

متوسط

-۴

حکم: $\widehat{AB} = \widehat{CD}$ فرض: $AB = CD$

از O به A و B و C و D وصل می‌کنیم

$$\left. \begin{array}{l} OA = OC = R \\ OB = OD = R \\ \text{فرض } AB = CD \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{ض ض ض}} \triangle OAB \cong \triangle OCD$$

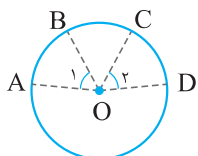
$$\xrightarrow{\text{ا.م}} \hat{O}_1 = \hat{O}_2 \xrightarrow{\text{زاویه مرکزی}} \widehat{AB} = \widehat{CD}$$

عکس قضیه:

حکم: $AB = CD$ فرض: $\widehat{AB} = \widehat{CD}$

$$\left. \begin{array}{l} \hat{O}_1 = \widehat{AB} \text{ مرکزی} \\ \hat{O}_2 = \widehat{CD} \text{ مرکزی} \\ \text{فرض: } \widehat{AB} = \widehat{CD} \end{array} \right\} \Rightarrow \hat{O}_1 = \hat{O}_2$$

$$\left. \begin{array}{l} OA = OC = R \\ \hat{O}_1 = \hat{O}_2 \text{ اثبات بالا} \\ OB = OD = R \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{ض ض ض}} \triangle OAB \cong \triangle OCD \xrightarrow{\text{ا.م}} AB = CD$$



متوسط

-۵

حکم: $\begin{cases} AH = HB \\ \widehat{AC} = \widehat{BC} \end{cases}$ فرض: $\hat{H} = 90^\circ$

از O به A و B وصل می‌کنیم.

$$\left. \begin{array}{l} OA = OB = R \text{ وتر} \\ OH = OH \text{ مشترک} \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{وتر یک ضلع}} \triangle OAH \cong \triangle OHB \xrightarrow{\text{ا.م}} \left\{ \begin{array}{l} \hat{O}_1 = \hat{O}_2 \\ AH = HB \end{array} \right.$$

$$\left. \begin{array}{l} \hat{O}_1 = \widehat{AC} \text{ مرکزی} \\ \hat{O}_2 = \widehat{BC} \text{ مرکزی} \\ \hat{O}_1 = \hat{O}_2 \end{array} \right\} \Rightarrow \widehat{AC} = \widehat{BC}$$

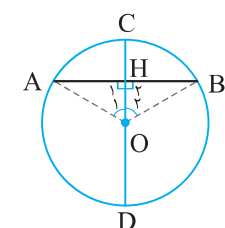
متوسط

-۶

حکم: $\begin{cases} \widehat{AC} = \widehat{BC} \\ H = 90^\circ \end{cases}$ فرض: $AH = HB$

O را به A و B وصل می‌کنیم.

$$\left. \begin{array}{l} OA = OB = R \\ OH = OH \text{ مشترک} \\ \text{فرض: } AH = HB \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{ض ض ض}} \triangle OAH \cong \triangle OHB \xrightarrow{\text{ا.م}} \left\{ \begin{array}{l} \hat{O}_1 = \hat{O}_2 \\ \hat{H}_1 = \hat{H}_2 = 90^\circ \end{array} \right.$$



$$\left. \begin{array}{l} \hat{O}_1 = \widehat{AC} \text{ مرکزی} \\ \hat{O}_2 = \widehat{BC} \text{ مرکزی} \\ \hat{O}_1 = \hat{O}_2 \end{array} \right\} \Rightarrow \widehat{AC} = \widehat{BC}$$



آسان

-۱

آ) قطر

ب) نزدیک‌تر

پ) نصف

ت) نصف

ث) 60°

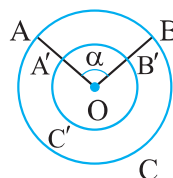
آسان

-۲

$$|\widehat{AB}| = \frac{\alpha \pi R}{180} \Rightarrow 3\pi = \frac{\alpha \pi \times 6}{180} \Rightarrow 3 = \frac{\alpha}{30} \Rightarrow \alpha = 90$$

$$|\widehat{A'B'}| = \frac{\alpha \pi R'}{180} \Rightarrow 2\pi = \frac{90 \pi R'}{180} \Rightarrow R' = 4$$

$$S' = \pi R'^2 = \pi (4)^2 = 16\pi$$



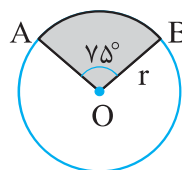
آسان

-۳

$$\text{محیط} = 2\pi r \Rightarrow 12\pi = 2\pi r \Rightarrow r = 6$$

$$S = \frac{\alpha \pi r^2}{360} = \frac{75 \pi \times 36}{360} = 7.5\pi$$

$$|\widehat{AB}| = \frac{\alpha \pi r}{180} = \frac{75 \pi \times 6}{180} = \frac{5\pi}{2}$$



دشوار

-۱۱

O را به A و C وصل می‌کنیم.

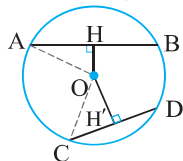
$$AB > CD \Rightarrow OH < OH'$$

$$OH \perp AB \Rightarrow AH = HB = \frac{AB}{2}$$

$$OH' \perp CD \Rightarrow CH' = H'D = \frac{CD}{2}$$

$$\left. \begin{array}{l} \Delta OAH : R^2 = AH^2 + OH^2 \\ \Delta OH'C : R^2 = CH'^2 + OH'^2 \end{array} \right\} \Rightarrow AH^2 + OH^2 = CH'^2 + OH'^2 \quad (1)$$

$$AB > CD \Rightarrow \frac{AB}{2} > \frac{CD}{2} \Rightarrow AH > CH' \Rightarrow AH^2 > CH'^2 \xrightarrow{(1)} OH^2 < OH'^2$$



$$\Rightarrow OH < OH' \Rightarrow OH < OH'$$

$$\Rightarrow OH^2 < OH'^2 \xrightarrow{(1)} AH^2 > CH'^2$$

$$\Rightarrow AH > CH' \Rightarrow 2AH > 2CH'$$

$$\Rightarrow AB > CD$$

دشوار

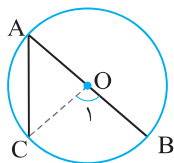
-۱۲

قضیه را در ۳ حالت اثبات می‌کنیم.

حالت اول: یک ضلع زاویه قطر دایره باشد:

O را به C وصل می‌کنیم. $OA = OC \xrightarrow{\text{متساوی الساقین}} \hat{A} = \hat{C}$

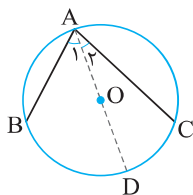
$$\left. \begin{array}{l} \Delta OAC : \hat{O}_1 = \hat{A} + \hat{C} \Rightarrow \hat{O}_1 = 2\hat{A} \\ \hat{O}_1 = \widehat{BC} \text{ مرکزی} \end{array} \right\} \Rightarrow 2\hat{A} = \widehat{BC} \Rightarrow \hat{A} = \frac{\widehat{BC}}{2}$$



حالت دوم: مرکز دایره بین دو ضلع زاویه A باشد.

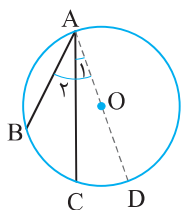
قطر گذرنده از A را رسم می‌کنیم تا دایره را در D قطع کند.

$$\left. \begin{array}{l} \hat{A}_1 = \frac{\widehat{BD}}{2} \text{ طبق حالت اول} \\ \hat{A}_2 = \frac{\widehat{DC}}{2} \text{ طبق حالت اول} \end{array} \right\} \xrightarrow{\oplus} \hat{A}_1 + \hat{A}_2 = \frac{\widehat{BD} + \widehat{DC}}{2} \Rightarrow \hat{A} = \frac{\widehat{BC}}{2}$$



حالت سوم: مرکز دایره خارج اضلاع زاویه باشد:

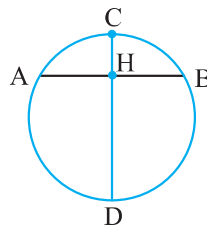
$$\left. \begin{array}{l} \hat{A}_2 = \frac{\widehat{BD}}{2} \text{ طبق حالت اول} \\ \hat{A}_1 = \frac{\widehat{DC}}{2} \text{ طبق حالت اول} \end{array} \right\} \xrightarrow{(-)} \hat{A}_2 - \hat{A}_1 = \frac{\widehat{BD} - \widehat{DC}}{2} \Rightarrow \hat{A} = \frac{\widehat{BC}}{2}$$



آسان

-۷

کافی است از نقطه C وسط کمان AB به نقطه H وسط وتر AB وصل کرده و امتداد دهیم تا دایره را در نقطه D قطع کند. پاره خط CD قطر دایره است که بر AB عمود است.

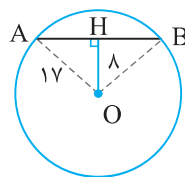


آسان

-۸

از O به A وصل می‌کنیم $OA = R = ۱۷$

چون از O به وتر AB عمود کرده‌ایم $AH = HB$



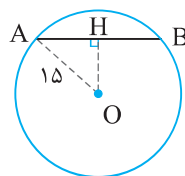
$$\Delta OAH : OA^2 = AH^2 + OH^2 \Rightarrow 289 = AH^2 + 64 \Rightarrow AH^2 = 225$$

$$\Rightarrow AH = 15 \Rightarrow AB = 2AH = 2(15) = 30$$

آسان

-۹

از مرکز دایره به وسط AB عمود کرده‌ایم. پس $AH = HB = \frac{AB}{2} = ۱۲$



$$\Delta OAH : OA^2 = AH^2 + OH^2 \Rightarrow 225 = 144 + OH^2$$

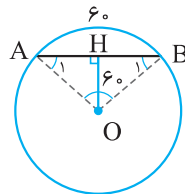
$$\Rightarrow OH^2 = 81 \Rightarrow OH = 9$$

متوسط

-۱۰

$$\left. \begin{array}{l} OA = OB \xrightarrow{\text{متساوی الساقین}} \hat{A}_1 = \hat{B}_1 = \hat{O} = 60^\circ \\ \xrightarrow{\text{متساوی الاضلاع}} AB = OA = ۱0 \end{array} \right\} \Rightarrow \hat{A}_1 = \hat{B}_1 = 60^\circ$$

از O به AB عمود می‌کنیم $AH = HB = ۵$



$$\Delta OAH : OA^2 = AH^2 + OH^2 \Rightarrow 100 = 25 + OH^2 \Rightarrow OH^2 = 75$$

$$\Rightarrow OH = 5\sqrt{3}$$

متوسط

-۱۶

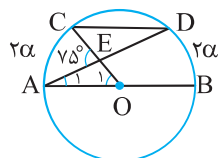
$$CD \parallel AB \Rightarrow \widehat{AC} = \widehat{BD} = 2\alpha$$

$$\text{مرکزی: } \hat{O}_1 = \widehat{AC} = 2\alpha \quad \text{محاطی: } \hat{A}_1 = \frac{\widehat{BD}}{2} = \alpha$$

$$\triangle AOE: \hat{E} = \hat{A}_1 + \hat{O}_1 \Rightarrow 75^\circ = 2\alpha + \alpha = 3\alpha \Rightarrow \alpha = 25^\circ$$

$$\widehat{AC} + \widehat{CD} + \widehat{DB} = 180^\circ \Rightarrow 2\alpha + \widehat{CD} + 2\alpha = 180^\circ$$

$$\Rightarrow \widehat{CD} = 180^\circ - 4\alpha = 180^\circ - 4(25^\circ) \Rightarrow \widehat{CD} = 80^\circ$$



متوسط

-۱۷

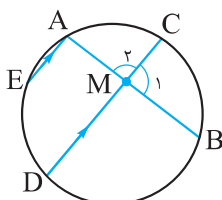
$$\text{حکم: } \begin{cases} \hat{M}_1 = \frac{\widehat{BC} + \widehat{AD}}{2} \\ \hat{M}_2 = \frac{\widehat{AC} + \widehat{BD}}{2} \end{cases}$$

از نقطه A موازی DC رسم می‌کنیم تا دایره را در نقطه E قطع کند.

$$AE \parallel DC \Rightarrow \widehat{AC} = \widehat{ED}$$

$$AE \parallel DC, \text{ مورب } AB \xrightarrow{\text{قضیه خطوط موازی}} \hat{M}_2 = \hat{A} \quad \left. \begin{aligned} \hat{A} = \frac{\widehat{EB}}{2} = \frac{\widehat{ED} + \widehat{DB}}{2} = \frac{\widehat{AC} + \widehat{BD}}{2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \hat{M}_2 = \frac{\widehat{AC} + \widehat{BD}}{2}$$

$$\hat{M}_1 = \frac{\widehat{BC} + \widehat{AD}}{2} \quad \text{به همین ترتیب}$$



متوسط

-۱۸

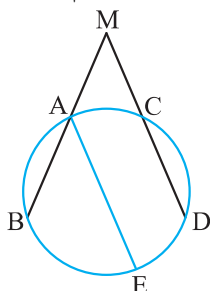
$$\text{حکم: } \hat{M} = \frac{\widehat{BD} - \widehat{AC}}{2}$$

از نقطه A موازی CD رسم می‌کنیم تا دایره را در نقطه E قطع کند.

$$ME \parallel MD, \text{ مورب } BM \xrightarrow{\text{خطوط موازی}} \hat{A} = \hat{M} \quad (1)$$

$$AE \parallel CD \Rightarrow \widehat{AC} = \widehat{ED} \quad (2)$$

$$\hat{A} = \frac{\widehat{BE}}{2} \xrightarrow{(1)} \hat{M} = \frac{\widehat{BD} - \widehat{DE}}{2} \xrightarrow{(2)} \hat{M} = \frac{\widehat{BD} - \widehat{AC}}{2}$$



آسان

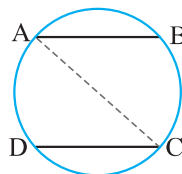
-۱۳

فرض: $AB \parallel DC$

حکم: $\widehat{AD} = \widehat{BC}$

از A به C وصل می‌کنیم:

$$\left. \begin{aligned} AB \parallel DC, \text{ مورب } AC &\xrightarrow{\text{خطوط موازی}} \hat{A} = \hat{C} \\ \hat{A} = \frac{\widehat{BC}}{2} &\text{ محاطی} \\ \hat{C} = \frac{\widehat{AD}}{2} &\text{ محاطی} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{\widehat{BC}}{2} = \frac{\widehat{AD}}{2} \Rightarrow \widehat{BC} = \widehat{AD}$$



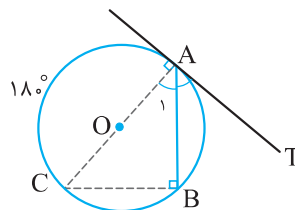
دشوار

-۱۴

$$\text{حکم: } \hat{A} = \frac{\widehat{AB}}{2}$$

قطر گذرنده از A را رسم می‌کنیم تا دایره را در C قطع کند، C را به B وصل

می‌کنیم چون B زاویه محاطی رو به قطر است پس $\hat{B} = 90^\circ$.



می‌دانیم شعاع وارد بر خط مماس در نقطه تماس به خط مماس عمود است.

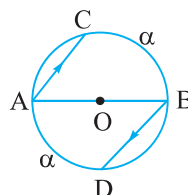
$$\left. \begin{aligned} \hat{A}_1 + \hat{A} = 90^\circ &\Rightarrow \hat{A} = 90^\circ - \hat{A}_1 \\ \triangle ABC: \hat{A}_1 + 90^\circ + \hat{C} = 180^\circ &\Rightarrow \hat{C} = 90^\circ - \hat{A}_1 \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} \hat{A} = \hat{C} \\ \hat{C} = \frac{\widehat{AB}}{2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \hat{A} = \frac{\widehat{AB}}{2}$$

آسان

-۱۵

$$AC \parallel BC \Rightarrow \widehat{BC} = \widehat{AD} = \alpha$$



$$\left. \begin{aligned} \widehat{AC} + \widehat{BC} &= 180^\circ \\ \widehat{BD} + \widehat{AD} &= 180^\circ \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\widehat{AC} + \widehat{BC} = \widehat{BD} + \widehat{AD} \Rightarrow$$

$$\widehat{AC} + \alpha = \widehat{BD} + \alpha \Rightarrow \widehat{AC} = \widehat{BD}$$

می‌دانیم وترهای نظیر دو کمان مساوی با هم برابرند. برابر $AC = BD$

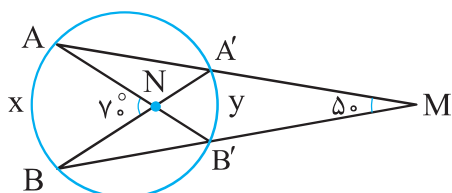
متوسط

-۲۲

$$\hat{M} = \frac{\widehat{AB} - \widehat{A'B'}}{2} \Rightarrow 50 = \frac{x-y}{2} \Rightarrow x-y=100$$

$$\hat{N} = \frac{\widehat{AB} + \widehat{A'B'}}{2} \Rightarrow 70 = \frac{x+y}{2} \Rightarrow x+y=140$$

$$\begin{cases} x-y=100 \\ x+y=140 \end{cases} \Rightarrow 2x=240 \Rightarrow x=120, y=20$$



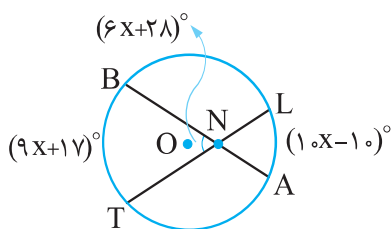
آسان

-۲۳

$$\hat{N} = \frac{\widehat{BT} + \widehat{AL}}{2} \Rightarrow 6x + 28 = \frac{9x + 17 + 10x - 10}{2}$$

$$\Rightarrow 12x + 56 = 19x + 7 \Rightarrow 7x = 49 \Rightarrow x = 7$$

$$\widehat{BNT} = 6x + 28 = 6(7) + 28 = 42 + 28 \Rightarrow \widehat{BNT} = 70^\circ$$



متوسط

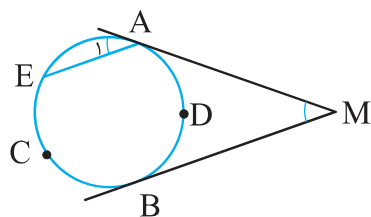
-۲۴

از نقطه A موازی MB رسم می‌کنیم تا دایره را در نقطه E قطع کند:

$$\left. \begin{array}{l} ME \parallel MB, \text{ مورب } MA \xrightarrow{\text{خطوط موازی}} \hat{M} = \hat{A}_1 \\ \hat{A}_1 \text{ ظلی} = \frac{\widehat{AE}}{2} \end{array} \right\} \Rightarrow \hat{M} = \frac{\widehat{AE}}{2}$$

$$AE \parallel MB \Rightarrow \widehat{ADB} = \widehat{ECB} \quad (1)$$

$$\hat{M} = \frac{\widehat{AE}}{2} = \frac{\widehat{ACB} - \widehat{ECB}}{2} \xrightarrow{(1)} \hat{M} = \frac{\widehat{ACB} - \widehat{ADB}}{2}$$



دشواری

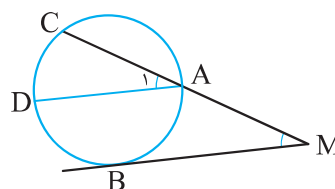
-۱۹

از A موازی MB رسم می‌کنیم تا دایره را در D قطع کند.

$$AD \parallel MB \Rightarrow \widehat{AB} = \widehat{DB} \quad (1)$$

$$AD \parallel MB, \text{ مورب } AC \xrightarrow{\text{خطوط موازی}} \hat{M} = \hat{A} \quad (2)$$

$$\hat{A} = \frac{\widehat{CD}}{2} = \xrightarrow{(2)} \hat{M} = \frac{\widehat{CB} - \widehat{DB}}{2} \xrightarrow{(1)} \hat{M} = \frac{\widehat{CB} - \widehat{AB}}{2}$$



متوسط

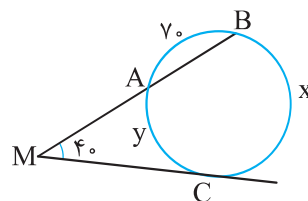
-۲۰

اگر $\widehat{BC} = x$ و $\widehat{AC} = y$ باشد:

$$\widehat{AB} + \widehat{BC} + \widehat{CA} = 360 \Rightarrow 70 + x + y = 360 \Rightarrow x + y = 290$$

$$\hat{M} = \frac{\widehat{BC} - \widehat{AC}}{2} \Rightarrow 40 = \frac{x-y}{2} \Rightarrow x-y=80$$

$$\begin{cases} x+y=290 \\ x-y=80 \end{cases} \Rightarrow 2x=370 \Rightarrow x=185 \Rightarrow y=105$$

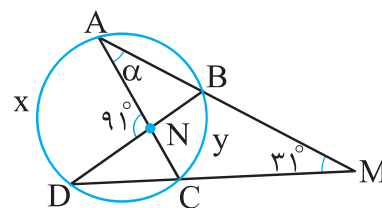


متوسط

-۲۱

$$\hat{M} = \frac{\widehat{AD} - \widehat{BC}}{2} \Rightarrow 31 = \frac{x-y}{2} \Rightarrow x-y=62$$

$$\hat{N} = \frac{\widehat{AD} + \widehat{BC}}{2} \Rightarrow 91 = \frac{x+y}{2} \Rightarrow x+y=182$$



$$\begin{cases} x-y=62 \\ x+y=182 \end{cases} \Rightarrow 2x=244 \Rightarrow x=122, y=60$$

$$\hat{\alpha} = \frac{y}{2} = \frac{60}{2} \Rightarrow \alpha = 30^\circ$$

دشوار

-۲۸

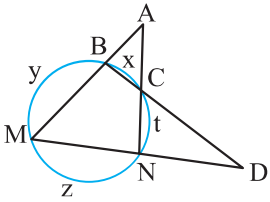
$$\hat{A} = \frac{z-x}{2} \quad (1)$$

$$\hat{D} = \frac{y-t}{2} \quad (2)$$

$$\hat{M} = \frac{\widehat{BN}}{2} = \frac{x+t}{2} \quad (3) \quad \text{محاطی}$$

از رابطه (۱) و (۲) و (۳) داریم:

$$\hat{A} + \hat{D} + 2\hat{M} = \frac{z-x+y-t+2x+2t}{2} = \frac{z+y+x+t}{2} = \frac{360}{2} = 180.$$



دشوار

-۲۹

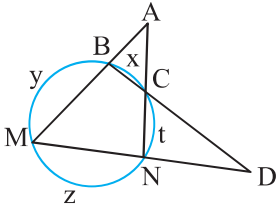
$$\hat{A} = \frac{z-x}{2} \Rightarrow 40 = \frac{z-x}{2} \Rightarrow z-x = 80 \Rightarrow z = 80 + x \quad (1)$$

$$\hat{D} = \frac{y-t}{2} \Rightarrow 30 = \frac{y-t}{2} \Rightarrow y-t = 60 \Rightarrow y = 60 + t \quad (2)$$

$$\text{می دانیم: } x + y + z + t = 360 \Rightarrow x + (60 + t) + (80 + x) + t = 360.$$

$$\Rightarrow 2x + 2t + 140 = 360 \Rightarrow 2x + 2t = 220 \Rightarrow x + t = 110.$$

$$\text{محاطی } \hat{M} = \frac{x+t}{2} = \frac{110}{2} \Rightarrow \hat{M} = 55$$



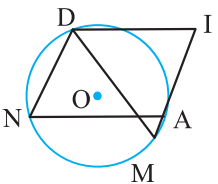
دشوار

-۳۰

$$\left. \begin{aligned} \hat{N} &= \frac{\widehat{AD}}{2} \\ \hat{M} &= \frac{\widehat{AD}}{2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \hat{M} = \hat{N} \Rightarrow \hat{M} = \hat{I}$$

$$\text{DIAN متوازی الاضلاع} \Rightarrow \hat{N} = \hat{I}$$

$$\Delta \text{ DMI: } \hat{M} = \hat{I} \xrightarrow{\text{متساوی الساقین}} DM = DI$$

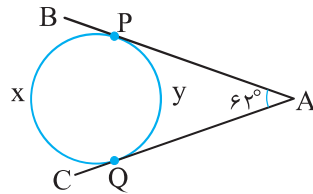


آسان

-۲۵

$$\hat{A} = \frac{x-y}{2} \Rightarrow 62 = \frac{x-y}{2} \Rightarrow x-y = 124$$

$$\begin{cases} x-y=124 \\ x+y=360 \end{cases} \Rightarrow 2x=484 \Rightarrow x=242, y=118$$



دشوار

-۲۶

$$\hat{B} = \frac{\widehat{QMP} - \widehat{QP}}{2} \Rightarrow 80 = \frac{y+z+t-x}{2} \Rightarrow y+z+t-x = 160 \quad (1)$$

$$\hat{C} = \frac{\widehat{MQN} - \widehat{MN}}{2} \Rightarrow 70 = \frac{y+x+t-z}{2} \Rightarrow y+x+t-z = 140 \quad (2)$$

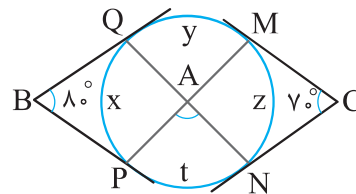
رابطه (۱) را با رابطه (۲) جمع می کنیم.

$$2y + 2t = 300 \Rightarrow y + t = 150.$$

دو وتر MP و QN همدیگر را داخل دایره در نقطه A قطع کرده اند پس

داریم:

$$\hat{A} = \frac{y+t}{2} = \frac{150}{2} \Rightarrow \hat{A} = 75^\circ$$



دشوار

-۲۷

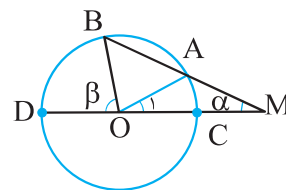
$$OA = AM = R \xrightarrow{\text{متساوی الساقین}} \hat{O}_1 = \hat{A} = \alpha$$

$$\text{مرکزی } \hat{BOD} = \widehat{BD} \Rightarrow \widehat{BD} = \beta$$

$$\text{مرکزی } \hat{O}_1 = \widehat{AC} \Rightarrow \widehat{AC} = \alpha$$

دو وتر AB و DC همدیگر را در نقطه M خارج دایره قطع کرده اند.

$$\hat{M} = \frac{\widehat{BD} - \widehat{AC}}{1} \Rightarrow \alpha = \frac{\beta - \alpha}{2} \Rightarrow 2\alpha = \beta - \alpha \Rightarrow \beta = 3\alpha$$



دشوار

۴- گزینه «۲»

اگر اندازه زاویه مرکزی کمانی α رادیان باشد طول آن کمان αR است.

$$|\widehat{AB}| = |\widehat{A'B'}| \Rightarrow \alpha R = \alpha' R' \Rightarrow \frac{\pi}{6} \times R = \frac{\pi}{4} \times R'$$

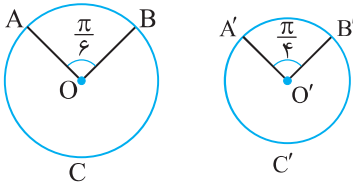
$$\Rightarrow R = \frac{3}{4} R'$$

$$S - S' = 20\pi \Rightarrow \pi R^2 - \pi R'^2 = 20\pi \xrightarrow{\div \pi} \frac{9}{4} R'^2 - R'^2 = 20$$

$$\Rightarrow \frac{5}{4} R'^2 = 20 \Rightarrow R'^2 = 16 \Rightarrow R' = 4$$

$$R = \frac{3}{4} R' = \frac{3}{4} \times 4 \Rightarrow R = 3$$

$$R + R' = 7$$



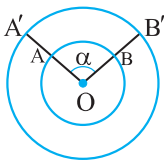
آسان

۵- گزینه «۲»

روش اول:

$$|\widehat{AB}| = \alpha R \Rightarrow 5 = \alpha \times 4 \Rightarrow \alpha = \frac{5}{4} \text{ Rad}$$

$$|\widehat{A'B'}| = \alpha R' \Rightarrow |\widehat{A'B'}| = \frac{5}{4} \times 12 \Rightarrow |\widehat{A'B'}| = 15$$



روش دوم:

$$\frac{|\widehat{A'B'}|}{|\widehat{AB}|} = \frac{\alpha R'}{\alpha R} \Rightarrow \frac{|\widehat{A'B'}|}{5} = \frac{12}{4} \Rightarrow |\widehat{A'B'}| = 15$$

دشوار

۶- گزینه «۳»

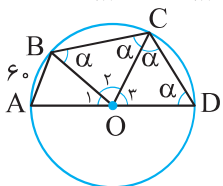
در این دایره AD قطر است که $R = 4 \Rightarrow 2R = 8$ و چون $AB = R$ است، پس $|\widehat{AB}| = 60^\circ$ است.

O را به B وصل می‌کنیم ($\widehat{AB} = 60^\circ$ ، مرکز $\widehat{O_1}$ و چون OC نیمساز زاویه C است پس $\widehat{DCO} = \widehat{BCO} = \alpha$).

$$\left. \begin{aligned} \triangle AOC : OC = OD = R &\xrightarrow{\text{متساوی الساقین}} \widehat{OCD} = \widehat{D} = \alpha \\ \triangle OCB : OC = OB = R &\xrightarrow{\text{متساوی الساقین}} \widehat{OCB} = \widehat{B} = \alpha \end{aligned} \right\}$$

$$\Rightarrow \widehat{O_1} = \widehat{O_2} = 60^\circ$$

$$|\widehat{CD}| = \frac{\alpha \pi R}{180} = \frac{60 \times \pi \times 4}{180} = \frac{4}{3} \pi$$



سوالات تستی

پاسخنامه

بخش ۱

آسان

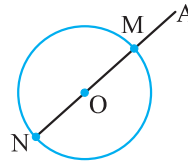
۱- گزینه «۳»

دو حالت وجود دارد:

حالت اول: نقطه A خارج دایره باشد.

$$\left. \begin{aligned} AM = AO - R = 3 \\ AN = AO + R = 7 \end{aligned} \right\} \Rightarrow AO = 5, R = 2$$

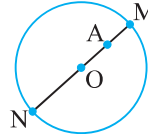
$$S = \pi R^2 = 4\pi$$



حالت دوم: نقطه A داخل دایره باشد.

$$\left. \begin{aligned} AM = R - OA = 3 \\ AN = R + OA = 7 \end{aligned} \right\}, R = 5, AO = 2$$

$$S = \pi R^2 = 25\pi$$

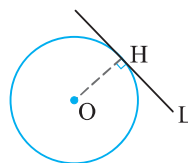


آسان

۲- گزینه «۲»

اگر خط L بر دایره مماس باشد، در این صورت فاصله خط L تا مرکز برابر شعاع دایره است.

$$OH = R \Rightarrow 3m - 4 = 11 \Rightarrow 3m = 15 \Rightarrow m = 5$$



متوسط

۳- گزینه «۴»

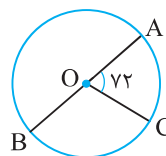
اگر اندازه زاویه کمانی α درجه باشد، طول آن کمان $\frac{\alpha \pi R}{180}$ است.

$$|\widehat{AC}| = \frac{72 \times \pi \times 12}{180} \Rightarrow |\widehat{AC}| = 4/8\pi$$

$$\widehat{AC} + \widehat{BC} = 180 \Rightarrow 72 + \widehat{BC} = 180 \Rightarrow \widehat{BC} = 108$$

$$|\widehat{BC}| = \frac{108 \times \pi \times 12}{180} = 7/2\pi$$

$$|\widehat{AC}| - |\widehat{BC}| = 7/2\pi - 4/8\pi = 2/4\pi$$



دشوار

۱۱- گزینه ۴»

$$AB = R \Rightarrow \widehat{AB} = 60^\circ$$

$$\widehat{D} = \frac{\widehat{AC}}{2} \Rightarrow \alpha = \frac{\widehat{AC}}{2} \Rightarrow \widehat{AC} = 2\alpha$$

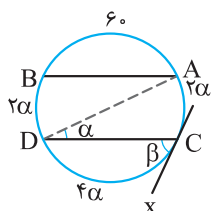
$$AB \parallel BC \Rightarrow \widehat{AC} = \widehat{BD} = 2\alpha$$

$$\widehat{CD} = \frac{\widehat{DC}}{2} \Rightarrow \beta = \frac{\widehat{DC}}{2} \Rightarrow \widehat{DC} = 2\beta \xrightarrow{\beta=2\alpha} \widehat{DC} = 4\alpha$$

$$\widehat{AB} + \widehat{BD} + \widehat{DC} + \widehat{CA} = 360^\circ \Rightarrow 60 + 2\alpha + 4\alpha + 2\alpha = 360$$

$$\Rightarrow 8\alpha = 300 \Rightarrow \alpha = 37.5^\circ$$

$$\widehat{BD} = 2\alpha = 2(37.5) = 75^\circ$$



دشوار

۱۲- گزینه ۳»

$$\left. \begin{array}{l} AB \parallel DE \Rightarrow \widehat{AD} = \widehat{BE} \\ BC \parallel EF \Rightarrow \widehat{BE} = \widehat{CF} \end{array} \right\} \Rightarrow \widehat{AD} = \widehat{BE} = \widehat{CF} = x$$

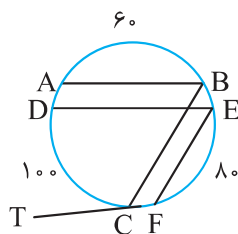
$$\widehat{AB} + \widehat{BE} + \widehat{EF} + \widehat{FC} + \widehat{CD} + \widehat{DA} = 360$$

$$\Rightarrow 60 + x + 80 + x + 100 + x = 360 \Rightarrow 3x + 240 = 360$$

$$\Rightarrow 3x = 120 \Rightarrow x = 40$$

$$\widehat{BCT} = \frac{\widehat{CDB}}{2} = \frac{\widehat{CD} + \widehat{DA} + \widehat{AB}}{2} = \frac{100 + 40 + 60}{2} = \frac{200}{2}$$

$$\Rightarrow \widehat{BCT} = 100$$



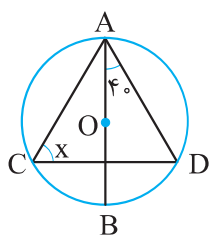
آسان

۱۳- گزینه ۲»

$$\widehat{BAD} = \frac{\widehat{BD}}{2} \Rightarrow 40 = \frac{\widehat{BD}}{2} \Rightarrow \widehat{BD} = 80$$

$$AB \text{ قطر} \Rightarrow \widehat{BD} + \widehat{AD} = 180 \Rightarrow 80 + \widehat{AD} = 180 \Rightarrow \widehat{AD} = 100$$

$$\widehat{C} = \frac{\widehat{AD}}{2} \Rightarrow x = \frac{100}{2} \Rightarrow x = 50$$



آسان

۷- گزینه ۴»

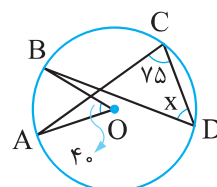
$$\widehat{O} \text{ مرکزی} \Rightarrow \widehat{AB} = 40^\circ$$

$$\widehat{C} = \frac{\widehat{AD}}{2} \Rightarrow 75 = \frac{\widehat{AD}}{2} \Rightarrow \widehat{AD} = 150$$

$$\widehat{D} = \frac{\widehat{BC}}{2} \Rightarrow x = \frac{\widehat{BC}}{2} \Rightarrow \widehat{BC} = 2x$$

$$\widehat{AB} + \widehat{BC} + \widehat{CD} + \widehat{DA} = 360 \Rightarrow 40 + 2x + 68 + 150 = 360$$

$$\Rightarrow 2x = 102 \Rightarrow x = 51$$

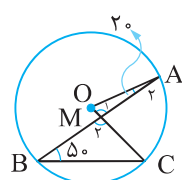


متوسط

۸- گزینه ۴»

$$\widehat{B} = \frac{\widehat{AC}}{2} \Rightarrow 50 = \frac{\widehat{AC}}{2} \Rightarrow \widehat{AC} = 100$$

$$\widehat{O} \text{ مرکزی} \Rightarrow \widehat{AC} = 100$$



$$\widehat{A} + \widehat{O} + \widehat{M}_1 = 180 \Rightarrow 20 + 100 + \widehat{M}_1 = 180$$

$$\Rightarrow \widehat{M}_1 = 60 \xrightarrow{\text{مقابل به راس}} \widehat{M}_2 = 60$$

$$\widehat{M}_2 + \widehat{B} + \widehat{C} = 180 \Rightarrow 60 + 50 + \widehat{C} = 180$$

$$\Rightarrow \widehat{C} = 70$$

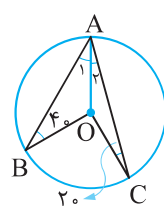
دشوار

۹- گزینه ۱»

A را به O وصل می کنیم.

$$\left. \begin{array}{l} \triangle OAB : OA = OB \xrightarrow{\text{متساوی الساقین}} \widehat{A}_1 = \widehat{B} = 40^\circ \\ \triangle OAC : OA = OC \xrightarrow{\text{متساوی الساقین}} \widehat{A}_2 = \widehat{C} = 20^\circ \end{array} \right\}$$

$$\Rightarrow \widehat{A} = \widehat{A}_1 + \widehat{A}_2 = 60^\circ$$



$$\widehat{A} = \frac{\widehat{BC}}{2} \Rightarrow 60 = \frac{\widehat{BC}}{2} \Rightarrow \widehat{BC} = 120$$

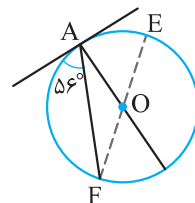
$$|\widehat{BC}| = \frac{\alpha \pi R}{180} = \frac{120 \cdot \pi \times 12}{180} \Rightarrow |\widehat{BC}| = 8\pi$$

آسان

۱۰- گزینه ۱»

$$\widehat{A} = \frac{\widehat{AF}}{2} \Rightarrow 56 = \frac{\widehat{AF}}{2} \Rightarrow \widehat{AF} = 112$$

$$EF \text{ قطر} \Rightarrow \widehat{AF} + \widehat{AE} = 180 \Rightarrow 112 + \widehat{AE} = 180 \Rightarrow \widehat{AE} = 68$$



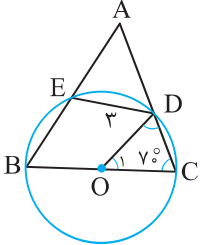
متوسط

۱۷- گزینه «۳»

چون $DE = R = ۳$ است پس $\widehat{DE} = ۶۰^\circ$.
 O را به D وصل می کنیم.

$$\triangle ODC : OD = OC = R \xrightarrow{\text{مساوی الساقین}} \hat{C} = \hat{D} = ۷۰^\circ$$

$$\hat{O}_1 + \hat{C} + \hat{D} = ۱۸۰^\circ \Rightarrow \hat{O}_1 + ۷۰^\circ + ۷۰^\circ = ۱۸۰^\circ \Rightarrow \hat{O}_1 = ۴۰^\circ$$



$$\xrightarrow{\text{مرکزی } \hat{O}_1} \widehat{DC} = ۴۰^\circ$$

$$\widehat{EDC} = \widehat{ED} + \widehat{DC} = ۶۰^\circ + ۴۰^\circ = ۱۰۰^\circ$$

دشوار

۱۸- گزینه «۴»

$$AB \parallel EF \Rightarrow \widehat{AE} = \widehat{BF} = ۱۵^\circ$$

$$\widehat{AB} + \widehat{BF} + \widehat{FD} + \widehat{DC} + \widehat{EC} + \widehat{AE} = ۳۶۰^\circ$$

$$\Rightarrow x + ۱۵ + ۱۰۰ + y + ۸۰ + ۱۵ = ۳۶۰^\circ \Rightarrow x + y + ۲۱۰ = ۳۶۰^\circ$$

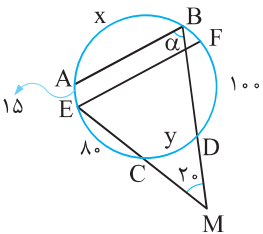
$$\Rightarrow x + y = ۱۵۰^\circ$$

$$\hat{M} = \frac{\widehat{BE} - \widehat{DC}}{۲} \Rightarrow ۲۰ = \frac{x + ۱۵ - y}{۲} \Rightarrow x - y + ۱۵ = ۴۰ \Rightarrow x - y = ۲۵$$

$$\begin{cases} x + y = ۱۵۰ \\ x - y = ۲۵ \end{cases} \Rightarrow x = ۸۷/۵, y = ۶۲/۵$$

$$\hat{ABD} = \frac{\widehat{DC} + \widehat{CE} + \widehat{EA}}{۲} \Rightarrow \alpha = \frac{۶۲/۵ + ۸۰ + ۱۵}{۲}$$

$$\Rightarrow \alpha = ۷۸/۷۵^\circ$$



متوسط

۱۹- گزینه «۲»

$$\hat{B} = \frac{\widehat{FD}}{۲} \Rightarrow ۳۵ = \frac{\widehat{FD}}{۲} \Rightarrow \widehat{FD} = ۷۰^\circ$$

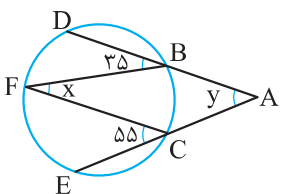
$$\hat{C} = \frac{\widehat{FE}}{۲} \Rightarrow ۵۵ = \frac{\widehat{FE}}{۲} \Rightarrow \widehat{FE} = ۱۱۰^\circ$$

$$\widehat{DE} = \widehat{DF} + \widehat{FE} = ۷۰ + ۱۱۰ = ۱۸۰^\circ$$

$$\hat{F} = \frac{\widehat{BC}}{۲} \Rightarrow x = \frac{\widehat{BC}}{۲} \Rightarrow \widehat{BC} = ۲x$$

دو وتر BD و EC همدیگر را در نقطه A خارج دایره قطع کرده اند.

$$\hat{A} = \frac{\widehat{DE} - \widehat{BC}}{۲} \Rightarrow y = \frac{۱۸۰ - ۲x}{۲} \Rightarrow y = ۹۰ - x \Rightarrow y + x = ۹۰$$



متوسط

۱۴- گزینه «۲»

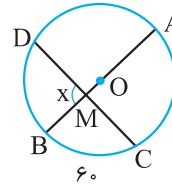
$$\text{قطر } AB \Rightarrow \widehat{BC} + \widehat{AC} = ۱۸۰^\circ \Rightarrow ۶۰ + \widehat{AC} = ۱۸۰^\circ \Rightarrow \widehat{AC} = ۱۲۰^\circ$$

$$\widehat{AC} = \frac{۳}{۲} \widehat{AD} \Rightarrow ۱۲۰ = \frac{۳}{۲} \widehat{AD} \Rightarrow \widehat{AD} = ۸۰^\circ$$

دو وتر AB و CD همدیگر را داخل دایره در نقطه M قطع کرده اند، بنابراین داریم:

$$\hat{AMD} = \frac{\widehat{AD} + \widehat{BC}}{۲} = \frac{۸۰ + ۶۰}{۲} \Rightarrow \hat{AMD} = ۷۰^\circ$$

$$\Rightarrow x = ۱۸۰ - ۷۰ \Rightarrow x = ۱۱۰^\circ$$



آسان

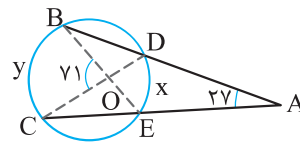
۱۵- گزینه «۱»

روش اول: اگر فرض کنیم $\widehat{BC} = y$ و $\widehat{DE} = x$ است:

$$\hat{O} = \frac{\widehat{BC} + \widehat{DE}}{۲} \Rightarrow ۷۱ = \frac{y + x}{۲} \Rightarrow y + x = ۱۴۲$$

$$\hat{A} = \frac{\widehat{BC} - \widehat{DE}}{۲} \Rightarrow ۲۷ = \frac{y - x}{۲} \Rightarrow y - x = ۵۴$$

$$\begin{cases} y + x = ۱۴۲ \\ y - x = ۵۴ \end{cases} \Rightarrow y = ۹۸, x = ۴۴$$



روش دوم: در این مدل سوالات همواره $\widehat{DE} = \hat{O} - \hat{A}$ و $\widehat{BC} = \hat{O} + \hat{A}$ است، پس داریم:

$$\widehat{BC} = ۷۱ + ۲۷ = ۹۸$$

متوسط

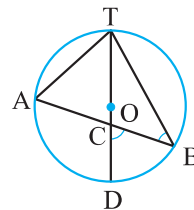
۱۶- گزینه «۱»

$$\hat{B} = \frac{\widehat{AT}}{۲} \Rightarrow ۳۵ = \frac{\widehat{AT}}{۲} \Rightarrow \widehat{AT} = ۷۰^\circ$$

$$\hat{A} = \frac{\widehat{TB}}{۲} \Rightarrow ۶۵ = \frac{\widehat{TB}}{۲} \Rightarrow \widehat{TB} = ۱۳۰^\circ$$

$$\text{قطر } TD \Rightarrow \widehat{TB} + \widehat{BD} = ۱۸۰^\circ \Rightarrow ۱۳۰ + \widehat{BD} = ۱۸۰^\circ \Rightarrow \widehat{BD} = ۵۰^\circ$$

$$\hat{C} = \frac{\widehat{AT} + \widehat{BD}}{۲} \Rightarrow \hat{C} = \frac{۷۰ + ۵۰}{۲} \Rightarrow \hat{C} = ۶۰^\circ$$

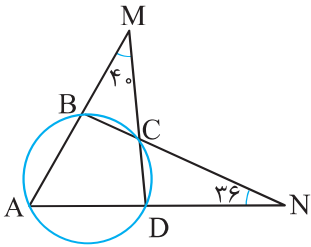


متوسط

۲۳- گزینه «۳»

در این شکل رابطه $\hat{A} + \hat{M} + \hat{N} = 180$ برقرار است (اثبات تمرین ۲۸)

$$2\hat{A} + \hat{M} + \hat{N} = 180 \Rightarrow 2\hat{A} + 40 + 36 = 180 \Rightarrow 2\hat{A} = 104 \Rightarrow \hat{A} = 52^\circ$$

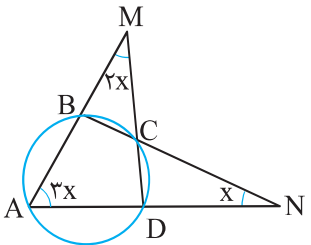


متوسط

۲۴- گزینه «۴»

با توجه به تمرین ۲۸، ثابت کردیم $\hat{A} + \hat{M} + \hat{N} = 180$ است پس داریم:

$$2\hat{A} + \hat{M} + \hat{N} = 180 \Rightarrow 6x + 2x + x = 180 \Rightarrow 9x = 180 \Rightarrow x = 20$$



دشوار

۲۵- گزینه «۳»

$$\hat{A} = \frac{\widehat{CDE} - \widehat{EC}}{2} \Rightarrow \hat{A} = \frac{y + z + t - x}{2} \Rightarrow y + z + t - x = 16$$

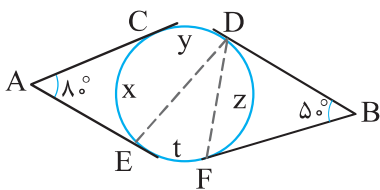
$$\begin{cases} y + z + t - x = 16 \\ y + z + t + x = 36 \end{cases} \Rightarrow x = 10$$

$$\hat{B} = \frac{\widehat{DCF} - \widehat{DF}}{2} \Rightarrow \hat{B} = \frac{y + x + t - z}{2} \Rightarrow \begin{cases} y + x + t - z = 10 \\ y + x + t + z = 36 \end{cases} \Rightarrow z = 13$$

$$CD = R \Rightarrow \widehat{CD} = 60^\circ, y = 60^\circ$$

$$x + y + z + t = 36 \Rightarrow 10 + 60 + 13 + t = 36 \Rightarrow t = 7$$

$$\hat{D} = \frac{t}{2} = \frac{7}{2} = 3.5^\circ$$



متوسط

۲۰- گزینه «۲»

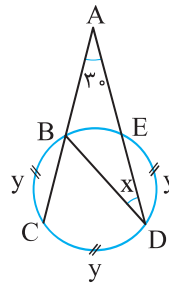
$$\widehat{BC} = \widehat{CD} = \widehat{DE} = y$$

$$\hat{D} = \frac{\widehat{BE}}{2} \Rightarrow x = \frac{\widehat{BE}}{2} \Rightarrow \widehat{BE} = 2x$$

$$\widehat{BE} + \widehat{ED} + \widehat{CD} + \widehat{CB} = 360 \Rightarrow y + y + y + 2x = 360 \Rightarrow 3y + 2x = 360$$

$$\hat{A} = \frac{\widehat{CD} - \widehat{BE}}{2} \Rightarrow 30 = \frac{y - 2x}{2} \Rightarrow y - 2x = 60$$

$$\begin{cases} 3y + 2x = 360 \\ y - 2x = 60 \end{cases} \Rightarrow y = 105, x = 22.5$$



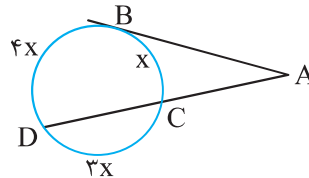
آسان

۲۱- گزینه «۱»

$$\widehat{BD} + \widehat{DC} + \widehat{CB} = 360 \Rightarrow 4x + 3x + x = 360$$

$$\Rightarrow 8x = 360 \Rightarrow x = 45$$

$$\hat{A} = \frac{\widehat{BD} - \widehat{BC}}{2} = \frac{4x - x}{2} = \frac{3x}{2} = \frac{3}{2}(45) \Rightarrow \hat{A} = 67.5$$

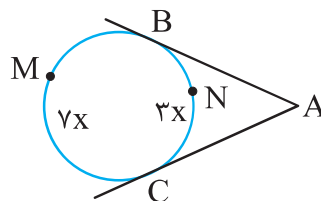


آسان

۲۲- گزینه «۲»

$$\widehat{BMC} + \widehat{CNB} = 360 \Rightarrow 7x + 3x = 360 \Rightarrow 10x = 360 \Rightarrow x = 36$$

$$\hat{A} = \frac{\widehat{BMC} - \widehat{BNC}}{2} = \frac{7x - 3x}{2} = 2x = 2(36) \Rightarrow \hat{A} = 72^\circ$$



دشوار

۲۷- گزینه ۱

روش اول: از O به B وصل می‌کنیم

$$\triangle OBA : OB = BA \xrightarrow{\text{متساوی الساقین}} \hat{A} = \hat{O}_1 = \alpha \xrightarrow{\text{مرکزی}} \widehat{BE} = \hat{O}_1 = \alpha$$

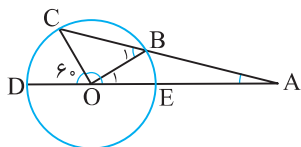
$$\text{مرکزی } \widehat{COD} = \widehat{CD} = 60^\circ$$

دو وتر CB و DE همدیگر را خارج دایره در نقطه A قطع کرده‌اند، پس داریم:

$$\hat{A} = \frac{\widehat{CD} - \widehat{BE}}{2} \Rightarrow \alpha = \frac{60^\circ - \alpha}{2} \Rightarrow 2\alpha = 60^\circ - \alpha \Rightarrow 3\alpha = 60^\circ \Rightarrow \alpha = 20^\circ$$

$$\triangle OBA : \hat{B}_1 = \hat{O}_1 + \hat{A} = \alpha + \alpha \Rightarrow \hat{B}_1 = 2\alpha = 40^\circ$$

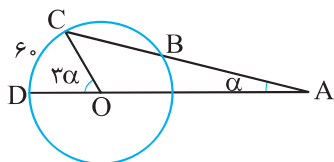
$$\triangle OBC : OB = OC = R \xrightarrow{\text{متساوی الساقین}} \hat{C} = \hat{B}_1 = 40^\circ$$



روش دوم: در شکل مقابل هرگاه $AB = R$ باشد $\hat{O} = 3\hat{A}$

$$3\alpha = 60^\circ \Rightarrow \alpha = 20^\circ$$

$$\triangle OCA : 3\alpha = \hat{C} + \alpha \Rightarrow \hat{C} = 2\alpha = 2(20^\circ) = 40^\circ$$



متوسط

۲۸- گزینه ۲

روش اول:

$$CD \parallel AB \Rightarrow \widehat{AC} = \widehat{BD} = 2\alpha$$

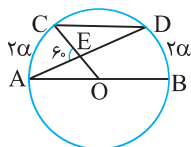
$$\text{محاطی } \hat{A} = \frac{\widehat{BD}}{2} \Rightarrow \hat{A} = \frac{2\alpha}{2} \Rightarrow \hat{A} = \alpha$$

$$\text{مرکزی } \hat{O} = \widehat{AC} \Rightarrow \hat{O} = 2\alpha$$

$$\triangle AOE : \text{خارجی } \hat{CEA} = \hat{A} + \hat{O} \Rightarrow 60^\circ = \alpha + 2\alpha \Rightarrow 3\alpha = 60^\circ \Rightarrow \alpha = 20^\circ$$

$$\widehat{AC} + \widehat{CD} + \widehat{DB} = 180^\circ \Rightarrow 2\alpha + \widehat{CD} + 2\alpha = 180^\circ$$

$$\Rightarrow \widehat{CD} = 180^\circ - 4\alpha = 180^\circ - 4(20^\circ) \Rightarrow \widehat{CD} = 100^\circ$$



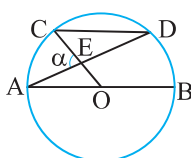
روش دوم:

نکته: اگر $CD \parallel AB$ باشد و قطر دایره باشد، داریم:

$$\widehat{CD} = 180^\circ - \frac{4}{3}\alpha$$

با توجه به نکته فوق و این که $\alpha = 60^\circ$ داریم:

$$\widehat{CD} = 180^\circ - \frac{4}{3} \times 60^\circ = 180^\circ - 80^\circ = 100^\circ$$



متوسط

۲۶- گزینه ۳

روش اول:

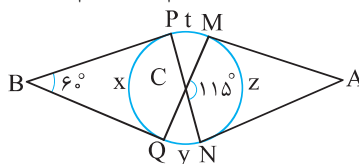
$$\hat{B} = \frac{\widehat{PMQ} - \widehat{PQ}}{2} \Rightarrow 60^\circ = \frac{t + z + y - x}{2}$$

$$\Rightarrow t + z + y - x = 120^\circ \begin{cases} t + z + y - x = 120^\circ \\ t + z + y + x = 360^\circ \end{cases} \Rightarrow x = 120^\circ$$

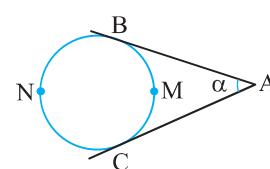
$$\hat{C} = \frac{x + z}{2} \Rightarrow 115^\circ = \frac{120^\circ + z}{2} \Rightarrow 230^\circ = 120^\circ + z \Rightarrow z = 110^\circ$$

$$\hat{A} = \frac{\widehat{MPN} - \widehat{MN}}{2} = \frac{t + x + y - z}{2} = \frac{360^\circ}{2} = \frac{t + x + y + z - 2z}{2}$$

$$= \frac{360^\circ - 220^\circ}{2} = \frac{140^\circ}{2} \Rightarrow \hat{A} = 70^\circ$$



روش دوم:



نکته: اگر از نقطه A دو مماس بر دایره‌ای رسم شود داریم:

$$\widehat{BMC} = 180^\circ - \alpha$$

$$\widehat{BNC} = 180^\circ + \alpha$$

با توجه به نکته فوق داریم:

$$\hat{x} = 180^\circ - \hat{B} = 180^\circ - 60^\circ \Rightarrow x = 120^\circ$$

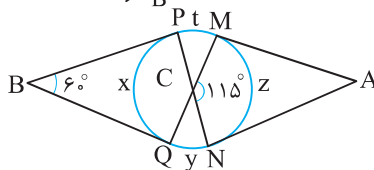
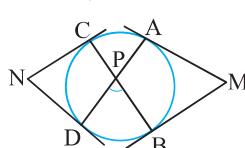
$$\hat{C} = \frac{x + z}{2} \Rightarrow 115^\circ = \frac{120^\circ + z}{2} \Rightarrow 230^\circ = 120^\circ + z \Rightarrow z = 110^\circ$$

$$\hat{z} = 180^\circ - \hat{A} \Rightarrow 110^\circ = 180^\circ - \hat{A} \Rightarrow \hat{A} = 70^\circ$$

روش سوم:

نکته: در شکل مقابل داریم:

$$\hat{P} = \frac{\hat{M} + \hat{N}}{2}$$



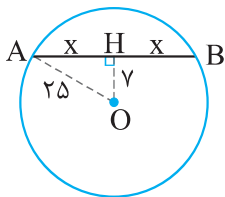
$$115 + x = 180 \Rightarrow x = 65$$

$$x = \frac{\hat{A} + \hat{B}}{2} \Rightarrow 65 = \frac{\hat{A} + 60^\circ}{2} \Rightarrow 130^\circ = \hat{A} + 60^\circ \Rightarrow \hat{A} = 70^\circ$$

آسان

۳۳- گزینه «۴»

اگر از مرکز یک دایره به یک وتر عمود کنیم، آن وتر را نصف می‌کند یعنی $AH = HB = x$.



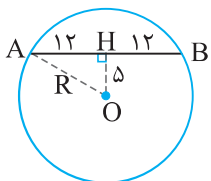
$$\begin{aligned} \Delta OAH : OA^2 &= OH^2 + AH^2 \Rightarrow 25^2 = 7^2 + x^2 \Rightarrow 625 = 49 + x^2 \\ \Rightarrow x^2 &= 576 \Rightarrow x = 24 \Rightarrow AB = 2x = 2(24) \Rightarrow AB = 48 \end{aligned}$$

آسان

۳۳- گزینه «۲»

اگر از مرکز یک دایره به یک وتر، عمود کنیم، آن پاره‌خط وتر را نصف می‌کند. پس $AH = HB = 12$.

$$\begin{aligned} \Delta OAH : OA^2 &= OH^2 + AH^2 \Rightarrow R^2 = 5^2 + 12^2 = 25 + 144 \\ \Rightarrow R^2 &= 169 \Rightarrow R = 13 \Rightarrow S = \pi R^2 \Rightarrow S = 169\pi \end{aligned}$$

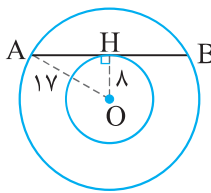


متوسط

۳۴- گزینه «۳»

می‌دانیم اگر از مرکز یک دایره بر یک وتر عمود کنیم، آن پاره‌خط وتر را نصف می‌کند، پس $AH = HB$.

$$\begin{aligned} \Delta OAH : OA^2 &= AH^2 + OH^2 \Rightarrow 289 = AH^2 + 64 \Rightarrow AH^2 = 225 \\ \Rightarrow AH &= 15 \end{aligned}$$



$$AB = 2AH = 30.$$

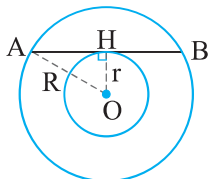
متوسط

۳۵- گزینه «۳»

اگر شعاع دایره کوچک‌تر r و شعاع دایره بزرگ‌تر R باشد، داریم:

$$\begin{aligned} S &= \pi R^2 - \pi r^2 \Rightarrow 36\pi = \pi(R^2 - r^2) \Rightarrow R^2 - r^2 = 36 \\ \Delta OAH : OA^2 &= AH^2 + OH^2 \Rightarrow R^2 = AH^2 + r^2 \Rightarrow R^2 - r^2 = AH^2 \\ \Rightarrow AH^2 &= 36 \Rightarrow AH = 6 \end{aligned}$$

می‌دانیم اگر از مرکز دایره‌ای به یک وتر عمود کنیم، آن پاره‌خط وتر را نصف می‌کند.



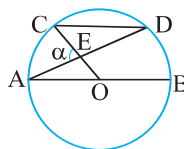
$$AB = 2AH = 2(6) = 12$$

متوسط

۳۹- گزینه «۲»

روش اول:

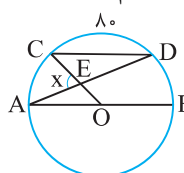
$$\begin{aligned} CD \parallel AB &\Rightarrow \widehat{AC} = \widehat{BD} = \alpha \\ \widehat{AC} + \widehat{CD} + \widehat{DB} &= 180^\circ \Rightarrow \alpha + 80^\circ + \alpha = 180^\circ \Rightarrow 2\alpha = 100^\circ \Rightarrow \alpha = 50^\circ \\ \hat{A} = \frac{\widehat{BD}}{2} &= \frac{50^\circ}{2} \Rightarrow \hat{A} = 25^\circ \text{ محاطی} \\ \hat{O} = \widehat{AC} &\Rightarrow \hat{O} = 50^\circ \text{ مرکزی} \\ \Delta AOE : \hat{x} &= \hat{A} + \hat{O} = 25^\circ + 50^\circ \Rightarrow \hat{x} = 75^\circ \end{aligned}$$



روش دوم:

نکته: اگر $CD \parallel AB$ باشد و AB قطر دایره باشد، داریم: $\widehat{CD} = 180^\circ - \frac{4}{3}x$. با توجه به نکته فوق و این که $\widehat{CD} = 80^\circ$ داریم:

$$80^\circ = 180^\circ - \frac{4}{3}x \Rightarrow x = 75^\circ$$



دشواری

۳۰- گزینه «۱»

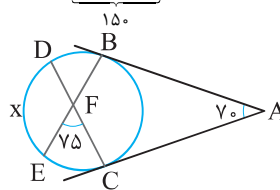
دو وتر DC و BE همدیگر را در نقطه F درون دایره قطع کرده‌اند، پس داریم:

$$\hat{F} = \frac{\widehat{BD} + \widehat{EC}}{2} \Rightarrow 75^\circ = \frac{\widehat{BD} + \widehat{EC}}{2} \Rightarrow \widehat{BD} + \widehat{EC} = 150^\circ$$

از نقطه A دو مماس AB و AC بر دایره رسم شده است پس:

$$\widehat{BC} = 180^\circ - \hat{A} = 180^\circ - 70^\circ \Rightarrow \widehat{BC} = 110^\circ$$

$$\widehat{BC} + \widehat{EC} + \widehat{DB} + \widehat{DE} = 360^\circ \Rightarrow 110^\circ + 150^\circ + x = 360^\circ \Rightarrow x = 100^\circ$$



متوسط

۳۱- گزینه «۱»

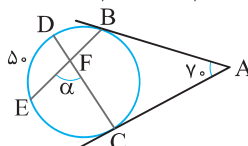
از نقطه A دو مماس AB و AC بر دایره رسم شده است، پس داریم:

$$\widehat{BC} = 180^\circ - \hat{A} = 180^\circ - 70^\circ = 110^\circ$$

$$\widehat{BC} + \widehat{CE} + \widehat{ED} + \widehat{DB} = 360^\circ \Rightarrow 110^\circ + \widehat{CE} + 50^\circ + \widehat{DB} = 360^\circ$$

$$\Rightarrow \widehat{CE} + \widehat{DB} = 200^\circ$$

$$\alpha = \frac{\widehat{DB} + \widehat{EC}}{2} = \frac{200^\circ}{2} \Rightarrow \alpha = 100^\circ$$



متوسط

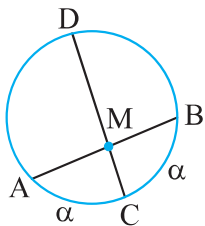
۳۹- گزینه «۴»

می‌دانیم اگر از وسط کمان به وسط وتر وصل کنیم و امتداد دهیم این خط قطر دایره است و به آن وتر عمود است، پس $\widehat{AC} = \widehat{BC} = \alpha$.

قطر DC قطر است و چون $\widehat{AB} = 2\alpha$ است پس:

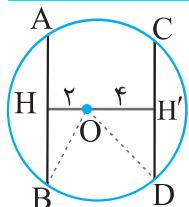
$$\widehat{AB} = R \Rightarrow \widehat{AB} = 60 \Rightarrow \widehat{AC} = \widehat{BC} = 30$$

$$\widehat{DC} \Rightarrow \widehat{DA} + \widehat{AC} = 180 \Rightarrow \widehat{DA} + 30 = 180 \Rightarrow \widehat{DA} = 150$$



دشوار

۴۰- گزینه «۱»



$$\frac{AB}{2} = BH = m + 3$$

$$\frac{CD}{2} = DH' = m - 3$$

$$OD = OB = R$$

$$\begin{aligned} \triangle OBH : OB^2 &= R^2 = OH^2 + BH^2 \Rightarrow OH^2 + BH^2 = DH'^2 + OH'^2 \\ \triangle ODH' : OD^2 &= R^2 = DH'^2 + OH'^2 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow (m+3)^2 + (m-3)^2 + 16 = m^2 + 6m + 9 + 4 = m^2 - 6m + 9 + 16$$

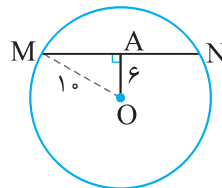
$$\Rightarrow 12m = 12 \Rightarrow m = 1$$

$$R = \sqrt{(m+3)^2 + 4} \Rightarrow R = \sqrt{16 + 4} = 2\sqrt{5}$$

دشوار

۳۶- گزینه «۴»

کوتاه‌ترین وتری که از نقطه A می‌گذرد، وتری است که به قطر عبوری از نقطه A عمود است و می‌دانیم اگر قطری عمود بر یک وتر باشد، آن را نصف می‌کند، پس $MA = AN$.



$$\begin{aligned} \triangle OAM : OM^2 &= OA^2 + AM^2 \Rightarrow 100 = 36 + AM^2 \Rightarrow AM^2 = 64 \\ \Rightarrow AM &= 8 \Rightarrow MN = 2AM = 16 \end{aligned}$$

دشوار

۳۷- گزینه «۲»

اگر فرض کنیم $\widehat{DAC} = x$ با توجه به صورت مسئله $\widehat{DBC} = 2x$

$$\widehat{DBC} = \frac{\widehat{DC}}{2} \Rightarrow 2x = \frac{\widehat{DC}}{2} \Rightarrow \widehat{DC} = 4x$$

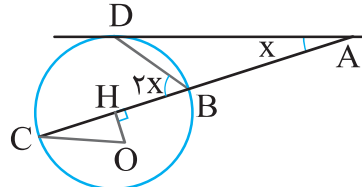
$$\widehat{A} = \frac{\widehat{DC} - \widehat{DB}}{2} \Rightarrow x = \frac{4x - \widehat{DB}}{2} \Rightarrow \widehat{DB} = 2x$$

$$\widehat{BDC} = \widehat{BD} + \widehat{CD} \Rightarrow 2x + 4x \Rightarrow \widehat{BDC} = 6x$$

O را به B وصل می‌کنیم. $\widehat{COB} = \widehat{BDC} = 6x$ مرکزی

می‌دانیم اگر از مرکز یک دایره به یک وتر عمود کنیم آن وتر و کمان نظیر آن را نصف می‌کند پس $\widehat{COH} = \frac{6x}{2} = 3x$.

$$\frac{\widehat{COH}}{\widehat{DAC}} = \frac{3x}{x} = 3$$



آسان

۳۸- گزینه «۴»

می‌دانیم اگر از مرکز یک دایره به یک وتر عمود کنیم، آن وتر نصف می‌شود

$$\text{پس } BH = HA = \frac{AB}{2} = 3$$

$$\triangle OBH : OB^2 = OH^2 + BH^2 = 1 + 9 = 10 \Rightarrow R^2 = 10 \Rightarrow R = \sqrt{10}$$

