



مرحله‌ی اول بیست و ششمین المپیاد ریاضی کشور

۱. همه‌ی زاویه‌های مثلثی از 59° درجه بزرگ‌ترند. کدام گزینه درباره‌ی این مثلث همواره صحیح است؟
 (۱) یک زاویه‌ی منفرجه دارد. (۲) یک زاویه‌ی 60° درجه دارد. (۳) قائم‌الزاویه است.
 (۴) متساوی‌الاضلاع است. (۵) همه‌ی زاویه‌هایش از 62° درجه کوچک‌ترند.

۲. چند عدد طبیعی وجود دارد که عامل اول بیش از ۱۵ نداشته باشد و بر هیچ عدد مکعب کامل بزرگ‌تر از یک بخش پذیر نباشد.

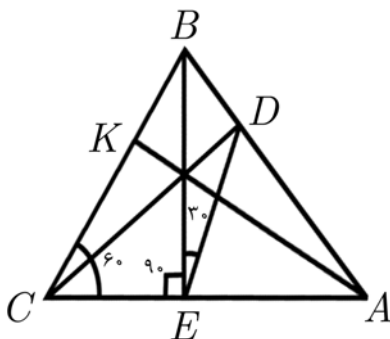
(۱) ۶۴ (۲) ۷۲۰ (۳) ۷۲۹ (۴) ۲۱۸۷ (۵) ۴۰۹۶

۳. معادله‌ی $1 = |a + 3| - 2$ چند جواب حقیقی دارد؟

(۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۸ (۵) جواب ندارد.

۴. مجموع ارقام کوچک‌ترین عددی که حاصل ضرب ارقام آن برابر ۱۰۰۰ است، چیست؟

(۱) ۱۴ (۲) ۲۱ (۳) ۲۳ (۴) ۲۶ (۵) ۳۰



۵. در شکل روبه‌رو BE بر AC عمود است. اگر $\angle BED = 30^\circ$ و $\angle ACB = 60^\circ$ باشد، نسبت BK به BC چند است؟ (شکل دقیق نیست.)

(۱) $\frac{3}{4}$ (۲) $\frac{1}{4}$ (۳) $\frac{2}{3}$ (۴) $\frac{1}{3}$ (۵) $\frac{1}{2}$

۶. عددی دو رقمی در نظر بگیرید. حاصل ضرب ارقامش را محاسبه کنید. برای عدد به‌دست آمده همین کار را انجام دهید و این کار را آنقدر تکرار کنید تا به عددی یک‌رقمی برسید. با شروع از چند عدد دورقمی به عدد ۲ می‌رسید؟

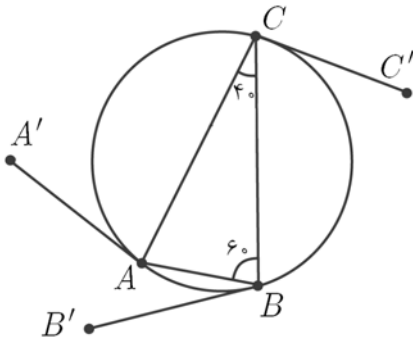
(۱) ۲ (۲) ۴ (۳) ۶ (۴) ۸ (۵) ۱۰

۷. تمام اعداد طبیعی ۵ رقمی که شامل ارقام ۱، ۲، ۳، ۴ و ۵ و بدون رقم تکراری هستند را از کوچک به بزرگ مرتب کرده‌ایم. 32451 چندمین عدد است؟

(۱) ۴۶ (۲) ۴۹ (۳) ۵۲ (۴) ۵۵ (۵) ۵۸



مرحله‌ی اول بیست و ششمین المپیاد ریاضی کشور



۸. در مثلث ABC ، $\hat{B} = 60^\circ$ و $\hat{C} = 40^\circ$. AA' ، BB' و CC' هم‌طول و در یک جهت بر دایره محیطی ABC مماسند. زاویه‌ی $\angle B'A'C'$ چند درجه است؟ (شکل دقیق نیست.)

- (۱) ۳۰ (۲) ۴۰ (۳) ۶۰ (۴) ۸۰ (۵) ۱۲۰

۹. عددی طبیعی را مثلثی گوئیم هر گاه بتوان به ازای یک عدد طبیعی n آن را به صورت $\frac{n(n+1)}{2}$ نوشت. چند

زوج (a, b) از اعداد مثلثی وجود دارد که $a - b = 101$ ؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴ (۵) ۵

۱۰. بزرگ‌ترین ضریب در بسط دوجمله‌ای $(1+x)^{100}$ چند رقم دارد؟

- (۱) کم‌تر از ۱۵ (۲) بین ۱۵ تا ۲۵ (۳) بین ۲۵ تا ۳۵ (۴) بین ۳۵ تا ۴۵ (۵) بیش‌تر از ۴۵

۱۱. یک عدد اول را «بسیار اول» گوئیم اگر هر قطعه از ارقام متوالی آن نیز عددی اول به وجود آورند. اعداد بسیار اول دورقمی عبارتند از ۲۳، ۳۷، ۵۳ و ۷۳. چند عدد سه‌رقمی بسیار اول وجود دارد؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴ (۵) ۵

۱۲. مجلس هشتم ۲۸۵ کرسی دارد. اگر سه حزب در انتخابات شرکت کنند به چند حالت ممکن است هیچ حزبی اکثریت مطلق را به دست نیاورد؟ (یعنی تعداد نمایندگان منتخب از آن حزب بیش از نصف نباشد.)

- (۱) ۱۰۱۵۳ (۲) ۱۰۲۰۱ (۳) ۱۱۳۲۵ (۴) ۱۱۴۰۰ (۵) ۱۱۷۱۵

۱۳. دستگاه معادلات روبه‌رو در مجموعه‌ی اعداد حقیقی چند جواب دارد؟

$$\begin{cases} x - 1 = yz \\ y - 1 = zx \\ z - 1 = xy \end{cases}$$

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴ (۵) جواب ندارد.



مرحله‌ی اول بیست و ششمین المپیاد ریاضی کشور

۱۴. به چند طریق می‌توان ۵ مهره سیاه و ۵ مهره سفید را در یک ردیف قرار داد که دقیقاً سه بلوک سیاه داشته باشد؟
یک بلوک سیاه چند مهره‌ی سیاه کنار هم است که در دو طرف آن‌ها مهره‌ی سیاه دیگری نباشد.



مثلاً آرایش روبه‌رو دو بلوک سفید و سه بلوک سیاه دارد.

- (۱) ۵۴ (۲) ۱۲۰ (۳) ۲۰۰ (۴) ۴۰۰ (۵) ۵۴۰

۱۵. بیش‌ترین تعداد عامل ۲ در مجموع پنج عدد طبیعی که ضرب آن‌ها 2^{1386} باشد چند است؟

- (۱) ۲۷۶ (۲) ۲۷۷ (۳) ۲۷۸ (۴) ۲۷۹ (۵) ۲۸۰

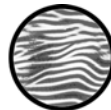
۱۶. نقطه‌ی A روی دایره‌ی C ثابت است و نقطه‌های M و N طوری روی دایره حرکت می‌کنند که مقدار زاویه‌ی $\angle MAN$ همواره ۳۳ درجه است. کدام گزینه صحیح است؟

- (۱) همه‌ی خطوط MN از نقطه‌ی ثابتی می‌گذرند.
(۲) همه‌ی خطوط MN به دایره‌ی ثابتی مماس هستند.
(۳) تفاضل طول AM و AN مقداری ثابت است.
(۴) نسبت طول AM و AN مقداری ثابت است.
(۵) اندازه‌ی شعاع دایره‌ی محاطی مثلث AMN عددی ثابت است.

۱۷. بیش‌ترین مقدار $ab + bc + cd$ برای $a, b, c, d \geq 0$ با شرط $a + b + c + d = 1$ چند است؟

- (۱) ۱ (۲) $\frac{1}{2}$ (۳) $\frac{1}{4}$ (۴) $\frac{2}{9}$ (۵) $\frac{3}{16}$

۱۸. الاغی می‌خواهد از نقطه‌ی A به نقطه‌ی B برود ولی دقیقاً در وسط راه دریاچه‌ای دایره‌ای شکل به قطر دو کیلومتر قرار دارد. اگر فاصله‌ی A و B چهار کیلومتر باشد کوتاه‌ترین مسیر چند کیلومتر است؟



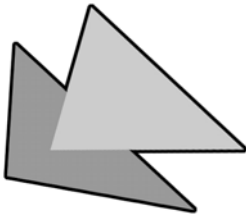
- (۱) $\frac{4\sqrt{3}}{3}$ (۲) $2 + \pi$ (۳) ۵ (۴) $2\sqrt{3} + \frac{\pi}{3}$ (۵) ۶

۱۹. تعداد مثلث‌های غیرهم‌نهشت که رئوسشان از بین رئوس ده ضلعی منتظم انتخاب شده باشند برابر است با

- (۱) ۶ (۲) ۷ (۳) ۸ (۴) ۹ (۵) ۱۰



مرحله‌ی اول بیست و ششمین المپیاد ریاضی کشور



۲۰. دو مثلث کاغذی را روی هم قرار می‌دهیم. مرز بیرونی شکلی که به وجود می‌آید چند ضلع نمی‌تواند داشته باشد؟

- ۸ (۱) ۹ (۲) ۱۰ (۳) ۱۱ (۴) ۱۲ (۵)

۲۱. شش جعبه خالی با اندازه‌های مختلف داریم. ابعاد جعبه‌ها طوری است که درون هر جعبه می‌توان همه‌ی جعبه‌های کوچک‌تر از آن را، جدا از هم، جا داد. به چند طریق می‌توان این جعبه‌ها را درون بزرگ‌ترین جعبه جاسازی کرد؟ (توجه کنید که می‌شود بعضی از جعبه‌ها را درون بعضی دیگر قرار داد.)

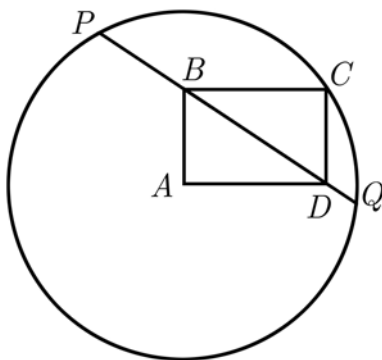
- ۶۴ (۱) ۱۲۰ (۲) ۱۲۸ (۳) ۲۰۰ (۴) ۲۴۰ (۵)

۲۲. فرض کنید $f(x) = ax + b$. اگر $f(0) \leq 2$ ، $f(1) \geq 0$ و $f(2) \leq 4$ ، بیش‌ترین مقدار ممکن برای $f(10)$ چند است؟

- ۱۰ (۱) ۱۲ (۲) ۲۰ (۳) ۳۶ (۴) ۴۰ (۵)

۲۳. مساحت بزرگ‌ترین مثلث متساوی‌الاضلاع محاط در مربع به ضلع یک چقدر است؟

- $\frac{\sqrt{3}}{4}$ (۱) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (۲) $\frac{4\sqrt{3}}{7 + 4\sqrt{3}}$ (۳) $25\sqrt{3} - 48$ (۴) $\frac{\sqrt{3}}{2 + \sqrt{3}}$ (۵)



۲۴. فرض کنید $ABCD$ مستطیلی 1×2 باشد. دایره‌ای به مرکز A و شعاع AC رسم می‌کنیم. اگر امتداد BD دایره را در نقاط P و Q قطع کند طول PQ چقدر است؟

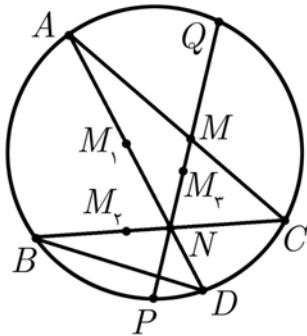
- $\sqrt{\frac{92}{5}}$ (۳) $\sqrt{\frac{35}{2}}$ (۲) $\sqrt{\frac{84}{5}}$ (۱) $\sqrt{20}$ (۵) $\sqrt{6\pi}$ (۴)

۲۵. معادله‌ی $2^x + 2x^2 = y^2$ در اعداد صحیح چند جواب دارد؟

- ۱ (۱) ۲ (۲) ۴ (۳) ۶ (۴) ۵ جواب ندارد (۵)



مرحله‌ی اول بیست و ششمین المپیاد ریاضی کشور



۲۶. در شکل روبه‌رو M_1, M_2, M_3, M_4 و M ، به ترتیب، وسط PQ, BC, AD و CA هستند و $\angle ANQ = 40^\circ$. زاویه‌ی بین دو خط گذرنده از M_2M_3 و M_1M_2 چند درجه است؟ (شکل دقیق نیست.)

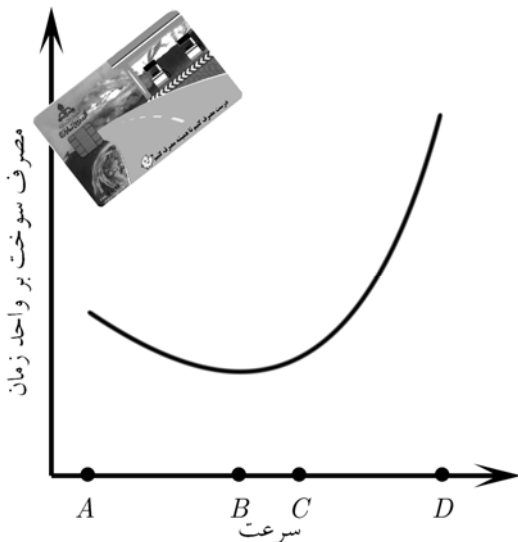
- (۱) ۲۰ (۲) ۴۰ (۳) ۵۰ (۴) ۶۰ (۵) ۸۰

۲۷. a عددی طبیعی بزرگ‌تر از ۱۰ و x_n رقم دهگان a^n است. بسط اعشاری $0.x_1x_2x_3\dots$

- (۱) به ازای هر a متناوب ساده است.
 (۲) به ازای هر a متناوب مرکب است.
 (۳) به ازای هر a نامتناوب است.
 (۴) برای بعضی از مقادیر a متناوب و برای بعضی نامتناوب است.
 (۵) برای بعضی از مقادیر a متناوب ساده و برای بعضی متناوب مرکب است.

۲۸. به هر وجه و هر رأس یک مکعب عددی طبیعی نسبت داده‌ایم. می‌دانیم عدد هر رأس برابر ضرب اعداد سه وجه مجاورش است. مجموع اعداد رئوس ۲۳۱ است. مجموع اعداد وجوه چند است؟

- (۱) ۱۰ (۲) ۱۷ (۳) ۲۱ (۴) ۳۰ (۵) اطلاعات ناقص است.



۲۹. نمودار مقابل مصرف سوخت در واحد زمان یک خودرو را بر حسب سرعت آن نشان می‌دهد. اگر بخواهیم با سرعت ثابت از زنجان به قزوین برویم با چه سرعتی کل سوخت مصرف شده کم‌تر است؟

- (۱) کم‌ترین سرعت ممکن یعنی A
 (۲) B
 (۳) بیش‌ترین سرعت ممکن یعنی D
 (۴) C
 (۵) بستگی به فاصله‌ی زنجان و قزوین دارد.

۳۰. چند سه‌تایی (A, B, C) از زیرمجموعه‌های $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ داریم که $A \cap B \subseteq C \subseteq A \cup B$ ؟

- (۱) ۷۵۰۰ (۲) ۷۶۵۵ (۳) ۷۶۵۶ (۴) ۷۷۰۰ (۵) ۷۷۷۶