



اصلاحیه

- ✍ فصل سوم - بخش ۳ تستی - سؤال ۵۲ - پاسخ صحیح در گزینه‌ها نمی‌باشد. پاسخ صحیح: ۴۲/۱۲۵
- ✍ فصل سوم - آزمون تستی پایانی - سؤال ۱۶ - گزینه ۳ صحیح است.
- ✍ فصل سوم - آزمون پلاس - سؤال ۱ - گزینه ۳ صحیح است.



ب) مجموعاً ۳ نفر در این بازه قرار دارند. ($f = 3$) پس داریم.

$$P = \frac{f}{n} \times 100 = \frac{3}{200} \times 100 = 1.5\%$$

IQ	فراوانی F	فراوانی نسبی F	درصد فراوانی P	$\alpha_i = \frac{f_i}{n} \times 360$
$60 \leq IQ < 70$	۲	۰/۰۱	۱	۳/۶
$70 \leq IQ < 80$	۳	۰/۰۱۵	۱/۵	۵/۴
$80 \leq IQ < 90$	۱۳	۰/۰۶۵	۶/۵	۲۳/۴
$90 \leq IQ < 100$	۴۲	۰/۲۱	۲۱	۷۵/۶
$100 \leq IQ < 110$	۵۸	۰/۲۹	۲۹	۱۰۴/۴
$110 \leq IQ < 120$	۴۰	۰/۲	۲	۷۲
$120 \leq IQ < 130$	۳۱	۰/۱۵۵	۱۵/۵	۵۵/۸
$130 \leq IQ < 140$	۸	۰/۰۴	۴	۱۴/۴
$140 \leq IQ < 150$	۲	۰/۰۱	۱	۳/۶
$150 \leq IQ < 160$	۱	۰/۰۰۵	۰/۵	۱/۸
جمع کل	۲۰۰	۱	۱۰۰	۳۶۰



سوالات تشریحی

پاسخنامه

بخش ۱

۱- آسان

آ) میله‌ای و دایره‌ای

ب) فراوانی

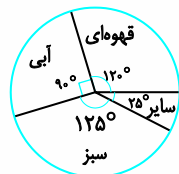
پ) فراوانی - تعداد کل داده‌ها - درصد فراوانی داده‌ها

ت بافت نگاشت - بافت نگاشت

۲- متوسط

اگر به ترتیب گروه کسانی که رنگ چشم آن‌ها قهوه‌ای، آبی و سبز و سایر

رنگ‌ها است را A و B و C و D بنامیم داریم:



$$\alpha_A = \frac{f_A}{n} \times 360 = \frac{24}{72} \times 360 = 120^\circ$$

$$\alpha_B = \frac{f_B}{n} \times 360 = \frac{18}{72} \times 360 = 90^\circ$$

$$\alpha_C = \frac{f_C}{n} \times 360 = \frac{25}{72} \times 360 = 125^\circ$$

$$\alpha_D = \frac{f_D}{n} \times 360 = \frac{5}{72} \times 360 = 25^\circ$$

۳- آسان

$$F = \frac{f}{n} \Rightarrow 0.4 = \frac{f}{200} \Rightarrow f = 80$$

۴- دشوار

آ) تعداد کل کودکان مورد بررسی:

$$= \sum f_i = 2 + 3 + 13 + 42 + 58 + 40 + 31 + 8 + 2 + 1 = 200$$

در بازه $[99/5, 109/5]$ نمره IQ بیشترین فراوانی را دارد و در

بازه $[149/5, 159/5]$ نمره IQ کمترین فراوانی را دارد.



متوسط -۷

جمع درصد فراوانی‌های نسبی همواره برابر ۱۰۰ است پس:

آ) $8 + 14 + 40 + 16 + x + 12 = 100 \Rightarrow x = 10$

ب) $P_2 = \frac{f_2}{n} \times 100 \Rightarrow 14 = \frac{f_2}{50} \times 100 \Rightarrow f_2 = 7$

پ) $P_3 = \frac{f_3}{n} \times 100 \Rightarrow 40 = \frac{f_3}{50} \times 100 \Rightarrow f_3 = 20$

$\alpha_3 = \frac{f_3}{n} \times 360 = \frac{20}{50} \times 360 = 144^\circ$

ت) $P_1 = \frac{f_1}{n} \times 100 \Rightarrow 8 = F \times 100 \Rightarrow F = 0.08$

متوسط -۸

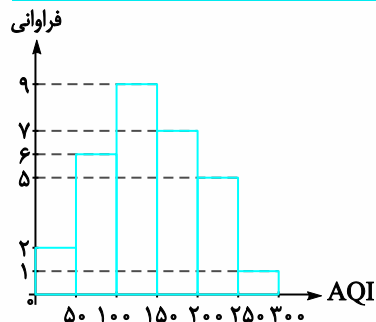
آ) فراوانی کسانی که نمره کمتر از ۱۲ دارند برابر (۱+۲+۵=۸) است.

$n = 1 + 2 + 5 + 6 + 11 = 25$

$p = \frac{f}{n} \times 100 = \frac{8}{25} \times 100 = 32\%$

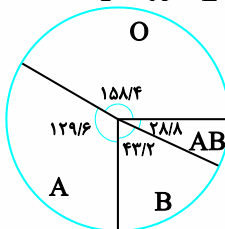
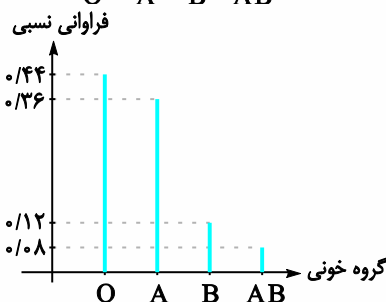
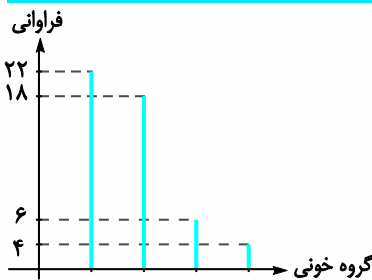
ب) $\alpha_3 = \frac{f_3}{n} \times 360 = \frac{5}{25} \times 360 = 72^\circ$

دشوار -۹



وضعیت هوا	AQI	فراوانی	فراوانی نسبی	درصدفراوانی نسبی
پاک	[0-50]	2	0.066	6.67
سالم	(50-100]	6	0.2	20
ناسالم برای گروه‌های حساس	(100-150]	9	0.3	30
ناسالم	(150-200]	7	0.233	23.33
بسیار ناسالم	(200-250]	5	0.166	16.67
خطرناک	(250-300]	1	0.033	3.33
جمع کل		30	1	100

دشوار -۵



گروه خونی	فراوانی	فراوانی نسبی	درصدفراوانی نسبی	$\alpha_i = \frac{f_i}{n} \times 360$
O	22	0.44	44	158.4
A	18	0.36	36	129.6
B	6	0.12	12	43.2
AB	4	0.08	8	28.8
جمع کل	50	1	100	360

متوسط -۶

باید مجموع زوایای قطاع‌های ایجاد شده 360° باشد اگر زاویه مربوط به کسانی که مدرک تحصیلی آن‌ها دکتری است را α فرض کنیم داریم:

$80 + 70 + 60 + 60 + 65 + \alpha = 360 \Rightarrow \alpha = 25$

آ) $\alpha = \frac{f}{n} \times 360 \Rightarrow 25 = \frac{10}{n} \times 360 \Rightarrow n = \frac{3600}{25} \Rightarrow n = 144$

ب) $\alpha = \frac{f}{n} \times 360 \Rightarrow 60 = \frac{f}{144} \times 360 \Rightarrow f = \frac{60 \times 144}{360} \Rightarrow f = 24$

پ) $\alpha = \frac{f}{n} \times 360 \Rightarrow \frac{\alpha}{360} = \frac{f}{n} \Rightarrow \frac{80}{360} = \frac{f}{n} \Rightarrow \frac{2}{9} = F$

$P = F \times 100 = \frac{2}{9} \times 100 \approx 22\%$

دشوار

۵- گزینه «۳»

فراوانی دسته‌ها به صورت $f_1 = 5$ ، $f_2 = 5 + x$ و $f_3 = 5 + 2x$ و $f_4 = 5 + x$ است.

$$n = f_1 + f_2 + f_3 + f_4 = 5 + 5 + x + 5 + 2x + 5 + x = 20 + 4x$$

در نمودار دایره‌ای رابطه (فراوانی نسبی دسته) = $\frac{f}{n}$ = مساحت قطاع هر دسته / مساحت کل

است پس:

$$\frac{1}{8} = \frac{5}{20 + 4x} \Rightarrow 20 + 4x = 40 \Rightarrow 4x = 20 \Rightarrow x = 5$$

$$P_4 = \frac{f_4}{n} \times 100 = \frac{5 + x}{20 + 4x} \times 100 = \frac{10}{40} \times 100 = 25$$

$$P_3 = \frac{f_3}{n} \times 100 = \frac{5 + 2x}{20 + 4x} \times 100 = \frac{15}{40} \times 100 = 37.5$$

$$P_3 - P_4 = 37.5 - 25 = 12.5$$

متوسط

۴- گزینه «۳»

$$F = \frac{f}{n} \rightarrow \frac{1}{5} = \frac{f}{n} \rightarrow n = 5f$$

اگر فراوانی نسبی این داده ۳ برابر شود ($3f$) شود یعنی به مقدار $2f$ به آن اضافه شود، مقدار کل داده‌ها $5f + 2f = 7f$ می‌شود پس داریم:

$$f' = \frac{f'}{n'} = \frac{3f}{7f} = \frac{3}{7}$$

دشوار

۷- گزینه «۴»

در این مسئله $n = 50$ و فراوانی دسته اول برابر ۱۰ است.

$$F_1 = \frac{f_1}{n} \Rightarrow x = \frac{10}{50} = 0.2$$

می‌دانیم مجموع فراوانی نسبی همواره برابر ۱ است پس داریم:

$$x + 0.08 + 0.14 + 0.3 + y + 0.2 = 1 \xrightarrow{x=0.2} y = 0.08$$

حال تعداد حالاتی که اختلاف اعداد ظاهر شده در دو تاس ۴ یا ۵ است را می‌خواهیم که مجموع فراوانی نسبی این دو دسته $0.08 + 0.2 = 0.28$ است.

$$F = \frac{f}{n} \Rightarrow 0.28 = \frac{f}{50} \Rightarrow f = 14$$

دشوار

۸- گزینه «۱»

$$P_1 = \frac{f_1}{n} \times 100 \Rightarrow 16 = \frac{4}{n} \times 100 \Rightarrow \frac{4}{25} = \frac{4}{n} \Rightarrow n = 25$$

$$P_2 = \frac{f_2}{n} \times 100 \Rightarrow z = \frac{5}{25} \times 100 \Rightarrow z = 20$$

$$P_4 = \frac{f_4}{n} \times 100 \Rightarrow 24 = \frac{t}{25} \times 100 \Rightarrow t = 6$$

$$n = f_1 + f_2 + f_3 + f_4 \Rightarrow 25 = 4 + x + 5 + t \xrightarrow{t=6} x = 10$$

$$P_2 = \frac{f_2}{n} \times 100 \Rightarrow y = \frac{10}{25} \times 100 \Rightarrow y = 40$$

$$\frac{z + t}{x + y} = \frac{20 + 6}{40 + 10} = 0.52$$

آسان

۱۰-

نمودار میله‌ای برای متغیرهای کیفی و کمی گسسته مناسب‌تر است و نمودار دایره‌ای برای متغیرهای کیفی بسیار مناسب است و برای متغیرهای کمی گسسته هم به کار می‌رود و نمودار بافت‌نگاشت برای داده‌های کمی پیوسته مناسب است.

(آ) بافت‌نگاشت

(ب) بافت‌نگاشت

(پ) نمودار میله‌ای و دایره‌ای



آسان

۱- گزینه «۴»

انواع هزینه‌های یک شرکت مثل هزینه‌های آب و برق و حقوق و ... از انواع کیفی اسمی هستند و نمودارهای دایره‌ای و میله‌ای برای آن‌ها مناسب است.

متوسط

۲- گزینه «۲»

با توجه به شکل مشاهده می‌شود

$$f_5 = 2 \text{ و } f_4 = 7 \text{ و } f_3 = 13 \text{ و } f_2 = 10 \text{ و } f_1 = 8$$

$$n = f_1 + f_2 + f_3 + f_4 + f_5 = 2 + 7 + 8 + 10 + 13 = 40$$

$$P_1 = \frac{f_1}{n} \times 100 = \frac{8}{40} \times 100 = 20\%$$

متوسط

۳- گزینه «۲»

$$n = 3 + 4 + x + x - 6 + 4x + 1 = 6x + 2$$

$$P_3 = \frac{f_3}{n} \times 100 \Rightarrow \frac{16}{100} = \frac{x}{6x + 2} \Rightarrow \frac{4}{25} = \frac{x}{6x + 2}$$

$$\Rightarrow 25x = 24x + 8 \Rightarrow x = 8$$

آسان

۴- گزینه «۳»

با توجه به نمودار فراوانی دسته‌ها به صورت $f_A = 6$ و $f_B = 4$ و $f_C = 7$ و $f_D = 6$ و $f_E = 2$ است.

$$n = f_A + f_B + f_C + f_D + f_E = 6 + 4 + 7 + 6 + 2 = 25$$

$$P_B = \frac{f_B}{n} \times 100 = \frac{4}{25} \times 100 = 16$$

متوسط

۱۵- گزینه «۱»

$$\alpha = \frac{f}{n} \times 360 \Rightarrow 108 = \frac{f}{n} \times 360 \Rightarrow \frac{f}{n} = \frac{3}{10}$$

در نمودار مستطیل نسبت مساحت هر دسته به مساحت کل برابر فراوانی نسبی است.

$$\frac{S_i}{S_{\text{کل}}} = \frac{f_i}{n} \Rightarrow \frac{S_i}{100} = \frac{3}{10} \Rightarrow S_i = 30$$

دشوار

۱۶- گزینه «۲»

$$\alpha_i = \frac{f_i}{n} \times 360 \Rightarrow 60 = \frac{f_i}{n} \times 360 \Rightarrow \frac{1}{6} = \frac{f_i}{n} \Rightarrow 6f_i = n$$

اگر این داده‌های این دسته $4f_i$ شود یعنی $(4f_i - f_i = 3f_i)$ به کل اضافه شده

$$f'_i = 4f_i, n' = 6f_i + 3f_i = 9f_i$$

$$\alpha'_i = \frac{f'_i}{n'} \times 360 = \frac{4f_i}{9f_i} \times 360 = 160$$

آسان

۱۷- گزینه «۴»

می‌دانیم مجموع زاویه‌ها برابر 360° است.

$$30 + 220 + 50 + \alpha = 360 \Rightarrow \alpha = 60$$

$$\alpha = \frac{f}{n} \times 360 \Rightarrow 60 = \frac{f}{480} \times 360 \Rightarrow \frac{1}{6} = \frac{f}{480} \Rightarrow f = 80$$

متوسط

۱۸- گزینه «۲»

فراوانی دسته‌های اول تا سوم به ترتیب $f_1 = 3$ و $f_2 = 5$ و $f_3 = 6$ است

که $n = 3 + 5 + 6 = 14$ است و دو داده ۱۷ و ۱۸ هر دو برای دسته سوم

هستند که با حذف آن‌ها $f_3 = 6 - 2 = 4$ و $n = 14 - 2 = 12$ می‌شود و

چون $f_3 < f_2$ می‌شود پس بزرگترین زاویه مربوط به دسته دوم می‌شود.

$$\alpha_2 = \frac{f_2}{n} \times 360 = \frac{5}{12} \times 360 = 150^\circ$$

متوسط

۱۹- گزینه «۳»

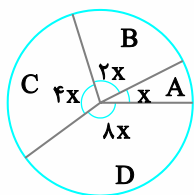
می‌دانیم مجموع زوایا در نمودار دایره‌ای 360° است.

$$x + 2x + 4x + 8x = 360 \Rightarrow x = 24$$

$$\alpha_1 = \frac{f_1}{n} \times 360 \Rightarrow 24 = \frac{f_1}{120} \times 360 \Rightarrow f_1 = 8$$

$$\alpha_4 = \frac{f_4}{n} \times 360 \Rightarrow 8 \times 24 = \frac{f_4}{120} \times 360 \Rightarrow f_4 = 64$$

$$f_1 + f_4 = 64 + 8 = 72$$



متوسط

۹- گزینه «۳»

$$F = \frac{f}{n} \Rightarrow 0.3 = \frac{f}{50} \Rightarrow f = 15$$

حال اگر تعداد دانش‌آموزان به ۱۰۰ نفر برسد داریم:

$$F' = \frac{f'}{n'} \Rightarrow 0.42 = \frac{f'}{100} \Rightarrow f' = 42$$

$$\text{افراد اضافه شده} = f' - f = 42 - 15 = 27$$

آسان

۱۰- گزینه «۳»

$$n = 30 + 90 + 180 + 120 + 30 = 450$$

$$\alpha = \frac{f}{n} \times 360 \Rightarrow \alpha = \frac{120}{450} \times 360 \Rightarrow \alpha = 96^\circ$$

متوسط

۱۱- گزینه «۲»

نماینده دسته (۲۵, ۲۸) عدد $\frac{25+28}{2} = 26.5$ است که مربوط به دسته

چهارم است و می‌دانیم جمع درصد فراوانی نسبی همواره برابر ۱۰۰ است پس داریم:

$$17 + 20/5 + 22 + x + 18 = 100 \Rightarrow x = 22/5$$

$$P = F \times 100 \Rightarrow 22/5 = F \times 100 \Rightarrow F = \frac{22/5}{100}$$

$$\alpha = F \times 360 = \frac{22/5}{100} \times 360 \Rightarrow \alpha = 81^\circ$$

آسان

۱۲- گزینه «۱»

مجموع زاویه مرکزی در نمودار دایره‌ای 360° است.

$$27 + 45 + 99 + a + 54 + 18 = 360 \Rightarrow a = 117^\circ$$

$$\alpha = \frac{f}{n} \times 360 \Rightarrow \frac{117}{360} = \frac{f}{160} \Rightarrow f = 52$$

دشوار

۱۳- گزینه «۳»

واضح است که $f_D = 2$ و $f_C = 7$ و $f_B = 4$ و $f_A = 7$ است.

$$n = f_A + f_B + f_C + f_D = 7 + 4 + 7 + 2 = 20$$

$$\alpha_A = \frac{f_A}{n} \times 360 = \frac{7}{20} \times 360 = 126^\circ$$

$$\alpha_D = \frac{f_D}{n} \times 360 = \frac{2}{20} \times 360 = 36^\circ$$

$$\alpha_A - \alpha_D = 126 - 36 = 90^\circ$$

آسان

۱۴- گزینه «۳»

می‌دانیم جمع فراوانی ۱ است پس داریم:

$$0.08 + 0.11 + 0.11 + 0.13 + x + 0.35 + 0.1 = 1 \Rightarrow x = 0.12$$

$$\alpha = F \times 360 = 0.12 \times 360 = 43.2^\circ$$

آسان

-۴

در نگاه اول تقریباً متوجه می‌شویم که میانگین عددی بین ۶۰ تا ۷۰ است (مثلاً ۶۲). حال عدد ۶۲ را از همه داده‌ها کم می‌کنیم.

$$۱۰, -۴, -۲, ۰, -۲, -۴, ۰, -۲, ۰, ۰, ۳, ۳, ۳, ۳, ۰$$

میانگین داده‌های به دست آمده را \bar{x}_1 می‌نامیم.

$$\bar{x}_1 = \frac{۱۰ - ۴ - ۲ + ۰ - ۲ - ۴ + ۰ - ۲ + ۰ + ۰ + ۳ + ۳ + ۳ + ۳ + ۰}{۱۵}$$

$$= \frac{۸}{۱۵} = ۰/۵۳$$

حال میانگین داده‌های اولیه برابر مجموع \bar{x}_1 و عددی است که از همه داده‌ها کم کرده‌ایم.

$$\bar{x} = ۶۲ + ۰/۵۳ = ۶۲/۵۳$$

متوسط

-۵

$$\bar{x} = \frac{\sum f_i x_i}{\sum f_i} \Rightarrow ۴ = \frac{۱ \times ۵ + ۳ \times ۷ + ۵ \times ۴ + ۷ \times x}{۵ + ۷ + ۴ + x}$$

$$\Rightarrow ۴ = \frac{۵ + ۲۱ + ۲۰ + ۷x}{۱۶ + x}$$

$$\Rightarrow ۴۶ + ۷x = ۶۴ + ۴x \Rightarrow ۳x = ۱۸ \Rightarrow x = ۶$$

$$n = f_1 + f_2 + f_3 + f_4 = ۵ + ۷ + ۴ + ۶ = ۲۲$$

$$P_4 = \frac{f_4}{n} \times ۱۰۰ = \frac{۶}{۲۲} \times ۱۰۰ \Rightarrow P_4 = ۲۷/۲۲$$

متوسط

-۶

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} \Rightarrow x_1 + x_2 + \dots + x_n = n\bar{x}$$

$$\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}) = (x_1 - \bar{x}) + (x_2 - \bar{x}) + \dots + (x_n - \bar{x})$$

$$= (x_1 + x_2 + \dots + x_n) - n\bar{x} = n\bar{x} - n\bar{x} = ۰$$

۲۰- گزینه «۴»

دشوار

اگر فراوانی گروه خونی O را x فرض کنیم داریم:

$$f_O = x \quad f_{AB} = ۴f_O = ۴x$$

$$f_A = ۲f_{AB} = ۲(۴x) = ۸x$$

$$f_B = ۳f_{AB} = ۳(۴x) = ۱۲x$$

$$n = f_O + f_{AB} + f_A + f_B = x + ۴x + ۸x + ۱۲x = ۲۵x$$

$$\alpha_B = \frac{f_B}{n} \times ۳۶۰ = \frac{۱۲x}{۲۵x} \times ۳۶۰ = ۱۷۲/۸$$



آسان

-۱

(آ) صفر
(ب) مُد
(پ) میانگین - میانه - مُد
(ت) میانه

متوسط

-۲

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n} = \frac{۷۱ + ۶۵ + ۸۰ + ۵۲ + ۹۵ + ۱۰۰}{۶} = \frac{۴۶۳}{۶} \Rightarrow \bar{x} = ۷۷/۱۶$$

$$\bar{x} = \frac{\sum f_i x_i}{\sum f_i}$$

$$= \frac{۷۱ \times ۴ + ۶۵ \times ۳ + ۸۰ \times ۱ + ۵۲ \times ۱ + ۹۵ \times ۴ + ۱۰۰ \times ۳}{۴ + ۳ + ۱ + ۱ + ۴ + ۳}$$

$$= \frac{۱۸۱۱}{۲۶} \Rightarrow \bar{x} = ۶۹/۶۵$$

(پ) میانگین نمرات که با احتساب ضرایب سواد امتحانی به دست می‌آید، میانگین بهتری است.

آسان

-۳

در درس حسابان آموخته‌ایم مجموع n جمله یک دنباله حسابی از

$$\text{دستور } S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{۲} \text{ به دست می‌آید.}$$

$$x = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} = \frac{n(x_1 + x_n)}{۲} = \frac{x_1 + x_n}{۲}$$



دشوار -۹

اگر فرض کنیم درصد درس فیزیک x باشد.

$$\bar{x} = \frac{\sum f_i x_i}{\sum f_i} \Rightarrow \bar{x} = \frac{53 \times 4 + 3x + 67 \times 1 + 34 \times 1 + 80 \times 4 + 67 \times 3}{4 + 3 + 1 + 1 + 4 + 3}$$

$$\Rightarrow 63 = \frac{212 + 3x + 67 + 34 + 320 + 201}{16}$$

$$\Rightarrow 834 + 3x = 1008 \Rightarrow 3x = 174 \Rightarrow x = 58$$

متوسط -۱۰

اگر علامت ؟ را برابر k فرض کنیم.

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n} \Rightarrow 15/65$$

$$= \frac{17/5 + 19 + 17 + 16 + 20 + 16 + 15 + 18 + k + 18}{10}$$

$$\Rightarrow 156/5 = 156/5 + k \Rightarrow k = 0$$

مُد داده یا داده های است که بیشترین تکرار را داشته باشد، پس هم ۱۶ و هم ۱۸ مُد است.

متوسط -۱۱

(آ) داده‌ها را از کوچک به بزرگ می‌نویسیم.

۳, ۵, ۵, ۵, ۷, ۸, ۸, ۹, ۱۰

چون تعداد داده‌ها فرد است ($n=9$)، داده وسط ($\frac{n+1}{2} = 5$) میانه است.

$$Q_2 = 7$$

(ب) داده‌ها را از کوچک به بزرگ مرتب می‌کنیم.

۱۳, ۱۵, ۱۶, ۱۷, ۱۷, ۱۹, ۲۰, ۲۱, ۲۲, ۶۰

چون تعداد داده‌ها زوج است، میانگین دو داده وسط میانه است.

$$Q_2 = \frac{17+19}{2} \Rightarrow Q_2 = 18$$

متوسط -۱۲

داده‌ها را از کوچک به بزرگ مرتب می‌کنیم.

۱۰, ۱۲, ۱۴, ۱۵, ۱۸, ۱۸, ۱۹, ۲۳, ۲۵, ۲۷, ۳۱, ۳۲, ۳۴, ۴۱, ۴۳

Q_1 Q_2 Q_3

$$IQR = Q_3 - Q_1 = 32 - 15 = 17$$

آسان -۱۳

(آ) مُد برابر ۹ است ($M=9$)

۸, ۹, ۹, ۹, ۹ $Q_2 = 9$

(ب) این داده‌ها مُد ندارند.

۲۴, ۴۰, ۵۰, ۶۰, ۳۰۰ $Q_2 = 50$

(پ) این داده‌ها مُد ندارد.

۳, ۸, ۱۰, ۱۵ $Q_2 = \frac{8+10}{2} = 9$

متوسط -۷

روش ۱

اگر میانگین x_1, x_2, \dots, x_8 برابر $\bar{x} = 21$ و میانگین y_1, y_2, y_{12} برابر $\bar{y} = 16$ باشد.

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_8}{8} \Rightarrow 21 = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_8}{8}$$

$$\Rightarrow x_1 + x_2 + \dots + x_8 = 168$$

$$\bar{y} = \frac{y_1 + y_2 + \dots + y_{12}}{12} \Rightarrow 16 = \frac{y_1 + y_2 + \dots + y_{12}}{12}$$

$$\Rightarrow y_1 + y_2 + \dots + y_{12} = 192$$

حال میانگین کل داده های $x_1, x_2, \dots, x_8, y_1, y_2, \dots, y_{12}$ برابر \bar{z} نشان می‌دهیم.

$$\bar{z} = \frac{(x_1 + x_2 + \dots + x_8) + (y_1 + y_2 + \dots + y_{12})}{8 + 12}$$

$$= \frac{168 + 192}{20} = \frac{360}{20} = 18 \Rightarrow \bar{z} = 18$$

روش ۲

تکته: اگر میانگین m داده آماری \bar{x}_1 و میانگین n داده آماری \bar{x}_2 باشد میانگین کل از دستور زیر محاسبه می‌شود.

$$\bar{x} = \frac{m\bar{x}_1 + n\bar{x}_2}{m + n}$$

$$\bar{x} = \frac{8(21) + 12(16)}{8 + 12} = \frac{360}{20} = 18$$

متوسط -۸

روش ۱: اگر میانگین x_1, x_2, \dots, x_5 برابر ۱۷ باشد

$$17 = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_5}{5} \Rightarrow x_1 + x_2 + \dots + x_5 = 85$$

حال میانگین داده‌های $x_1, x_2, \dots, x_5, 11, 17$ را به دست می‌آوریم.

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_5 + 11 + 17}{7} = \frac{85 + 28}{7} = \frac{113}{7} \Rightarrow \bar{x} = 16/14$$

روش ۲:

میانگین ۵ داده ۱۷ است ($\bar{x} = 17, n = 5$) و میانگین دو داده ۱۱ و ۱۷ برابر ۱۴ است. ($\bar{y} = 14, m = 2$)

$$\bar{z} = \frac{n\bar{x} + m\bar{y}}{n + m} = \frac{5 \times 17 + 2 \times 14}{5 + 2} = \frac{113}{7} \Rightarrow \bar{z} = 16/14$$

دشوار

-۱۸

روش ۱: اگر داده‌ها را به ترتیب از کوچک به بزرگ بنویسیم

$$\begin{array}{ccc} \text{داده ۸} & \text{داده ۱۶} & \text{داده ۸} \\ \hline x_1, x_2, \dots, x_8 & x_9, x_{10}, \dots, x_{15}, x_{16}, x_{17}, \dots, x_{24} & x_{25}, x_{26}, \dots, x_{32} \\ \hline \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ Q_1 & Q_2 & Q_3 \end{array}$$

$$10 = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_8}{8} \Rightarrow x_1 + x_2 + \dots + x_8 = 80$$

$$12 = \frac{x_9 + x_{10} + \dots + x_{24}}{16} \Rightarrow x_9 + x_{10} + \dots + x_{24} = 192$$

$$18 = \frac{x_{25} + x_{26} + \dots + x_{32}}{8} \Rightarrow x_{25} + x_{26} + \dots + x_{32} = 144$$

$$\sum x_i = 80 + 144 + 192 = 416$$

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n} = \frac{416}{32} = 13$$

روش ۲: چون تعداد داده‌ها مضرب ۴ است ($n = 32$) پس $\frac{1}{4}$ داده‌ها کمتر

از Q_1 و $\frac{1}{4}$ داده‌ها بزرگ‌تر از Q_3 و نصف داده‌ها در دامنه میان چارکی قرار دارند.

$$\bar{x} = \frac{1}{4}(10) + \frac{1}{2}(12) + \frac{1}{4}(18) = 2/5 + 6 + 4/5 = 13$$

دشوار

-۱۹

داده را به ترتیب از کوچک به بزرگ می‌نویسیم و چون تعداد داده‌ها فرد است داده وسط میانه است.

$$\begin{array}{ccc} x_1, x_2, \dots, x_6, x_7, \dots, x_{12}, x_{13}, x_{14}, \dots, x_{19}, x_{20}, \dots, x_{25} \\ \hline \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ Q_1 = \frac{x_6 + x_7}{2} & Q_2 & Q_3 = \frac{x_{19} + x_{20}}{2} \end{array}$$

$$8 = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_6}{6} \Rightarrow x_1 + x_2 + \dots + x_6 = 48$$

$$12 = \frac{x_7 + x_8 + \dots + x_{19}}{13} \Rightarrow x_7 + x_8 + \dots + x_{19} = 156$$

$$21 = \frac{x_{20} + x_{21} + \dots + x_{25}}{6} \Rightarrow x_{20} + x_{21} + \dots + x_{25} = 126$$

$$\sum x_i = 48 + 156 + 126 = 330$$

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n} = \frac{330}{25} \Rightarrow \bar{x} = 13/2$$

آسان

-۲۰

چون ۳ داده بزرگتر از میانه (۲۱ و ۵۲ و ۳۲ بزرگتر از ۱۸ هستند) و ۳ داده کوچکتر از میانه (سه عدد ۱۵، ۱۳، ۷ کوچکتر از میانه هستند) به داده‌ها اضافه شده است بنابراین میانه داده‌های جدید نیز برابر ۱۸ است.

دشوار

-۱۴

تعداد مقدار داده‌ها برابر ۸ است، پس میانگین دو داده وسط برابر میانه است و زمانی میانگین دو عدد ۱۳ می‌شود که اگر یکی از داده‌ها از ۱۳ بیشتر شد، داده دیگر کوچک‌تر از ۱۳ باشد بنابراین دو عدد x و ۱۴ دو داده وسط هستند

$$Q_2 = \frac{14 + x}{2} \Rightarrow 13 = \frac{14 + x}{2} \Rightarrow 26 = 14 + x \Rightarrow x = 12$$

حال داده‌ها را به ترتیب می‌نویسیم

$$5, 6, 7, 12, 14, 20, 22, 22$$

پس مُد برابر ۲۲ است و داریم

$$Q_1 = \frac{6 + 7}{2} = 6/5 \quad Q_3 = \frac{20 + 22}{2} = 21$$

داده‌های بین چارک اول و سوم عبارتند از (۷، ۱۲، ۱۴، ۲۰)

$$\bar{x} = \frac{7 + 12 + 14 + 20}{4} = \frac{53}{4} = 13/25$$

دشوار

-۱۵

مُد داده‌ای با بیشترین فراوانی است.

$$M = 1$$

جلسه تمرین	۱	۲	۳	۴	۵	۶
تعداد گل‌ها	۴	۲	۳	۱	۱	۵

برای به دست آوردن میانه ابتدا داده‌ها را مرتب می‌کنیم.

$$1, 1, 2, 3, 3, 4, 5$$

چون تعداد داده‌ها زوج است، میانگین دو عدد وسط میانه است.

$$Q_2 = \frac{2 + 3}{2} = 2/5$$

$$\bar{x} = \frac{4 + 2 + 3 + 1 + 1 + 5}{6} = \frac{16}{6} = \frac{8}{3}$$

آسان

-۱۶

برای این که شرکت ضرر نکند باید برای تعیین حق بیمه میانگین را در نظر بگیرید، چون تأثیر مقدار همه داده‌ها در میانگین وجود دارد.

دشوار

-۱۷

مد داده یا داده‌های است که بیشترین تکرار را دارد $M = 14$

داده را به ترتیب از کوچک به بزرگ می‌نویسیم.

$$4, 6, 8, 9, 12, 12, 13, 14, 14, 14, 14, 16, 18$$

چون تعداد داده‌ها زوج است میانگین دو عدد وسط میانه است.

$$Q_2 = \frac{12 + 13}{2} = 12/5$$

پس داریم:

$$Q_2 - M = 12/5 - 14 = -1/5$$

$$\begin{array}{ccc} 4, 6, 8, 9, 12, 12 & & 13, 14, 14, 14, 16, 18 \\ \downarrow & & \downarrow \\ Q_1 = \frac{8 + 9}{2} = 8/5 & & Q_3 = \frac{14 + 14}{2} = 14 \end{array}$$

$$IQR = Q_3 - Q_1 = 14 - 8/5 = 5/5$$

۵- گزینه «۱» آسان

دنباله $k, 1, 2, 3, \dots$ یک دنباله حسابی است و میانگین در یک دنباله حسابی برابر نصف مجموع جمله اول و آخر است.

$$15 = \frac{1+k}{2} \Rightarrow 30 = 1+k \Rightarrow k = 29$$

۶- گزینه «۲» آسان

تعداد لغاتی که شخص در هر روز حفظ می کند یک دنباله حسابی با قدرنسبت ۱ و جمله اول ۵ می‌سازد.

$$\begin{cases} a = 5 \\ d = 1 \end{cases}$$

$$t_n = a + (n-1)d \Rightarrow t_3 = 5 + 2(1) = 7$$

$$\bar{x} = \frac{t_1 + t_3}{2} = \frac{5 + 7}{2} = 6$$

۷- گزینه «۱» آسان

$$\bar{x} = \frac{\sum f_i x_i}{\sum f_i} \Rightarrow \bar{x} = \frac{10 \times 5 + 12 \times 8 + 14 \times 7 + 15 \times 10 + 17 \times 6 + 18 \times 4}{5 + 8 + 7 + 10 + 6 + 4}$$

$$\Rightarrow \bar{x} = \frac{50 + 96 + 98 + 150 + 102 + 72}{40} \Rightarrow \bar{x} = \frac{568}{40} \Rightarrow \bar{x} = 14.2$$

۸- گزینه «۲» دشوار

روش ۱:

$$1204 - 1024 = 180 = \text{مقدار اشتباه محاسبه شده}$$

$$\text{داده‌ها: } x_1, x_2, \dots, x_{45} + 180$$

$$\bar{x}_1 = \frac{\sum x_i}{n} \Rightarrow 1124 = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_{45} + 180}{45}$$

$$\Rightarrow x_1 + x_2 + \dots + x_{45} + 180 = 50400$$

$$\Rightarrow x_1 + x_2 + \dots + x_{45} = 50400 - 180 = 50220$$

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_{45}}{45} = \frac{50220}{45} = 1116$$

روش دوم:

$$-180 = 1024 - 1204 = \text{مقدار جایگزین - مقدار اصلی} = \text{میزان خطا}$$

$$\text{میزان خطا} = \frac{\text{میانگین محاسبه شده} - \text{میانگین اصلی}}{\text{تعداد داده ها}}$$

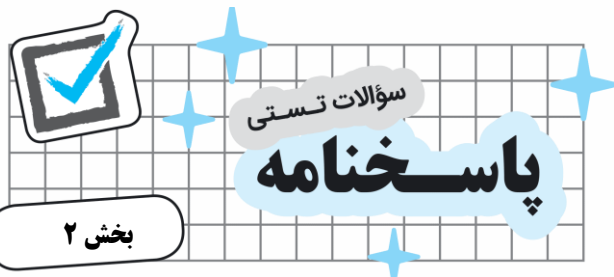
$$\Rightarrow \bar{x} = 1124 + \frac{-180}{45} = 1124 - 4 = \bar{x} = 1120$$

۹- گزینه «۳» آسان

نکته: اگر $y_i = ax_i + b$ باشد $\bar{y} = a\bar{x} + b$ است.

$$y_i = 3(x_i - 12) \Rightarrow \bar{y} = 3(\bar{x} - 12) = 3(57 - 12) = 3(45)$$

$$\Rightarrow \bar{y} = 135$$



متوسط

۱- گزینه «۴»

داده‌ها: $x_1, x_2, \dots, x_9, x_{10}$

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n} \Rightarrow 12 = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_{10}}{10} \Rightarrow x_1 + x_2 + \dots + x_{10} = 120$$

فرض کنیم x_{10} را حذف کنیم.

x_1, x_2, \dots, x_9

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n} \Rightarrow 11 = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_9}{9} \Rightarrow x_1 + x_2 + \dots + x_9 = 99$$

رابطه (۱) را منهای رابطه (۲) می‌کنیم.

$$(x_1 + x_2 + \dots + x_{10}) - (x_1 + x_2 + \dots + x_9) = 120 - 99 \Rightarrow x_{10} = 21$$

متوسط

۲- گزینه «۲»

داده‌ها: $x_1, x_2, \dots, x_{15}, 17, 17, 20$

$$\bar{x} = \frac{\sum f_i}{n} \Rightarrow 13 = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_{15} + 17 + 17 + 20}{18}$$

$$\Rightarrow 234 = x_1 + x_2 + \dots + x_{15} + 54 \Rightarrow x_1 + x_2 + \dots + x_{15} = 180$$

داده‌ها: x_1, x_2, \dots, x_{15}

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_{15}}{15} = \frac{180}{15} \Rightarrow \bar{x} = 12$$

آسان

۳- گزینه «۲»

نکته: اگر میانگین n داده آماری \bar{x}_1 و میانگین m داده آماری \bar{x}_2 باشند

میانگین کل داده‌ها از رابطه زیر محاسبه می‌شود:

$$\bar{x} = \frac{n\bar{x}_1 + m\bar{x}_2}{n + m}$$

$$\bar{x} = \frac{9 \times 12 + 6 \times 17}{9 + 6} = \frac{108 + 102}{15} = \frac{210}{15} \Rightarrow \bar{x} = 14$$

آسان

۴- گزینه «۲»

میانگین داده‌های اضافه شده را به دست می‌آوریم.

$$\bar{x}_2 = \frac{22 + 25 + 34}{3} = \frac{81}{3} = 27$$

حال میانگین ۷ داده ۲۳ ($\bar{x}_1 = 23, n = 7$) و میانگین ۳ داده ۲۷ است

$$(\bar{x}_2 = 27, m = 3)$$

$$\bar{x} = \frac{n\bar{x}_1 + m\bar{x}_2}{n + m} = \frac{7 \times 23 + 3 \times 27}{7 + 3} = \frac{161 + 81}{10} = \frac{242}{10} = 24.2$$

دشوار

۱۵- گزینه «۴»

$$\sum x_i = \frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{3 \times 4} + \dots + \frac{1}{19 \times 21}$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{19} - \frac{1}{21} \right)$$

$$\Rightarrow \sum x_i = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{21} \right) = \frac{1}{2} \times \frac{20}{21} = \frac{10}{21}$$

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n} \Rightarrow \bar{x} = \frac{\frac{10}{21}}{10} \Rightarrow \bar{x} = \frac{1}{21}$$

دو داده $\frac{1}{1 \times 2}$ و $\frac{1}{4 \times 5}$ از میانگین بزرگتر هستند پس ۸ داده دیگر از میانگین

کوچکتر هستند ($f=8$)

$$P = \frac{f}{n} \times 100 \Rightarrow P = \frac{8}{10} \times 100 = 80\%$$

آسان

۱۶- گزینه «۳»

$$\bar{x} = \frac{\sum f_i x_i}{\sum f_i} \Rightarrow 22 + 3a = \frac{16 \times 2 + 19 \times 4 + 22 \times 6 + 25 \times 3 + 28 \times 5}{2 + 4 + 6 + 3 + 5}$$

$$\Rightarrow 22 + 3a = \frac{32 + 76 + 132 + 75 + 140}{20} \Rightarrow 440 + 60a = 455$$

$$\Rightarrow 60a = 15 \Rightarrow a = 0.25$$

آسان

۱۷- گزینه «۱»

$$\bar{x} = \frac{\sum f_i x_i}{\sum f_i} \Rightarrow 12 + 2a = \frac{8 \times 2 + 10 \times 5 + 12 \times 5 + 14 \times 9 + 16 \times 3}{2 + 5 + 5 + 9 + 3}$$

$$\Rightarrow 12 + 2a = \frac{16 + 50 + 60 + 126 + 48}{24}$$

$$\Rightarrow 288 + 48a = 300 \Rightarrow 48a = 12 \Rightarrow a = 0.25$$

متوسط

۱۸- گزینه «۳»

$$\bar{x} = \frac{\sum f_i x_i}{\sum f_i} \Rightarrow 16 = \frac{x(12+x) + 2 \times 5 \times 16 + 1 \times 5 \times 18}{1/5 + 2/5 + x}$$

$$\Rightarrow 16 = \frac{12x + x^2 + 40 + 27}{4 + x}$$

$$\Rightarrow 64 + 16x = x^2 + 12x + 67 \Rightarrow x^2 - 4x + 3 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=3 \end{cases}$$

غ ق ق ۱
 $x=3$
 نمره درس ریاضی $= 12 + x = 12 + 3 = 15$

متوسط

۱۹- گزینه «۳»

$$\bar{x} = \frac{\sum f_i x_i}{\sum f_i} \Rightarrow 75 = \frac{4x + 65 \times 3 + 67 \times 3 + 53 \times 2 + 96 \times 2 + 91 \times 2}{4 + 3 + 3 + 2 + 2 + 2}$$

$$\Rightarrow 75 = \frac{4x + 195 + 201 + 106 + 192 + 182}{16} \Rightarrow 1200 = 4x + 876$$

$$\Rightarrow 4x = 324 \Rightarrow x = 81$$

آسان

۱۰- گزینه «۴»

$$\sum P_i = 100 \Rightarrow 15 + 30 + 25 + a = 100 \Rightarrow a = 30$$

$$\bar{x} = \frac{\sum P_i x_i}{100} = \frac{12 \times 15 + 15 \times 30 + 18 \times 25 + 21 \times 30}{100}$$

$$\Rightarrow \bar{x} = \frac{180 + 450 + 450 + 630}{100} = 17.1$$

آسان

۱۱- گزینه «۱»

می‌دانیم مجموع زوایا مرکزی در نمودار دایره‌ای 360° است پس داریم:

$$72 + \alpha + 144 + 36 = 360 \Rightarrow \alpha = 108^\circ$$

$$\bar{x} = \frac{\sum f_i x_i}{360} = \frac{4 \times 72 + 8 \times 108 + 12 \times 144 + 16 \times 36}{360} = \frac{3456}{360}$$

$$\Rightarrow \bar{x} = 9.6$$

دشوار

۱۲- گزینه «۳»

$$12 = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_{10}}{10} \Rightarrow x_1 + x_2 + \dots + x_{10} = 120$$

$$x_1 + \frac{x_{10}}{4}, x_2 + \frac{x_1}{4}, x_3 + \frac{x_2}{4}, \dots, x_{10} + \frac{x_9}{4}$$

$$\bar{x} = \frac{x_1 + \frac{x_{10}}{4} + x_2 + \frac{x_1}{4} + \dots + x_{10} + \frac{x_9}{4}}{10}$$

$$= \frac{(x_1 + x_2 + \dots + x_{10}) + \frac{1}{4}(x_1 + x_2 + \dots + x_{10})}{10}$$

$$= \frac{120 + 30}{10} \Rightarrow \bar{x} = 15$$

دشوار

۱۳- گزینه «۱»

داده‌های دسته اول به صورت $a_j = 4 - 3x_j$ و داده‌های دسته دوم به صورت $b_j = 3 + 4x_j$ هستند.

$$a_j = 4 - 3x_j \Rightarrow 3x_j = 4 - a_j \Rightarrow x_j = \frac{4 - a_j}{3}$$

$$b_j = 3 + 4x_j = 3 + 4 \left(\frac{4 - a_j}{3} \right) = 3 + \frac{16 - 4a_j}{3} \Rightarrow b_j = \frac{25 - 4a_j}{3}$$

میانگین دسته اول $\bar{a} = 4$ است و میانگین دسته دوم را \bar{b} فرض می‌کنیم.

$$\bar{b} = \frac{25 - 4\bar{a}}{3} = \frac{25 - 4(4)}{3} = \frac{9}{3} \Rightarrow \bar{b} = 3$$

آسان

۱۴- گزینه «۲»

$$x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, 21$$

$$15 = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_{n-1} + 21}{n}$$

$$\Rightarrow 15n = x_1 + x_2 + \dots + x_{n-1} + 21 \Rightarrow x_1 + x_2 + \dots + x_{n-1} = 15n - 21$$

اگر فرد ۲۱ ساله را کنار بگذاریم.

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_{n-1}}{n-1} \Rightarrow 14 = \frac{15n - 21}{n-1}$$

$$\Rightarrow 15n - 21 = 14n - 14 \Rightarrow n = 7$$

آسان

۲۴- گزینه «۱»

انحراف تمام داده‌ها را از میانگین ($\bar{x} = 21$) محاسبه می‌کنیم.

$$x_i - \bar{x}: 5, -5, 5, x - 21, 4, 1$$

$$\sum (x_i - \bar{x}) = 0 \Rightarrow 5 - 5 + 5 + x - 21 + 4 + 1 = 0$$

$$\Rightarrow x - 11 = 0 \Rightarrow x = 11$$

آسان

۲۵- گزینه «۲»

همواره مجموع انحراف از میانگین صفر است.

$$\sum (x_i - \bar{x}) = 0 \Rightarrow -3 + 4 - 1 + 4 - 2 - 3 + a = 0$$

$$\Rightarrow -1 + a = 0 \Rightarrow a = 1$$

آسان

۲۶- گزینه «۲»

داده‌ها را از کوچک به بزرگ مرتب می‌کنیم.

$$3, 4, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 11$$

چون تعداد داده‌ها فرد است ($n = 9$) داده وسط ($\frac{n+1}{2} = 5$) میانه است.

$$Q_2 = 6$$

آسان

۲۷- گزینه «۳»

داده‌ها را از کوچک به بزرگ مرتب می‌کنیم.

$$1, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 11, 12, 13, 15$$

چون تعداد داده‌ها زوج است، میانگین دو عدد وسط میانه است.

$$Q_2 = \frac{7+8}{2} = 7.5$$

دشوار

۲۸- گزینه «۱»

تعداد کل داده‌ها $= 1 + 2 + 4 + 5 = 12$

x_i	۳	۵	x	۱۰
f_i	۱	۵	۴	۲

چون تعداد داده‌ها زوج است میانگین دو عدد وسط میانه است.

$$3, 5, 5, 5, 5, x, x, x, x, 10, 10$$

$$Q_2 = \frac{5+x}{2} = 2.5 + \frac{x}{2}$$

$$\bar{x} - Q_2 = 0.5 \Rightarrow \bar{x} = Q_2 + 0.5 \Rightarrow \bar{x} = 3 + \frac{x}{2}$$

$$\bar{x} = \frac{\sum f_i x_i}{\sum f_i} \Rightarrow 3 + \frac{x}{2} = \frac{3 \times 1 + 5 \times 5 + 4 \times x + 10 \times 2}{1 + 5 + 4 + 2}$$

$$\Rightarrow 3 + \frac{x}{2} = \frac{3 + 25 + 4x + 20}{12}$$

$$\Rightarrow 36 + 6x = 48 + 4x \Rightarrow 2x = 12 \Rightarrow x = 6$$

متوسط

۲۰- گزینه «۲»

وسط دسته	۱۰	۱۲	۱۴	۱۶	۱۸
فراوانی	۸	۱۱	۱۶	۱۴	۱۱

$$\bar{x} = \frac{\sum f_i x_i}{\sum f_i} = \frac{10 \times 8 + 12 \times 11 + 14 \times 16 + 16 \times 14 + 18 \times 11}{8 + 11 + 16 + 14 + 11}$$

$$= \frac{80 + 132 + 224 + 224 + 198}{60} = \frac{858}{60} \Rightarrow \bar{x} = 14.3$$

متوسط

۲۱- گزینه «۲»

مرکز دسته	۵	۷	۹	۱۱	۱۳
فراوانی	۵	۸	۱۰	۷	۲

$$\bar{x} = \frac{\sum f_i x_i}{\sum f_i} = \frac{5 \times 5 + 7 \times 8 + 9 \times 10 + 11 \times 7 + 13 \times 2}{5 + 8 + 10 + 7 + 2}$$

$$= \frac{25 + 56 + 90 + 77 + 26}{32} = \frac{274}{32} \Rightarrow \bar{x} = 8.56$$

دشوار

۲۲- گزینه «۱»

روش ۱:

$$\bar{x} = \frac{\sum f_i x_i}{\sum f_i} \Rightarrow 41 = \frac{33 \times 7 + 37 \times 10 + 41 \times 15 + 45 \times 12 + 49 \times x}{7 + 10 + 15 + 12 + x}$$

$$\Rightarrow 41 = \frac{231 + 370 + 615 + 540 + 49x}{44 + x}$$

$$1804 + 41x = 1756 + 49x \Rightarrow 48 = 8x \Rightarrow x = 6$$

$$n = 7 + 10 + 15 + 12 + x \xrightarrow{x=6} n = 50$$

$$\alpha_i = \frac{f_i}{n} \times 360 \Rightarrow \alpha_3 = \frac{15}{50} \times 360 = 108^\circ$$

روش دوم: می‌دانیم مجموع انحراف از میانگین همه داده‌ها برابر صفر است.

$x_i - \bar{x}$	-۸	-۴	۰	۴	۸
فراوانی	۷	۱۰	۱۵	۱۲	x

$$\sum (x_i - \bar{x}) = 0 \Rightarrow -8(7) - 4(10) + 0(15) + 4(12) + 8x = 0$$

$$\Rightarrow -56 - 40 + 0 + 48 + 8x = 0 \Rightarrow 8x = 48 \Rightarrow x = 6$$

$$n = 7 + 10 + 15 + 12 + x \xrightarrow{x=6} n = 50$$

$$\alpha_i = \frac{f_i}{n} \times 360 \Rightarrow \alpha_3 = \frac{15}{50} \times 360 = 108^\circ$$

متوسط

۲۳- گزینه «۱»

داده	۱	۳	۵	۷
فراوانی	۲	۶	۱۰	۴

$$\bar{x} = \frac{\sum f_i x_i}{\sum f_i} = \frac{1 \times 2 + 3 \times 6 + 5 \times 10 + 7 \times 4}{2 + 6 + 10 + 4} = \frac{98}{22} = 4.45$$



۳۳- گزینه «۱» دشوار

تعداد داده‌ها فرد است پس داده وسط یعنی داده ۵ام میانه است.

$$Q_2 = 2x + 4$$

$$\bar{x} = 2Q_2 - 11 \Rightarrow \bar{x} = 4x + 8 - 11 \Rightarrow \bar{x} = 4x - 3$$

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n} \Rightarrow$$

$$4x - 3 = \frac{2x - 1 + x + 3 + x + 6 + 3x - 1 + 2x + 4}{9} +$$

$$\frac{3x + 1 + 3x + 3 + 5x - 2 + 7x - 4}{9} \Rightarrow$$

$$26x - 27 = 27x + 9 \Rightarrow 9x = 36 \Rightarrow x = 4 \Rightarrow \begin{cases} Q_2 = 12 \\ \bar{x} = 13 \end{cases}$$

$$\bar{x} - Q_2 = 13 - 2 = 1$$

۳۳- گزینه «۳» متوسط

داده‌ها مرتب هستند پس چون تعداد داده‌ها فرد است داده وسط میانه است.

$$2, 2, 3, 3, 4, 5, 6, 6, 7, 8, 8, 9, 10, 11, 11$$

$$Q_1 \quad Q_2$$

در ۷ داده کوچکتر از میانه داده وسط یعنی داده چهارم چارک اول است

$$(Q_1 = 3)$$

باید اعداد ۴ و ۵ و ۶ را در ۲ ضرب کنیم:

$$2, 2, 3, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 8, 9, 10, 11, 11$$

داده‌ها را مرتب می‌کنیم.

$$2, 2, 3, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 8, 9, 10, 11, 11, 12$$

$$Q_2$$

داده وسط یعنی داده هشتم میانه داده‌های جدید است. ($Q_2 = 8$)

۳۴- گزینه «۱» متوسط

$$30 \text{ اعداد اول کوچکتر از } 30: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29$$

در این داده‌ها $n = 10$ است چون زوج است $\frac{n+2}{4}$ را محاسبه

می‌کنیم ($\frac{12}{4} = 3$) یعنی داده سوم از ابتدا و انتها به ترتیب چارک اول و سوم

است.

$$Q_1 = 5 \quad Q_3 = 19$$

$$IQR = Q_3 - Q_1 = 19 - 5 = 14$$

۳۹- گزینه «۱» دشوار

داده‌ها را از کوچک به بزرگ می‌نویسیم.

$$9, 9, 10, 10, 11, 12, 13, 14, 15$$

چون تعداد داده‌ها ۹ تا و فرد است، داده وسط یعنی داده ۵ام میانه است

$$(Q_2 = 11)$$

برای محاسبه چارک سوم داده‌های بعد از میانه را می‌نویسیم، چون تعداد

داده‌ها ۱۲، ۱۳، ۱۴، ۱۵ زوج است میانگین دو داده وسط چارک سوم است.

$$Q_3 = \frac{13 + 14}{2} = 13.5$$

اعداد بزرگتر از ۱۳/۵ را حذف می‌کنیم، داده‌های باقی‌مانده عبارتند از:

$$9, 9, 10, 10, 11, 12, 13$$

چون تعداد داده‌ها ۷ تا و فرد است داده وسط یعنی داده چهارم میانه است.

$$Q_2 = 10$$

۳۰- گزینه «۴» دشوار

داده‌ها را از کوچک به بزرگ مرتب می‌کنیم.

$$5, 7, 8, 10, 11, 14, 15, 16, 17, 17, 25$$

$$Q_1 \quad Q_2 \quad Q_3$$

چون تعداد داده‌ها فرد است داده وسط (داده ششم) میانه است. $Q_2 = 14$

داده‌های کوچکتر از میانه داده‌های اول تا پنجم هستند که داده وسطی آن‌ها

داده سوم است که چارک اول می‌باشد. ($Q_1 = 8$)

داده‌های بزرگتر از میانه داده‌های ششم تا یازده هستند که داده وسطی آن‌ها

داده نهم است که چارک سوم می‌باشد ($Q_3 = 17$)

داده‌های بین چارک اول و سوم عبارتند از:

$$10, 11, 14, 15, 16$$

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n} = \frac{10 + 11 + 14 + 15 + 16}{5} = \frac{66}{5} = 13.2$$

۳۱- گزینه «۲» متوسط

انحراف داده‌ها از میانگین را محاسبه می‌کنیم و می‌دانیم مجموع انحراف از

میانگین کل داده‌ها صفر است.

$$x_i - \bar{x}: -1/5, -2/5, a - 7/5, 2/5, 1/5, -2/5, 3/5, -0/5, 2/5, -2/5$$

$$\sum (x_i - \bar{x}) = 0 \Rightarrow a - 7 = 0 \Rightarrow a = 7$$

داده‌ها را از کوچک به بزرگ می‌نویسیم.

$$5, 5, 5, 6, 7, 7, 9, 10, 10, 11$$

چون تعداد داده‌ها زوج است، میانگین دو عدد وسط میانه است.

$$Q_2 = \frac{7 + 7}{2} = 7$$



$$x = 3 \Rightarrow 3, 3, 4, 6, 8, 9 \quad Q_2 = \frac{4+6}{2} = 5$$

$$x = 4 \Rightarrow 3, 4, 4, 6, 8, 9 \quad Q_2 = \frac{4+6}{2} = 5$$

$$x = 6 \Rightarrow 3, 4, 6, 6, 8, 9 \quad Q_2 = \frac{6+6}{2} = 6$$

$$x = 8 \Rightarrow 3, 4, 6, 8, 8, 9 \quad Q_2 = \frac{6+8}{2} = 7$$

به ازای $x = 3$ و $x = 4$ میانگین ثابت و برابر ۵ است.

متوسط

گزینه «۲»

تعداد داده‌ها برابر ۱۶ است ($n = 16$) پس داده $\frac{n+2}{4}$ یعنی $4/5$ (میانگین

داده ۴ ام و ۵ ام چارک اول) است پس ۴ داده کوچکتر از چارک اول داریم.

$$P_1 = \frac{f_i}{n} \times 100 = \frac{4}{16} \times 100 = 25\%$$

می دانیم درصد مساحت در هر دسته برابر درصد فراوانی نسبی همان دسته است.

دشوار

گزینه «۱»

داده‌ها را از کوچک به بزرگ مرتب می‌کنیم.

$$10/6, 10/6, 11/2, 11/5, 11/9, 12/3, 12/7, 12/8, 13/5, 30/2$$

$$Q_1 \quad \downarrow \quad Q_2$$

چون تعداد داده‌ها ۱۰ تا است، میانگین داده پنجم و ششم میانگین

$$\text{است } Q_2 = \frac{11/9 + 12/3}{2} = 12/1 \quad \text{و داده سوم چارک اول است } (Q_1 = 11/2)$$

داده هشتم چارک سوم است. ($Q_3 = 12/8$)

$$\frac{Q_1 + Q_3 - 2Q_2}{Q_3 - Q_1} = \frac{12/8 + 11/2 - 2(12/1)}{12/8 - 11/2} = \frac{-0/2}{1/6} = -\frac{1}{8} = -0/125$$

متوسط

گزینه «۱»

$$\bar{x} = \frac{\sum f_i x_i}{\sum f_i} = \frac{10 \times 6 + 12 \times 9 + 14 \times 10 + 15 \times 12 + 16 \times 8 + 18 \times 5}{6 + 9 + 10 + 12 + 8 + 5}$$

$$= \frac{60 + 108 + 140 + 180 + 128 + 90}{50} = 14/12$$

چون تعداد داده‌ها ۵۰ تا است میانگین داده ۲۵ ام و ۲۶ ام میانگین است.

X	۱۰	۱۲	۱۴	۱۵	۱۶	۱۸
f	۶	۹	۱۰	۱۲	۸	۵
فراوانی تجمعی (جمع فراوانی)	۶	۱۵	۲۵	۳۷		

$$Q_2 = \frac{14+15}{2} = 14/5 \quad \text{داده ۲۵ ام (تا ۳۷ ام) ۱۵ است پس ۱۴/۵}$$

$$Q_2 - \bar{x} = 14/5 - 14/12 = 0/38$$

متوسط

گزینه «۲»

داده‌ها را از کوچک به بزرگ مرتب می‌کنیم.

$$3, 5, 7, 8, 9, 11, 11, 12, 13, 13, 14, 15, 16, 16, 17$$

چون تعداد داده‌ها فرد است ($n = 15$)، $\frac{n+1}{4}$ را محاسبه

می‌کنیم ($\frac{15+1}{4} = 4$) یعنی داده چهارم از ابتدا و انتها به ترتیب چارک اول و سوم است.

$$Q_1 = 8 \quad Q_3 = 15$$

$$IQR = Q_3 - Q_1 = 15 - 8 = 7$$

متوسط

گزینه «۴»

اگر تعداد داده‌ها (n) فرد باشد چنانچه $(n+1)$ مضرب ۴ باشد، چارک اول و سوم یکی از داده‌ها است و چنانچه n زوج باشد اگر $(n+2)$ مضرب ۴ باشد

چارک اول و سوم یکی از داده‌ها است بنابراین جواب گزینه ۴ است.

متوسط

گزینه «۳»

x_i	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷
f_i	۱	۲	۳	۲	۱	۲	۳

چون تعداد داده‌های ۱۴ تا است میانگین داده هفتم و هشتم میانگین است.

$$1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 5, 6, 6, 6, 7, 7, 7,$$

↓

$$Q_2 = \frac{4+4}{2} = 4$$

متوسط

گزینه «۱»

دنباله موردنظر یک دنباله هندسی است که $a = 5$ و $d = 3$ است.

$$t_n = a + (n-1)d \Rightarrow 167 = 5 + (n-1) \times 3 \Rightarrow 162 = 3(n-1)$$

$$\Rightarrow n-1 = 54 \Rightarrow n = 55$$

تعداد جملات ۵۵ تا است پس جمله ($\frac{n+1}{2} = 28$) ام دنباله میانگین است.

$$t_{28} = a + 27d = 5 + 27(3) = 5 + 81 = 86$$

متوسط

گزینه «۱»

داده‌ها را از کوچک به بزرگ مرتب می‌کنیم و x را یکبار ۳ و یکبار ۴ و یکبار ۶

و یکبار ۸ در نظر می‌گیریم.



$$x+y=14+6=20 \quad x-y=8 \xrightarrow{y=6} x=14 \quad y+2=8 \Rightarrow y=6$$

دشوار

گزینه ۳»

فراوانی داده ۳، برابر ۲ است و ۳ مُد نیست بنابراین فراوانی داده مُد حتماً بیشتر از ۲ تا است پس چون مُد برابر ۲ است $a^2 + b = a - 2 = 2$ می‌باشد.
 $a - 2 = 2 \Rightarrow a = 4$
 $a^2 + b = 2 \xrightarrow{a=4} 16 + b = 2 \Rightarrow b = -14$
 داده‌ها را مرتب می‌کنیم.

$$-14, 1, 3, 3, 4, 5$$

چون تعداد داده‌ها ۶ تا است میانگین دو داده‌ها ۶ تا است میانگین دو داده وسط میانه است.

$$Q_2 = \frac{3+3}{2} = 3$$

دشوار

گزینه ۲»

$$3, 4, 9, 11, 12, a, 19, 20, 20, 20, 22$$

مشخص است که a در مُد اثر ندارد و مُد این داده‌ها ۲۰ است.

$$M + Q_2 = 33 \Rightarrow 20 + Q_2 = 33 \Rightarrow Q_2 = 13$$

تعداد کل داده‌ها ۱۱ است و داده وسط میانه است پس $a = 13$ است.

دشوار

گزینه ۵»

x_i	۵	۱۰	۱۵	۲۰
f_i	۱۰	۱۵	۵	۲۰
جمع فراوانی (فراوانی تجمعی)	۱۰	۲۵	۳۰	۵۰

$$n = \sum f_i = 10 + 15 + 5 + 20 = 50$$

چون تعداد داده‌ها زوج است میانگین دو داده وسط میانه است که داده ۱۲۵ام و ۱۰ و داده ۱۲۶ام ۱۵ است.

$$Q_2 = \frac{10+15}{2} = 12.5$$

عدد ۲۰ بیشترین فراوانی را دارد پس ۲۰ مُد داده است ($M=20$)

$$\bar{x} = \frac{\sum f_i x_i}{\sum f_i} = \frac{5 \times 10 + 10 \times 15 + 15 \times 5 + 20 \times 20}{10 + 15 + 5 + 20} = \frac{50 + 150 + 75 + 400}{50} = \frac{675}{50} \Rightarrow \bar{x} = 13.5$$

$$\frac{M - Q_2}{\bar{x}} = \frac{20 - 12.5}{13.5} = \frac{7.5}{13.5} = \frac{15}{27} = \frac{5}{9}$$

دشوار

گزینه ۴»

داده	۷	۹	۱۱	۱۳
فراوانی	۱۵	۹	۵	۱۱
جمع فراوانی‌ها (فراوانی تجمعی)	۱۵	۲۴		

$$n = \sum f_i = 15 + 9 + 5 + 11 = 40$$

چون تعداد داده زوج است میانگین دو داده ۲۱ام و ۲۰ام میانه است که هم

$$Q_2 = \frac{9+9}{2} = 9 \text{ است پس } ۹ \text{ داده } ۲۱ \text{ ام برابر } ۹ \text{ است پس } ۹$$

$$\bar{x} = \frac{\sum f_i x_i}{\sum f_i} = \frac{7 \times 15 + 9 \times 9 + 11 \times 5 + 13 \times 11}{15 + 9 + 5 + 11} = \frac{105 + 81 + 55 + 143}{40} = \frac{384}{40} = 9.6$$

$$\bar{x} - Q_2 = 9.6 - 9 = 0.6$$

متوسط

گزینه ۲»

اگر عدد x عددی تکراری در بین داده‌ها نباشد، این داده‌ها مُد ندارند و چنانچه هر یک از این عدد باشد، مُد همان عدد x است.

$$\text{مُد} = x = \frac{63 + 70 + 66 + 50 + 77 + 65 + 64 + x}{8}$$

$$\Rightarrow 8x = 455 + x \Rightarrow 7x = 455 \Rightarrow x = 65$$

متوسط

گزینه ۳»

داده‌ای که بیشترین تکرار را دارد، مُد است پس ($M=9$)

$$\bar{x} = \frac{\sum f_i x_i}{\sum f_i} = \frac{7 \times 2 + 9 \times 3 + 11 \times 2 + 13 \times 2 + 15 \times 1}{2 + 3 + 2 + 2 + 1} = \frac{14 + 27 + 22 + 26 + 15}{10} = \frac{104}{10} = 10.4$$

$$\bar{x} - M = 10.4 - 9 = 1.4$$

متوسط

گزینه ۲»

داده‌ها را از کوچک به بزرگ مرتب می‌کنیم:

$$5 - 7 - 9 - 10 - 13 - 13 - 14 - 15 - 15 - 15 - 17 - 19$$

چون تعداد داده‌های زوج است، میانگین دو عدد وسط میانه است.

$$Q_2 = \frac{13+14}{2} = 13.5$$

عدد ۱۵ بیشترین فراوانی را دارد پس مد برابر ۱۵ است. ($M=15$)

$$M - Q_2 = 15 - 13.5 = 1.5$$

دشوار

گزینه ۳»

فراوانی عدد ۲ برابر ۳ است یعنی یکی از مُدها عدد ۲ است و چون داده‌ها دارای ۲ مُد هستند پس $x - y$ با $y + 2$ برابر است و مساوی یکی از اعداد ۴ یا ۶ یا ۸ است.

$$x + y = 2 + 6 = 8 \quad x - y = 4 \xrightarrow{y=2} x = 6 \quad y + 2 = 4 \Rightarrow y = 2$$

$$x + y = 10 + 4 = 14 \quad x - y = 6 \xrightarrow{y=4} x = 10 \quad y + 2 = 6 \Rightarrow y = 4$$

متوسط

-۵

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n} = \frac{۳۸+۳۸+۳۹+۳۹+۳۹+۴۰+۴۰}{۷} = \frac{۲۷۳}{۷} = ۳۹$$

$$\sigma^2 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n} = \frac{۲(۳۸-۳۹)^2 + ۳(۳۹-۳۹)^2 + ۲(۴۰-۳۹)^2}{۷}$$

$$= \frac{۲(۱) + ۳(۰) + ۲(۱)}{۷}$$

$$\Rightarrow \sigma^2 = \frac{۴}{۷}$$

متوسط

-۶

از همه داده‌ها به غیر از $۲X$ بار وجود دارد پس چنانچه X یکی از اعداد ۳۵، ۵۰ و ۵۵ و ۶۰ نباشد، این داده‌ها دارای ۴ مُد هستند بنابراین X یکی از این اعداد است و برابر مُد می‌شود.

$$M = \bar{x} \Rightarrow x = \frac{۳۵+۵۰+۵۵+۶۰+۳۵+۵۰+۶۰+۵۵+x}{۹}$$

$$\Rightarrow 9x = ۴۰۰ + x \Rightarrow 8x = ۴۰۰ \Rightarrow x = ۵۰$$

$$\sigma^2 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n}$$

$$\Rightarrow \sigma^2 = \frac{۲(۳۵-۵۰)^2 + ۳(۵۰-۵۰)^2 + ۲(۶۰-۵۰)^2 + ۲(۵۵-۵۰)^2}{۹}$$

$$= \frac{۴۵۰+۰+۲۰۰+۵۰}{۹} = \frac{۷۰۰}{۹}$$

متوسط

-۷

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^{11} (x_i - \bar{x})}{n} \Rightarrow ۲۵ = \frac{\sum_{i=1}^{11} (x_i - \bar{x})^2}{۱۱} \Rightarrow \sum_{i=1}^{11} (x_i - \bar{x})^2 = ۲۷۵$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{10} (x_i - \bar{x})^2 + (x_{11} - \bar{x})^2 = ۲۷۵$$

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^{10} (x_i - \bar{x})^2}{۱۰} = \frac{۲۷۵}{۱۰} \Rightarrow \sigma^2 = ۲۷/۱۰ \Rightarrow \sigma = ۵/۲۴$$



سؤالات تشریحی

پاسخنامه

بخش ۳

آسان

-۱

آ) واریانس (یا پراش) - پراکندگی - میانگین داده‌ها
 ب) کمتر - میانگین - به هم نزدیکتر
 پ) تغییر نمی‌کند - کاهش می‌یابد
 ت) ندارد

آسان

-۲

زمانی واریانس داده‌ها برابر صفر است که همه داده‌ها با هم برابر باشند.

$$8a + 4 = 12 \Rightarrow a = 1$$

$$3b - 6 = 12 \Rightarrow b = 6$$

$$2c + 8 = 12 \Rightarrow c = 2$$

$$d + 5 = 12 \Rightarrow d = 7$$

$$\bar{x} = \frac{a+b+c+d}{4} = \frac{1+6+2+7}{4} = \frac{16}{4} = 4$$

متوسط

-۳

می‌دانیم مجموع اختلاف از میانگین همه داده‌ها برابر صفر است پس داریم:

$$\sum (x_i - \bar{x}) = 0 \Rightarrow ۲+a-۵-۱+۳=0 \Rightarrow a-1=0 \Rightarrow a=1$$

$$\sigma^2 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n} = \frac{۴+۱+۲۵+۱+۹}{۵} = \frac{۴۰}{۵} \Rightarrow \sigma^2 = ۸$$

متوسط

-۴

$$\bar{x} = \frac{۳+۳+۴+۴+۵+۵}{۶} = ۴$$

$$\sigma^2 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n} = \frac{(۳-۴)^2 + (۳-۴)^2 + (۴-۴)^2 + (۵-۴)^2 + (۵-۴)^2}{۶}$$

$$= \frac{۱+۱+۰+۰+۱+۱}{۶} = \frac{۴}{۶} \Rightarrow \sigma^2 = \frac{۲}{۳}$$



دشوار -۱۰

اگر میانگین داده‌های x_1, x_2, \dots, x_n برابر \bar{x} و واریانس آن‌ها σ^2 باشد در داده‌های $x_1 + a, x_2 + a, \dots, x_n + a$ داریم:

$$\bar{x} = \frac{x_1 + a + x_2 + a + \dots + x_n + a}{n} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} + \frac{na}{n}$$

$$\Rightarrow \bar{x} = \bar{x}_{\text{قدیم}} + a$$

$$\sigma^2 = \frac{\sum (\bar{x}_i - \bar{x})^2}{n}$$

$$= \frac{(x_1 + a - \bar{x} - a)^2 + (x_2 + a - \bar{x} - a)^2 + \dots + (x_n + a - \bar{x} - a)^2}{n}$$

$$= \frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2}{n} \Rightarrow$$

قدیم $\sigma^2 = \sigma^2$ جدید

دشوار -۱۱

میانگین محیط مربع $= \frac{4x_1 + 4x_2 + \dots + 4x_n}{n} = 48$

$\xrightarrow{\div 4} \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} = 12 \Rightarrow \bar{x} = 12$

میانگین مساحت‌ها $= \frac{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}{n} = 153 \Rightarrow \sum x_i^2 = 153n$

واریانس طول اضلاع مربع‌ها $= \sigma^2 = \frac{\sum x_i^2}{n} - (\bar{x})^2 = 153 - 144 = 9$

$CV = \frac{\sigma}{\bar{x}} = \frac{3}{12} \Rightarrow CV = 0.25$

دشوار -۱۲

میانگین محیط دایره‌ها $= \frac{2\pi R_1 + 2\pi R_2 + \dots + 2\pi R_n}{n}$

$\Rightarrow 12\pi = \frac{2\pi(R_1 + R_2 + \dots + R_n)}{n}$

$\Rightarrow \frac{R_1 + R_2 + \dots + R_n}{n} = 6 \Rightarrow \bar{R} = 6$

میانگین مساحت دایره‌ها $= \frac{\pi R_1^2 + \pi R_2^2 + \dots + \pi R_n^2}{n} = 40\pi \xrightarrow{\div \pi} \frac{\sum R_i^2}{n} = 40$

واریانس شعاع دایره‌ها $= \sigma^2 = \frac{\sum R_i^2}{n} - (\bar{R})^2 = 40 - 36 = 4 \Rightarrow \sigma = 2$

$CV = \frac{\sigma}{\bar{x}} = \frac{2}{6} \Rightarrow CV = \frac{1}{3}$

آسان -۱۳

این تصمیم باعث می‌شود میانگین میانه و مُد نمرات ۱ نمره افزایش یابد اما واریانس و انحراف معیار تغییر نمی‌کند اما ضریب تغییرات نمرات کاهش می‌یابد.

دشوار -۸

x_1, x_2, \dots, x_{15}

$\sigma_x^2 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n} \Rightarrow 5 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{15} \Rightarrow \sum (x_i - \bar{x})^2 = 75$

y_1, y_2, \dots, y_{10}

$\sigma_y^2 = \frac{\sum (y_i - \bar{y})^2}{n} \Rightarrow 7/5 = \frac{\sum (y_i - \bar{y})^2}{10} \Rightarrow \sum (y_i - \bar{y})^2 = 75$

چون $\bar{y} = \bar{x}$ است میانگین ۲۵ داده آماری هم برابر \bar{x} یا \bar{y} است.

$\sigma^2 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2 + \sum (y_i - \bar{y})^2}{n} = \frac{75 + 75}{25} = \frac{150}{25} \Rightarrow \sigma^2 = 6$

روش ۲: اگر میانگین یک گروه m تایی با واریانس σ_1^2 با میانگین یک گروه n تایی با واریانس σ_2^2 برابر باشد، واریانس کل داده‌ها از رابطه زیر محاسبه می‌شود.

$\sigma^2 = \frac{m\sigma_1^2 + n\sigma_2^2}{m+n}$

$\sigma^2 = \frac{15 \times 5 + 10 \times 7/5}{15+10} = \frac{150}{25} = 6$

دشوار -۹

اگر در داده‌های x_1, x_2, \dots, x_n میانگین برابر \bar{x} و واریانس برابر σ^2 باشد در داده‌های ax_1, ax_2, \dots, ax_n داریم:

میانگین جدید $\bar{x} = \frac{ax_1 + ax_2 + \dots + ax_n}{n} = \frac{a(x_1 + x_2 + \dots + x_n)}{n}$

$\Rightarrow \bar{x}_{\text{جدید}} = a\bar{x}_{\text{قدیم}}$

$\sigma^2 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n} = \frac{(ax_1 - a\bar{x})^2 + (ax_2 - a\bar{x})^2 + \dots + (ax_n - a\bar{x})^2}{n}$

$= \frac{a^2 [(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2]}{n}$

$\Rightarrow \sigma^2_{\text{جدید}} = a^2 \sigma^2_{\text{قدیم}}$

آسان

-۱۷

$$CV = \frac{\sigma}{\bar{x}} \Rightarrow 2 = \frac{\sigma}{4} \Rightarrow \sigma = 8 \Rightarrow \sigma^2 = 64$$

دشوار

-۱۸

اگر میانگین و انحراف معیار داده‌ها x_1, x_2, \dots, x_n برابر \bar{x} و σ باشد برای

داده‌ها cx_1, cx_2, \dots, cx_n داریم:

$$\bar{x}' = \frac{cx_1 + cx_2 + \dots + cx_n}{n} = c \times \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} \Rightarrow \bar{x}' = c\bar{x}$$

$$\sigma'^2 = \frac{(cx_1 - c\bar{x})^2 + (cx_2 - c\bar{x})^2 + \dots + (cx_n - c\bar{x})^2}{n}$$

$$= c^2 \times \frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2}{n}$$

$$\Rightarrow \sigma'^2 = c^2 \sigma^2 \Rightarrow \sigma' = |c| \sigma$$

$$CV' = \frac{\sigma'}{\bar{x}'} = \frac{|c| \sigma}{c \bar{x}} = \pm \frac{\sigma}{\bar{x}} \Rightarrow CV' = \pm CV$$

اگر $C > 0$ باشد $CV' = CV$ و اگر $C < 0$ باشد $CV' = -CV$

متوسط

-۱۹

می‌دانیم اگر از همه داده‌ها یک عدد را کم کنیم، واریانس تغییر نمی‌کند، پس

همه داده‌ها را منهای ۸۰ می‌کنیم.

داده‌های جدید: ۲, ۴, ۵, ۷, ۷

$$\bar{x} = \frac{2+4+5+7+7}{5} = \frac{25}{5} = 5$$

$$\sigma^2 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n} = \frac{(2-5)^2 + (4-5)^2 + (5-5)^2 + (7-5)^2 + (7-5)^2}{5}$$

$$= \frac{9+1+0+4+4}{5} = \frac{18}{5} = 3.6$$

متوسط

-۲۰

داده‌ها را از کوچک به بزرگ مرتب می‌کنیم.

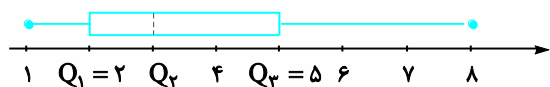
۱, ۱, ۱, ۱, ۱, ۲, ۲, ۲, ۲, ۲, ۲, ۳, ۳, ۴, ۴, ۴, ۵, ۵, ۵, ۶, ۷, ۷, ۸

چون تعداد داده زوج است (۲۲ داده) میانگین دو داده ۱۱ ام و ۱۲ میانه است.

$$Q_2 = \frac{2+3}{2} = 2.5$$

داده $(\frac{n+2}{4})$ یعنی ۶ام چارک اول است پس $Q_1 = 2$ و داده ۱۷ام چارک سوم است.

$Q_3 = 5$ سوم است.



آسان

-۱۴

از میانگین $x_i - \bar{x}$: -۲, -۱, ۰, ۱, ۲

$$\sigma^2 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n} = \frac{4+1+0+1+4}{5} = \frac{10}{5} = 2 \Rightarrow \sigma = \sqrt{2}$$

متوسط

-۱۵

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n} = \frac{32+59+26+53+74+17+45+23+64+50+63}{11} = \frac{506}{11} = 46$$

$$\sigma^2 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n} = \frac{(32-46)^2 + (59-46)^2 + (26-46)^2}{11}$$

$$+ \frac{(53-46)^2 + (74-46)^2 + (17-46)^2 + (45-46)^2}{11}$$

$$+ \frac{(23-46)^2 + (64-46)^2 + (50-46)^2 + (63-46)^2}{11}$$

$$\Rightarrow \sigma^2 = \frac{196+169+400+49+784}{11}$$

$$+ \frac{841+1+529+324+16+289}{11}$$

$$= \frac{3598}{11} = 327.09 \Rightarrow \sigma = \sqrt{327.09} = 18.08$$

$$CV = \frac{\sigma}{\bar{x}} = \frac{18.08}{46} \Rightarrow CV = 0.39$$

متوسط

-۱۶

مقدار مصرف: ۱/۴, ۲/۸, ۵/۹, ۲/۱۵, ۱۷/۲, ۸/۱۹, ۱۸/۳, ۱۹/۵

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n} = \frac{1/4 + 2/8 + 5/9 + 2/15 + 17/2 + 8/19 + 18/3 + 19/5}{9}$$

$$= \frac{108/2}{9} \Rightarrow \bar{x} \approx 12$$

$$\sigma^2 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n} = \frac{(1/4 - 12)^2 + (2/8 - 12)^2 + (5/9 - 12)^2 + (2/15 - 12)^2 + (15/2 - 12)^2}{9}$$

$$+ \frac{(17/2 - 12)^2 + (8/19 - 12)^2 + (18/3 - 12)^2 + (19/5 - 12)^2}{9}$$

$$\Rightarrow \sigma^2 = \frac{112/36 + 84/64 + 49/81 + 7/18 + 10/24 + 23/64 + 49/81 + 39/69 + 56/25}{9} = \frac{442/66}{9}$$

$$\Rightarrow \sigma^2 = 49/18 \Rightarrow \sigma \approx 1.67$$

$$CV = \frac{\sigma}{\bar{x}} = \frac{1.67}{12} \Rightarrow CV = 0.14$$

دشوار

-۲۶

انحراف معیار طول عمر دو نوع لاستیک را محاسبه می‌کنیم.

$$\bar{x}_A = \frac{60 + 35 + 40 + 50 + 50}{5} = \frac{235}{5} = 47$$

$$\begin{aligned} \sigma_A^2 &= \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n} \\ &= \frac{(60 - 47)^2 + (35 - 47)^2 + (40 - 47)^2 + (50 - 47)^2 + (50 - 47)^2}{5} \\ &= \frac{169 + 144 + 49 + 9 + 9}{5} = \frac{380}{5} \Rightarrow \sigma_A^2 = 76 \Rightarrow \sigma_A = \sqrt{76} \end{aligned}$$

$$CV_A = \frac{\sigma_A}{\bar{x}_A} = \frac{\sqrt{76}}{47}$$

$$\bar{x}_B = \frac{65 + 45 + 40 + 55 + 30}{5} = \frac{235}{5} = 47$$

$$\begin{aligned} \sigma_B^2 &= \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n} \\ &= \frac{(65 - 47)^2 + (45 - 47)^2 + (40 - 47)^2 + (55 - 47)^2 + (30 - 47)^2}{5} \\ &= \frac{324 + 4 + 49 + 64 + 289}{5} = \frac{730}{5} \Rightarrow \sigma_B^2 = 146 \Rightarrow \sigma_B = \sqrt{146} \end{aligned}$$

$$CV_B = \frac{\sigma_B}{\bar{x}_B} = \frac{\sqrt{146}}{47}$$

چون $CV_A < CV_B$ است، پس لاستیک کارخانه A دارای کیفیت بالاتری از نظر طول عمر است.

دشوار

-۲۷

$$\bar{x}_A = \frac{20 + 30 + 25 + 40 + 35}{5} = \frac{150}{5} \Rightarrow \bar{x}_A = 30$$

$$\begin{aligned} \sigma_A^2 &= \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n} \\ &= \frac{(20 - 30)^2 + (30 - 30)^2 + (25 - 30)^2 + (40 - 30)^2 + (35 - 30)^2}{5} \\ &= \frac{100 + 0 + 25 + 100 + 25}{5} \Rightarrow \sigma_A^2 = 50 \Rightarrow \sigma_A = 5\sqrt{2} \end{aligned}$$

$$CV_A = \frac{\sigma_A}{\bar{x}_A} = \frac{5\sqrt{2}}{30} \Rightarrow CV_A = \frac{\sqrt{2}}{6}$$

$$\bar{x}_B = \frac{40 + 50 + 60 + 45 + 55}{5} = \frac{250}{5} = 50$$

$$\begin{aligned} \sigma_B^2 &= \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n} \\ &= \frac{(40 - 50)^2 + (50 - 50)^2 + (60 - 50)^2 + (45 - 50)^2 + (55 - 50)^2}{5} \\ &= \frac{100 + 0 + 100 + 25 + 25}{5} = \frac{250}{5} = 50 \Rightarrow \sigma_B = 5\sqrt{2} \end{aligned}$$

$$CV_B = \frac{\sigma_B}{\bar{x}_B} = \frac{5\sqrt{2}}{50} = \frac{\sqrt{2}}{10}$$

چون $CV_B < CV_A$ است، گروه B از نظر سنی پراکندگی کمتری دارد.

متوسط

-۲۱

داده‌ها را از کوچک به بزرگ مرتب می‌کنیم.

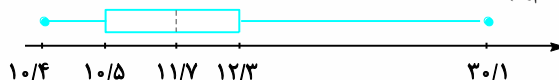
$$10/4 - 10/4 - 10/5 - 11/3 - 11/5 - 11/9 - 12/2 - 12/3 - 13/5 - 30/1$$

چون تعداد داده‌ها زوج است میانگین دو داده پنجم و ششم میانه است.

$$Q_2 = \frac{11/5 + 11/9}{2} = 11/7$$

داده سوم چارک اول است ($Q_1 = 10/5$) و داده هفتم چارک سوم است.

$$(Q_3 = 12/3)$$



آسان

-۲۲

آ) با توجه به این که نمودار جعبه‌ای مربوط به شاخص توده بدن آقایان بالاتر از

نمودار مربوط به خانمها قرار دارد، پس میانه شاخص توده بدن آقایان بیشتر است.

ب) با توجه به یکسان بودن طول‌ها در نمودار جعبه‌ای داده شده واریانس و

انحراف معیار داده‌های آقایان و خانمها یکسان است. با توجه به یکسان بودن

انحراف معیار و با توجه به این که میانگین داده‌ها در آقایان بالاتر است پس

ضریب تغییرات داده‌ها در آقایان کمتر است در نتیجه پراکندگی داده‌ها برای

آقایان کمتر است، پس میزان پراکندگی شاخص توده بدن در خانمها بیشتر است.

متوسط

-۲۳

$$A) CV = \frac{\sigma}{\bar{x}} \Rightarrow 0.25 = \frac{\sigma}{8} \Rightarrow \sigma = 2 \Rightarrow \sigma^2 = 4$$

$$B) \sigma^2 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n} \Rightarrow 4 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{10} \Rightarrow \sum (x_i - \bar{x})^2 = 40$$

اگر دو داده برابر میانگین به آن‌ها اضافه کنیم مقدار $\sum (x_i - \bar{x})^2$ تغییر نمی‌کند و همان 40 است.

$$\sigma^2 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n} = \frac{40}{12} = \frac{10}{3}$$

آسان

-۲۴

$$CV_A = \frac{\sigma_A}{\bar{x}_A} = \frac{5}{30} = \frac{1}{6}$$

$$CV_B = \frac{\sigma_B}{\bar{x}_B} = \frac{7}{25} = \frac{1}{5}$$

چون $CV_A < CV_B$ است پس محصول A کیفیت بهتری دارد.

آسان

-۲۵

$$CV_A = \frac{\sigma_A}{\bar{x}_A} = \frac{50}{54000} = 0.0009$$

$$CV_B = \frac{\sigma_B}{\bar{x}_B} = \frac{100}{65000} = 0.0015$$

چون $CV_A < CV_B$ است، محصول A با کیفیت‌تر است.

متوسط

-۳۰-

زمانی انحراف معیار صفر است که داده‌ها برابر باشند و همه داده‌ها برابر میانگین هستند.

$$2a - 3 = 47 \Rightarrow 2a = 50 \Rightarrow a = 25$$

$$3b + 5 = 47 \Rightarrow 3b = 42 \Rightarrow b = 14$$

$$4c - 1 = 47 \Rightarrow 4c = 48 \Rightarrow c = 12$$

$$\bar{x} = \frac{a+b+c}{3} = \frac{25+14+12}{3} = \frac{51}{3} = 17$$

$$\sigma^2 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n} = \frac{(25-17)^2 + (14-17)^2 + (12-17)^2}{3} = \frac{64+9+25}{3}$$

$$= \frac{98}{3} = 32.66 \Rightarrow \sigma = 5.71$$

$$CV = \frac{\sigma}{\bar{x}} = \frac{5.71}{17} \Rightarrow CV = 0.33$$

آسان

-۳۱-

$$\sigma_{3x+1}^2 = 9(16) \Rightarrow \sigma_{3x+1}^2 = 144 \Rightarrow \sigma_{3x+1} = 12$$



متوسط

-۱ گزینه «۴»-

۱, ۲, ۳, ۴, ۵, ۶, ۷, ۸, ۹

این دنباله، یک دنباله حسابی با قدرنسبت $d=1$ است که دارای ۹ جمله است ($n=9$)

$$\sigma = \sqrt{\frac{n^2-1}{12}}d = \sqrt{\frac{81-1}{12}} \times 1 = \sqrt{\frac{80}{12}} \Rightarrow \sigma^2 = \frac{20}{3}$$

متوسط

-۲ گزینه «۲»-

اگر میانگین یک گروه m تایی با واریانس σ_1^2 با میانگین یک گروه n تایی با واریانس σ_2^2 برابر باشد، واریانس کل داده‌ها از رابطه زیر محاسبه می‌شود.

$$\sigma^2 = \frac{m\sigma_1^2 + n\sigma_2^2}{m+n}$$

$$\sigma^2 = \frac{12 \times 12/6 + 24 \times 7/2}{12+24} = \frac{151/2 + 172/8}{36} = \frac{324}{36} \Rightarrow \sigma^2 = 9$$

$$\Rightarrow \sigma = 3$$

متوسط

-۲۸-

۱۴, ۱۶, ۱۱, ۱۹

$$\bar{x} = \frac{14+16+11+19}{4} = \frac{60}{4} = 15$$

$$\sigma_x^2 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n} = \frac{(15-14)^2 + (15-16)^2 + (15-11)^2 + (15-19)^2}{4}$$

$$= \frac{1+1+16+16}{4} = \frac{34}{4} \Rightarrow \sigma_x^2 = 8.5$$

۷, ۹, ۴, ۱۲

$$\bar{y} = \frac{7+9+4+12}{4} = \frac{32}{4} = 8$$

$$\sigma_y^2 = \frac{(7-8)^2 + (9-8)^2 + (4-8)^2 + (12-8)^2}{4}$$

$$= \frac{1+1+16+16}{4} = \frac{34}{4} \Rightarrow \sigma_y^2 = 8.5$$

$\sigma_x^2 = \sigma_y^2$ (در واقعیت از تمام داده‌های اول ۷ واحد کم شده است که تأثیری

در واریانس داده‌ها ندارد)

دشوار

-۲۹-

داده‌ها را از کوچک به بزرگ مرتب می‌کنیم.

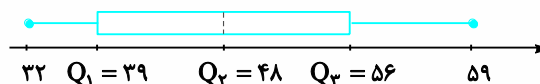
۳۲, ۳۷, ۳۹, ۴۲, ۴۶, ۵۰, ۵۴, ۵۶, ۵۷, ۵۹

چون تعداد داده‌ها زوج است میانگین دو عدد وسط میانه است.

$$Q_2 = \frac{46+50}{2} = 48$$

داده سوم چارک اول است ($Q_1 = 39$) و داده هشتم چارک سوم است

$$Q_3 = 56$$



داده‌های داخل جعبه: ۴۲, ۴۶, ۵۰, ۵۴

$$\bar{x} = \frac{42+46+50+54}{4} = 48$$

$$\sigma^2 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n} = \frac{(42-48)^2 + (46-48)^2 + (50-48)^2 + (54-48)^2}{4}$$

$$= \frac{36+4+4+36}{4} = \frac{80}{4} = 20 \Rightarrow \sigma = 2\sqrt{5}$$

$$CV = \frac{\sigma}{\bar{x}} = \frac{2\sqrt{5}}{48} \Rightarrow CV = \frac{\sqrt{5}}{24}$$

آسان

۸- گزینه «۴»

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n} = \frac{100}{50} \Rightarrow \bar{x} = 2$$

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i^2}{n} - (\bar{x})^2 = \frac{272}{50} - (2)^2 \Rightarrow \sigma^2 = 5/44 - 4 = 1/44 \Rightarrow \sigma = 1/2$$

$$CV = \frac{\sigma}{\bar{x}} = \frac{1/2}{2} \Rightarrow CV = 0.6$$

آسان

۹- گزینه «۴»

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n} = \frac{50}{10} = 5$$

$$CV = \frac{\sigma}{\bar{x}} \Rightarrow \frac{1}{5} = \frac{\sigma}{5} \Rightarrow \sigma = 1$$

$$\sigma^2 = \frac{\sum x_i^2}{n} - (\bar{x})^2 \Rightarrow 1 = \frac{\sum x_i^2}{10} - 25 \Rightarrow \frac{\sum x_i^2}{10} = 26$$

$$\Rightarrow \sum x_i^2 = 260$$

آسان

۱۰- گزینه «۴»

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n} = \frac{275}{25} = 11$$

$$\sigma^2 = \frac{\sum x_i^2}{n} - (\bar{x})^2 \Rightarrow \sigma^2 = \frac{3250}{25} - (11)^2 = 130 - 121 = 9 \Rightarrow \sigma = 3$$

$$CV = \frac{\sigma}{\bar{x}} = \frac{3}{11} = 0.2727$$

متوسط

۱۱- گزینه «۴»

$$\sigma^2 = (2)^2 = 4$$

$$\sigma^2 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n} \Rightarrow 4 = \frac{\sum_{i=1}^{26} (x_i - \bar{x})^2}{26}$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{26} (x_i - \bar{x})^2 = 104 \Rightarrow \sum_{i=1}^{25} (x_i - \bar{x})^2 + (x_{26} - \bar{x})^2 = 104$$

چون $x_{26} = \bar{x}$ است پس $(x_{26} - \bar{x})^2 = 0$ است

$$\sum_{i=1}^{25} (x_i - \bar{x})^2 = 104$$

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^{25} (x_i - \bar{x})^2}{n} = \frac{104}{25} = 4.16$$

آسان

۱۲- گزینه «۲»

طبق نکته تست قبلی داریم.

$$\sigma^2 = \frac{m\sigma_1^2 + n\sigma_2^2}{m+n} = \frac{15 \times 12 + 10 \times (7/6)}{15+10} = \frac{180+76}{25} = \frac{256}{25} = 10.24$$

$$\Rightarrow \sigma = \sqrt{10.24} = 3.2$$

متوسط

۱۳- گزینه «۱»

داده‌ها تشکیل دنباله حسابی می‌دهند پس $\bar{x} = \frac{18+66}{2} = 42$ است و انحراف

$$\text{معیار از دستور } d = \sqrt{\frac{n^2-1}{12}} \sigma \text{ به دست می‌آید.}$$

$$(d = 30 - 18 = 12)$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{25-1}{12}} \times 12 = 12\sqrt{2}$$

$$CV = \frac{\sigma}{\bar{x}} = \frac{12\sqrt{2}}{42} = \frac{2 \times 1/4}{7} = 0.4$$

آسان

۱۴- گزینه «۳»

زمانی انحراف معیار چند داده صفر است که همگی داده‌ها با هم برابر باشند.

$$x_1 = x_2 = x_3 = 10$$

داده‌های جدید: ۱۰, ۱۰, ۱۰, ۲۰

$$\bar{x} = \frac{10+10+10+20}{4} = \frac{50}{4} = 12.5$$

متوسط

۱۵- گزینه «۳»

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n} = \frac{72}{12} \Rightarrow \bar{x} = 6$$

$$\sigma^2 = \frac{\sum x_i^2}{n} - (\bar{x})^2 = \frac{480}{12} - (6)^2 = 40 - 36 = 4 \Rightarrow \sigma = 2$$

$$CV = \frac{\sigma}{\bar{x}} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

متوسط

۱۶- گزینه «۴»

اگر اندازه ضلع مربع x باشد، اندازه مساحت x^2 است و میانگین مساحت

$$\text{مربع‌ها را اگر } A \text{ فرض کنیم داریم } A = \frac{\sum x_i^2}{n}$$

$$CV = \frac{\sigma}{\bar{x}} \Rightarrow 0.2 = \frac{\sigma}{15} \Rightarrow \sigma = 3 \Rightarrow \sigma^2 = 9$$

$$\sigma^2 = \frac{\sum x_i^2}{n} - (\bar{x})^2 \Rightarrow 9 = A - (15)^2 \Rightarrow A = 234$$

$$\bar{x} = 22$$

$$22, 22, \dots, 22, 24, 16, 26$$

$$\sigma^2 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n} = \frac{11(22-22)^2 + (24-22)^2 + (16-22)^2 + (26-22)^2}{14}$$

$$= \frac{4 + 36 + 16}{14} = 4 \Rightarrow \sigma = 2$$

متوسط

گزینه ۱۵ «۱»

$$\bar{x} = \frac{\sum f_i x_i}{\sum f_i} = \frac{27(7) + 29(10) + 31(13) + 33(11) + 35(9)}{7 + 10 + 13 + 11 + 9}$$

$$= \frac{189 + 290 + 403 + 363 + 315}{50} = \frac{1560}{50} = 31.2$$

$$\sigma^2 = \frac{\sum f_i (x_i - \bar{x})^2}{\sum f_i} = \frac{7(27-31.2)^2 + 10(29-31.2)^2}{7+10}$$

$$+ \frac{13(31-31.2)^2 + 11(33-31.2)^2 + 9(35-31.2)^2}{13+11+9}$$

$$\Rightarrow \sigma^2 = \frac{123/48 + 48/4 + 0/52 + 35/64 + 129/96}{50} = \frac{338}{50}$$

$$\Rightarrow \sigma^2 = 6.76 \Rightarrow \sigma = 2.6$$

دشوار

گزینه ۱۴ «۲»

x_i	۳	۵	۷	۹	۱۱
f_i	۲	۷	۸	۵	۳

$$\bar{x} = \frac{\sum f_i x_i}{\sum f_i} = \frac{2(3) + 5(5) + 7(7) + 9(9) + 11(11)}{2 + 7 + 8 + 5 + 3}$$

$$= \frac{6 + 25 + 49 + 81 + 121}{25} = \frac{175}{25} = 7$$

$$\sigma^2 = \frac{\sum f_i (x_i - \bar{x})^2}{\sum f_i}$$

$$= \frac{2(3-7)^2 + 7(5-7)^2 + 8(7-7)^2 + 5(9-7)^2 + 3(11-7)^2}{2+7+8+5+3}$$

$$= \frac{32 + 28 + 0 + 20 + 48}{25} = \frac{128}{25} = 5.12$$

دشوار

گزینه ۱۷ «۳»

می‌دانیم مجموع فراوانی نسبی همواره برابر ۱ است.

$$\sum F_i = 1 \Rightarrow 0.1 + 0.25 + 0.2 + \alpha = 1 \Rightarrow \alpha = 0.45$$

$$\bar{x} = \sum F_i x_i = 1(0.1) + 12(0.25) + 16(0.2) + 20(0.45)$$

$$= 0.1 + 3 + 3.2 + 9 = 16$$

$$\sigma^2 = \sum F_i (x_i - \bar{x})^2 = 0.1(16-16)^2 + 0.25(12-16)^2$$

$$+ 0.2(16-16)^2 + 0.45(20-16)^2 = 0.4 + 4 + 0 + 7.2 = 11.6$$

متوسط

گزینه ۱۲ «۴»

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^{16} (x_i - \bar{x})^2}{n} \Rightarrow 9 = \frac{\sum_{i=1}^{16} (x_i - \bar{x})^2}{16} \Rightarrow \sum_{i=1}^{16} (x_i - \bar{x})^2 = 144$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{15} (x_i - \bar{x})^2 + (x_{16} - \bar{x})^2 = 144$$

چون داده ۱۶ام با میانگین برابر است

$$\sum_{i=1}^{15} (x_i - \bar{x})^2 = 144 \text{ پس } x_{16} = \bar{x} \Rightarrow x_{16} - \bar{x} = 0 \Rightarrow (x_{16} - \bar{x})^2 = 0$$

واریانس ۱۵ داده دیگر را محاسبه می‌کنیم.

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^{15} (x_i - \bar{x})^2}{n} = \frac{144}{15} = 9.6$$

دشوار

گزینه ۱۳ «۵»

داده‌ها به دو دسته x_1, x_2, \dots, x_6 با $\sigma_x^2 = 6$ و y_1, y_2, \dots, y_9 با $\bar{y} = 14$ و

$\sigma_y^2 = 4$ هستند. (دقت کنید میانگین دو سوی داده با هم برابر نیست).

$$\bar{z} = \frac{n\bar{x} + m\bar{y}}{n+m} = \frac{6 \times 12 + 9 \times 14}{6+9} = \frac{72+126}{15} = \frac{198}{15}$$

$$\Rightarrow \bar{z} = 13.2$$

$$\sigma_x^2 = \frac{\sum x_i^2}{n} - (\bar{x})^2 \Rightarrow 6 = \frac{\sum x_i^2}{6} - 144 \Rightarrow \frac{\sum x_i^2}{6} = 150$$

$$\Rightarrow \sum x_i^2 = 150 \Rightarrow \sum x_i^2 = 900$$

$$\sigma_y^2 = \frac{\sum y_i^2}{n} - (\bar{y})^2 \Rightarrow 4 = \frac{\sum y_i^2}{9} - 196$$

$$\Rightarrow \sum y_i^2 = 200 \Rightarrow \sum y_i^2 = 1800$$

$$\sum z_i^2 = \sum x_i^2 + \sum y_i^2 = 900 + 1800 = 2700$$

$$\sigma_z^2 = \frac{\sum z_i^2}{n} - (\bar{z})^2 = \frac{2700}{15} - (13.2)^2 = 180 - 174.24$$

$$\Rightarrow \sigma_z^2 = 5.76 \Rightarrow \sigma_z = 2.4$$

متوسط

گزینه ۱۴ «۶»

زمانی واریانس داده‌ها صفر است که همه داده‌ها با هم برابر باشند.

$$\text{میانگین ۳ داده جدید} = \frac{24+16+26}{3} = 22$$

پس تمام ۱۱ داده اول ۲۲ هستند.

متوسط

۱۱- گزینه «ب»

$$\bar{x} = \frac{\sum f_i x_i}{\sum f_i} = \frac{12(7) + 14(9) + 16(17) + 18(11) + 20(6)}{7 + 9 + 17 + 11 + 6}$$

$$= \frac{84 + 126 + 272 + 198 + 120}{50} = \frac{800}{50}$$

$$\Rightarrow \bar{x} = 16$$

$$\sigma^2 = \frac{\sum f_i (x_i - \bar{x})^2}{\sum f_i}$$

$$= \frac{7(12-16)^2 + 9(14-16)^2 + 17(17-16)^2 + 11(18-16)^2 + 6(20-16)^2}{7 + 9 + 17 + 11 + 6}$$

$$= \frac{112 + 36 + 0 + 44 + 96}{50} = \frac{288}{50} = 5.76$$

$$\Rightarrow \sigma = 2.4$$

$$CV = \frac{\sigma}{\bar{x}} = \frac{2.4}{16} = 0.15$$

دشوار

۱۲- گزینه «ب»

می‌دانیم جمع زوایا مرکزی در نمودار دایره‌ای ۳۶۰ درجه است پس داریم:

$$\sum \alpha_i = 360 \Rightarrow 36 + 126 + 54 + \alpha + 54 = 360 \Rightarrow \alpha = 90$$

$$\bar{x} = \frac{\sum \alpha_i x_i}{\sum \alpha_i} = \frac{36 + 378 + 270 + 630 + 486}{360} = \frac{1800}{360} = 5$$

$$\sigma^2 = \frac{\sum \alpha_i (x_i - \bar{x})^2}{\sum \alpha_i}$$

$$= \frac{36(1-5)^2 + 126(3-5)^2 + 54(5-5)^2 + 90(7-5)^2 + 54(9-5)^2}{360}$$

$$= \frac{576 + 504 + 0 + 360 + 864}{360}$$

$$\sigma^2 = \frac{2304}{360} \Rightarrow \sigma^2 = 6.4$$

متوسط

۱۳- گزینه «ا»

اگر داده‌های دسته اول به صورت x_i باشد، داده‌های دسته دوم به صورت y_i

$$\text{است که } y_i = 2x_i - 7 \text{ و } \bar{y} = 2\bar{x} - 7 \text{ و } \sigma_y = 2\sigma_x$$

$$CV_y = \frac{\sigma_y}{\bar{y}} = \frac{2\sigma_x}{2\bar{x} - 7} \Rightarrow \frac{\sigma_y}{\bar{y}} = \frac{2\sigma_x}{2\bar{x} - 7} = \frac{2\sigma_x}{2\bar{x}} \Rightarrow$$

$$6\bar{x} - 21 = 4\bar{x} \Rightarrow 2\bar{x} = 21 \Rightarrow \bar{x} = 10.5$$

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n} \Rightarrow 10.5 = \frac{\sum x_i}{20} \Rightarrow \sum x_i = 210$$

آسان

۱۴- گزینه «ب»

اگر داده‌ها را دو برابر کنیم میانگین و انحراف معیار هر دو، ۲ برابر می‌شوند.

پس ضریب تغییرات، ثابت می‌ماند و همان ۴ است.

متوسط

۱۸- گزینه «ا»

$$\bar{x} = \frac{\sum f_i x_i}{\sum f_i} = \frac{6(3) + 8(2) + 10(a) + 12(6) + 14(1)}{3 + 2 + a + 6 + 1}$$

$$= \frac{18 + 16 + 10a + 72 + 14}{12 + a} = \frac{120 + 10a}{12 + a} \Rightarrow \bar{x} = 10$$

$$\sigma^2 = \frac{\sum f_i (x_i - \bar{x})^2}{\sum f_i}$$

$$\Rightarrow 6 = \frac{2(6-10)^2 + 2(8-10)^2 + a(10-10)^2 + 6(12-10)^2 + 1(14-10)^2}{3 + 2 + a + 6 + 1}$$

$$\Rightarrow 6 = \frac{48 + 8 + 0 + 24 + 16}{12 + a} \Rightarrow 72 + 6a = 96 \Rightarrow 6a = 24 \Rightarrow a = 4$$

متوسط

۱۹- گزینه «ب»

$$\bar{x} = \frac{\sum f_i x_i}{\sum f_i} = \frac{42 + 72 + 170 + 132 + 84}{7 + 9 + 17 + 11 + 6} = \frac{500}{50} \Rightarrow \bar{x} = 10$$

$$\sigma^2 = \frac{\sum f_i (x_i - \bar{x})^2}{\sum f_i}$$

$$= \frac{7(6-10)^2 + 9(8-10)^2 + 17(10-10)^2 + 11(12-10)^2 + 6(14-10)^2}{50}$$

$$= \frac{112 + 36 + 0 + 44 + 96}{50} \Rightarrow \sigma^2 = 5.76 \Rightarrow \sigma = 2.4$$

$$CV = \frac{\sigma}{\bar{x}} = \frac{2.4}{10} = 0.24$$

دشوار

۲۰- گزینه «ب»

همواره جمع درصد فراوانی برابر ۱۰۰ است.

$$\sum F_i = 100 \Rightarrow 15 + 20 + 17.5 + \alpha + 22.5 = 100 \Rightarrow \alpha = 25$$

$$\bar{x} = \frac{\sum F_i x_i}{100} = \frac{15(15) + 17(20) + 19(17.5) + 21(25) + 23(22.5)}{100}$$

$$= \frac{225 + 340 + 332.5 + 525 + 517.5}{100}$$

$$\Rightarrow \bar{x} = 19.4$$

$$\sigma^2 = \frac{\sum F_i (x_i - \bar{x})^2}{100}$$

$$= \frac{15(15-19.4)^2 + 20(17-19.4)^2 + 17.5(19-19.4)^2}{100}$$

$$+ \frac{25(21-19.4)^2 + 22.5(23-19.4)^2}{100} = \frac{764}{100} = 7.64$$

۲۵- گزینه «۱»

متوسط

دنباله فوق یک دنباله حسابی است که قدرنسبت آن ۱۲ است. پس داریم:

$$\bar{x} = \frac{18 + 66}{2} = 42$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{n^2 - 1}{12}} \times d = \sqrt{\frac{25 - 1}{12}} \times 12 = 12\sqrt{2} = 12(1/4) = 16/8$$

$$CV = \frac{\sigma}{\bar{x}} = \frac{16/8}{42} \Rightarrow CV = 0/4$$

۲۶- گزینه «۳»

متوسط

داده‌ها را از کوچک به بزرگ مرتب می‌کنیم.

۵, ۶, ۷, ۷, ۸, ۱۰, ۱۱, ۱۳, ۱۳

چون تعداد داده‌ها ۹ تا است، داده ۵ ام میانه است ($Q_2 = 8$) و چنانچه داده‌های کمتر از میانه را حذف کنیم، داده‌های باقی‌مانده عبارتند از:

۸, ۱۰, ۱۱, ۱۳, ۱۳

$$\bar{x} = \frac{8 + 10 + 11 + 13 + 13}{5} = \frac{55}{5} = 11$$

$$\sigma^2 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n} = \frac{(8-11)^2 + (10-11)^2 + (11-11)^2 + (13-11)^2 + (13-11)^2}{5} = \frac{9 + 1 + 0 + 4 + 4}{5} = \frac{18}{5} \Rightarrow \sigma^2 = 3/6$$

۲۷- گزینه «۳»

متوسط

مُد داده یا داده‌هایی است که بیشترین فراوانی را دارد. پس دو داده ۳۷ و ۴۳ مُد هستند.

مُد داده‌های بین دو مُد: ۴۱, ۳۹, ۳۸, ۴۲

می‌دانیم اگر عددی (مثلاً ۳۵) را از همه داده‌ها کم کنیم واریانس آن‌ها ثابت می‌ماند: ۶, ۴, ۳, ۷

$$\bar{x} = \frac{6 + 4 + 3 + 7}{4} = \frac{20}{4} \Rightarrow \bar{x} = 5$$

$$\sigma^2 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n} = \frac{(6-5)^2 + (4-5)^2 + (3-5)^2 + (7-5)^2}{4} = \frac{1 + 1 + 4 + 4}{4} = \frac{10}{4} \Rightarrow \sigma^2 = 2/5$$

۲۸- گزینه «۴»

متوسط

حتماً عدد X یکی از داده‌های ۸ یا ۹ یا ۱۰ یا ۱۳ است که داده‌های دارای مُد باشند و خود X مُد داده‌ها است.

$$\bar{x} = M \Rightarrow \frac{8 + X + 9 + 10 + 13}{5} = X \Rightarrow 40 + X = 5X$$

$$\Rightarrow 4X = 40 \Rightarrow X = 10$$

$$\sigma^2 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n} = \frac{(8-10)^2 + (10-10)^2 + (9-10)^2 + (10-10)^2 + (13-10)^2}{5}$$

$$= \frac{4 + 0 + 1 + 0 + 9}{5} = \frac{14}{5} = 2/8$$

۲۹- گزینه «۳»

متوسط

اگر میانگین و انحراف معیار داده‌ها x_1, x_2, \dots, x_n به ترتیب \bar{x} و σ_x باشد و $y_i = 5x_i - 1$ باشد داریم.

$$\bar{y} = 5\bar{x} - 1 \Rightarrow 24 = 5\bar{x} - 1 \Rightarrow 5\bar{x} = 25 \Rightarrow \bar{x} = 5$$

$$\sigma_y = 5\sigma_x \Rightarrow 6/25 = 5\sigma_x \Rightarrow \sigma_x = 1/25 \Rightarrow \sigma_x^2 = 1/5625$$

میانگین داده‌های $x_1^2, x_2^2, \dots, x_n^2$ را با A نشان می‌دهیم که $A = \frac{\sum x_i^2}{n}$ است.

$$\sigma^2 = \frac{\sum x_i^2}{n} - (\bar{x})^2 \Rightarrow 1/5625 = A - 25$$

$$\Rightarrow A = 25 + 1/5625 \Rightarrow A = 26/5625$$

۳۰- گزینه «۱»

آسان

اگر انحراف معیار داده‌های x_1, x_2, \dots, x_n برابر σ باشد، انحراف معیار داده‌های $ax_1 + b, ax_2 + b, \dots, ax_n + b$ برابر $|a|\sigma$ باشد.

$$\sigma_y = |3|\sigma_x = 3 \times 5 = 15$$

۳۱- گزینه «۳»

آسان

اگر واریانس داده‌های a, b, \dots, e با σ^2 باشد، واریانس

داده‌های $a-1, b-1, c-1, \dots, e-1$ برابر $16\sigma^2$ است.

$$16\sigma^2 = 36 \Rightarrow \sigma^2 = \frac{36}{16} \Rightarrow \sigma = \frac{6}{4} \Rightarrow \sigma = 1/5$$

آسان

۳۶- گزینه «۱»

اگر به همه داده‌ها ۹ واحد اضافه شود به میانگین هم ۹ واحد اضافه می‌شود اما

انحراف معیار ثابت می‌ماند پس داریم $\bar{x}' = \bar{x} + 9 = 3 + 9 = 12$

$$\sigma'_x = \sigma_x = 1/2$$

$$CV' = \frac{\sigma'_x}{\bar{x}'} = \frac{1/2}{12} = 0/1$$

آسان

۳۷- گزینه «۴»

اگر به هر داده ۳ واحد اضافه شود به میانگین داده‌ها هم ۳ واحد اضافه می‌شود

اما انحراف معیار تغییر نمی‌کند. پس داریم:

$$\sigma' = \sigma \text{ و } \bar{x}' = \bar{x} + 3$$

$$\frac{CV'}{CV} = \frac{0/5}{0/75} \Rightarrow \frac{\sigma'}{\bar{x}'} = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{\bar{x}}{\bar{x} + 3} = \frac{2}{3} \Rightarrow 3\bar{x} = 2\bar{x} + 6 \Rightarrow \bar{x} = 6$$

$$CV = \frac{\sigma}{\bar{x}} \Rightarrow 0/75 = \frac{\sigma}{6} \Rightarrow \sigma = 4/5 \Rightarrow \sigma^2 = 20/25$$

آسان

۳۸- گزینه «۴»

اگر میانگین و انحراف معیار داده‌های اولیه \bar{x} و σ باشد بعد از آن که داده‌ها را

۲ برابر کنیم و به هر داده ۳ واحد اضافه کنیم، میانگین $2\bar{x} + 3$ و انحراف معیار

2σ می‌شود حال که $\bar{x} = 12$ است میانگین داده‌های

جدید $\delta' = 2\delta$ و $\bar{x}' = 2(12) + 3 = 27$ است و

$$\frac{CV'}{CV} = \frac{\frac{\sigma'}{\bar{x}'}}{\frac{\sigma}{\bar{x}}} = \frac{2\sigma}{27} = \frac{24\sigma}{27\sigma} = \frac{8}{9}$$

آسان

۳۹- گزینه «۲»

چون میانگین دو جامعه با هم برابر است پس میانگین جامعه ترکیبی هم همان

۷۲ است. واریانس جامعه ترکیبی هم از دستور $\sigma^2 = \frac{m\sigma_1^2 + n\sigma_2^2}{m+n}$ به دست

می‌آید.

$$\sigma^2 = \frac{m\sigma_1^2 + n\sigma_2^2}{m+n} \Rightarrow \sigma^2 = \frac{10(12/5) + 7(4)}{10+7}$$

$$= \frac{125 + 28}{17} = \frac{153}{17} = 9 \Rightarrow \sigma = 3$$

$$CV = \frac{\sigma}{\bar{x}} = \frac{3}{12} \Rightarrow CV = \frac{1}{4}$$

متوسط

۳۳- گزینه «۳»

چون میانگین داده‌های قبل از چارک اول با میانگین داده‌های بعد از چارک سوم

همگی با هم برابر هستند پس تمامی داده‌ها با هم برابرند و چون با اضافه شدن

۳ داده ۱۵، ۱۰، ۱۱ میانگین تغییر نکرده است. همه داده‌ها با میانگین این ۳

داده برابر هستند.

$$\bar{x} = \frac{15 + 10 + 11}{3} = \frac{36}{3} = 12$$

$$\text{داده‌ها: } 12, 12, \dots, 12, 11, 10, 15$$

داده ۲۲

$$\sigma^2 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n} = \frac{22(12-12)^2 + (12-11)^2 + (12-10)^2 + (12-15)^2}{25}$$

$$= \frac{0 + 1 + 4 + 9}{25} = \frac{14}{25} \Rightarrow \sigma^2 = 0/56$$

متوسط

۳۳- گزینه «۱»

اگر در داده‌ها x_1, x_2, \dots, x_n داشته باشیم $\bar{x} = 18$ و $\sigma_x^2 = 4$ آن‌گاه در

داده‌های به شکل $y_i = \frac{1}{4}x_i + 1$ داریم.

$$\bar{y} = \frac{1}{4}\bar{x} + 1 = \frac{1}{4}(18) + 1 \Rightarrow \bar{y} = 10$$

$$\sigma_y^2 = \frac{1}{4}\sigma_x^2 = \frac{1}{4}(4) = 1 \Rightarrow \sigma_y = 1$$

$$CV = \frac{\sigma_y}{\bar{y}} = \frac{1}{10} = 0/1$$

متوسط

۳۴- گزینه «۲»

میانگین داده‌های $3x_1 + \bar{x}, 3x_2 + \bar{x}, \dots, 3x_n + \bar{x}$ به صورت $3\bar{x} + \bar{x} = 4\bar{x}$

است و انحراف معیار این داده‌ها ۳ برابر انحراف معیار داده‌های x_1, x_2, \dots, x_n

است. $\sigma' = 3\sigma$

$$CV' = \frac{\sigma'}{\bar{x}'} = \frac{3\sigma}{4\bar{x}} = \frac{3}{4} \times \frac{\sigma}{\bar{x}} = \frac{3}{4} \times CV = \frac{3}{4} \times (0/4) \Rightarrow CV' = 0/3$$

دشوار

۳۵- گزینه «۲»

$$\sigma^2 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n} \Rightarrow \delta^2 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{20} \Rightarrow \sum (x_i - \bar{x})^2 = 500$$

فرض کنیم k داده برابر میانگین اضافه کنیم مقدار $\sum (x_i - \bar{x})^2$ تغییر

نمی‌کند و واریانس جدید از دستور زیر محاسبه می‌شود.

$$\sigma^2 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n+k} \xrightarrow{\sigma < 4} \frac{500}{20+k} < 16$$

$$\Rightarrow 500 < 20 + 16k \Rightarrow 16k > 480 \Rightarrow k > 30$$

پس حداقل باید ۳۱ عضو برابر میانگین به داده‌ها اضافه شود.

آسان

۱۴- گزینه «۳»

$$CV = \frac{\sigma}{\bar{x}} \Rightarrow \bar{x} = \frac{\sigma}{CV} = \frac{VCV}{CV} \Rightarrow \bar{x} = 7$$

همه داده‌ها ضرب در ۳ و بعد به علاوه ۲ شده‌اند پس میانگین داده‌های جدید هم ضرب در ۳ و بعد بعلاوه ۲ می‌شود.

$$\bar{x}' = 3\bar{x} + 2 = 3(7) + 2 = 23$$

دشوار

۱۴- گزینه «۲»

برای مقایسه دقت کاری این دو کارگر ابتدا میانگین آن‌ها را به دست می‌آوریم. میانگین هر کدام بیشتر باشد، دقت کاری‌اش بالاتر است.

$$\bar{x}_A = \frac{15 + 14 + 15 + 16 + 17 + 19}{6} = 16$$

$$x_B = \frac{16 + 14 + 17 + 14 + 17 + 18}{6} = 16$$

حال میانگین‌ها برابر است به سراغ واریانس می‌رویم، واریانس هر کدام کمتر بود یعنی تمرکزش بهتر است.

$$\sigma_A^2 = \frac{2(16-15)^2 + (16-14)^2 + (16-16)^2 + (16-17)^2 + (16-19)^2}{6}$$

$$= \frac{2+4+0+1+9}{6} = \frac{16}{6} = \frac{8}{3}$$

$$\sigma_B^2 = \frac{(16-16)^2 + 2(14-16)^2 + 2(17-16)^2 + (18-16)^2}{6}$$

$$= \frac{0+8+2+4}{6} = \frac{14}{6} = \frac{7}{3}$$

$$\sigma_B^2 < \sigma_A^2 \text{ پس دقت B بیشتر است.}$$

آسان

۱۴- گزینه «۱»

برای بررسی دقت عمل دو دستگاه باید ضریب تغییرات این دو دستگاه را با هم مقایسه کرد.

$$\left. \begin{aligned} CV_A &= \frac{\sigma_A}{\bar{x}_A} = \frac{3/6}{150} = 0.024 \\ CV_B &= \frac{\sigma_B}{\bar{x}_B} = \frac{3/84}{160} = 0.024 \end{aligned} \right\} \Rightarrow CV_A = CV_B \Rightarrow \text{دقت عمل دو دستگاه یکسان است.}$$

دشوار

۱۴- گزینه «۱»

$$\bar{x} - 44 = \frac{\sum f_i(x_i - 44)}{\sum f_i} = \frac{4(-3) + 7(-1) + 1(5) + 3(3) + 5(1)}{4+7+5+3+1}$$

$$= \frac{-12-7+5+9+5}{20} = 0 \Rightarrow \bar{x} = 44$$

$$\sigma^2 = \frac{\sum f_i(\bar{x} - x_i)^2}{\sum f_i} = \frac{4(-3)^2 + 7(-1)^2 + 5(1)^2 + 3(3)^2 + 1(5)^2}{4+7+5+3+1}$$

$$= \frac{36+7+5+27+25}{20} = \frac{100}{20}$$

$$\Rightarrow \sigma^2 = 5 \Rightarrow \sigma = \sqrt{5}$$

$$CV = \frac{\sigma}{\bar{x}} = \frac{\sqrt{5}}{44} \Rightarrow CV \approx 0.05$$

دشوار

۱۴- گزینه «۲»

$$\bar{x} - 12 = \frac{\sum f_i(x_i - 12)}{\sum f_i} = \frac{1(-3) + 3(-2) + 1(-1) + 3(0) + 6(1) + 2(2)}{1+3+1+3+6+2}$$

$$\bar{x} - 12 = \frac{-3-6-1+0+6+4}{16} = 0 \Rightarrow \bar{x} = 12$$

$$\delta^2 = \frac{\sum f_i(x_i - \bar{x})^2}{\sum f_i} = \frac{1(-3)^2 + 3(-2)^2 + 1(-1)^2 + 3(0)^2 + 6(1)^2 + 2(2)^2}{1+3+1+3+6+2}$$

$$= \frac{9+12+1+0+6+8}{16} = \frac{36}{16} \Rightarrow \sigma = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$

$$CV = \frac{\sigma}{\bar{x}} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4} \Rightarrow CV = \frac{1}{4}$$

آسان

۱۴- گزینه «۲»

دامنه تغییرات برابر تفاضل بزرگترین داده از کوچکترین داده است.

$$R = b - a = 20 - 7 = 13$$

متوسط

۱۴- گزینه «۳»

$$\text{میانگین داده‌های جدید } \bar{x} = \frac{20 + 27 + 28}{3} = \frac{75}{3} = 25$$

$$\sigma^2 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n}$$

$$\sigma^2 = \frac{(20-25)^2 + (27-25)^2 + (28-25)^2}{3}$$

$$= \frac{25+4+9}{3} = \frac{38}{3}$$

چون میانگین دو جامعه با هم برابر است، داریم:

$$\sigma^2 = \frac{m\sigma_1^2 + n\sigma_2^2}{m+n} = \frac{18(3)^2 + 3\left(\frac{38}{3}\right)}{18+3} = \frac{162+38}{21} = \frac{200}{21} \Rightarrow \sigma^2 = 9.52$$

آسان

۴۹- گزینه «۲»

انحراف معیار هر ۳ جامعه را محاسبه می‌کنیم و با هم مقایسه می‌کنیم.

$$\left. \begin{aligned} CV_A &= \frac{\sigma_A}{\bar{x}_A} = \frac{0.8}{8} = 0.1 \\ CV_B &= \frac{\sigma_B}{\bar{x}_B} = \frac{2.1}{15} = 0.14 \\ CV_C &= \frac{\sigma_C}{\bar{x}_C} = \frac{3.2}{32} = 0.1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow CV_A = CV_C < CV_B$$

پراکندگی جامعه A و C یکسان و کمتر از پراکندگی جامعه B است.

دشوار

۵۰- گزینه «۱»

داده‌ها را از کوچک به بزرگ می‌نویسیم.

۲۵, ۲۶, ۲۷, ۲۹, ۳۱, ۳۳, ۳۴, ۳۵, ۳۶, ۴۰, ۴۱, ۴۲, ۴۴

چون تعداد داده‌ها ۱۳ تا است (فرد می‌باشد) داده هفتم میانه است $Q_2 = ۳۴$ و

میانه داده‌های سوم و چهارم چارک اول است $Q_1 = \frac{۲۷+۲۹}{۲} = ۲۸$ و میانگین

داده‌های دهم و یازدهم چارک سوم است $Q_3 = \frac{۴۰+۴۱}{۲} = ۴۰.۵$ و می‌دانیم

داده‌های بزرگتر از چارک اول و کوچکتر از چارک سوم در نمودار جعبه‌ای، داده‌های داخل جعبه هستند.

داده‌های داخل جعبه: ۲۹, ۳۱, ۳۳, ۳۴, ۳۵, ۳۶, ۴۰

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n} = \frac{۲۹+۳۱+۳۳+۳۴+۳۵+۳۶+۴۰}{۷} = \frac{۲۳۸}{۷} \Rightarrow \bar{x} = ۳۴$$

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n} \\ &= \frac{(۲۹-۳۴)^2 + (۳۱-۳۴)^2 + (۳۳-۳۴)^2 + (۳۴-۳۴)^2}{۷} \\ &\quad + \frac{(۳۵-۳۴)^2 + (۳۶-۳۴)^2 + (۴۰-۳۴)^2}{۷} \\ &= \frac{۲۵+۹+۱+۰+۱+۴+۳۶}{۷} \Rightarrow \sigma^2 = \frac{۷۶}{۷} \Rightarrow \sigma^2 = ۱۰.۸۵ \end{aligned}$$

دشوار

۵۱- گزینه «۳»

چون تعداد داده‌ها ($n=۳۶$) مضرب ۴ است دقیقاً $\frac{۱}{۴}$ داده‌ها کوچکتر از چارک

اول و $\frac{۱}{۴}$ داده‌ها بزرگتر از چارک سوم و $\frac{۱}{۴}$ داده‌ها دقیقاً داخل جعبه هستند،

پس اگر میانگین دو طرف جعبه \bar{x}_1 و \bar{x}_3 و میانگین داده‌های داخل جعبه \bar{x}_2 باشد میانگین کل داده‌ها برابر است با

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \frac{۱}{۴}\bar{x}_1 + \frac{۱}{۴}\bar{x}_2 + \frac{۱}{۴}\bar{x}_3 \Rightarrow ۲۷/۵ = \frac{۱}{۴}(۲۲) + \frac{۱}{۴}\bar{x}_2 + \frac{۱}{۴}(۳۰) \\ \Rightarrow ۲۷/۵ &= ۵/۵ + \frac{۱}{۴}\bar{x}_2 + ۷/۵ \Rightarrow \frac{۱}{۴}\bar{x}_2 = ۱۴/۵ \Rightarrow \bar{x}_2 = ۲۹ \end{aligned}$$

دشوار

۴۷- گزینه «۱»

در ابتدا میانگین امتیازات هر دو نفر را محاسبه می‌کنیم.

$$\bar{x}_1 = \frac{۷+۹+۸+۹+۷}{۵} = ۸$$

$$\bar{x}_2 = \frac{۱۰+۸+۶+۷+۹}{۵} = ۸$$

برای مقایسه دقت کاری دو نفر چون میانگین امتیازات دو نفر با هم برابر است، باید ضریب تغییرات آن‌ها را مقایسه کرد که هر کدام انحراف معیار کمتری داشته باشد، ضریب تغییرات کمتری هم دارد پس دقت بالاتری دارد.

$$\begin{aligned} \sigma_1^2 &= \frac{\sum (x_i - \bar{x}_1)^2}{n} = \frac{۲(۷-۸)^2 + ۲(۹-۸)^2 + (۸-۸)^2}{۵} \\ &= \frac{۲+۲+۰}{۵} = 0.8 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_2^2 &= \frac{\sum (x_i - \bar{x}_2)^2}{n} \\ &= \frac{(۱۰-۸)^2 + (۸-۸)^2 + (۶-۸)^2 + (۷-۸)^2 + (۹-۸)^2}{۵} \\ &= \frac{۴+۰+۴+۱+۱}{۵} = ۲ \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \sigma_1^2 < \sigma_2^2 \Rightarrow \sigma_1 < \sigma_2 \xrightarrow{\bar{x}_1 = \bar{x}_2} CV_1 < CV_2$$

دقت نفر اول بالاتر است.

دشوار

۴۸- گزینه «۱»

ضریب تغییرات نمرات مهارت هر دو کارگر را محاسبه می‌کنیم، ضریب تغییراتی هر کارگری که کمتر بود دقت عمل بیشتری دارد.

$$x_A = \frac{۱۲+۱۳+۱۴+۱۵+۱۶}{۵} = \frac{۷۰}{۵} = ۱۴$$

$$\begin{aligned} \sigma_A^2 &= \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n} \\ &= \frac{(۱۲-۱۴)^2 + (۱۳-۱۴)^2 + (۱۴-۱۴)^2 + (۱۵-۱۴)^2 + (۱۶-۱۴)^2}{۵} \\ &= \frac{۴+۱+۰+۱+۴}{۵} = ۲ \Rightarrow \sigma_A = \sqrt{۲} \approx ۱.۴ \end{aligned}$$

$$CV_A = \frac{\sigma_A}{\bar{x}_A} = \frac{۱.۴}{۱۴} \Rightarrow CV_A = 0.1$$

$$\bar{x}_B = \frac{۱۱/۵+۱۳+۱۵/۵+۱۶+۱۶/۵}{۵} = \frac{۷۲/۵}{۵} \Rightarrow \bar{x}_B = ۱۴/۵$$

$$\begin{aligned} \delta^2 &= \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n} \\ &= \frac{(۱۴/۵-۱۱/۵)^2 + (۱۴/۵-۱۳)^2 + (۱۴/۵-۱۵/۵)^2}{۵} \\ &\quad + \frac{(۱۴/۵-۱۶)^2 + (۱۴/۵-۱۶/۵)^2}{۵} \\ \Rightarrow \delta_B^2 &= \frac{۹+۲/۲۵+۱+۲/۲۵+۴}{۵} = \frac{۱۸/۵}{۵} = ۳/۷ \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \delta_B = \sqrt{۳/۷} = ۱/۹۲$$

$$CV_B = \frac{\sigma_B}{\bar{x}_B} = \frac{۱/۹۲}{۱۴/۵} \Rightarrow CV_B = 0.1۳۲$$

دقت عمل فرد A بالاتر است $CV_A < CV_B$



دشوار

۵۵- گزینه «۱۴»

داده‌ها را از کوچک به بزرگ مرتب می‌کنیم.

$$۷, ۹, ۱۰, ۱۱, ۱۲, ۱۲, ۱۳, ۱۶, ۱۷, ۱۷, ۱۸, ۲۰, ۲۱$$

چون تعداد داده‌ها فرد ($n = 13$) است، داده هفتم میانه است ($Q_2 = 13$) و

میانگین داده سوم و چهارم چارک اول ($Q_1 = \frac{10+11}{2} = 10.5$) و میانگین

داده‌های دهم و یازدهم چارک سوم است ($Q_3 = \frac{17+18}{2} = 17.5$) پس

داده‌های داخل جعبه عبارتند از:

$$۱۱, ۱۲, ۱۲, ۱۳, ۱۶, ۱۷, ۱۷$$

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n} = \frac{98}{7} = 14$$

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n} \\ &= \frac{(11-14)^2 + 2(12-14)^2 + (13-14)^2 + (16-14)^2 + 2(17-14)^2}{7} \\ &= \frac{9+8+1+4+18}{7} = \frac{40}{7} \Rightarrow \sigma^2 = 5.71 \end{aligned}$$

دشوار

۵۶- گزینه «۱»

داده‌ها را مرتب می‌کنیم.

$$۹, ۱۱, ۱۱, ۱۲, ۱۴, ۱۴, ۱۵, ۱۵, ۱۶, ۱۷, ۱۸$$

چون تعداد داده‌ها ۱۱ تا است داده ششم میانه است ($Q_2 = 14$) و داده‌های

سوم و نهم چارک‌های اول و سوم هستند

بنابراین داده‌های داخل جعبه عبارتند از:

$$۱۲, ۱۴, ۱۴, ۱۵, ۱۵$$

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n} = \frac{12+14+14+15+15}{5} = \frac{70}{5} = 14$$

$$\sigma^2 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n} = \frac{(12-14)^2 + 2(14-14)^2 + 2(15-14)^2}{5}$$

$$= \frac{4+0+2}{5} = 1.2$$

$$\Rightarrow \sigma = \sqrt{1.2} \approx 1.1$$

دشوار

۵۷- گزینه «۲»

چون ۲۳ داده داریم، داده ۱۲ام میانه است و داده‌های ۶ام و ۱۸ام به ترتیب

چارک اول و سوم هستند پس ۵ داده در سمت چپ و ۵ داده در سمت راست

و ۱۳ داده روی و داخل نمودار جعبه‌ای داریم که در این صورت خواهیم

داشت.

$$\bar{x} = \frac{5(21/6) + 13(25) + 5(33)}{23} = \frac{108 + 325 + 165}{23} = \frac{598}{23} \Rightarrow \bar{x} = 26$$

دشوار

۵۳- گزینه «-»

چون تعداد داده‌ها زوج است ($n = 18$) میانگین داده ۹ و ۱۰ میانه

است ($Q_2 = \frac{40+44}{2} = 42$) و داده پنجم چارک اول ($Q_1 = 38$) و داده

چهاردهم چارک سوم است ($Q_3 = 52$)

داده‌های داخل جعبه

اگر میانگین حدسی را عدد ۴۰ فرض کنیم داریم.

انحراف داده‌ها از ۴۰

$$\bar{x} = 40 + \frac{-2-1+0+0+4+5+5+6}{8} = 40 + \frac{17}{8} = 42.125$$

دشوار

۵۳- گزینه «۲»

داده‌ها را از کوچک به بزرگ مرتب می‌کنیم.

$$۳۲, ۳۷, ۳۹, ۴۲, ۴۶, ۵۰, ۵۴, ۵۶, ۵۷, ۵۹$$

چون تعداد داده‌ها ۱۰ تا است (زوج است) میانگین داده پنجم و ششم میانه

است ($Q_2 = \frac{46+50}{2} = 48$) و داده سوم چارک اول ($Q_1 = 39$) و داده

هشتم چارک سوم ($Q_3 = 56$) است، بنابراین داده‌های داخل جعبه عبارتند از:

$$۴۲, ۴۶, ۵۰, ۵۴$$

$$\bar{x} = \frac{42+46+50+54}{4} = \frac{192}{4} = 48$$

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n} \\ &= \frac{(42-48)^2 + (46-48)^2 + (50-48)^2 + (54-48)^2}{4} \\ &= \frac{36+4+4+36}{4} = \frac{80}{4} \Rightarrow \sigma^2 = 20 \Rightarrow \sigma = 2\sqrt{5} \end{aligned}$$

$$CV = \frac{\sigma}{\bar{x}} = \frac{2\sqrt{5}}{48} = \frac{\sqrt{5}}{24} \Rightarrow CV = 0.09$$

متوسط

۵۴- گزینه «۲»

چون تعداد داده‌ها ۱۹ است داده ۱۰ام میانه است و داده پنجم چارک اول (۴)

داده سمت چپ نمودار جعبه‌ای) و داده ۱۵ام چارک سوم است (۴ داده سمت

راست نمودار جعبه‌ای) پس ۱۱ داده هم داخل و روی نمودار جعبه‌ای است

بنابراین داریم:

$$\bar{x} = \frac{4(11) + 11(15/2) + 4(17/5)}{19} = \frac{281/2}{19} \Rightarrow \bar{x} = 14.8$$



سوالات تشریحی

پاسخنامه

آزمون تشریحی ۱

آسان

-۱

- (آ) یافت نگاشت (ب) داده
(پ) چارک اول (د) پراکندگی داده‌ها - میانگین داده‌ها

دشوار

-۲

نمره	۱۶	۱۷	۱۸	۱۹	۲۰
فراوانی	۶	۸	۵	۱۰	۷

$$n = \sum f_i = 6 + 8 + 5 + 10 + 7 = 36$$

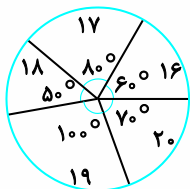
$$\alpha_1 = \frac{f_1}{n} \times 360 = \frac{6}{36} \times 360 = 60^\circ \quad \alpha_2 = \frac{f_2}{n} \times 360 = \frac{8}{36} \times 360 = 80^\circ$$

$$\alpha_3 = \frac{f_3}{n} \times 360 = \frac{5}{36} \times 360 = 50^\circ \quad \alpha_4 = \frac{f_4}{n} \times 360 = \frac{10}{36} \times 360 = 100^\circ$$

$$\alpha_5 = \frac{f_5}{n} \times 360 = \frac{7}{36} \times 360 = 70^\circ$$

(ب)

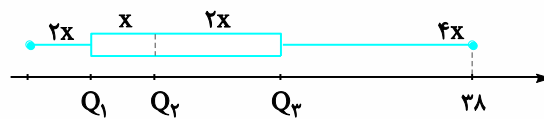
$$P_5 = \frac{f_5}{n} \times 100 \Rightarrow P_5 = \frac{7}{36} \times 100 = 19/44\%$$



متوسط

۵۸- گزینه «۲»

پراکندگی نیمه دوم داده‌ها، از میانه تا بزرگترین داده است ($max - Q_3$) پس داریم.



$$24 = max - Q_3 \Rightarrow 2x + 4x \Rightarrow 24 = 6x \Rightarrow x = 4$$

$$R = max - min \Rightarrow 9x = 38 - min \Rightarrow min = 2$$

آسان

۵۹- گزینه «۲»

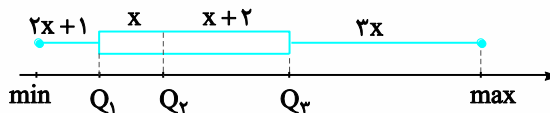
تفاضل چارک سوم از چارک اول را دامنه میان چارکی

$$IQR = Q_3 - Q_1 \text{ گوئیم}$$

$$\frac{IQR(A)}{IQR(B)} = \frac{Q_3(A) - Q_1(A)}{Q_3(B) - Q_1(B)} = \frac{80 - 45}{85 - 65} = \frac{35}{20} = \frac{7}{4} = 1/75$$

آسان

۶۰- گزینه «۲»



$$R = max - min = 2x + 1 + x + x + 2 + 3x = 7x + 3$$

$$IQR = Q_3 - Q_1 = x + x + 2 = 2x + 2$$

$$\frac{R}{IQR} = 2 \Rightarrow \frac{7x + 3}{2x + 2} = 2 \Rightarrow 7x + 3 = 4x + 4 \Rightarrow 3x = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{3}$$

آسان

-۵

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5}{5} \Rightarrow 17 = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5}{5}$$

$$\Rightarrow x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 85$$

حال داده‌ها به صورت $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, 17, 10$

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + 17 + 10}{7} = \frac{85 + 27}{7} = \frac{112}{7}$$

$$\Rightarrow \bar{x} = 16$$

متوسط

-۶

داده یا داده‌های که بیشترین تکرار را دارد مُد می‌نامیم که ($M = 15$)

داده‌ها را از کوچک به بزرگ مرتب می‌کنیم. $4, 7, 8, 9, 11, 15, 15, 18, 20$.

چون تعداد داده‌ها فرد است ($n = 9$)، داده پنجم میانه است. ($Q_2 = 11$)

متوسط

-۷

$$\bar{x} = \frac{9 + 12 + 8 + 10 + 16}{5} = \frac{55}{5} \Rightarrow \bar{x} = 11$$

$$\sigma^2 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n}$$

$$= \frac{(9-11)^2 + (12-11)^2 + (8-11)^2 + (10-11)^2 + (16-11)^2}{5}$$

$$= \frac{4 + 1 + 9 + 1 + 25}{5} = \frac{40}{5} \Rightarrow \sigma^2 = 8$$

$$\Rightarrow \sigma = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

$$CV = \frac{\sigma}{\bar{x}} = \frac{2\sqrt{2}}{11}$$

متوسط

-۸

داده‌ها را از کوچک به بزرگ مرتب می‌کنیم.

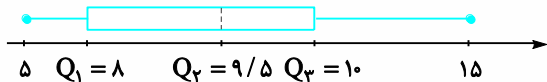
$3, 5, 8, 9, 9, 10, 10, 10, 12, 15$

چون تعداد داده‌ها زوج است ($n = 10$) میانگین داده پنجم و ششم میانه است.

$$Q_2 = \frac{9 + 10}{2} = 9.5 \text{ و } Q_1 = 8 \text{ و داده هشتم چارک سوم}$$

است که $Q_3 = 10$

$$IQR = Q_3 - Q_1 = 10 - 8 = 2$$



دشوار

-۳

$$P_2 = \frac{f_2}{n} \times 100 \Rightarrow 40 = \frac{f_2}{25} \times 100 \Rightarrow 40 = 4f_2 \Rightarrow f_2 = 10$$

$$n = f_1 + f_2 + f_3 + f_4 \Rightarrow 25 = 5 + 10 + 4 + f_4 \Rightarrow f_4 = 6$$

$$P_1 = \frac{f_1}{n} \times 100 = \frac{5}{25} \times 100 = 20\%$$

$$P_3 = \frac{f_3}{n} \times 100 = \frac{4}{25} \times 100 = 16\%$$

$$P_4 = \frac{f_4}{n} \times 100 = \frac{6}{25} \times 100 = 24\%$$

حدود سن	فراوانی	درصد فراوانی
۱۸-۲۲	۵	۲۰
۲۲-۲۶	۱۰	۴۰
۲۶-۳۰	۴	۱۶
۳۰-۳۴	۶	۲۴

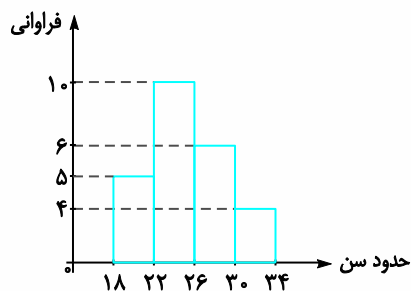
برای محاسبه میانگین داده‌ها نماینده هر

دسته ($\frac{\text{کران بالا} + \text{کران پایین}}{2}$) را محاسبه می‌کنیم.

x_i	۲۰	۲۴	۲۸	۳۲
f_i	۵	۱۰	۴	۶

$$\bar{x} = \frac{\sum f_i x_i}{\sum f_i} = \frac{20(5) + 24(10) + 28(4) + 32(6)}{5 + 10 + 4 + 6}$$

$$= \frac{100 + 240 + 112 + 192}{25} = \frac{644}{25} \Rightarrow \bar{x} = 25.76$$



آسان

-۴

$$\bar{x} = \frac{\sum f_i x_i}{\sum f_i} \Rightarrow \bar{x} = \frac{4x + 6(3) + 3(1) + 2(1) + 1(4) + 6(2)}{4 + 3 + 1 + 1 + 4 + 3}$$

$$\Rightarrow 62 = \frac{4x + 18 + 3 + 2 + 4 + 12}{16}$$

$$\Rightarrow 992 = 4x + 38 \Rightarrow 4x = 954 \Rightarrow x = 238.5$$

دشواری

-۱۲

برای بررسی دقت عمل در دستگاه باید ضریب تغییرات در دستگاه را با هم مقایسه کنیم.

$$\bar{x}_A = \frac{۲+۵+۸+۳+۲}{۵} = \frac{۲۰}{۵} = ۴$$

$$\sigma_A^2 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n} =$$

$$\frac{(۲-۴)^2 + (۵-۴)^2 + (۸-۴)^2 + (۳-۴)^2 + (۲-۴)^2}{۵}$$

$$= \frac{۴+۱+۱۶+۱+۴}{۵} = \frac{۲۶}{۵} \Rightarrow \sigma_A^2 = ۵/۲$$

$$\sigma_A = \sqrt{۵/۲} = ۲/۲۸$$

$$CV_A = \frac{\sigma_A}{\bar{x}_A} = \frac{۲/۲۸}{۴} \Rightarrow CV_A = ۰/۵۷$$

$$\bar{x}_B = \frac{۴+۳+۲+۵+۶}{۵} = \frac{۲۰}{۵} = ۴$$

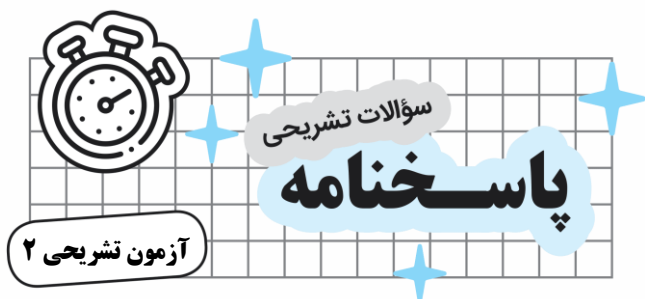
$$\sigma_B^2 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n} =$$

$$\frac{(۴-۴)^2 + (۳-۴)^2 + (۲-۴)^2 + (۵-۴)^2 + (۶-۴)^2}{۵}$$

$$= \frac{۰+۱+۴+۱+۴}{۵} = \frac{۱۰}{۵} = ۲ \Rightarrow \sigma_B = \sqrt{۲} = ۱/۴$$

$$CV_B = \frac{\sigma_B}{\bar{x}_B} = \frac{۱/۴}{۴} = ۰/۳۵$$

$CV_B < CV_A \Rightarrow$ دقت B بیشتر از دقت دستگاه A است.



آسان

-۱

آ) میله‌ای و دایره‌ای (ب) متغیر

پ) صفر (ت) صفر

آسان

-۲

$$F = \frac{f}{n} \Rightarrow ۰/۳ = \frac{f}{۶۰} \Rightarrow f = ۱۸$$

متوسط

-۹

انحراف معیار داده‌ها زمانی صفر است که همه داده‌ها با هم برابر باشند.

$$x+۱=۶ \quad x=۵$$

$$y-۳=۶ \Rightarrow y=۹$$

$$z+۵=۶ \Rightarrow z=۱$$

$$x, y, z \Rightarrow ۱, ۵, ۹$$

$$\bar{x} = \frac{۱+۵+۹}{۳} = ۵$$

$$\sigma^2 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n} = \frac{(۱-۵)^2 + (۵-۵)^2 + (۹-۵)^2}{۳}$$

$$= \frac{۱۶+۰+۱۶}{۳} = \frac{۳۲}{۳} \Rightarrow \sigma = \frac{۴\sqrt{۲}}{\sqrt{۳}} = \frac{۴}{۳}\sqrt{۶}$$

$$CV = \frac{\sigma}{\bar{x}} = \frac{\frac{۴}{۳}\sqrt{۶}}{۵} = \frac{۴}{۱۵}\sqrt{۶}$$

متوسط

-۱۰

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n} \Rightarrow \bar{x} = \frac{۷۲}{۱۲} \Rightarrow \bar{x} = ۶$$

$$\sigma^2 = \frac{\sum x_i^2}{n} - (\bar{x})^2 \Rightarrow \sigma^2 =$$

$$\frac{۴۸۰}{۱۲} - (۶)^2 = ۴۰ - ۳۶ \Rightarrow \sigma^2 = ۴ \Rightarrow \sigma = ۲$$

$$CV = \frac{\sigma}{\bar{x}} = \frac{۲}{۶} \Rightarrow CV = \frac{۱}{۳}$$

متوسط

-۱۱

چون ۱۹ داده داریم، داده ۱۰ام میانه است و داده‌های ۵ام و ۱۵ام چارک اول و سوم هستند.

$$\bar{x}_1 = ۱۳/۷۵ \quad \bar{x}_2 = ۱۷ \quad \bar{x}_3 = ۳۴/۵$$

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n} = \frac{۴(۱۳/۷۵) + ۱۱(۱۷) + ۴(۳۴/۵)}{۱۹}$$

$$= \frac{۵۵ + ۱۸۷ + ۱۳۸}{۱۹} = \frac{۳۸۰}{۱۹} \Rightarrow \bar{x} = ۲۰$$

دشوار

-۸

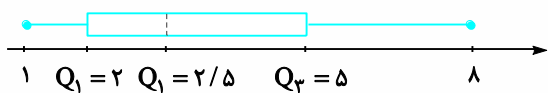
داده‌ها را از کوچک به بزرگ مرتب می‌کنیم.

۱, ۱, ۱, ۱, ۱, ۲, ۲, ۲, ۲, ۲, ۲, ۳, ۳, ۳, ۳, ۴, ۴, ۴, ۵, ۵, ۶, ۷, ۷, ۸

چون تعداد داده‌ها زوج است ($n = 22$) میانگین داده‌های ۱۱ و ۱۲ام میانه

است. $(Q_1 = 2)$ داده ششم چارک اول است $(Q_2 = \frac{2+3}{2} = 2.5)$ و

داده هفدهام چارک سوم است $(Q_3 = 5)$



متوسط

-۹

$$\bar{x} = \frac{2+4+6+8+10}{5} = \frac{30}{5} = 6$$

$$\sigma^2 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n} =$$

$$\frac{(2-6)^2 + (4-6)^2 + (6-6)^2 + (8-6)^2 + (10-6)^2}{5}$$

$$= \frac{16+4+0+4+16}{5} = \frac{40}{5} \Rightarrow \sigma^2 = 8 \Rightarrow \sigma = 2\sqrt{2}$$

$$CV = \frac{\sigma}{\bar{x}} \Rightarrow CV = \frac{2\sqrt{2}}{6} \Rightarrow CV = \frac{\sqrt{2}}{3}$$

متوسط

-۱۰

$$\sigma_{new}^2 = (2)\sigma^2 = 2(10) = 20$$

$$\sigma_{new} = \sqrt{\sigma_{new}^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

$$\bar{x}_{new} = 2\bar{x} - 1 = 2(6) - 1 = 11$$

$$CV_{new} = \frac{\sigma_{new}}{\bar{x}_{new}} \Rightarrow CV_{new} = \frac{2\sqrt{5}}{11}$$

دشوار

-۱۱

چون میانگین بعد از اضافه کردن $1/5$ واحد به داده‌های اولیه ۱۰ شده است.

پس میانگین داده‌های اولیه برابر ۱۰ است.

$$\bar{x} = \frac{\sum f_i x_i}{\sum f_i} \Rightarrow 11/5 = \frac{3(4) + 7(5) + 11(x) + 15(2)}{4+5+x+3}$$

$$\Rightarrow 11/5 = \frac{12+35+11x+45}{12+x} \Rightarrow$$

$$10.2 + 11/5x = 92 + 11x \Rightarrow 10 = 2/5x \Rightarrow x = 4$$

آسان

-۱۲

$$n = \sum f_i \Rightarrow n = 5+8+9+x \Rightarrow n = 22+x$$

$$F = \frac{f}{n} \Rightarrow \frac{12}{100} = \frac{x}{22+x} \Rightarrow \frac{3}{25} = \frac{x}{22+x}$$

$$\Rightarrow 25x = 66 + 3x \Rightarrow 22x = 66 \Rightarrow x = 3$$

متوسط

-۱۴

۶ داده اول x_1, x_2, \dots, x_6 و ۷ داده دوم y_1, y_2, \dots, y_7 هستند.

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n} \Rightarrow 13 = \frac{\sum x_i}{6} \Rightarrow \sum x_i = 78$$

$$\bar{y} = \frac{\sum y_i}{n} \Rightarrow 18 = \frac{\sum y_i}{7} \Rightarrow \sum y_i = 126$$

اگر میانگین کل داده \bar{z} باشد داریم.

$$\bar{z} = \frac{\sum x_i + \sum y_i}{6+7} = \frac{78+126}{13} = \frac{204}{13} \Rightarrow \bar{z} = 15.69$$

متوسط

-۱۵

داده‌ای که بیشترین تکرار را دارد مُد است پس عدد ۱۷ مُد این داده‌ها است.

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n} = \frac{17+19+17+18+17+16+13+12+20+13}{10}$$

$$= \frac{162}{10} \Rightarrow \bar{x} = 16.2$$

برای تعیین میانه، داده‌ها را از کوچک به بزرگ مرتب می‌کنیم.

۱۲, ۱۳, ۱۳, ۱۶, ۱۷, ۱۷, ۱۷, ۱۸, ۱۹, ۲۰

چون تعداد داده‌ها زوج است ($n = 10$) میانگین داده‌های پنجم و ششم میانه

است.

$$Q_2 = \frac{17+17}{2} = 17$$

دشوار

-۱۶

داده	۱	۲	۳	۴	۵
فراوانی	۳	۱۰	a	۱	۶

$$n = \sum f_i = 3+10+a+1+6 = 20+a$$

$$f = \frac{f}{n} \Rightarrow 0.2 = \frac{a}{20+a} \Rightarrow 4+0.2a = a \Rightarrow a = 5$$

$$\alpha_5 = \frac{f_5}{n} \times 360 = \frac{6}{20+5} \times 360 \Rightarrow \alpha_5 = 86.4$$

متوسط

-۱۷

می‌دانیم مجموع زوایا مرکزی در نمودار دایره‌ای 360° است پس داریم:

$$77 + 45 + x + 90 + 80 = 360 \Rightarrow x = 68$$

$$\alpha_3 = \frac{f_3}{n} \times 360 \Rightarrow 68 = \frac{f_3}{90} \times 360 \Rightarrow 4f_3 = 68 \Rightarrow f_3 = 17$$

آسان

۳- گزینه «ب»

می‌دانیم مجموع فراوانی نسبی همه دسته‌ها برابر ۱ است پس داریم:

$$\sum F_i = 1 \Rightarrow \underbrace{f_1 + f_2 + f_3 + f_4 + f_5}_{0.65} = 1 \Rightarrow f_5 = 0.35$$

$$F_5 = \frac{f_5}{n} \Rightarrow \frac{35}{100} = \frac{14}{n} \Rightarrow \frac{7}{20} = \frac{14}{n} \Rightarrow 7n = 280 \Rightarrow n = 40$$

متوسط

۴- گزینه «ب»

می‌دانیم جمع درصدهای فراوانی نسبی برابر ۱۰۰ است، پس داریم:

$$\sum P_i = 100 \Rightarrow 10 + 15 + 18 + x + 20 + 12 = 100 \Rightarrow x = 25$$

$$P_1 = F \times 100 \Rightarrow 25 = F \times 100 \Rightarrow F = \frac{1}{4}$$

$$\alpha = F \times 360 \Rightarrow \alpha = \frac{1}{4} \times 360 \Rightarrow \alpha = 90^\circ$$

متوسط

۵- گزینه «ب»

$$\alpha_A = \frac{f_A}{n} \times 360 \Rightarrow 90 = \frac{f_A}{n} \times 360 \Rightarrow \frac{1}{4} = \frac{f_A}{n} \Rightarrow n = 4f_A$$

اگر $f'_A = 2f_A$ شود، $n' = n + f_A = 5f$ می‌شود.

$$\alpha'_A = \frac{f'_A}{n'} \times 360 \Rightarrow \alpha'_A = \frac{2f_A}{5f_A} \times 360 \Rightarrow \alpha'_A = 144$$

$$\alpha'_A - \alpha_A = 144 - 90 = 54$$

دشواری

۶- گزینه «ب»

$$n = \sum f_i = 3 + 6 + 4 + 2 = 15$$

$$\alpha_2 = \frac{f_2}{n} \times 360 \Rightarrow \alpha_2 = \frac{6}{15} \times 360 \Rightarrow \alpha_2 = 144$$

بعد از اضافه شدن ۵ داده $n' = 20$ و $f_2 = 6 + x$ و $\alpha'_2 = 144 - 18 \Rightarrow 126$ می‌شود.

$$\alpha'_2 = \frac{f'_2}{n'} \times 360 \Rightarrow 126 = \frac{f'_2}{20} \times 360 \Rightarrow f'_2 = \frac{126}{18} \Rightarrow f'_2 = 7$$

$$P'_2 = \frac{f'_2}{n'} \times 100 = \frac{7}{20} \times 100 \Rightarrow P'_2 = 35\%$$

متوسط

۷- گزینه «ب»

$$x = \frac{\sum f_i x_i}{\sum f_i}$$

$$\Rightarrow \bar{x} = \frac{10(6) + 12(9) + 14(10) + 15(12) + 16(8) + 18(5)}{6 + 9 + 10 + 12 + 8 + 5} \Rightarrow \bar{x}$$

$$= \frac{60 + 108 + 140 + 180 + 128 + 90}{50} \Rightarrow \bar{x} = \frac{706}{50} \Rightarrow \bar{x} = 14.12$$

چون تعداد داده‌ها ۵۰ تا است پس میانه داده‌ها برابر میانگین داده‌های ۲۵ام و

۲۶ام است و داده ۲۵ام برابر ۱۴ و داده ۲۶ام برابر ۱۵ است پس داریم:

$$Q_2 = \frac{14 + 15}{2} \Rightarrow Q_2 = 14.5$$

$$Q_2 - \bar{x} = 14.5 - 14.12 = 0.38$$

دشواری

۱۲-

باید ضریب تغییرات نمرات دو شخص را به دست آوریم و هر کدام که کمتر بود، دقت عمل بهتری دارد.

$$\bar{x}_A = \frac{14 + 17 + 20 + 15 + 14}{5} = \frac{80}{5} \Rightarrow \bar{x} = 16$$

$$\sigma_A^2 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n} = \frac{(14-16)^2 + (17-16)^2 + (20-16)^2 + (15-16)^2 + (14-16)^2}{5} = \frac{4 + 1 + 16 + 1 + 4}{5} = \frac{26}{5} = 5.2$$

$$\sigma_A = \sqrt{5.2} = 2.28$$

$$CV_A = \frac{\sigma_A}{\bar{x}} = \frac{2.28}{16} \Rightarrow CV_A = 0.1425$$

$$\bar{x}_B = \frac{16 + 15 + 14 + 17 + 18}{5} = \frac{80}{5} \Rightarrow \bar{x} = 16$$

$$\sigma_B^2 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n} = \frac{(16-16)^2 + (15-16)^2 + (14-16)^2 + (17-16)^2 + (18-16)^2}{5} = \frac{0 + 1 + 4 + 1 + 4}{5} = 2$$

$$\sigma_B = \sqrt{2} = 1.41$$

$$CV_B = \frac{\sigma_B}{\bar{x}} = \frac{1.41}{16} \Rightarrow CV_B = 0.088$$

دقت عمل فرد B بیشتر از فرد A است. $CV_B < CV_A \Rightarrow$



سوالات تستی

پاسخنامه

آزمون پایانی تستی

آسان

۱- گزینه «ب»

$$F = \frac{f}{n} \Rightarrow \frac{14}{100} = \frac{5x - 3}{21x + 8} \Rightarrow \frac{7}{50} = \frac{5x - 3}{21x + 8} \Rightarrow 147x + 56 = 250x - 150 \Rightarrow 206 = 103x \Rightarrow x = 2$$

$$f_1 = 5x - 3 = 5(2) - 3 = 7$$

آسان

۲- گزینه «ب»

$$n = \sum f_i = 50 + 16 + 30 + 24 = 120$$

$$\alpha_1 = \frac{f_1}{n} \times 360 = \frac{24}{120} \times 360 = 72^\circ$$

متوسط

۱۲- گزینه «ب»

میانگین دسته اول داده‌های آماری $5\bar{x} + b$ و دسته دوم $3\bar{x} - b$ است که داریم:

$$\begin{cases} 5\bar{x} + b = 48 \\ 3\bar{x} - b = 24 \end{cases} \Rightarrow \bar{x} = 9 \quad b = 3$$

میانگین اعداد دسته آخر $7\bar{x} + 2b$ است که $\bar{x} = 9$ و $b = 3$ است که:

$$7\bar{x} + 2b = 7(9) + 2(3) = 63 + 6 = 69$$

متوسط

۱۳- گزینه «ب»

مُد داده‌ای است که بیشترین فراوانی را دارد پس عدد ۵ مُد است.

x_i	۱	۲	۳	۴	۵
f_i	۴	۵	۲	۳	۷

$$n = \sum f_i = 4 + 5 + 2 + 3 + 7 = 21$$

چون ۲۱ داده داریم داده ۱۱ ام میانه است که داده یازدهم است پس:

$$Q_2 = 3$$

$$Q_2 - M = 5 - 3 = 2$$

آسان

۱۴- گزینه «ب»

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n} \Rightarrow \bar{x} = \frac{48}{8} \Rightarrow \bar{x} = 6$$

$$CV = \frac{\sigma}{\bar{x}} \Rightarrow 0.5 = \frac{\sigma}{6} \Rightarrow \sigma = 3$$

$$\sigma^2 = \frac{\sum x_i^2}{n} - (\bar{x})^2 \Rightarrow 9 = \frac{\sum x_i^2}{8} - 36$$

$$\Rightarrow \frac{\sum x_i^2}{8} = 45 \Rightarrow \sum x_i^2 = 360$$

آسان

۱۵- گزینه «ا»

میانگین و انحراف معیار داده‌های جدید و (σ_y, \bar{y}) را به دست می‌آوریم.

$$y_i = x_i + \bar{x} \Rightarrow \bar{y} = \bar{x} + \bar{x} = 2\bar{x}$$

انحراف معیار تغییر نمی‌کند.

$$\sigma_y = \sigma_x$$

$$CV_y = \frac{\sigma_y}{\bar{y}} = \frac{\sigma_x}{2\bar{x}} = \frac{1}{2} CV_x = \frac{1}{2} \times 1/2 \Rightarrow CV_y = 0.25$$

متوسط

۸- گزینه «ب»

x حتماً یکی از داده‌های ۶۴ و ۶۵ و ۷۷ و ۵۰ و ۶۶ و ۷۰ و ۶۳ است، چون در غیر این صورت داده تکراری نداریم بنابراین مُد نخواهیم داشت پس x حتماً مُد هم خواهد بود.

$$\begin{aligned} \Rightarrow \frac{\sum x_i}{n} = M &\Rightarrow \frac{63 + 70 + 66 + 50 + 77 + 65 + 64 + x}{8} \\ = x &\Rightarrow 455 + x = 8x \\ \Rightarrow 7x = 455 &\Rightarrow x = 65 \end{aligned}$$

متوسط

۹- گزینه «ا»

می‌دانیم مجموع زوایا مرکزی در نمودار دایره‌ای داده‌ها برابر 360° است.

$$\begin{aligned} \sum \alpha_i = 360 &\Rightarrow 72 + 108 + \alpha + 72 + 45 = 360 \Rightarrow \alpha = 63^\circ \\ \bar{x} = \frac{\sum \alpha_i x_i}{360} &= \frac{12(72) + 16(108) + 20(63) + 24(72) + 28(45)}{360} \\ &= \frac{864 + 1728 + 1260 + 1728 + 1260}{360} \\ &= \frac{6840}{360} = 19 \end{aligned}$$

متوسط

۱۰- گزینه «ا»

چون ۳۱ داده آماری داریم پس داده ۱۶ ام میانه است پس داده ۸ ام چارک اول می‌باشد بنابراین ۷ داده کوچکتر از چارک اول و ۷ داده بزرگتر از چارک سوم و ۱۷ داده داخل و روی جعبه داریم.

$$\begin{array}{ccc} \text{داده ۷} & \text{داده ۱۷} & \text{داده ۷} \\ \hline x_1 = 10 & \text{ } & x_3 = 21 \\ \hline & x_2 = 15/5 & \end{array}$$

$$\begin{aligned} \bar{x} = \frac{7(10) + 17(15/5) + 7(21)}{31} &= \frac{70 + 263/5 + 147}{31} = \frac{480.6}{31} \\ \Rightarrow \bar{x} &= 15.5 \end{aligned}$$

دشواری

۱۱- گزینه «ب»

اگر عدد b زوج باشد و $b > a$ باشد، دنباله نمرات این شخص به ترتیب $a, a, a, b, b + 2, b + 4$ است.

$$R = 5 \Rightarrow b + 4 - a = 5 \Rightarrow b - a = 1$$

$$\begin{aligned} \bar{x} = \frac{\sum x_i}{n} &\Rightarrow 6/5 = \frac{a + a + a + b + b + 2 + b + 4}{6} \\ \Rightarrow 39 &= 3a + 3b + 6 \\ \Rightarrow 33 &= 3a + 3b \Rightarrow a + b = 11 \end{aligned}$$

$$\begin{cases} b - a = 1 \\ a + b = 11 \end{cases} \Rightarrow b = 6, a = 5$$

عدد a مُد است که $a = 5$

دشوار

۱۹-۵ گزینه «۱»

هر کدام که انحراف معیار کمتری داشته باشد، دقت کاری بیشتری دارد.

$$\bar{x}_1 = \frac{7+9+8+9+7}{5} = \frac{40}{5} = 8$$

$$\sigma_1^2 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n} = \frac{2(7-8)^2 + 2(9-8)^2 + (8-8)^2}{5}$$

$$= \frac{2+2+0}{5} = 0.8 \Rightarrow \sigma_1 = \sqrt{0.8}$$

$$\bar{x}_2 = \frac{10+8+6+7+9}{5} = \frac{40}{5} = 8$$

$$\sigma_2^2 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n} = \frac{(10-8)^2 + (8-8)^2 + (6-8)^2 + (7-8)^2 + (9-8)^2}{5}$$

$$= \frac{4+0+4+1+1}{5} = 2 \Rightarrow \sigma_2 = 2$$

$$CV_1 = \frac{\sigma_1}{\bar{x}_1} \Rightarrow CV_1 = \frac{\sqrt{0.8}}{8}$$

$$CV_2 = \frac{\sigma_2}{\bar{x}_2} \Rightarrow CV_2 = \frac{\sqrt{2}}{8}$$

دقت کاری فرد (۱) بیشتر است $\Rightarrow CV_1 < CV_2$

دشوار

۲۰-۵ گزینه «۱»

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3} \Rightarrow 7 = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3} \Rightarrow x_1 + x_2 + x_3 = 21$$

داده‌های جدید: $x_1, x_2, x_3, a, a+1$

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n} \Rightarrow 7 + 2/6 = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + a + a + 1}{5}$$

$$\Rightarrow 9/6 = \frac{21 + 2a + 1}{5} \Rightarrow 48 = 2a + 22$$

$$2a = 26 \Rightarrow a = 13$$

آسان

۱۶-۵ گزینه «۳»

$$\bar{x} = 12 \quad \sigma^2 = 5 \quad \frac{\sum x_i^2}{n} = ?$$

$$\sigma^2 = \frac{\sum x_i^2}{n} - (\bar{x})^2 \Rightarrow 5 = \frac{\sum x_i^2}{n} - 144 \Rightarrow \frac{\sum x_i^2}{n} = 149$$

دشوار

۱۷-۵ گزینه «۱»

داده‌ها را از کوچک به بزرگ مرتب می‌کنیم.

۹, ۱۱, ۱۱, ۱۲, ۱۴, ۱۴, ۱۵, ۱۵, ۱۶, ۱۷, ۱۸

چون تعداد داده‌ها ۱۱ تا است داده ششم چارک دوم یا میانه است.

$(Q_1 = 11)$ و داده سوم چارک اول و داده نهم چارک سوم است

$(Q_3 = 16)$

داده‌های داخل جعبه

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n} = \frac{12+14+14+15+15}{5} = \frac{70}{5} = 14$$

$$\sigma^2 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n} \Rightarrow \sigma^2 = \frac{(12-14)^2 + 2(14-14)^2 + 2(15-14)^2}{5}$$

$$= \frac{4+0+2}{5} = \frac{6}{5} = 1.2$$

$$\Rightarrow \sigma = \sqrt{1.2} \Rightarrow \sigma = 1.1$$

دشوار

۱۸-۵ گزینه «۴»

میانگین ۴ داده حذف شده را حساب می‌کنیم.

$$\bar{x} = \frac{50+45+15+10}{4} = 30$$

چون میانگین داده‌های حذف شده با میانگین کل برابر است پس میانگین

داده‌های باقی‌مانده هم ۳۰ است. واریانس داده‌های حذف شده را محاسبه

می‌کنیم.

$$\sigma^2 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n}$$

$$\Rightarrow \sigma^2 = \frac{(50-30)^2 + (45-30)^2 + (15-30)^2 + (10-30)^2}{4}$$

$$= \frac{400+225+225+400}{4} = \frac{1250}{4} \Rightarrow \sigma^2 = 312.5$$

$$\text{داده‌های} \left\{ \begin{array}{l} \sigma^2 = 64 \\ n = 25 \end{array} \right. \quad \text{داده‌های} \left\{ \begin{array}{l} \sigma^2 = ? \\ n_1 = 21 \end{array} \right. \quad \text{داده‌های} \left\{ \begin{array}{l} \sigma^2 = 312.5 \\ n_2 = 4 \end{array} \right.$$

اولیه

باقی‌مانده

حذف شده

$$\sigma^2 = \frac{n_1 \sigma_1^2 + n_2 \sigma_2^2}{n_1 + n_2} \Rightarrow 64 = \frac{21 \sigma_1^2 + 4 \times 312.5}{21 + 4} \Rightarrow 1600 = 21 \sigma_1^2 + 1250$$

$$\Rightarrow 21 \sigma_1^2 = 350 \Rightarrow \sigma_1^2 = 16.66$$

$$\begin{aligned}\sigma^2 &= \frac{\sum (\bar{x} - x_i)^2}{n} \Rightarrow \sigma^2 \\ &= \frac{(12-9)^2 + (12-10)^2 + (12-11)^2 + (12-12)^2}{7} \\ &\quad + \frac{(12-12)^2 + (12-14)^2 + (12-16)^2}{7} \\ \Rightarrow \sigma^2 &= \frac{9+4+1+0+0+4+16}{7} = \frac{34}{7} \Rightarrow \sigma^2 = 4/8\end{aligned}$$

۴- گزینه «۳»

$$\bar{x} = \frac{\sum f_i x_i}{n} \Rightarrow \bar{x} = \frac{2 \times 7 + 4 \times k + 6 \times 3 + 8 \times 2}{7+k+3+2} = \frac{48+4k}{12+k} = 4$$

$$CV = \frac{\sigma}{\bar{x}} \Rightarrow 0.5 = \frac{\sigma}{4} \Rightarrow \sigma = 2 \Rightarrow \sigma^2 = 4$$

$$\begin{aligned}\sigma^2 &= \frac{\sum f_i (x - \bar{x})^2}{n} \\ \Rightarrow 4 &= \frac{7(2-4)^2 + k(4-4)^2 + 3(6-4)^2 + 2(8-4)^2}{7+k+3+2}\end{aligned}$$

$$\Rightarrow 4 = \frac{28+12+32}{12+k} \Rightarrow 48+4k = 72 \Rightarrow 4k = 24 \Rightarrow k = 6$$

۵- گزینه «۱»

سن این افراد به صورت $a, a, 2b, 2b + 2, 2b + 4$ است.

$$R = 11 \Rightarrow 2b + 4 - a = 11 \Rightarrow 2b - a = 7$$

$$\bar{x} = 9/5 \Rightarrow \frac{a+a+a+2b+2b+2+2b+4}{6}$$

$$= 9/5 \Rightarrow 3a + 6b + 6 = 57$$

$$\Rightarrow a + 2b = 17$$

$$\begin{cases} 2b - a = 7 \\ 2b + a = 17 \end{cases} \Rightarrow 4b = 24 \Rightarrow b = 6$$

$$\text{سن نفر بزرگتر} = 2b + 4 = 2(6) + 4 = 16$$

۶- گزینه «۲»

چاک اول داده ۹ است \Rightarrow میانه داده ۱۸ است \Rightarrow تعداد دادهها چاک سوم داده ۲۷ است

$$\text{تعداد دادههای خارج جعبه} = 2 \times 8 = 16$$

$$\text{تعداد دادههای داخل و لبه جعبه} = 35 - 16 = 19$$

$$= \frac{\text{مجموع ۱۹ داده}}{19} \Rightarrow 15 = \frac{\text{مجموع ۱۹ داده}}{19} \Rightarrow \text{مجموع ۱۹ دادههای داخل و لبه جعبه} = 285$$

$$\text{مجموع دادههای خارج جعبه} = 509 - 285 = 224$$

$$\text{میانگین دادههای خارج جعبه} = \frac{\text{مجموع دادههای خارج جعبه}}{16} = \frac{224}{16} = 14$$



سؤالات تستی

پاسخنامه

آزمون پلاس

۱- گزینه «۲»

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n} = \frac{216}{18} = 12$$

$$CV = \frac{\delta}{\bar{x}} \Rightarrow \frac{1}{6} = \frac{\delta}{12} \Rightarrow \sigma = 2 \Rightarrow \sigma^2 = 4$$

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (\bar{x} - x_i)^2}{n} \Rightarrow 4 = \frac{\sum_{i=1}^{18} (12 - x_i)^2}{18} \Rightarrow \sum_{i=1}^{18} (12 - x_i)^2 = 72$$

دو داده جدید دارای میانگین ۱۲ است.

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (12 - x_i)^2 + (12-9)^2 + (12-15)^2}{20} = \frac{72+9+9}{20} = \frac{90}{20} = 4/5$$

۲- گزینه «۳»

نکته: مجموع انحراف از میانگین کل دادههای آماری برابر صفر است.

$$-6(3) - 4(5) - 2(4) + 0(a) + 2(3) + 4(b) + 6(2)$$

$$= 0 \Rightarrow -18 - 20 - 8 + 0 + 6 + 4b + 12 = 0$$

$$\Rightarrow 4b = 28 \Rightarrow b = 7$$

مجموع فراوانیهای مطلق پنج دسته اول که برابر ۲۰ است، داریم:

$$3 + 5 + 4 + a + 3 = 20 \Rightarrow a = 5$$

$$a + b = 5 + 7 = 12$$

۳- گزینه «۴»

$$\text{میانگین دادهها} = 4x + 4$$

$$\bar{x} = \frac{5x - 1 + 4x + 2 + 6x - 1 + 4x + 4 + 5x + 2 + 6x + 2 + 7x + 2}{7}$$

$$= \frac{37x + 10}{7}$$

$$4x + 4 = \frac{37x + 10}{7} \Rightarrow 28x + 28 = 37x + 10 \Rightarrow 18 = 9x \Rightarrow x = 2$$

در نتیجه دادهها به صورت ۱۶ و ۱۴ و ۱۲ و ۱۲ و ۱۱ و ۱۰ و ۹ است و

$$\bar{x} = 12$$

۹- گزینه «۴»

$$\sigma^2 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n} \Rightarrow 4 = \frac{9 + a^2 + 0 + 9 + b^2 + 1}{6}$$

$$\Rightarrow 24 = a^2 + b^2 + 19 \Rightarrow a^2 + b^2 = 5$$

چون $a, b \in \{\pm 1, \pm 2\}$ هستند پس

$$\sum (x_i - \bar{x})^2 = 0$$

و a و b هم علامت نیستند

$$\Rightarrow (\pm 2) + a + 0 + b + (\pm 2) + (\pm 1) = 0 \Rightarrow$$

پس $a, b = -2$

۱۰- گزینه «۳»

دنباله اولیه: ۹, ۱۰, ۱۱, ۱۲, ۱۳, ۱۴, ۱۵, ۱۶, ۱۷, ۱۸, ۱۹

اعداد ۱۰ و ۱۲ و ۱۴ و ۱۶ و ۱۸ در دنباله حفظ می‌شوند و اعداد ۹ و ۱۱ و ۱۳ و ۱۵ و ۱۷ و ۱۹ باید از دنباله حذف شوند و به جای هر دو عدد از آن‌ها باید اختلاف آن‌ها قرار گیرد تا بیشترین میانگین را داشته باشد که در این صورت $8 = 11 - 19 = 4 = 13 - 17$ و $6 = 9 - 15$ قرار گیرد.

دنباله جدید: ۴, ۶, ۸, ۱۰, ۱۲, ۱۴, ۱۶, ۱۸

$$\bar{x} = \frac{4 + 18}{2} = 11$$

$$\sigma^2 = \frac{\sum (\bar{x} - x_i)^2}{n} = \frac{49 + 25 + 9 + 1 + 1 + 9 + 25 + 49}{8} \Rightarrow \sigma^2 = 21$$

$$\sigma = \sqrt{21}$$

۱۱- گزینه «۳»

دسته اول: ۱, ۳, ۷, ۹

↓ ↓ ↓ ↓

دسته دوم: ۲, ۴, ۶, ۸

$$\bar{x}_1 = \frac{1 + 3 + 7 + 9}{4} = 5$$

$$\bar{x}_2 = \frac{2 + 4 + 6 + 8}{4} = 5$$

$$\sigma_1^2 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n} = \frac{(1-5)^2 + (3-5)^2 + (7-5)^2 + (9-5)^2}{4} =$$

$$\frac{16 + 4 + 4 + 16}{4} = 10 \Rightarrow \sigma_1 = \sqrt{10}$$

$$CV_1 = \frac{\sigma_1}{\bar{x}_1} \Rightarrow CV_1 = \frac{\sqrt{10}}{5}$$

$$\sigma_2^2 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n} \Rightarrow \sigma_2^2 = \frac{(2-5)^2 + (4-5)^2 + (6-5)^2 + (8-5)^2}{4}$$

$$= \frac{9 + 1 + 1 + 9}{4} = \frac{20}{4} \Rightarrow \sigma_2^2 = 5 \Rightarrow \sigma_2 = \sqrt{5}$$

$$CV_2 = \frac{\sigma_2}{\bar{x}_2} \Rightarrow CV_2 = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

$$\frac{CV_1}{CV_2} = \frac{\frac{\sqrt{10}}{5}}{\frac{\sqrt{5}}{5}} = \sqrt{2}$$

۷- گزینه «۳»

چون تعداد داده‌ها ۲۲ تا است پس میانگین داده یازدهم و دوازدهم میانه است

و همچنین داده ششم چارک اول است که $Q_1 = 13$

بنابراین حتماً $a = 30$ است. $Q_3 = 30$. $17 = Q_3 - Q_1 \Rightarrow Q_3 = 30$

$$\bar{x} = \frac{\sum f_i x_i}{n}$$

$$\Rightarrow \bar{x} = \frac{11(3) + 12(2) + 13(6) + 14(3) + 28(2) + 31(5) + a(1)}{22}$$

$$a = 30 \rightarrow \bar{x} = \frac{33 + 24 + 78 + 42 + 56 + 155 + 30}{22}$$

$$\Rightarrow \bar{x} = \frac{418}{22} \Rightarrow \bar{x} = 19$$

حال واریانس داده‌ها را محاسبه می‌کنیم.

$$\sigma^2 = \frac{\sum f_i (x_i - \bar{x})^2}{n} \Rightarrow \sigma^2$$

$$= \frac{3(11-19)^2 + 2(12-19)^2 + 6(13-19)^2 + 3(14-9)^2}{22}$$

$$+ \frac{2(28-19)^2 + 5(31-19)^2 + 1(30-19)^2}{22}$$

$$\Rightarrow \sigma^2 = \frac{192 + 98 + 216 + 75 + 162 + 720 + 121}{22} = \frac{1584}{22} \Rightarrow \sigma^2 = 72$$

۸- گزینه «۳»

$$n = \sum f_i = 3 + 2 + 6 + 3 + 1 + 1 + 5 + 1 = 22$$

چون مقدار داده‌ها ۲۲ است پس میانگین داده ۱۱ام و ۱۲ام میانه است که داده

۱۱ام ۱۳ است پس داده دوازدهم حتماً ۱۳ است تا میانه ۱۳ شود بنابراین a

حتماً باید ۱۳ باشند و جدول به صورت زیر می‌شود.

داده	۸	۱۲	۱۳	۱۴	۲۶	۲۷	۲۸
فراوانی	۳	۲	۷	۳	۱	۱	۵

$$\bar{x} = \frac{\sum f_i x_i}{n} = \frac{8(3) + 12(2) + 13(7) + 14(3) + 26(1) + 27(1) + 28(5)}{22}$$

$$= \frac{24 + 24 + 91 + 42 + 26 + 27 + 140}{22} \Rightarrow \bar{x} = \frac{374}{22} \Rightarrow \bar{x} = 17$$

حال واریانس داده‌ها را محاسبه می‌کنیم.

$$\sigma^2 = \frac{\sum f_i (x_i - \bar{x})^2}{n}$$

$$= \frac{3(8-17)^2 + 2(12-17)^2 + 7(13-17)^2 + 3(14-17)^2}{22}$$

$$+ \frac{(26-17)^2 + (27-17)^2 + 5(28-17)^2}{22}$$

$$\sigma^2 = \frac{243 + 50 + 112 + 27 + 81 + 100 + 605}{22}$$

$$\Rightarrow \sigma^2 = \frac{1218}{22} \Rightarrow \sigma^2 = 55.36$$

$$\sigma^2 = \frac{\sum x_i^2}{n} - (\bar{x})^2 \Rightarrow 4 = \frac{\sum x_i^2}{8} - (1.5)^2$$

$$\Rightarrow 229 = \frac{\sum yx_i^2}{8} \Rightarrow \sum x_i^2 = 1832$$

حال برای هر ده داده داریم:

$$\sigma^2 = \frac{\sum x_i^2}{n} - (\bar{x})^2 \Rightarrow \sigma^2 = \frac{1832 + (18)^2 + (22)^2}{10} - (1.6)^2$$

$$= \frac{1832 + 324 + 484}{10} - 2.56 = \frac{2640}{10} - 2.56 \Rightarrow \sigma^2 = 8 \Rightarrow \sigma = 2\sqrt{2}$$

۱۵- گزینه «۴»

داده‌ها را مرتب می‌کنیم و ۱۲ داده داریم که میانگین داده‌های ششم و هفتم میانه است و میانگین داده‌های سوم و چهارم چارک اول و میانگین نهم و دهم چارک سوم است.

۵, ۷, ۸, ۱۲, ۱۴, ۱۵, ۱۶, ۱۶, ۱۷, ۱۹, ۱۹, ۲۰

$$Q_1 = 10 \quad Q_2 = 15/5 \quad Q_3 = 18$$

داده داخل جعبه: ۱۲, ۱۴, ۱۵, ۱۶, ۱۶, ۱۷

$$\bar{x}_1 = \frac{\sum x_i}{n} = \frac{12 + 14 + 15 + 16 + 16 + 17}{6} = \frac{90}{6} \Rightarrow \bar{x}_1 = 15$$

داده‌های خارج جعبه: ۵, ۷, ۸, ۱۹, ۱۹, ۲۰

$$\bar{x}_2 = \frac{\sum x_i}{n} = \frac{5 + 7 + 8 + 19 + 19 + 20}{6} = \frac{78}{6} \Rightarrow \bar{x}_2 = 13$$

$$\bar{x}_1 - \bar{x}_2 = 15 - 13 = 2$$

۱۶- گزینه «۳»

چون ۱۵ داده داریم داده هشتم میانه است. ($Q_2 = 19$) و داده چهارم چارک

اول ($Q_1 = 11$) و داده دوازدهم چارک سوم است ($Q_3 = 26$)

داده‌های داخل و روی جعبه: ۱۱, ۱۳, ۱۴, ۱۷, ۱۹, ۲۰, ۲۲, ۲۴, ۲۶

حال ۹ داده داریم که داده ۱۵ام میانه است ($Q_2 = 19$) و میانگین داده دوم و

سوم چارک اول است ($Q_1 = \frac{13 + 14}{2} = 13.5$) و میانگین داده هفتم و هشتم

$$Q_3 = \frac{22 + 24}{2} = 23 \text{ چارک سوم است}$$

$$IQR = Q_3 - Q_1 = 23 - 13.5 = 9.5$$

۱۷- گزینه «۳»

با توجه به شرایط سؤال، یک عدد زوج و یک عدد فرد را به شکل زیر انتخاب می‌کنیم و داریم:

$$(1, 100), (2, 99), (3, 98), \dots, (49, 52), (50, 51)$$

قدمطلق تفاضل هر دسته، دنباله جدید را می‌سازد.

$$99, 97, 95, \dots, 3, 1$$

با توجه به رابطه $1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = n^2$

$$\text{می‌دانیم } 1 + 3 + 5 + \dots + (2 \times 50 - 1) = 50^2 \text{ است پس داریم:}$$

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n} \Rightarrow \bar{x} = \frac{1 + 3 + 5 + \dots + 99}{50} = \frac{50^2}{50} \Rightarrow \bar{x} = 50$$

۱۳- گزینه «۱»

میانگین این ۲۰ داده را محاسبه می‌کنیم:

$$\bar{x} = \frac{nx_1 + mx_2}{n - m} = \frac{10(5) + 10(6)}{10 + 10} = \frac{110}{20} \Rightarrow \bar{x} = 5.5$$

اگر ۱۰ داده اول x_1, x_2, \dots, x_{10} و ۱۰ داده دوم را با y_1, y_2, \dots, y_{10} نشان دهیم، داریم:

$$\sigma_x^2 = \frac{\sum x_i^2}{n} - (\bar{x})^2 \Rightarrow 1 = \frac{\sum x_i^2}{10} - 2.5$$

$$\Rightarrow 26 = \frac{\sum x_i^2}{10} \Rightarrow \sum x_i^2 = 260$$

$$\sigma_y^2 = \frac{\sum y_i^2}{n} - (\bar{y})^2 \Rightarrow 4 = \frac{\sum y_i^2}{10} - 3.6 \Rightarrow \sum y_i^2 = 400$$

حال ۲۰ داده به صورت y_1, y_2, \dots, y_{10} و x_1, x_2, \dots, x_{10} هستند که به صورت Z_1, Z_2, \dots, Z_{20} فرض می‌کنیم.

$$\sigma_z^2 = \frac{\sum Z_i^2}{n} - (\bar{z})^2 = \frac{\sum x_i^2 + \sum y_i^2}{20} - (5.5)^2$$

$$= \frac{260 + 400}{20} - 30.25 = 33 - 30.25 \Rightarrow \sigma_z^2 = 2.75$$

۱۴- گزینه «۲»

میانگین کل داده‌ها را محاسبه می‌کنیم.

$$\text{داده‌های اولیه} \begin{cases} n_1 = 8 \\ \bar{x}_1 = 15 \end{cases} \quad \begin{cases} n_2 = 2 \\ \bar{x}_2 = \frac{22 + 18}{2} = 20 \end{cases}$$

$$\bar{x} = \frac{n\bar{x}_1 + n_2\bar{x}_2}{n_1 + n_2} = \frac{8(15) + 2(20)}{8 + 2} = \frac{160}{10} \Rightarrow \bar{x} = 16$$

برای ۸ داده اولیه داریم:

۱۹- گزینه «۳»

اعدادی که فقط دو مقسوم‌علیه دارند (اعداد اول که فقط بر ۱ و خودشان بخش‌پذیر هستند) در گروه A_7 قرار می‌گیرند.

$$A_7 \in \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29\}$$

$$\Rightarrow f_7 = 10$$

$$\alpha_7 = \frac{f_7}{n} \times 360 \Rightarrow \alpha_7 = \frac{10}{30} \times 360 \Rightarrow \alpha = 120$$

۲۰- گزینه «۲»

فرض کنیم در A_1 دقیقاً x نفر قرار گیرند بنابراین در A_7 تا A_5 به ترتیب $x+d, x+2d, x+3d, x+4d, x+5d$ می‌گیرند که مجموع کل نفرات مدرسه را اگر n فرض کنیم داریم:

$$\begin{aligned} n &= \sum f = f_1 + f_2 + f_3 + f_4 + f_5 + f_6 \\ &= x + x + d + x + 2d + x + 3d + x + 4d + 3 = 5x + 10d + 3 \\ \Rightarrow n &= 5\left(\frac{x+2d}{d'}\right) + 3 = 5d' + 3 \end{aligned}$$

پس باقی‌مانده تقسیم عدد n بر عدد ۵ باید ۳ شود که تنها گزینه ۲ صحیح است.

۱۷- گزینه «۴»

ابتدا زاویه مرکزی دسته چهارم را در نمودار دایره‌ای داده‌های اولیه به دست می‌آوریم.

$$n = \sum f_i = 4 + 5 + 8 + 3 + 4 = 24$$

$$\alpha_4 = \frac{f_4}{n} \times 360 \Rightarrow \alpha_4 = \frac{3}{24} \times 360 \Rightarrow \alpha_4 = 45$$

چون این زاویه ۷۵ درجه تغییر کرده است حتماً زیاد شده است

$$\alpha'_4 = 45 + 75 = 120 \text{ که اگر } k \text{ داده به داده‌ها اضافه شود. } n' = 24 + k$$

می‌شود و داده‌های دسته چهارم $f'_4 = 3 + x$ می‌شود که $(0 \leq x \leq k)$

$$\begin{aligned} \alpha'_4 &= \frac{f'_4}{n'} \times 360 \Rightarrow 120 = \frac{3+x}{24+k} \times 360 \Rightarrow \frac{1}{3} = \frac{3+x}{24+k} \\ \Rightarrow 9 + 3x &= 24 + k \end{aligned}$$

$$\Rightarrow 3x = 15 + k \Rightarrow x = \frac{15+k}{3}$$

از آن‌جا که $x \in W$ است اگر $k = 6$ باشد $x = 7$ و $x > k$ است و نادرست است به ازای $k = 8$ و $k = 10$ مقدار x عضو عدد حسابی نیست و اگر $k = 12$ باشد $x = 9$ شود که x هم حسابی است و هم $x \leq k$ است.

۱۸- گزینه «۴»

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

فرض می‌کنیم میانگین n داده اول کمتر از ۱۰۰ باشد، داریم:

$$\bar{x} < 100 \Rightarrow \frac{1^2 + 2^2 + \dots + n^2}{n} < 100$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} < 100 &\Rightarrow \frac{n(n+1)(2n+1)}{6n} < 100 \\ \Rightarrow (n+1)(2n+1) < 600 &\Rightarrow 2n^2 + 3n - 599 < 0 \end{aligned}$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 9 - 4(2)(-599) = 9 + 4792$$

$$\Rightarrow \Delta = 4801 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = 69/28$$

$$n = \frac{-3 \pm 69/28}{4} \Rightarrow \begin{cases} n = 16/57 \\ n = -18/7 \end{cases}$$

n	$-\infty$	$-18/7$	$16/57$	$+\infty$
$2n^2 + 3n - 599$		+	-	+

بنابراین حداکثر عدد n ۱۶ است پس اعداد $3^2, 4^2, \dots, 18^2, 17^2$ باید حذف شود.

$$14 = 30 - 17 + 1 = 14 \text{ تعداد داده‌های حذف شده}$$