frac{۲}{۳}$$

۲۹- گزینه «۲» متوسط

پیشامد آن که داروی ساخته شده حداقل روی یک نفر جواب منفی داشته باشد، متمم آن است که این دارو روی هر ۳ نفر جواب مثبت داشته باشد و جواب دارو روی هر نفر مستقل از نفر بعدی است

$$P(A \cap B \cap C) = P(A) \times P(B) \times P(C) = ۰/۸ \times ۰/۸ \times ۰/۸ = ۰/۵۱۲$$

$$P(A \cap B \cap C)' = ۱ - P(A \cap B \cap C) = ۱ - ۰/۵۱۲ = ۰/۴۸۸$$

۳۰- گزینه «۴» دشوار

اگر احتمال موفقیت دوست شخصی $P(B) = x$ باشد احتمال موفقیت خود شخص $P(A) = ۲x$ است و موفقیت هر شخصی مستقل از نفر دیگر است $(۰ \le x \le \frac{۱}{۲})$

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B) = ۲x^۲$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$\Rightarrow \frac{۷}{۹} = ۲x + x - ۲x^۲ \Rightarrow ۲x^۲ - ۳x + \frac{۷}{۹} = ۰$$

$$\Delta = ۹ - ۴(۲)(\frac{۷}{۹}) = \frac{۸۱ - ۵۶}{۹} = \frac{۲۵}{۹} \Rightarrow \sqrt{\Delta} = \frac{۵}{۳}$$

$$x = \frac{۳ \pm \frac{۵}{۳}}{۴} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{۷}{۶} \text{ غ ق ق} \\ x = \frac{۱}{۳} \end{cases}$$

$$P(A) = ۲x = \frac{۲}{۳}$$

۳۱- گزینه «۲» دشوار

دو پیشامد آن که از پرتاب ۴ سکه فقط یک سکه رو بیاید (A) و در پرتاب دو تاس مجموع دو تاس ۸ شود (B) مستقل از هم هستند

اگر ۴ سکه را پرتاب کنیم داریم

		۱		
	۱	۲	۱	
۱	۳	۳	۱	
۱	④	۶	۴	۱
رو	۰	۱	۲	۳	۴

$$P(A) = \frac{۴}{۱+۴+۶+۴+۱} = \frac{۱}{۴}$$

و در پرتاب دو تاس اگر مجموع دو تاس $(۲ \le x \le ۱۲)$ شود داریم

$$n(B) = \begin{cases} x - ۱ & ۲ \le x \le ۷ \\ ۱۳ - x & ۷ \le x \le ۱۳ \end{cases} \qquad P(B) = \frac{۱۳ - ۸}{۳۶} = \frac{۵}{۳۶}$$

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B) = \frac{۱}{۴} \times \frac{۵}{۳۶} = \frac{۵}{۱۴۴}$$

۳۲- گزینه «۱» آسان

پیشامد موفقیت علی (A) و موفقیت رضا (B) مستقل از یکدیگر هستند بنابراین A' , B' هم مستقل از هم هستند

$$P(A) = ۱ - P(A) = ۰/۳ \qquad P(B) = ۱ - P(B) = ۱ - ۰/۶ = ۰/۴$$

$$P(A' \cap B') = P(A') \times P(B') = ۰/۳ \times ۰/۴ = ۰/۱۲$$

۳۳- گزینه «۳» آسان

پیشامد قهرمانی تیم فوتبال (A) و قهرمانی تیم والیبال (B) مستقل از یکدیگر هستند

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B) = ۰/۴ \times ۰/۳ = ۰/۱۲$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = ۰/۴ + ۰/۳ - ۰/۱۲ = ۰/۵۸$$

۳۴- گزینه «۴» متوسط

احتمال موفقیت هر کدام مستقل از یکدیگر است و متمم این پیشامد آن است که هر ۳ نفر موفق نشوند پس داریم:

$$P(A' \cap B' \cap C') = P(A') \times P(B') \times P(C')$$

$$= (۱ - P(A))(۱ - P(B))(۱ - P(C)) = \frac{۱}{۳} \times \frac{۱}{۴} \times \frac{۱}{۲} = \frac{۱}{۲۴}$$

$$P(A \cup B \cup C)' = ۱ - P(A' \cap B' \cap C') = ۱ - \frac{۱}{۲۴} = \frac{۲۳}{۲۴}$$

۳۵- گزینه «۴» متوسط

پیشامد آن که از ۳ سکه فقط یک رو باشد را **A** فرض می‌کنیم

		۱		
	۱	۲	۱	
۱	③	۳	۱	
رو	۰	۱	۲	۳

$$P(A)=\frac{۳}{۱+۳+۳+۱}=\frac{۳}{۸}$$

پیشامد آن که تاس زوج بیاید را **B** می‌نامیم که $P(B)=\frac{۱}{۲}$

A و **B** دو پیشامد مستقل هستند پس

$$P(A\cap B)=P(A)\times P(B)=\frac{۳}{۸}\times\frac{۱}{۲}=\frac{۳}{۱۶}$$

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=\frac{۳}{۸}+\frac{۱}{۲}-\frac{۳}{۱۶}$$

$$=\frac{۶+۸-۳}{۱۶}=\frac{۱۱}{۱۶}$$

۳۶- گزینه «۳» متوسط

برای مرحله اول و مرحله دوم مستقل از هم هستند و متمم پیشامد آن که به مرحله نهایی برسد آن است که به این مرحله نرسد یعنی هر دو بازی را شکست بخورد

$$P(A'\cap B')=P(A')\times P(B')=(۱-P(A))(۱-P(B))$$
$$=۰/۶\times۰/۶=۰/۳۶$$

$$P(A'\cap B')'=۱-P(A'\cap B')=۱-۰/۳۶=۰/۶۴$$

۳۷- گزینه «۴» آسان

احتمال به دنیا آمدن هر فرزند در روز شنبه برابر $\frac{۱}{۷}$ است و پیشامدهای به دنیا آمدن هر فرزند در روز شنبه با فرزند دیگر مستقل است

$$P(A\cap B\cap C)=P(A)\times P(B)\times P(C)=\frac{۱}{۷}\times\frac{۱}{۷}\times\frac{۱}{۷}=\frac{۱}{۳۴۳}$$

۳۸- گزینه «۳» متوسط

$$n(S)=۷\times۷\times۷=۳۴۳$$

نفر سوم نباید در روزهایی که نفر دوم و اول به دنیا آمده‌اند، متولد شده باشد و نفر دوم نباید در روزی که نفر اول به دنیا آمده متولد شود

$$n(A)=۷\times۶\times۵=۲۱۰$$

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۲۱۰}{۳۴۳}=\frac{۳۰}{۴۹}$$

۳۹- گزینه «۱» متوسط

اگر پیشامد درست حل کردن فرهاد و حسن و دانیال را به ترتیب A, B, C فرض کنیم چون پیشامد درست حل کردن هر کدام مستقل از دیگری است داریم

$P(A\cap B'\cap C')=P(A)P(B')P(C')$ فقط فرهاد درست حل می‌کند

$=۰/۶\times۰/۲\times۰/۳=۰/۰۳۶$

$P(A'\cap B\cap C')=P(A')P(B)P(C')$ فقط حسن درست حل می‌کند

$=۰/۴\times۰/۸\times۰/۳=۰/۰۹۶$

$P(A'\cap B'\cap C)=P(A')P(B')P(C)$ فقط دانیال درست حل می‌کند

$=۰/۴\times۰/۲\times۰/۷=۰/۰۵۶$

$P(A\cap B'\cap C')+P(A'\cap B\cap C')$ فقط یک نفر درست حل می‌کند

$+P(A'\cap B'\cap C)=۰/۰۳۶+۰/۰۹۶+۰/۰۵۶=۰/۱۸۸$

۴۰- گزینه «۳» دشوار

پیشامد به هدف زدن هر یک از اشخاص A, B, C مستقل از هم هستند اگر پیشامد آن که دقیقاً دو نفر به هدف بزنند را **D** بنامیم داریم

$$P(D)=P(A\cap B\cap C')+P(A\cap B'\cap C)+P(A'\cap B\cap C)$$
$$=P(A)\times P(B)\times P(C')+P(A)\times P(B')\times P(C)+$$
$$P(A')\times P(B)\times P(C)=$$
$$(۰/۴)(۰/۷)(۰/۵)+(۰/۴)(۰/۳)(۰/۵)+(۰/۶)(۰/۷)(۰/۵)$$
$$=۰/۱۴+۰/۰۶+۰/۲۱\Rightarrow P(D)=۰/۴۱$$

$$P(A\cap D)=P(A\cap B\cap C')+P(A\cap B'\cap C)$$
$$=P(A)P(B)P(C')+P(A)P(B')P(C)$$
$$=(۰/۴)(۰/۷)(۰/۵)+(۰/۴)(۰/۳)(۰/۵)$$
$$\Rightarrow P(A\cap D)=۰/۱۴+۰/۰۶=۰/۲$$

$$P(A\mid D)=\frac{P(A\cap D)}{P(D)}=\frac{۰/۲}{۰/۴۱}=\frac{۲۰}{۴۱}$$

۴۱- گزینه «۱» آسان

پیشامدهای به هدف زدن دو برادر مستقل از هم هستند پس

$$P(A\cap B)=P(A)\times P(B)=۰/۴\times۰/۳=۰/۱۲$$

$$P(A\Delta B)=P(A)+P(B)-۲P(A\cap B)=۰/۴+۰/۳-۰/۲۴=۰/۴۶$$

۴۲- گزینه «۳» آسان

پیشامدهای به دست آوردن نمره خوب در درس ریاضی و فیزیک مستقل از هم هستند

$$P(A\cap B=P(A\cap B)=P(A)\times P(B)=۰/۸\times۰/۷=۰/۵۶$$

۴۳- گزینه «۳» **متوسط**

پیشامد آمد ۶ آمدن در هر بار پرتاب با هم مستقل هستند و متمم پیشامد آن که حداقل یکبار ۶ بیاید آن است که اصلاً ۶ نیاید

$$P(A'\cap B'\cap C')=P(A')P(B')P(C')=\frac{5}{6}\times\frac{5}{6}\times\frac{5}{6}=\frac{125}{216}$$

$$P(A'\cap B'\cap C')'=1-P(A'\cap B'\cap C')=1-\frac{125}{216}=\frac{91}{216}$$

۴۴- گزینه «۱» **متوسط**

پیشامدهای به هدف زدن علی و حسن مستقل از هم هستند

$$P(A\cap B)=P(A)\times P(B)=0/6\times 0/4=0/24$$

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=0/6+0/4-0/24=0/76$$

$$P(A\mid A\cup B)=\frac{P(A\cap(A\cup B))}{P(A\cup B)}=\frac{P(A)}{P(A\cup B)}=\frac{0/6}{0/76}=\frac{15}{19}$$

۴۵- گزینه «۲» **آسان**

چون رنگ مهره اول را نمی‌دانیم، این که مهره چه رنگی باشد در نهایت تأثیری در احتمال سفید بودن مهره دوم نمی‌گذارد پس $n(A)=6\ ,\ n(S)=10$

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{6}{10}=0/6$$

۴۶- گزینه «۴» **متوسط**

مسئله به ۲ قسمت تقسیم می‌شود اول این که هر دو مهره سفید باشند و پیشامد سفید بودن مهره کیسه **A** و کیسه **B** مستقل از هم هستند و قسمت دوم این که هر دو مهره سیاه باشند و پیشامد سیاه بودن مهره کیسه **A** و کیسه **B** نیز مستقل هستند پس

$$P(\text{همرنگ بودن})=P(\text{سفید کیسه A})\times P(\text{سفید کیسه B})$$
$$+P(\text{سیاه کیسه A})\times P(\text{سیاه کیسه B})=\frac{2}{5}\times\frac{3}{7}+\frac{3}{5}\times\frac{4}{7}=\frac{18}{35}$$

۴۷- گزینه «۴» **متوسط**

متمم این پیشامد آن است که دو مهره هم رنگ باشند و پیشامد سفید بودن کیسه **A** با سفید بودن کیسه مستقل است است و پیشامد سبز بودن کیسه **A** با پیشامد سبز بودن کیسه **B** مستقل هستند.

$$P(\text{همرنگ})=P(\text{سفید A})\times P(\text{سفید B})+P(\text{سیاه A})\times P(\text{سیاه B})$$
$$=\frac{4}{10}\times\frac{6}{8}+\frac{1}{10}\times\frac{2}{8}=\frac{26}{80}=\frac{13}{40}$$

$$P(\text{ناهمرنگ})=1-P(\text{همرنگ})=1-\frac{13}{40}=\frac{27}{40}$$

۴۸- گزینه «۱» **متوسط**

پیشامد این که ژن پدر منفی باشد مستقل از آن است که ژن مادر منفی باشد پس داریم

$$P(\text{ژن شخص منفی})=P(\text{ژن پدر منفی})\times P(\text{ژن مادر منفی})=0/4\times 0/4=0/16$$

۴۹- گزینه «۱» **آسان**

اگر **A** و **B** پیشامد خارج شدن گوی با شماره زوج در مرتبه‌های اول و دوم باشند این پیشامدها مستقل هستند و چون با جایگذاری ۲ گوی را انتخاب کرده‌ایم $P(A)=P(B)=\frac{2}{5}$

$$P(A\cap B)=\frac{2}{5}\times\frac{2}{5}=\frac{4}{25}=0/16$$

۵۰- گزینه «۲» **متوسط**

باید دقت کنیم برداشتن مهره‌ها مستقل از هم می‌باشند و با برداشتن یک مهره (چون بدون جایگذاری مهره‌ها را خارج می‌کنیم) یکی از آن رنگ و یکی از مهره‌های کل کم می‌شود

A را پیشامد مهره اول و B را پیشامد مهره دوم فرض می‌کنیم.

$$P(\text{همرنگ نباشند})=P(\text{A سفید})P(\text{B سیاه})+P(\text{A سیاه})P(\text{B سفید})$$
$$=\frac{3}{10}\times\frac{7}{9}+\frac{7}{10}\times\frac{3}{9}=\frac{42}{90}=\frac{7}{15}$$

۵۱- گزینه «۳» **متوسط**

برداشتن مهره‌ها مستقل از هم هستند و متمم پیشاد آن که حداقل ۱ مهره آبی باشد آن است که هیچ مهره‌ای آبی نباشد

$$P(A')=P(\text{مهره اول آبی نباشد})\times P(\text{مهره دوم آبی نباشد})=\frac{7}{10}\times\frac{6}{9}=\frac{42}{90}=\frac{7}{15}$$

$$P(A)=1-P(A')=1-\frac{7}{15}=\frac{8}{15}$$

۵۲- گزینه «۲» **آسان**

چون نمی‌دانیم دو مهره‌ای که خارج شده چه رنگی دارد پس مانند آن است که مهره‌ای از جعبه خارج شده است بنابراین $n(A)=3\ ,\ n(S)=7$ است

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{3}{7}$$

۵۳- گزینه «۴» **آسان**

چون نمی‌دانیم دو مهره‌ای که خارج شده چه رنگی دارد پس مانند آن است که مهره‌ای از جعبه خارج نشده است بنابراین $n(A)=4\ ,\ n(S)=7$ است

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{4}{7}$$

۵۴- گزینه «۲» **آسان**

برداشتن مهره‌ها مستقل از یکدیگر است و چون مهره‌ها را بدون جایگذاری برمی‌داریم در هر مرحله تعداد مهره‌ها یکی کم‌تر از مرحله قبلی است

$$P(\text{اولی فرد و دومی زوج})=P(\text{اولی فرد})P(\text{دومی زوج})=\frac{4}{7}\times\frac{3}{6}=\frac{2}{7}$$

۵۵- گزینه «۴» متوسط

دقت کنید تفاوت این تمرین با تمرین قبلی آن است که مهره اول می‌تواند زوج و مهره دوم فرد باشد و یا این که مهره اول فرد و مهره دوم زوج باشد

$$P(A)=P(\text{اولی زوج})P(\text{دومی فرد})+P(\text{اولی فرد})P(\text{دومی زوج})$$
$$=\frac{۳}{۷}\times\frac{۴}{۶}+\frac{۴}{۷}\times\frac{۳}{۶}=\frac{۴}{۷}$$

۵۶- گزینه «۱» متوسط

هر پرتاب مستقل از پرتاب دیگر است و پیشامد این که حداقل دو عدد ظاهر شده شبیه هم باشند متمم آن است که عدد ظاهر شده در ۳ پرتاب هیچ کدام شبیه هم نباشند بنابراین داریم

$$P(A')=\frac{۶}{۶}\times\frac{۵}{۶}\times\frac{۴}{۶}=\frac{۵}{۹}$$

$$P(A)=۱-P(A')=۱-\frac{۵}{۹}=\frac{۴}{۹}$$

۵۷- گزینه «۲» آسان

چون مهره‌ها با جایگذاری خارج می‌شوند، برداشت اول و دوم مستقل از هم هستند

$$P(A)=\frac{۲}{۷}\times\frac{۴}{۷}=\frac{۸}{۴۹}$$

۵۸- گزینه «۳» دشوار

انتخاب مهره از ظرف اول شامل $\{۱,۳,۵,۷,۹\}$ و ظرف دوم که شامل $\{۲,۴,۶,۸\}$ است مستقل از هم هستند و در احتمال آمدن هر عدد از ظرف اول برابر $\frac{۱}{۵}$ و از ظرف دوم برابر $\frac{۱}{۴}$ است که چون مستقل هستند $\frac{۱}{۵}\times\frac{۱}{۴}=\frac{۱}{۲۰}$ احتمال انتخاب هر دو عدد است و در ۶ حالت $(۱,۲),(۱,۴),(۱,۶),(۱,۸),(۳,۲),(۵,۲)$ حاصلضرب اعداد انتخاب بیشتر از ۱۰ نیست.

$$P(\text{حاصلضرب اعداد انتخابی بیشتر از ۱۰})=۶\times\frac{۱}{۲۰}=۰/۳$$

$$P(\text{حاصلضرب اعداد انتخابی بیشتر یا مساوی ۱۰ باشد})=۱-۰/۳=۰/۷$$

۵۹- گزینه «۱» دشوار

انتخاب مهره از دو جعبه مختلف مستقل از هم است. بنابراین داریم

$$n(S)=\binom{۸}{۱}\binom{۵}{۱}=۸\times۵=۴۰$$

$$A=\{(۴,۵),(۵,\boxed{۴,۵}),(۶,\boxed{۳,۴,۵}),(۷,\boxed{۲,۳,۴,۵}),(۸,\boxed{۱,۲,۳,۴,۵})\}\Rightarrow n(A)=۱۵$$

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۱۵}{۴۰}=\frac{۳}{۸}$$

۶۰- گزینه «۲» متوسط

طبق توضیحات درسنامه داریم

	دختر	پسر
سال اول	۱۵	۹
سال دوم	۲۰	x

$$\frac{۱۵}{۲۰}=\frac{۹}{x}\Rightarrow x=\frac{۹\times۲۰}{۱۵}=۱۲$$

۱- آسان

آ) ناسازگار ـ $\varnothing$ ـ سازگار

ب) $P(A\cap B)=P(A)\times P(B)$ یا $P(A\mid B)=P(A)$

۲- آسان

آ) برآمد ب) آمار

۳- دشوار

اگر **A** و **B** زیر مجموعه های از **S** باشند، **A** مضرب‌های ۴ و **B** مضرب ۶ باشد داریم

$$n(S)=۱۰۰$$

$$A=\{۴,۸,۱۲,\ldots,۱۰۰\}\Rightarrow n(A)=[\frac{۱۰۰}{۴}]=۲۵$$

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۲۵}{۱۰۰}=۰/۲۵$$

$$B=\{۶,۱۲,۱۸,\ldots,۹۶\}\Rightarrow n(B)=[\frac{۱۰۰}{۶}]=۱۶$$

$$P(B)=\frac{n(B)}{n(S)}=\frac{۱۶}{۱۰۰}=۰/۶$$

$$A\cap B=\{۱۲,۲۴,\ldots,۹۶\}\Rightarrow n(A\cap B)=[\frac{۱۰۰}{۱۲}]=۸$$

$$P(A\cap B)=\frac{n(A\cap B)}{n(S)}=\frac{۸}{۱۰۰}=۰/۰۸$$

آ) $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$

$$=۰/۲۵+۰/۱۶-۰/۰۸=۰/۳۳$$

ب) $P(A-B)=P(A)-P(A\cap B)=۰/۲۵-۰/۰۸=۰/۱۷$

۴- متوسط

I	۱	۲	۳	۴	۵	۶
P(i)	x	۳x	۵x	۷x	۹x	۱۱x

$$P(۱)+P(۲)+P(۳)+P(۴)+P(۵)+P(۶)=۱$$

$$\Rightarrow x+۳x+۵x+۷x+۹x+۱۱x=۱ \Rightarrow ۳۶x=۱ \Rightarrow x=\frac{۱}{۳۶}$$

$$P(\{۱,۴\})=P(۱)+P(۴)=x+۷x=۸x=\frac{۸}{۳۶}=\frac{۲}{۹}$$

۵- متوسط

$$\left.\begin{array}{l} P(\{a,b\})=\frac{۳}{۷} \Rightarrow P(a)+P(b)=\frac{۳}{۷} \\ P(\{a,b,c\})=\frac{۵}{۷} \Rightarrow P(a)+P(b)+P(c)=\frac{۵}{۷} \end{array}\right\} \Rightarrow P(c)=\frac{۲}{۷}$$

$$\underbrace{P(a)+P(b)+P(c)}_{\frac{۵}{۷}}+P(d)=۱ \Rightarrow P(d)=\frac{۲}{۷}$$

۶- دشوار

$$n(S)=$$ ○×○×⊘×○×○×○×○×○×⊘×○×○

$$\Rightarrow n(S)=\binom{۱۱}{۲}=\frac{۱۱\times۱۰}{۲}=۵۵$$

$$n(A)=$$ ○○○○○○⊘○○○○ $\Rightarrow n(A)=\binom{۴}{۱}=۴$

(هفتم: ⊘؛ احمد: ○○○○○○؛ حسن: ○○○○)

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۴}{۵۵}$$

۷- آسان

فضای نمونه را کاهش می‌دهیم:

$$S=\{(۱,۵),(۲,۴),(۳,۳),(۴,۲),(۵,۱),(۶,۶)\} \Rightarrow n(S)=۶$$

$$A=\{(۲,۴),(۴,۲\} \Rightarrow n(A)=۲$$

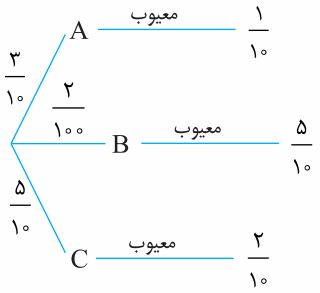
$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۲}{۶}=\frac{۱}{۳}$$

۸- دشوار

$$P(M=\text{معیوب})=\frac{۳}{۱۰}\times\frac{۱۰}{۱۰۰}+\frac{۲}{۱۰}\times\frac{۵}{۱۰۰}+\frac{۵}{۱۰}+\frac{۲۰}{۱۰۰}=\frac{۳+۱+۱۰}{۱۰۰}=\frac{۱۴}{۱۰۰}$$

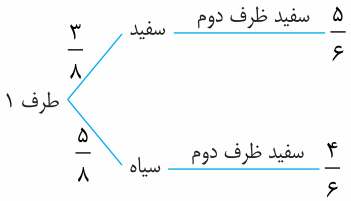
$$P(B\cap M)=\frac{۲}{۱۰}\times\frac{۵}{۱۰۰}=\frac{۱}{۱۰۰}$$

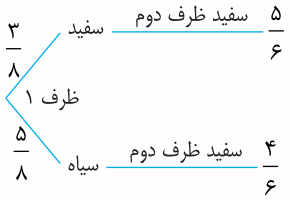
$$P(B\mid M)=\frac{P(B\cap M)}{P(M)}=\frac{\frac{۱}{۱۰۰}}{\frac{۱۴}{۱۰۰}}=\frac{۱}{۱۴}$$



۹- دشوار

$$P(\text{سفید})=\frac{۳}{۸}\times\frac{۵}{۶}+\frac{۵}{۸}\times\frac{۴}{۶}=\frac{۳۵}{۴۸}$$





۱۰- متوسط

اگر **A** پیشامد اینکه اولی سبز و **B** پیشامد آنکه دومی سفید و **C** پیشامد اینکه سومی قرمز باشد داریم:

$$P(A)=\frac{۱}{۷}$$

$$P(B\mid A)=\frac{۲}{۶}=\frac{۱}{۳}$$

$$P(C\mid A\cap B)=\frac{۲}{۵}$$

$$P(A\cap B\cap C)=P(A)\times P(B\mid A)\times P(C\mid A\cap B)=\frac{۱}{۷}\times\frac{۱}{۳}\times\frac{۲}{۵}=\frac{۲}{۱۰۵}$$

۱۱- آسان

$\{۱,۲,۳,۴\}-\{۱,۲,۳\}\{۴\}-\{۱,۲,۴\}\{۳\}-\{۱,۲\}\{۳,۴\}-\{۱,۲\}\{۳\}\{۴\}-\{۱,۲\}\{۳\}\{۴\}\{۱,۲\}$

۱۲- متوسط

$S=\{(ر،ر،ر)\ ,\ (پ،ر،ر)\ ,\ (ر،پ،ر)\ ,\ (پ،پ،ر)\ ,\ (ر،ر،پ)\ ,\ (پ،ر،پ)\ ,\ (ر،پ،پ)\ ,\ (پ،پ،پ)\}$

$\Rightarrow n(S)=۸$

$A=\{(ر،ر،ر)\ ,\ (پ،ر،ر)\ ,\ (ر،پ،ر)\ ,\ (ر،ر،پ)\}\ \Rightarrow\ n(A)=۴$

$P(A)=\frac{۴}{۸}=\frac{۱}{۲}$

$B=\{(پ،پ،ر)\ ,\ (پ،ر،پ)\ ,\ (ر،پ،پ)\}\ \Rightarrow\ n(B)=۳$

$P(B)=\frac{n(B)}{n(S)}=\frac{۳}{۸}$

$A\cap B=\{(پ،پ،ر)\ ,\ (پ،ر،پ)\}\ \Rightarrow\ n(A\cap B)=۲$

$P(A\cap B)=\frac{n(A\cap B)}{n(S)}=\frac{۲}{۸}=\frac{۱}{۴}$

$P(A\cap B)\neq P(A)\times P(B)\ \Rightarrow$ A و B وابسته هستند

۱۳- متوسط

به هدف خوردن تیرهای **A** و **B** مستقل از هم هستند و چون **A** و **B** مستقل هستند پس B' و A' نیز مستقل هستند و A' و B' هم مستقل هستند.

$P(A')=۱-P(A)=۰/۳$

$P(B')=۱-P(B)=۰/۴$

آ) $P(A\cap B')=P(A)\times P(B')=۰/۷\times ۰/۴=۰/۲۸$

ب) $P(A'\cap B')=P(A')\times P(B')=۰/۳\times ۰/۴=۰/۱۲$

۱۴- متوسط

$\frac{P(A\cap B')}{P(A\cap B)}=\frac{۰/۶}{۰/۲}\ \Rightarrow\ \frac{P(A)\times P(B')}{P(A)\times P(B)}=۳$

$\Rightarrow \left.\begin{matrix}P(B')=۳P(B)\\P(B')+P(B)=۱\end{matrix}\right\}\ P(B)=\frac{۱}{۴}\ P(B')=\frac{۳}{۴}$

$P(A\cap B)=۰/۲\ \Rightarrow\ P(A)\times P(B)=۰/۲$

$\Rightarrow P(A)\times\frac{۱}{۴}=۰/۲\ \Rightarrow\ P(A)=۰/۸$

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=۰/۸+۰/۲۵-۰/۲=۰/۸۵$

۱- آسان

آ) $A\subseteq B$ ب) کاهش فضای نمونه‌ای

پ) احتمال

۲- آسان

آ) پیشامد ب) مستقل

۳- متوسط

اگر **A** و **B** زیر مجموعه‌های **S** باشند که به ترتیب مضرب ۵ و ۷ باشند داریم:

$A=\{۵,۱۰,۱۵,\dots,۲۰۰\}\ \Rightarrow\ n(A)=[\frac{۲۰۰}{۵}]=۴۰\quad n(S)=۲۰۰$

$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۴۰}{۲۰۰}=۰/۲$

$B=\{۷,۱۴,۲۱,\dots,۱۹۶\}\ \Rightarrow\ n(B)=[\frac{۲۰۰}{۷}]=۲۸$

$P(B)=\frac{n(B)}{n(S)}=\frac{۲۸}{۲۰۰}=۰/۱۴$

$A\cap B=\{۳۵,۷۰,۱۵,۱۴۰,۱۷۵\}\ \Rightarrow\ n(A\cap B)=۵$

$\Rightarrow P(A\cap B)=\frac{n(A\cap B)}{n(S)}\Rightarrow p(A\cap B)=۰/۰۲۵$

آ) $P(A-B)=P(A)-P(A\cap B)=۰/۲-۰/۰۲۵=۰/۱۷۵$

ب) $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$

$=۰/۲+۰/۱۴-۰/۰۲۵=۰/۳۱۵$

$P(A'\cap B')=P(A'\cup B')=۱-P(A\cup B)=۱-۰/۳۱۵=۰/۶۸۵$

۴- متوسط

اگر فرض کنیم احتمال انتخاب **d** برابر **x** باشد داریم:

i	a	b	c	d
P(i)	۳x	۳x	۶x	x

$P(a)+P(b)+P(c)+P(d)=۱\ \Rightarrow\ ۳x+۳x+۶x+x=۱\ \Rightarrow\ x=\frac{۱}{۱۳}$

$P(a)=P(b)=۳x=\frac{۳}{۱۳}$

$P(c)=۶x=\frac{۶}{۱۳}$

$P(d)=x=\frac{۱}{۱۳}$

۵- متوسط

i	۱	۲	۳	۴	برخورد نکند
P(i)	۳x	۵x	۷x	۹x	$\frac{۱}{۵}$

$۳x+۵x+۷x+۹x+\frac{۱}{۵}=۱\ \Rightarrow\ ۲۴x=\frac{۴}{۵}\ \Rightarrow\ x=\frac{۱}{۳۰}$

$P(۲)=۵x=\frac{۵}{۳۰}=\frac{۱}{۶}$

۶- متوسط

می‌دانیم

$$P(A\,|\,B)+P(B\,|\,A)=۱-P(B'\,|\,A)+۱-P(A'\,|\,B)$$

$$=۱-\frac{۱}{۴}+۱-\frac{۳}{۵}=۲-\frac{۵+۱۲}{۲۰}=\frac{۲۳}{۲۰}$$

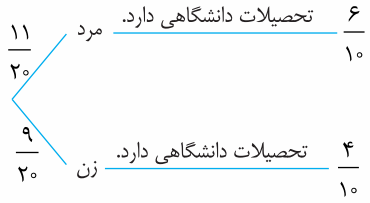
۷- آسان

$$\{۱,۲,۳\}\{۴\}\{۵\}-\{۱,۲,۳\}\{۴,۵\}-\{۱,۲,۳,۴\}\{۵\}-\{۱,۲,۳,۵\}\{۴\}$$

$$\{۱,۲,۳,۴,۵\}$$

۸- دشوار

$$P(M=\text{تحصیلات دانشگاهی داشتن})=\frac{۱۱}{۲۰}\times\frac{۶}{۱۰}+\frac{۹}{۲۰}\times\frac{۴}{۱۰}=۰/۵۱$$



اگر پیشامد مرد بودن **A** باشد:

$$P(A\cap M)=\frac{۱۱}{۲۰}\times\frac{۶}{۱۰}=۰/۳۳$$

$$P(A\,|\,M)=\frac{P(A\cap M)}{P(M)}=\frac{۰/۳۳}{۰/۵۱}=\frac{۳۳}{۵۱}=\frac{۱۱}{۱۷}$$

۹- آسان

دقت کنیم چون مهره‌ها را با جایگذاری انتخاب کرده‌ایم تعداد مهره‌ها در هر انتخاب ثابت مانده.

آ) $P(A)=P(\text{سفید})\times P(\text{سیاه})=\frac{۴}{۹}\times\frac{۵}{۹}=\frac{۲۰}{۸۱}$

ب) $P(B)=P(\text{سفید})\times P(\text{سفید})+P(\text{سیاه})P(\text{سیاه})=\frac{۴}{۹}\times\frac{۴}{۹}+\frac{۵}{۹}\times\frac{۵}{۹}=\frac{۴۱}{۸۱}$

۱۰- دشوار

$$n(S)=(○\times○\times○\times○\times○\times○\times○\times○\times○\times○)\Rightarrow n(S)=\binom{۹}{۲}=۳۶$$

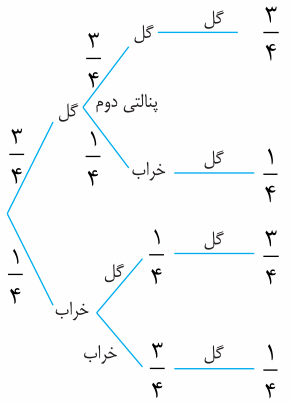
$$n(A)=(\underbrace{○}_{\text{فرهاد}}\times\underbrace{○\times○\times○\times○\times○\times○\times○\times○}_{\text{داوود}})\Rightarrow n(A)=\binom{۸}{۱}=۸$$

$$(B)=(\underbrace{○\times○\times○}_{\text{فرهاد}}\times\underbrace{○}_{\text{داوود}}\times○\times○\times○\times○\times○)\Rightarrow n(B)=\binom{۳}{۱}=۳$$

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۸}{۳۶}=\frac{۲}{۹}$$

$$P(B)=\frac{n(B)}{n(S)}=\frac{۳}{۳۶}=\frac{۱}{۱۲}$$

۱۱- دشوار



$$P(A)=\frac{۳}{۴}\times\frac{۳}{۴}\times\frac{۳}{۴}+\frac{۳}{۴}\times\frac{۱}{۴}\times\frac{۱}{۴}+\frac{۱}{۴}\times\frac{۱}{۴}\times\frac{۳}{۴}+\frac{۱}{۴}\times\frac{۳}{۴}\times\frac{۱}{۴}$$

$$\Rightarrow P(A)=\frac{۲۷+۳+۳+۳}{۶۴}=\frac{۳۶}{۶۴}=\frac{۹}{۱۶}$$

۱۲- متوسط

$$n(S)=۳۶$$

$$A=\{(۳,۱),(۳,۲),(۳,۳),(۳,۴),(۳,۵),(۳,۶)\}\Rightarrow n(A)=۶$$

$$P(A)=\frac{۶}{۳۶}=\frac{۱}{۶}$$

$$B=\{(۴,۶),(۵,۵),(۶,۴)\}\Rightarrow n(B)=۳$$

$$P(B)=\frac{n(B)}{n(S)}=\frac{۳}{۳۶}=\frac{۱}{۱۲}$$

$$A\cap B=\varnothing\Rightarrow P(A\cap B)=۰$$

$P(A\cap B)\neq P(A)\times P(B)\Rightarrow$ A و B مستقل نیستند.

۱۳- متوسط

قبولی افراد در کنکور مستقل از هم هستند.

$P(A\cap B\cap C')=P(A)\times P(B)\times P(C')$ فقط A و B قبول شدند

$=۰/۴\times۰/۳\times۰/۵=۰/۰۶$

$P(A\cap B'\cap C)=P(A)\times P(B')\times P(C)$ فقط A و C قبول شدند

$=۰/۴\times۰/۷\times۰/۵=۰/۱۴$

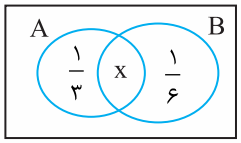
$P(A'\cap B\cap C)=P(A')\times P(B)\times P(C)$ فقط B و C قبول شدند

$=۰/۶\times۰/۳\times۰/۵=۰/۰۹$

$P(A\cap B\cap C')+P(A\cap B'\cap C)+P(A'\cap B\cap C)$ فقط دو نفر قبول شدند

$=۰/۰۶+۰/۱۴+۰/۰۹=۰/۲۹$

۱۴- دشوار



اگر $P(A\cap B)=x$ باشد $P(A)=\frac{۱}{۳}+x$ و $P(B)=\frac{۱}{۶}+x$

$$P(A\cap B)=P(A)\times P(B) \Rightarrow x=(\frac{۱}{۳}+x)(\frac{۱}{۶}+x)$$

$$\Rightarrow x=\frac{۱}{x}+\frac{۱}{۲}x+x^۲ \xrightarrow{\times ۱۸}$$

$$۱۸x=۱+۹x+۱۸x^۲ \Rightarrow ۱۸x^۲-۹x+۱=۰$$

$$\Delta=۸۱-۴(۱۸)(۱)=۸۱-۷۲=۹$$

$$x=\frac{۹\pm ۳}{۳۶}=x=\frac{۱}{۶} \text{ یا } x=\frac{۱}{۳}$$

۱- گزینه «۴» متوسط

برای پرتاب ۳ سکه داریم:

		۱		
	۱	۲	۱	
۱	③	۳	۱	
رو	۰	۱	۲	۳

$$P(A)=\frac{۳}{۱+۳+۳+۱}=\frac{۳}{۸}$$

در نصف حالات تاس زوج و در نصف دیگر حالات تاس فرد می‌آید $P(B)=\frac{۱}{۲}$

چون پرتاب سکه‌ها و تاس مستقل از هم هستند پس:

$$P(A\cap B)=P(A)P(B)=\frac{۳}{۱۶}$$

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=\frac{۳}{۸}+\frac{۱}{۲}-\frac{۳}{۱۶}$$

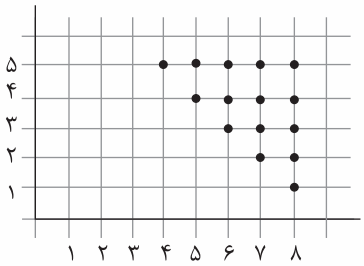
$$=\frac{۶+۸-۳}{۱۶}=\frac{۱۱}{۱۶}$$

۲- گزینه «۱» آسان

$n(S)=۴۰$

$n(A)=۱۵$

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۱۵}{۴۰}=\frac{۳}{۸}$$



۳- گزینه «۲» دشوار

$S=\{۵۱,۵۲,\dots,۳۰۰\} \Rightarrow n(S)=۲۵۰$

A و **B** زیر مجموعه **S** هستند که **A** مضرب ۶ و **B** مضرب ۷ است

$$n(A)=[\frac{۳۰۰}{۶}]-[\frac{۵۰}{۶}]=۵۰-۸=۴۲$$

$$n(B)=[\frac{۳۰۰}{۷}]-[\frac{۵۰}{۷}]=۴۲-۷=۳۵$$

$$n(A\cap B)=[\frac{۳۰۰}{۴۲}]-[\frac{۵۰}{۴۲}]=۷-۱=۶$$

اعدادی که مضرب ۶ یا ۷ باشند و مضرب ۴۲ نیستند به یکی از مجموعه‌های **A** و **B** تعلق دارند. $(A\Delta B)$

$$n(A\Delta B)=n(A)+n(B)-۲n((A\cap B)=۴۲+۳۵-۲(۶)=۶۵$$

$$P(A\Delta B)=\frac{n(A\Delta B)}{n(S)}=\frac{۶۵}{۲۵۰}=۰/۲۶$$

۴- گزینه «۳» آسان

$$n(S)=\binom{۱۲}{۳}=۲۲۰$$

اگر **A** پیشامد آن باشد که مهره سفید خارج نشود و **B** پیشامد آن باشد که مهره سیاه خارج نشود داریم:

$$n(A)=\binom{۷}{۳}=۳۵$$

$$n(B)=\binom{۸}{۳}=۵۶$$

$$n(A\cap B)=\binom{۳}{۳}=۱$$

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=\frac{n(A)}{n(S)}+\frac{n(B)}{n(S)}-\frac{n(A\cap B)}{n(S)}$$

$$=\frac{۳۵}{۲۲۰}+\frac{۵۶}{۲۲۰}-\frac{۱}{۲۲۰}=\frac{۹۰}{۲۲۰}=\frac{۹}{۲۲}$$

۵- گزینه «۱» دشوار

$n(S)=۲۵۰-۱۰۰=۱۵۰$

A و B زیر مجموعه‌های S هستند و A مضرب ۴ و B مضرب ۵ است

$$n(A)=[\frac{۲۵۰}{۴}]-[\frac{۱۰۰}{۴}]=۶۲-۲۵=۳۷$$

$$n(B)=[\frac{۲۵۰}{۵}]-[\frac{۱۰۰}{۵}]=۵۰-۲۰=۳۰$$

$$n(A\cap B)=[\frac{۲۵۰}{۲۰}]-[\frac{۱۰۰}{۲۰}]=۱۲-۵=۷$$

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=\frac{۳۷}{۱۵۰}+\frac{۳۰}{۱۵۰}-\frac{۷}{۱۵۰}$$

$$=\frac{۶۰}{۱۵۰}=۰/۴$$

۶- گزینه «۴» آسان

$$n(S)=\binom{۶}{۴}=۱۵$$

$$n(A)=\binom{۵}{۲}=۱۰$$

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۱۰}{۱۵}=\frac{۲}{۳}$$

۷- گزینه «۲» آسان

$$n(S)=\binom{۹}{۲}=۳۶$$

$$A=\{(۳,۸),(۴,۷),(۵,۶),(۲,۹)\}\Rightarrow n(A)=۴$$

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۴}{۳۶}=\frac{۱}{۹}$$

۸- گزینه «۲» متوسط

$$P(۱)=۲P(۲)=۳P(۳)=۴P(۴)=۶P(۵)=۱۲t$$

$$\Rightarrow P(۱)=۱۲t,P(۲)=۶t,P(۳)=۴t,P(۴)=۳t,P(۶)=۲t$$

i	۱	۲	۳	۴	۵
P(i)	۱۲t	۶t	۴t	۳t	۲t

$$P(۱)+P(۲)+P(۳)+P(۴)+P(۵)+P(۶)=۱$$

$$=۱۲t+۶t+۴t+۳t+۲t=۱\Rightarrow ۲۷t=۱\Rightarrow t=\frac{۱}{۲۷}$$

$$P(۴)=۳t=\frac{۳}{۲۷}=\frac{۱}{۹}$$

۹- گزینه «۴» دشوار

i	۱	۲	۳	۴	۵	۶
P	x	x	kx	x	x	kx

$$P(۱)+P(۴)=۰/۳\Rightarrow ۲x=۰/۳\Rightarrow x=۰/۱۵$$

$$P(۱)+P(۲)+P(۳)+P(۴)+P(۵)+P(۶)=۱$$

$$\Rightarrow ۴x+۲kx=۱\Rightarrow ۰/۶+۰/۳k=۱$$

$$\Rightarrow ۰/۳k=۰/۴\Rightarrow k=\frac{۴}{۳}$$

۱۰- گزینه «۴» آسان

پیشامد A و B را به ترتیب تجدید شدن در درس ریاضی و فیزیک در نظر می‌گیریم که $P(A)=۰/۲, P(B)=۰/۱۵, P(A\cap B)=۰/۱$ است.

$$P(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{۰/۱}{۰/۲}=۰/۵$$

۱۱- گزینه «۲» متوسط

$$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}\Rightarrow \frac{۱}{۳}=\frac{P(A\cap B)}{\frac{۱}{۶}}\Rightarrow P(A\cap B)=\frac{۱}{۱۸}$$

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=\frac{۱}{۴}+\frac{۱}{۶}-\frac{۱}{۱۸}$$

$$=\frac{۹+۶-۲}{۳۶}=\frac{۱۳}{۳۶}$$

۱۲- گزینه «۲» دشوار

اگر A را پیشامد هر دو مهره سفید در کیسه ۱ و B را پیشامد هر دو مهره سفید در کیسه ۲ بنامیم:

$$P(A)=\frac{\binom{۵}{۲}}{\binom{۸}{۲}}=\frac{۱۰}{۲۸}=\frac{۵}{۱۴}$$

$$P(B)=\frac{\binom{۴}{۲}}{\binom{۶}{۲}}=\frac{۶}{۱۵}=\frac{۲}{۵}$$

چون A و B مستقل هستند

$$P(\text{سفید ۴})=P(A\cap B)=P(A)\times P(B)=\frac{۵}{۱۴}\times\frac{۲}{۵}=\frac{۱}{۷}$$

اگر C را پیشامد هر دو سیاه در کیسه ۱ و D را پیشامد هر دو سیاه در کیسه ۲ بنامیم داریم:

$$P(C)=\frac{\binom{۳}{۲}}{\binom{۸}{۲}}=\frac{۳}{۲۸}$$

$$P(D)=\frac{\binom{۲}{۲}}{\binom{۶}{۲}}=\frac{۱}{۱۵}$$

چون C و D مستقل هستند

$$P(\text{مهره سیاه ۴})=P(C\cap D)=P(C)\times P(D)=\frac{۳}{۲۸}\times\frac{۱}{۱۵}=\frac{۱}{۱۴۰}$$

$$P(\text{مهره هم رنگ ۴})=P(\text{مهره سفید ۴})+P(\text{مهره سیاه ۴})=\frac{۱}{۷}+\frac{۱}{۱۴۰}=\frac{۲۰+۱}{۱۴۰}$$

$$=\frac{۲۱}{۱۴۰}=\frac{۳}{۲۰}=۰/۱۵$$

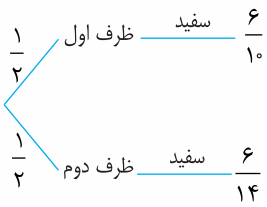
۱۳- گزینه «۴» — متوسط

$$P(A)=\frac{۴+۴}{۱+۴+۶+۴+۱}=\frac{۸}{۱۶}=\frac{۱}{۲}$$

			۱		
		۱		۱	
	۱		۲		۱
		۳		۳	
	۱		۴		۱
رو	۰	۱	۲	۳	۴
پشت	۴	۳	۲	۱	۰

۱۴- گزینه «۲» — متوسط

$$P(\text{سفید})=\frac{۱}{۲}\times\frac{۶}{۱۰}+\frac{۱}{۲}\times\frac{۶}{۱۴}=\frac{۳}{۱۰}+\frac{۳}{۱۴}=\frac{۱۵+۲۱}{۷۰}=\frac{۳۶}{۷۰}=\frac{۱۸}{۳۵}$$

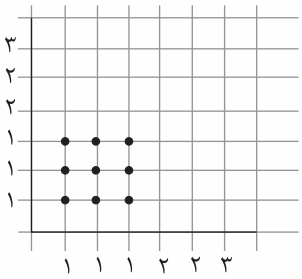


۱۵- گزینه «۳» — متوسط

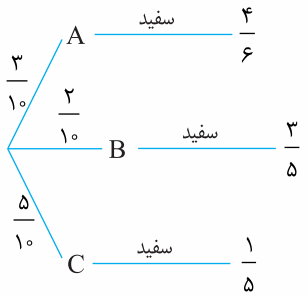
$$n(S)=۳۶$$

$$n(A)=۹$$

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۹}{۳۶}=\frac{۱}{۴}$$

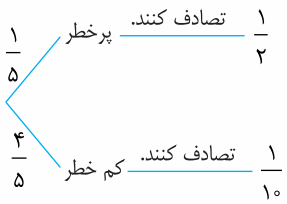


۱۶- گزینه «۱» — متوسط



$$P(\text{سفید})=\frac{۳}{۱۰}\times\frac{۴}{۶}+\frac{۲}{۱۰}\times\frac{۳}{۵}+\frac{۵}{۱۰}\times\frac{۱}{۵}=\frac{۱}{۵}+\frac{۳}{۲۵}+\frac{۱}{۱۰}=۰/۴۲$$

۱۷- گزینه «۳» — دشوار



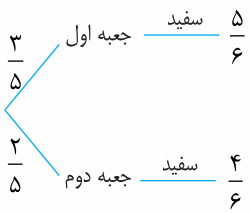
$$P(\text{تصادف کردن}=A)=\frac{۱}{۵}\times\frac{۱}{۲}+\frac{۴}{۵}\times\frac{۱}{۱۰}=\frac{۱}{۱۰}+\frac{۴}{۵۰}=\frac{۹}{۵۰}$$

اگر افراد پر خطر را پیشامد **B** فرض کنیم

$$P(A\cap B)=\frac{۱}{۵}\times\frac{۱}{۲}=\frac{۱}{۱۰}$$

$$P(B\mid A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{\frac{۱}{۱۰}}{\frac{۹}{۵۰}}=\frac{۵}{۹}$$

۱۸- گزینه «۱» — متوسط



$$P(A)=\frac{۳}{۵}\times\frac{۵}{۶}+\frac{۲}{۵}\times\frac{۴}{۶}=\frac{۲۳}{۳۰}$$

۱۹- گزینه «۳» — دشوار

اگر $A_۱ , A_۲ , A_۳ , A_۴ , A_۵$ پیشامدهای پاسخ صحیح به پرسش های ۱ تا ۵ باشند این پاسخ‌ها مستقل از هم هستند و باید ۳ تا از ۵ سوال را به $\binom{۵}{۳}=۱۰$ طریق انتخاب کنیم و به آنها پاسخ درست دهیم و $P(Aj)=\frac{۱}{۴}$, $P(A'j)=\frac{۳}{۴}$ است.

$$P(\text{به ۳ سوال پاسخ دهید})=\binom{۵}{۳}(P(Ai))^۳(P(A'i))^۲=۱۰\times\frac{۱}{۶۴}\times\frac{۹}{۱۶}=\frac{۴۵}{۵۱۲}$$

۲۰- گزینه «۱» — آسان

$\{۱,۲\}$ را یک عضو در مجموعه در نظر می‌گیریم مجموعه **A** به صورت $A=\{\{۱,۲\},۳,۴,۵\}$ می‌شود که ۴ عضوی است و می‌دانیم یک مجموعه ۴ عضوی ۱۵ افراز دارد.

۱- گزینه «۲»

نکته: اگر **n** کلید را روی **n** قفل قرار دهیم حالاتی که همه کلیدها به اشتباه روی قفل‌ها قرار گرفته باشد را از قانون $n!(1-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\cdots-\frac{1}{n!})$ را به دست آورد

$$n(A)=4!(1-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!})=24(\frac{24-24+12-4+1}{24})=9$$

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{9}{24}=\frac{3}{8}$$

۲- گزینه «۴»

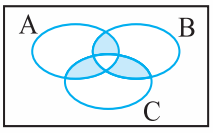
اگر **A** و **B** و **C** سه زیر مجموعه از **S** باشند **A** اعداد بخش پذیر بر ۲ و **B** اعداد بخش پذیر به ۳ و **C** اعداد بخش پذیر به ۵ باشند عدد انتخابی از مجموعه **S** باید در ناحیه رنگی باشد.

$$n(D)=n(A\cap B)+n(A\cap C)+n(B\cap C)-3n(A\cap B\cap C)$$

$$n(D)=[\frac{100}{6}]+[\frac{100}{10}]+[\frac{100}{15}]-3[\frac{100}{30}]=16+10+6-9=23$$

$$n(S)=100$$

$$P(D)=\frac{n(D)}{n(S)}=0/23$$



۳- گزینه «۲»

$$S=\alpha+\beta=3m \qquad P=\alpha\beta=1 \Rightarrow \begin{cases}\alpha=\frac{1}{\beta}\\ \beta=\frac{1}{\alpha}\end{cases}$$

$$\sqrt[3]{\frac{\alpha^\beta}{\beta^\alpha}}+\sqrt[3]{\frac{\beta^\alpha}{\alpha^\beta}}=\sqrt[3]{\frac{\alpha^\beta}{(\frac{1}{\alpha})^\alpha}}+\sqrt[3]{\frac{\beta^\alpha}{(\frac{1}{\beta})^\alpha}}=\sqrt[3]{\alpha^{\alpha+\beta}}+\sqrt[3]{\beta^{\alpha+\beta}}$$

$$=\sqrt[3]{\alpha^{3m}}+\sqrt[3]{\beta^{3m}}=\alpha^m+\beta^m$$

بنابراین داریم

$$\sqrt[3]{\frac{\alpha^\beta}{\beta^\alpha}}+\sqrt[3]{\frac{\beta^\alpha}{\alpha^\beta}}=27m^3-9m$$

$$\Rightarrow \alpha^m+\beta^m=(3m)^3-3(3m)(1)=S^3-3PS$$

بنابراین $m=3$ است

$$n(S)=6\times6=36$$

$$A=\{(1,2),(2,1)\} \Rightarrow n(A)=2$$

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{1}{18}$$

۴- گزینه «۳»

اگر نمودار ون را برای ۳ مجموعه **A** و **B** و **C** رسم کنیم، ۸ ناحیه داریم پس هر عدد را از مجموعه $U=\{1,2,3,4,5\}$ می‌تواند در ناحیه ۸ قرار گیرد.

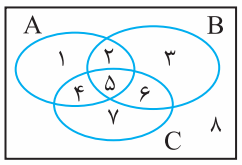
$$n(S)=8^5$$

$$(A-B)\cup C=\{1,4,5,6,7\}$$

$$(A\cap C)\cup B=\{4,2,5,3,6\}$$

چون $(A-B)\cup C=(A\cap C)\cup B$ است، یعنی نواحی (۱,۲,۳,۷) تهی هستند و هر عدد می‌تواند در ناحیه ۴ قرار گیرد.

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=(\frac{4}{8})^5=\frac{1}{32}$$



۵- گزینه «۲»

$$P(A)+P(B)+P(C)=\frac{1}{4}+\frac{2}{3}+\frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow P(a)+3P(b)+P(c)+P(d)+P(e)=\frac{5}{4}$$

$$\Rightarrow 2P(b)+\underbrace{P(a)+P(b)+P(c)+P(d)+P(e)}_{1}=\frac{5}{4}$$

$$\Rightarrow 2P(b)=\frac{1}{4}\Rightarrow P(b)=\frac{1}{8}$$

$$A'\cap B'=\{c,e\}$$

$$P(A'\cap B')=P(c)+P(e)=P(\{b,c,e\})-P(b)=\frac{1}{3}-\frac{1}{8}=\frac{5}{24}$$

۶- گزینه «۳»

تعداد مستطیل ها $n(S)=\binom{6}{2}\binom{5}{2}=15\times10=150$

$$n(A)=5\times4+4\times3+3\times2+2\times1=40$$

تعداد مربع ها $P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{40}{150}=\frac{4}{15}$

۷- گزینه «۲»

$$n(S)=\binom{۱۰}{۳}=۱۲۰$$

اعداد بصورت $۳k$ $(۳,۶,۹)$ و یا بصورت $۳k+۱$ $(۱,۴,۷,۱۰)$ و یا به صورت $۳k+۲$ $(۲,۵,۸)$ هستند.

$$\text{هر سه عدد به صورت } ۳k=\binom{۳}{۳}=۱$$

$$\text{هر سه عدد به صورت } ۳k+۱=\binom{۴}{۳}=۴$$

$$\text{هر سه عدد به صورت } ۳k+۲=\binom{۳}{۳}=۱$$

یک عدد به صورت $۳k$ و یک عدد $۳k+۱$ و یک عدد $۳k+۲$

$$=\binom{۳}{۱}\binom{۴}{۱}\binom{۳}{۱}=۳\times۴\times۳=۳۶$$

$$n(A)=۱+۴+۱+۳۶=۴۲$$

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۴۲}{۱۲۰}=۰/۳۵$$

۸- گزینه «۳»

اگر یکی از ریشه‌های معادله $ax^۲+bx+c=۰$ برابر $\frac{c}{a}$ باشد دیگری ۱ است.

$$x=۱ \Rightarrow m-۹+n=۰ \Rightarrow m+n=۹$$

بنابراین مجموع دو تاس باید عدد ۹ شود

$$n(S)=۶\times۶=۳۶$$

$$A=\{(۳,۶)\ (۴,۵),(۵,۴),(۶,۳)\} \Rightarrow n(A)=۴$$

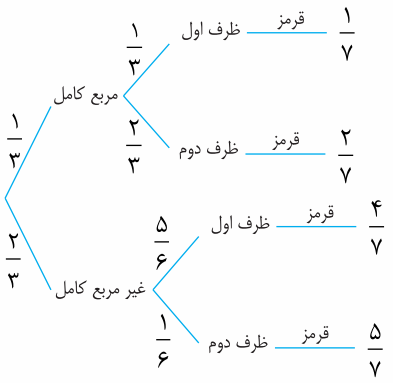
$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۴}{۳۶}=\frac{۱}{۹}$$

۹- گزینه «۱»

$$P(R)=\frac{۱}{۳}\times\frac{۱}{۳}\times\frac{۱}{۷}+\frac{۱}{۳}\times\frac{۲}{۳}\times\frac{۲}{۷}+\frac{۲}{۳}\times\frac{۵}{۶}\times\frac{۴}{۷}+\frac{۲}{۳}\times\frac{۱}{۶}\times\frac{۵}{۷}=$$

$$=\frac{۲+۸+۴۰+۱۰}{۱۲۶}=\frac{۶۰}{۱۲۶}=\frac{۱۰}{۲۱}$$

$$P(R)=\frac{۲+۳+۲۴+۱}{۶۳}=\frac{۳۰}{۶۳}=\frac{۱۰}{۲۱}$$



۱۰- گزینه «۱»

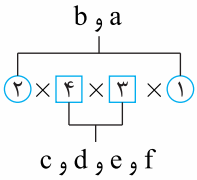
$$n(S)=۴!\times\binom{۵}{۲}\times۲!=۴!\times۱۰\times۲$$

ابتدا بین **a** و **b** دو حرف قرار می‌دهیم

اگر کلمه ساخته شده به طور مثال $(abcd=X)$ باشد باید با **e** و f در یک سمت قرار گیرند که $۳!$ حالت **S** می‌شود پس

$$n(A)=۴!\times۳!$$

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۴!\times۶}{۴!\times۱۰\times۲}=۰/۳$$



۱۱- گزینه «۳»

فضای نمونه را کاهش می‌دهیم:

تعداد حالتی که تاس ۵ و ۶ نیاید $=۴\times۴\times۴=۶۴$

تعداد حالتی که تاس ۴، ۵ و ۶ نیاید $=۳\times۳\times۳=۲۷$

$$n(S)=۶۴-۲۷=۳۷$$

تعداد حالتی که اعداد ۱، ۲، ۳ ظاهر می‌شود $=۳\times۳\times۳=۲۷$

تعداد حالتی که اعداد ۳، ۴ ظاهر شوند $=۲\times۲\times۲=۸$

$$n(A)=۲۷-۸=۱۹$$

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۱۹}{۳۷}$$

۱۲- گزینه «۱»

$$P(A\mid B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}\Rightarrow\frac{۲}{۵}=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}\Rightarrow P(B)=\frac{۵}{۲}P(A\cap B)$$

$$P(B\mid A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}\Rightarrow\frac{۳}{۱۰}=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}\Rightarrow P(A)=\frac{۱۰}{۳}P(A\cap B)$$

$$P(A)+P(B)=۰/۸\Rightarrow\frac{۵}{۲}P(A\cap B)+\frac{۱۰}{۳}\Rightarrow P(A\cap B)=\frac{۸}{۱۰}$$

$$\xrightarrow{\times ۶۰}۳۵۰P(A\cap B)=۴۸\Rightarrow P(A\cap B)=\frac{۴۸}{۳۵۰}$$

$$P(A\mid B')=\frac{P(A\cap B')}{P(B')}=\frac{P(A)-P(A\cap B)}{۱-P(B)}$$

$$=\frac{\frac{۱۰}{۳}P(A\cap B)-P(A\cap B)}{۱-\frac{۵}{۲}P(A\cap B)}=\frac{\frac{۷}{۳}\times\frac{۴۸}{۳۵۰}}{۱-\frac{۲۴}{۷۰}}\Rightarrow$$

$$P(A\mid B')=\frac{\frac{۱۶}{۵۰}}{\frac{۴۶}{۷۰}}=\frac{۱۶\times۷۰}{۴۶\times۵۰}=\frac{۵۶}{۱۱۵}$$

۱۳- گزینه «۱»

I	A	B
P	۲x	X

$$P(A)+P(B)=۱\Rightarrow ۳X=۱\Rightarrow X=\frac{۱}{۳}\Rightarrow\begin{cases}P(A)=\frac{۲}{۳}\\P(B)=\frac{۱}{۳}\end{cases}$$

اگر ورودی حرف **A** باشد زمانی خروجی **B** می‌شود که طی مراحل اشتباه رخ ندهد یا در ۲ مرحله اشتباه رخ دهد.

ورودی A و اشتباه رخ ندهد: $P(A_۱)=\frac{۲}{۳}\times(\frac{۱}{۴})^۳=\frac{۲}{۱۹۲}$

ورودی A و دوبار اشتباه رخ دهد: $P(A_۲)=\frac{۲}{۳}\times(\frac{۱}{۴})(\frac{۳}{۴})^۲\times(\frac{۳}{۲})=\frac{۵۴}{۱۹۲}$

اگر ورودی حرف **B** باشد زمانی خروجی حرف **A** می‌شود که یا در یک مرحله و یا در سه مرحله اشتباه رخ دهد.

ورودی B و در یک ۱ مرحله اشتباه رخ دهد: $P(A_۳)=\frac{۱}{۳}\times(\frac{۳}{۴})^۱\times(\frac{۱}{۴})^۲\times(\frac{۳}{۲})$

$$=\frac{۹}{۱۹۲}$$

ورودی B در ۳ مرحله اشتباه رخ دهد: $P(A_۴)=\frac{۱}{۳}\times(\frac{۳}{۴})^۳=\frac{۲۷}{۱۹۲}$

احتمال اینکه خروجی A باشد: $P(A_۱)+P(A_۲)+P(A_۳)+P(A_۴)$

$$=\frac{۲+۵۴+۹+۲۷}{۱۹۲}=\frac{۹۲}{۱۹۲}$$

اگر **B** را پیشامد آن فرض کنیم که ورودی و خروجی **A** باشد

$$P(B)=P(A_۱)+P(A_۲)=\frac{۲+۵۴}{۱۹۲}=\frac{۵۶}{۱۹۲}$$

$$P(B\mid A)=\frac{P(B\cap A)}{P(A)}=\frac{\frac{۵۶}{۱۹۲}}{\frac{۹۲}{۱۹۲}}=\frac{۵۶}{۹۲}=\frac{۱۴}{۲۳}$$

۱۴- گزینه «۴»

I	۱	۲	۳	۴
P	x	۲x	۳x	۴x

$$P(۱)+P(۲)+P(۳)+P(۴)=۱\Rightarrow x+۲x+۳x+۴x=۱$$

$$\Rightarrow ۱۰x=۱\Rightarrow x=\frac{۱}{۱۰}$$

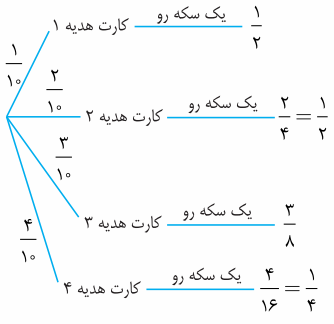
$$P(\text{یک سکه رو})=\frac{۱}{۱۰}\times\frac{۱}{۲}+\frac{۲}{۱۰}\times\frac{۱}{۲}+\frac{۳}{۱۰}\times\frac{۳}{۸}+\frac{۴}{۱۰}\times\frac{۱}{۴}$$

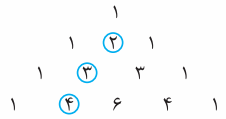
$$=\frac{۱}{۲۰}+\frac{۱}{۱۰}+\frac{۹}{۸۰}+\frac{۱}{۱۰}=\frac{۴+۸+۹+۸}{۸۰}=\frac{۲۹}{۸۰}$$

اگر پیشامد **B** را پرتاب دقیقا یک سکه در نظر بگیریم:

$$P(A\cap B)=\frac{۱}{۱۰}\times\frac{۱}{۲}=\frac{۱}{۲۰}$$

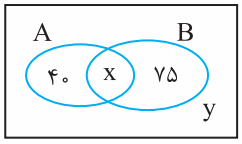
$$P(B\mid A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{\frac{۱}{۲۰}}{\frac{۲۹}{۸۰}}=\frac{۴}{۲۹}$$





۱۵- گزینه «۴»

$$|u|=۱۵۰$$



$$۱۵۰=۴۰+x+۷۵+y\Rightarrow x+y=۳۵$$

$$\Rightarrow ۰\le x\le ۳۵$$

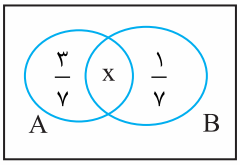
$$\frac{P(A)}{P(B)}=\frac{\frac{n(A)}{n(S)}}{\frac{n(B)}{n(S)}}=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۴۰+x}{۷۵+x}$$

اگه $x=۰\Rightarrow\frac{P(A)}{P(B)}=\frac{۴۰}{۷۵}=\frac{۸}{۱۵}=\min\{\frac{P(A)}{P(B)}\}$

اگه $x=۳۰\Rightarrow\frac{P(A)}{P(B)}=\frac{۷۵}{۱۱۰}=\frac{۱۵}{۲۲}=\max\{\frac{P(A)}{P(B)}\}$

۱۶- گزینه «۱»

$$\frac{P(A)}{P(B)}=\frac{x+\frac{۳}{۷}}{x+\frac{۱}{۷}}=\frac{۷x+۳}{۷x+۱}=\frac{۷x+۱}{۷x+۱}+\frac{۲}{۷x+۱}=۱+\frac{۲}{۷x+۱}$$



هنگامی $\frac{P(A)}{P(B)}$ کم‌ترین مقدار می‌شود که $\frac{۲}{۷x+۱}$ کمترین خود باشد پس مخرج کسر $(۷x+۱)$ به بیش‌ترین مقدار خود برسد چون $P(A\cap B)=x$ است پس $x\geq ۰$ است.

پس داریم:

$$P(A\cup B)\leq ۱ \Rightarrow \frac{۳}{۷}+x+\frac{۱}{۷}\leq ۱ \Rightarrow x\leq \frac{۳}{۷}$$

$$۰\leq x\leq \frac{۳}{۷} \Rightarrow ۰\leq ۷x\leq ۳ \Rightarrow ۱\leq ۷x+۱\leq ۴ \Rightarrow \max\{۷x+۱\}=۴$$

$$\Rightarrow \min\{\frac{۲}{۷x+۱}\}=\frac{۱}{۲}$$

بنابراین داریم:

$$\min\{\frac{P(A)}{P(B)}\}=۱+\frac{۱}{۲}=\frac{۳}{۲}$$

۱۷- گزینه «۳»

پیشامد **A** را ۱۶ بودن گوی اول و پیشامد **B** را کم‌تر بودن شماره گوی دوم از شماره گوی اول تعریف می‌کنیم واضح است $P(B)=\frac{۱}{۲}$

اگر گوی اول ۱۶ باشد واضح است شماره گوی دوم کم‌تر از شماره گوی اول است پس $P(A\cap B)=P(A)$ و احتمال اینکه گوی اول ۱۶ باشد $P(A)=\frac{۱}{۱۶}$ است.

$$P(A\mid B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{\frac{۱}{۱۶}}{\frac{۱}{۲}}=\frac{۱}{۸}$$

۱۸- گزینه «۲»

i	x	y	z
P(i)	$\frac{۱}{۵q}$	$\frac{۱}{۵}$	$\frac{۱}{۵}q$

$P(y)$ واسطه هندسی بین $P(x)$, $P(z)$ است پس $P(y)=\frac{۱}{۵}$ و اگر قدر نسبت دنباله **q** باشد داریم:

$$P(x)+P(y)+P(z)=۱ \Rightarrow \frac{۱}{۵q}+\frac{۱}{۵}+\frac{q}{۵}=۱$$

$$\xrightarrow{\times ۵q} ۱+q+q^۲=۵q \Rightarrow q^۲-۴q+۱=۰$$

$$\Delta=۱۶-۴(۱)(۱)=۱۲ \Rightarrow \sqrt{\Delta}=۲\sqrt{۳}$$

$$q=\frac{۴\pm ۲\sqrt{۳}}{۲} \Rightarrow \begin{cases} q=۲+\sqrt{۳}>۱ \\ q=۲-\sqrt{۳}<۱ \end{cases}$$ غ ق ق

واضح است که $P(z)$ کمترین مقدار را دارد. $P(z)=\frac{q}{۵}=\frac{۲-\sqrt{۳}}{۵}$

۱۹- گزینه «۱»

اگر **A** پیشامد آن باشد که گروه خونی هر دو فرزند **O** باشد $B_۱$, $B_۲$, $B_۳$ به ترتیب پیشامد آن باشد که خانواده دو پسر، یک پسر، یک دختر، و دو دختر داریم:

$$P(B_۱)=P(B_۳)=\frac{۱}{۴}$$

$$P(B_۲)=\frac{۱}{۲}$$

$$P(A)=P(B_۱)P(A\mid B_۱)+P(B_۲)P(A\mid B_۲)+P(B_۳)P(A\mid B_۳)$$

$$=\frac{۱}{۴}\times\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۵}+\frac{۱}{۴}\times\frac{۱}{۵}\times\frac{۱}{۵}$$

$$\Rightarrow P(A)=\frac{۱}{۱۶}+\frac{۱}{۲۰}+\frac{۱}{۱۰۰}=\frac{۲۵+۲۰+۴}{۴۰۰}=\frac{۴۹}{۴۰۰}$$

$$P(B_۱\mid A)=\frac{P(B_۱\cap A)}{P(A)}=\frac{P(B_۱)P(A\mid B_۱)}{P(A)}=\frac{\frac{۱}{۴}\times\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۲}}{\frac{۴۹}{۴۰۰}}=\frac{۴۰۰\times ۱}{۴۹\times ۱۶}=\frac{۲۵}{۴۹}$$

۲۰- گزینه «۲»

A	**B**	**B**	**A**
B	**C**	**C**	**B**
B	**C**	**C**	**B**
A	**B**	**B**	**A**

خانه‌ها در مربع ۳ حالت دارند

حالت اول: خانه‌های که آنها را با **A** نشان داده‌ایم و با دو خانه ضلع مشترک دارند.

حالت دوم: خانه‌های که آنها را با **B** نشان داده‌ایم و با ۳ خانه ضلع مشترک دارند.

حالت سوم: خانه‌های که آنها را با **C** نمایش داده‌ایم و با ۴ ضلع خانه مشترک دارند.

$$P=P_۱+P_۲+P_۳=\frac{۴}{۱۶}\times\frac{۲}{۱۵}+\frac{۸}{۱۶}\times\frac{۳}{۱۵}+\frac{۴}{۱۶}\times\frac{۴}{۱۵}$$

$$=\frac{۸+۲۴+۱۶}{۲۴۰}=\frac{۴۸}{۲۴۰}=۰/۲$$