تمرین‌ها

۱. ۳۴ دانش‌آموز در ۵ ردیف که هر یک ۷ صندلی دارند نشسته‌اند. صندلی واقع در مرکز اتاق خالی است. معلم تصمیم می‌گیرد که جای دانش‌آموزان را عوض کند طوری که هر دانش‌آموز روی یک صندلی مجاور با صندلی کنونی خود بنشیند. او به چند طریق می‌تواند این کار را انجام دهد؟

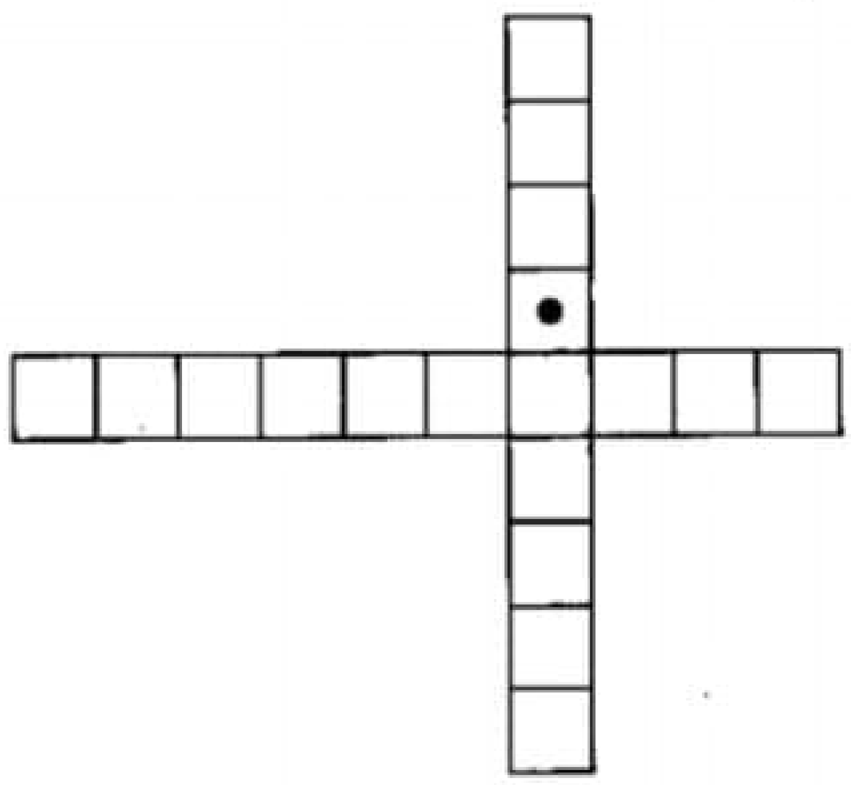
(تورنمنت ریاضی هاروارد ـ ام‌آی‌تی ـ ۲۰۰۳)

۲. آیا صفحهٔ شطرنجی ۷۵ × ۷۵ را می‌توان با موزاییک‌های زیر فرش کرد؟

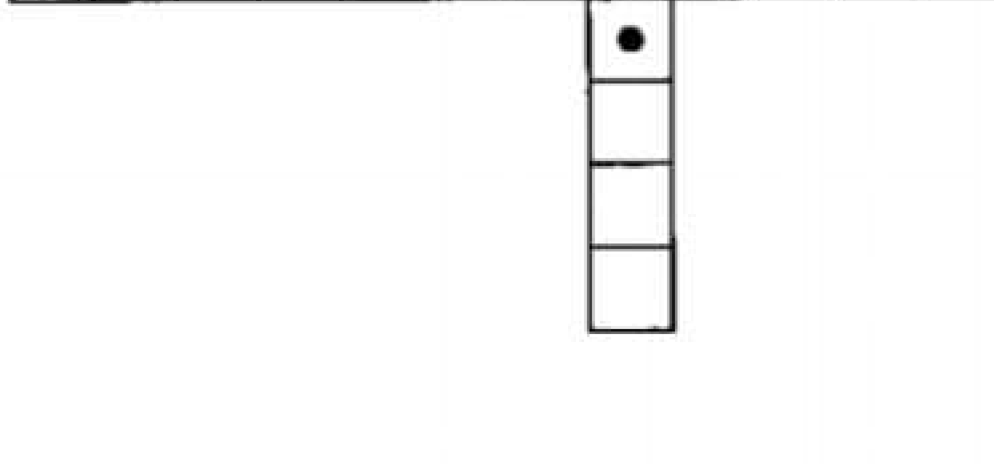
(سن پطرزبورگ ـ ۱۹۹۷)

۳. در یک بازی دو نفره بازیکنان می‌خواهند به خانه‌ای که در آن شکلات قرار دارد برسند. قانون بازی این است که هر بازیکن در نوبت خود خانه‌ای از جدول را که سه ضلع آزاد دارد، بر می‌دارد. در کدام‌یک از زمین‌های بازی زیر بازیکن دوم می‌تواند همیشه برنده باشد؟

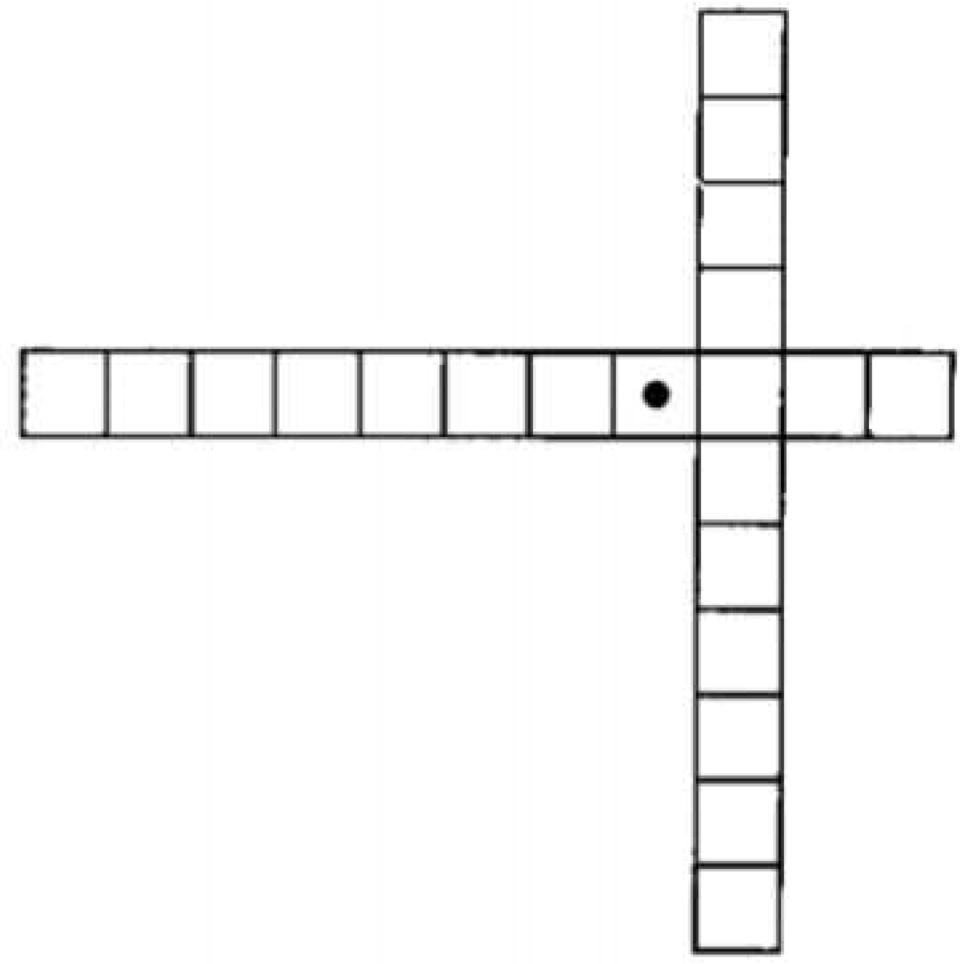
۱)



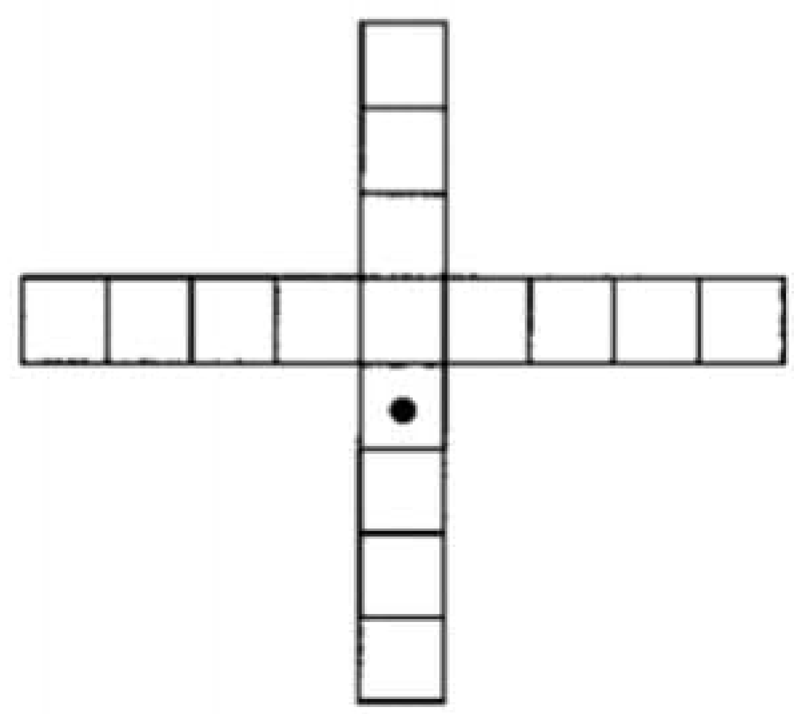
۲)



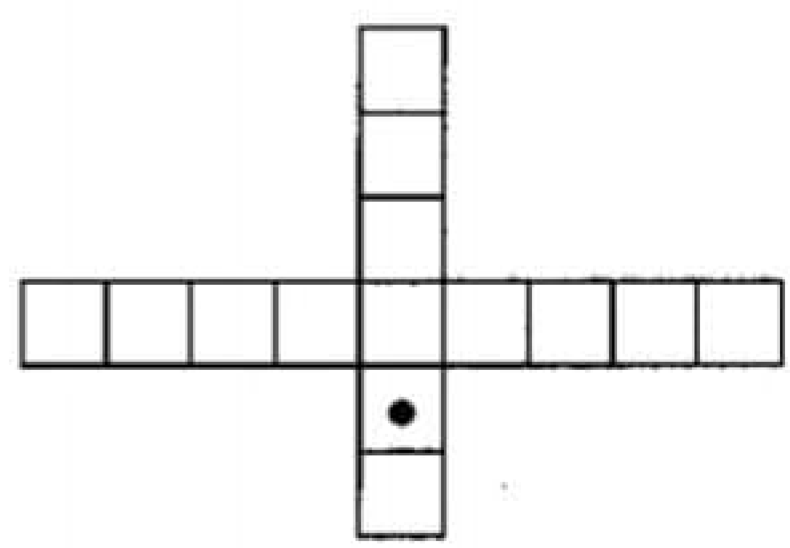
۳)



۴)



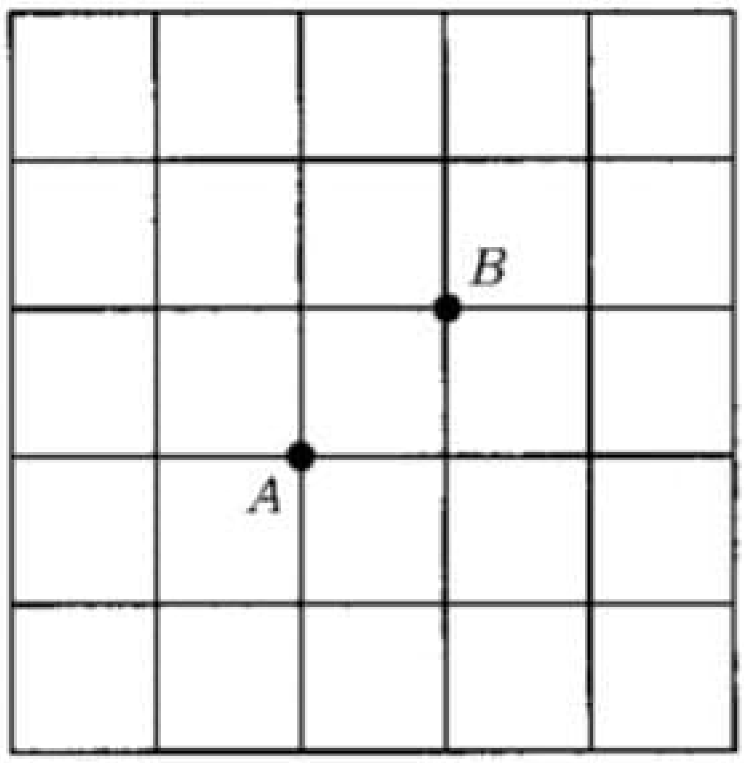
۵)



(مرحلهٔ اول بیست‌ویکمین المپیاد ریاضی ایران ـ ۱۳۸۱)

۴. طول یک مسیر از A به B در شکل صفحهٔ بعد که از هیچ نقطه‌ای بیش از یک بار عبور نکند حداکثر چند است؟ (طول هر پاره‌خط در شبکهٔ صفحهٔ بعد برابر واحد است.)

۱) ۳۳ ۲) ۳۴ ۳) ۳۵ ۴) ۳۶ ۵) هیچ‌کدام



(تورنمنت ریاضی دبیرستانی دانشگاه جورجیا ـ ۲۰۰۹)

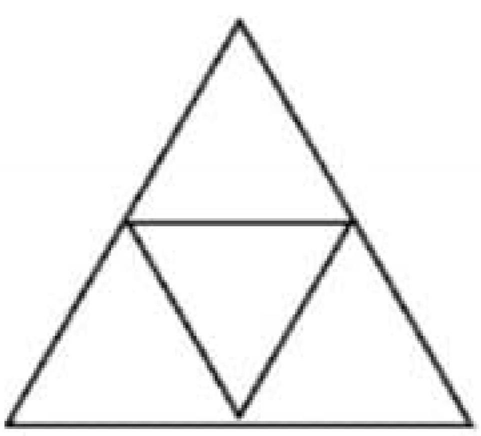
۵. سه نوع موزاییک در اختیار داریم، یکی به شکل مثلث قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقین که طول هر ضلع زاویهٔ قائمه آن ۲ است، یکی به شکل مربع واحد و دیگری به شکل متوازی‌الاضلاع به اضلاع ۱ و $\sqrt{۲}$ و زاویهٔ رأس ۴۵°. فرض کنید یک صفحهٔ شطرنجی مستطیل شکل با این موزاییک‌ها فرش شده باشد (اضلاع موزاییک‌ها روی خطوط صفحهٔ شطرنجی یا قطرهای مربع‌های واحد قرار دارند). ثابت کنید تعداد موزاییک‌های به‌کار رفته از نوع سوم عددی زوج است.
(زائوتیکوف ـ ۲۰۱۰)

۶. در یک صفحهٔ شطرنجی ۷۹×۱۳ یک خانه را مناسب می‌نامیم، اگر با حذف آن بتوان مابقی خانه‌های صفحهٔ شطرنجی را با موزاییک‌های ۱×۲ پر کرد. تعداد خانه‌های مناسب این صفحهٔ شطرنجی چندتاست؟

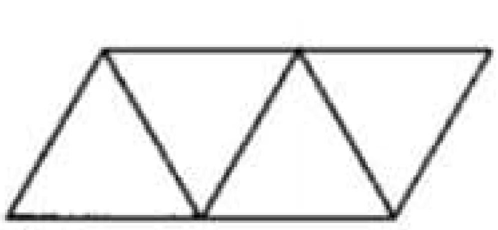
۱) ۳۱۷   ۲) ۴۲۹   ۳) ۵۱۴   ۴) ۶۲۰   ۵) ۷۱۶

(مرحلهٔ اول نوزدهمین المپیاد ریاضی ایران ـ ۱۳۷۹)

۷. یک مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع ۱۰ توسط خطوط موازی اضلاع به ۱۰۰ مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع واحد تقسیم شده است. m موزاییک به شکل (۱) و $۲۵ - m$ موزاییک به شکل (۲) داده شده است. به ازای چه مقادیری از m می‌توانیم مثلث را با موزاییک‌های داده شده فرش کنیم؟



شکل (۱)



شکل (۲)

(روسیه ـ ۱۹۹۲)

۸. می‌خواهیم یک صفحهٔ شطرنجی 100×100 را فرش کنیم.

الف) اگر یک مربع 2×2 از مرکز این صفحه جدا شده باشد، ثابت کنید مابقی شکل را می‌توان با موزاییک‌های 3×1 فرش کرد.

ب) اگر یک مربع 2×2 از گوشهٔ این صفحه جدا شده باشد، ثابت کنید مابقی شکل را نمی‌توان با موزاییک‌های 3×1 فرش کرد.

(ایرلند ـ ۱۹۹۹)

۹. یک مستطیل 12×11 داده شده است. ثابت کنید.

الف) مستطیل را با ۲۰ موزاییک از اندازه‌های 6×1 و 7×1 می‌توان فرش کرد.

ب) مستطیل را با ۱۹ موزاییک از اندازه‌های 6×1 و 7×1 نمی‌توان فرش کرد.

(روسیه ـ ۱۹۹۱)

۱۰. یک جدول 9×9 از مربع‌های سفید داده شده است. حداکثر مقدار n را بیابید که اگر به هر طریق ممکن n تا از خانه‌های این جدول را سیاه کنیم، باز هم در این جدول بتوان چهار خانهٔ سفید متوالی عمودی یا افقی یافت.

۱) ۱۷ ‏ ‏ ۲) ۱۸ ‏ ‏ ۳) ۱۹ ‏ ‏ ۴) ۲۰ ‏ ‏ ۵) ۲۱

(مرحلهٔ اول نوزدهمین المپیاد ریاضی ایران ـ ۱۳۷۹)

۱۱. فرض کنید صفحهٔ شطرنجی $2n \times 2n$ را بخواهیم با یک عدد موزاییک 2×2 و $n^2 - 1$ تا موزاییک 1×4 بپوشانیم. کدام‌یک از احکام زیر درست است؟

۱) به ازای همهٔ nها، می‌توان این کار را کرد.

۲) بجز برای متناهی تا n، می‌توان این کار را کرد.

۳) بجز برای متناهی تا n، هرگز نمی‌توان این کار را کرد.

۴) فقط برای nهای فرد می‌توان این کار را کرد.

۵) برای nهای مربع کامل می‌توان این کار را کرد.

(مرحلهٔ اول هجدهمین المپیاد ریاضی ایران ـ ۱۳۷۸)

۱۲. آجرهایی داریم که از اتصال سه مکعب واحد به سه وجه از مکعبی واحد که رأس مشترک دارند ساخته شده‌اند. آیا با این آجرها می‌توان جعبه‌ای $13 \times 12 \times 11$ را پر کرد؟

(تورنمنت شهرها ـ ۱۹۹۰)

۱۳. ثابت کنید به ازای بی‌نهایت مقدار n مکعب $n \times n \times n$ را نمی‌توان با بلوک‌های $2 \times 2 \times 2$ و $3 \times 3 \times 3$ ساخت.

(آزمون استعدادیابی ریاضی امریکا ـ ۱۹۹۱)

۶. رشتهٔ $abbaaabb$ را در نظر بگیرید. در هر مرحله می‌توانیم جای دو حرف را که دقیقاً یک حرف بین آنها قرار دارد عوض کنیم. آیا با تکرار این عمل می‌توانیم به رشتهٔ $abbaabab$ برسیم؟
(مرحلهٔ اول نهمین المپیاد کامپیوتر ایران ـ ۱۳۷۷)

۷. دنبالهٔ ۳, ۱, ۵, ۲, ۷, ۶, ۸, ۹, ۱۰, ۴ را در نظر بگیرید. در هر مرحله می‌توانیم چهار عنصر متوالی دنباله را در نظر بگیریم و مکان زوج اول را با زوج دوم این چهارتایی عوض کنیم، مثلاً از روی دنبالهٔ فوق و با در نظر گرفتن چهار عدد مجاور ۱, ۵, ۲, ۷، می‌توان دنبالهٔ ۳, ۲, ۷, ۱, ۵, ۶, ۸, ۹, ۱۰, ۴ را به‌دست آورد. آیا با انجام تعداد دلخواهی از اعمال فوق می‌توان از دنبالهٔ بالا به دنبالهٔ ۱, ۲, ۳, ۴, ۵, ۶, ۷, ۸, ۹, ۱۰ رسید؟
(مرحلهٔ اول دهمین المپیاد کامپیوتر ایران ـ ۱۳۷۸)

۸. یک قورباغه از نقطهٔ (۰, ۰) شروع به حرکت می‌کند. این قورباغه از نقطهٔ (x, y) به هر یک از نقاط $(x+۲, y+۷)$، $(x+۷, y+۲)$، $(x-۵, y-۱۰)$ و $(x-۱۰, y-۵)$ می‌تواند بجهد. آیا این قورباغه می‌تواند پس از چند مرحله خود را به نقطهٔ (۲۱, ۲۴) برساند؟

۹. فردی در نقطهٔ (۲, ۳) جدول مختصات قرار دارد. او در هر حرکت اگر در نقطهٔ (i, j) باشد، می‌تواند به یکی از نقطه‌های $(i+i\times j, j)$، $(i-i\times j, j)$، $(i, j-i\times j)$ یا $(i, j+i\times j)$ برود. با تکرار این حرکت‌ها، این فرد به کدام‌یک از نقطه‌های زیر می‌تواند برسد؟

۱) (−۲۵۶, ۹۰۰۲) ۲) (۱۵۳۵, −۲۵۳۰۱) ۳) (−۱۸, ۱۵۴۰۰)

۴) (۳۲, −۹۲۰۷) ۵) (−۱۷۰۱, ۲۵۶)

(مرحلهٔ اول چهاردهمین المپیاد کامپیوتر ایران ـ ۱۳۸۲)

۱۰. عددهای ۱، ۲، ... و ۱۳۷۷ روی تخته سیاه نوشته شده‌اند. هر بار دوتا از اعداد روی تخته را به دلخواه پاک می‌کنیم و قدرمطلق تفاضل‌شان را روی تخته می‌نویسیم، تا زمانی که یک عدد روی تخته باقی بماند. کدام‌یک از گزینه‌های زیر در مورد عدد به‌دست آمده کامل‌تر است؟

۱) این عدد همواره مضربی از ۴ است.

۲) این عدد همواره فرد است.

۳) باقی‌ماندهٔ تقسیم این عدد بر ۴، مساوی ۱ است.

۴) این عدد همواره زوج است.

۵) هیچ‌کدام

(مرحلهٔ اول هفدهمین المپیاد ریاضی ایران ـ ۱۳۷۷)

۱۱. مهره‌ای را در مبدأ مختصات قرار داده‌ایم. در هر مرحله مهره را توسط یکی از چهار بردار (m,n)، $(-m,-n)$، $(n+۱, m+۱)$ یا $(-n-۱, -m-۱)$ به نقطهٔ دیگری منتقل می‌کنیم و این کار را تکرار می‌کنیم. به ازای کدام‌یک از (m,n)های زیر می‌توان مهره را به هر نقطهٔ صفحه با مختصات صحیح رساند؟

۱) $m=۱$ و $n=۳$

۲) $m=۲$ و $n=۳$

۳) $m=۳$ و $n=۵$

۴) $m=۴$ و $n=۷$

۵) به ازای هیچ m و nای نمی‌توان این کار را انجام داد.

(مرحلهٔ اول بیست‌وسومین المپیاد ریاضی ایران ـ ۱۳۸۳)

۱۲. فرض کنید عدد طبیعی a داده شده است. در هر گام به جای عددی که در اختیار داریم یکی از عددهای $۲a+۱$، $۳a+۲$، $۴a+۳$ یا $۵a+۴$ را در نظر می‌گیریم و کار را با آن ادامه می‌دهیم. با شروع از کدام یک از اعداد زیر، می‌توان بعد از تعدادی گام به عدد $۳۰^{۱۳۸۳}-۱$ رسید؟

۱) ۱۰ ۲) ۱۱ ۳) ۱۲ ۴) ۱۳ ۵) هیچ‌کدام

(مرحلهٔ اول بیست‌وسومین المپیاد ریاضی ایران ـ ۱۳۸۳)

۱۳. اعداد حقیقی $a_۱$، $a_۲$، ... و a_n روی تخته نوشته شده‌اند. در هر گام دوتا از آنها مثل x و y را به دلخواه انتخاب کرده و آنها را حذف می‌کنیم و به جای آنها عدد $x+y+xy$ را می‌نویسیم. پس از $n-۱$ گام عدد A روی تخته باقی‌مانده است. کدام‌یک از نتیجه‌گیری‌های زیر درست است؟

۱) می‌توان مقادیر اولیهٔ $a_۱$، $a_۲$، ... و a_n را چنان تعیین کرد که با روش‌های مختلف، $n!$ مقدار متمایز برای A حاصل شود.

۲) مقدار A به‌طور منحصر به‌فرد توسط $a_۱$، $a_۲$، ... و a_n تعیین می‌شود.

۳) اگر $a_۱ = ۲$، در این صورت A حتماً عددی زوج است.

۴) به تعداد متناهی مقادیر $a_۱$، $a_۲$، ... و a_n وجود دارد که برای آنها A می‌تواند برابر ۱ شود.
۵) تمام گزینه‌های بالا نادرست است.

(مرحلهٔ اول شانزدهمین المپیاد ریاضی ایران ـ ۱۳۷۶)

۱۴. یک جدول ۸×۸ داریم که ۳۲ خانهٔ ۴ ستون اولش سیاه و ۳۲ خانهٔ دیگرش سفید هستند. در هر حرکت می‌توانیم رنگ دو خانهٔ مجاور را با هم عوض کنیم (در صورتی که همرنگ باشند تغییری در رنگشان رخ نمی‌دهد). دو خانه مجاورند اگر ضلع مشترک داشته باشند. کمترین تعداد حرکت لازم برای شطرنجی کردن جدول چند است؟ (جدولی شطرنجی است که رنگ هیچ دو خانهٔ مجاوری در آن یکی نباشد.)

۱) ۱۰۰   ۲) ۴۸   ۳) ۳۲   ۴) ۱۲۸   ۵) ۶۴

(مرحلهٔ اول شانزدهمین المپیاد کامپیوتر ایران ـ ۱۳۸۴)

۱۵. علی ۹ عدد ۴−، ۳−، ... و ۴ را روی تخته می‌نویسد. سپس در هر مرحله دو عدد که تفاضل آنها برابر ۲ باشد انتخاب می‌کند، از عدد بزرگ‌تر یک واحد کم می‌کند و به عدد کوچک‌تر یک واحد اضافه می‌کند. پس از مدتی روی تخته ۹ عدد صفر باقی‌مانده است. علی چند بار عمل فوق را انجام داده است؟

(تورنمنت ریاضی جانز هاپکینز ـ ۲۰۰۶)

۱۶. ۳ عدد a، b و c روی تخته نوشته شده‌اند. آرش و ایمان به این ترتیب با این سه عدد بازی می‌کنند که هر کس در نوبت خود دو عدد دلخواه از این سه عدد، مثلاً a و b را از روی تخته پاک می‌کند و دو عدد $a+b$ و $a-b$ را به جای آنها می‌نویسد. آرش بازی را شروع می‌کند. آرش و ایمان به‌طور یک در میان بازی می‌کنند. آرش می‌خواهد کار را به جایی برساند که هر سه عددِ نوشته شده روی تخته بر ۳ بخش‌پذیر باشند و ایمان می‌خواهد جلوی این کار را بگیرد. به ازای چند تا از سه‌تایی‌های زیر به عنوان مقادیر اولیهٔ (a,b,c)، آرش می‌تواند به هدف خودش برسد؟

$$(۱,۲,۱۰),(۲,۳,۶),(۳,۱,۴),(۵,۶,۷),(۱۰۰,۱۰۰۰,۱۰۰۰۰)$$

۱) ۱   ۲) ۴   ۳) ۲   ۴) ۰   ۵) ۵

(مرحلهٔ اول شانزدهمین المپیاد کامپیوتر ایران ـ ۱۳۸۴)

۱۷. nتا عدد ۱ روی تخته نوشته شده است. در هر مرحله دو عدد a و b را پاک می‌کنیم و به جای آنها دوبار عدد $a+b$ را می‌نویسیم. بعد از چند مرحله، اعداد به nتا عدد n تبدیل شده‌اند. n کدام یک از اعداد صفحهٔ بعد می‌تواند باشد؟

۱) ۷ ۲) ۹ ۳) ۱۵ ۴) ۱۶ ۵) ۲۱

(مرحلهٔ اول نهمین المپیاد کامپیوتر ایران ـ ۱۳۷۷)

۱۸. عمل شمارهٔ یک از رشتهٔ abcdef، رشتهٔ adbecf و عمل شمارهٔ دو از رشتهٔ abcdef، رشتهٔ daebfc را تولید می‌کند. با استفادهٔ پی‌درپی و دلخواه از این دو عمل و با شروع از رشتهٔ abcdef کدام‌یک از رشته‌های زیر را **نمی‌توان** به‌دست آورد؟

۱) dbafec ۲) fcbeda ۳) cabefd ۴) efdcab ۵) fedcba

(مرحلهٔ اول ششمین المپیاد کامپیوتر ایران ـ ۱۳۷۵)

۱۹. مجموعهٔ حروف یک زبان برابر $\{a, b\}$ است. در این زبان حرف a یک کلمه است. در ضمن کلمات این زبان طبق قواعد زیر ساخته می‌شوند.

i) برای هر کلمه مانند S، Sb نیز یک کلمه است.

ii) اگر در یک کلمه سه حرف متوالی برابر a باشند، با جایگزین کردن b به جای aaa نیز یک کلمه به‌دست می‌آید.

iii) اگر در یک کلمه سه حرف متوالی برابر b باشند، دنبالهٔ به‌دست آمده از حذف bbb نیز یک کلمه است.

iv) اگر S یک کلمه باشد، SS نیز یک کلمه است.

ثابت کنید در این زبان $baabaabaa$ کلمه نیست.

(آزمون استعدادیابی ریاضی امریکا ـ ۲۰۰۱)

۱. از یک دفترچهٔ ۹۶ برگی که صفحه‌های آن به ترتیب از ۱ تا ۱۹۲ شماره شده‌اند ۲۴ برگ را جدا کرده و همهٔ ۴۸ شمارهٔ آن را با هم جمع زده‌ایم. آیا ممکن است عدد ۱۹۹۰ به‌دست آید؟

(لنینگراد ـ ۱۹۹۰)

۲. ثابت کنید رئوس یک مکعب را نمی‌توان با ۸ عدد مختلف از مجموعهٔ $\{0, 1, \ldots, 12\}$ برچسب داد طوری که مجموع دو سر هر یال عددی زوج باشد.

(رومانی ـ ۲۰۱۰)

۳. فرض کنید a_1، a_2، ... و a_{14} عددهایی طبیعی باشند. به ازای هر یک از ۱۹۶ زوج مرتب (i,j) ($1 \le i \le 14$ و $1 \le j \le 14$) مجموع $a_i + a_j$ را تشکیل می‌دهیم. آیا ممکن است برای هر ترتیب دوتایی از ارقام (یعنی ۰۰، ۰۱، ... و ۹۹) حداقل یکی از این ۱۹۶ مجموع به این ترتیب دوتایی ختم شود؟

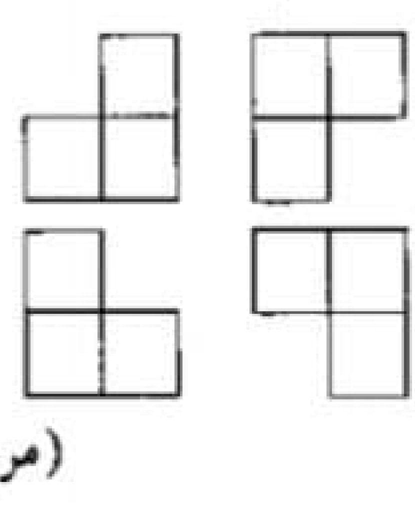
۴. آیا خانه‌های یک جدول 1990×1990 را می‌توان سیاه و سفید کرد به‌طوری که در هر سطر و در هر ستون نیمی از خانه‌ها سفید و نیم دیگر سیاه باشند و در ضمن خانه‌هایی که نسبت به مرکز جدول قرینه‌اند غیرهمرنگ باشند؟

(روسیه ـ ۱۹۹۰)

۵. هر خانه از یک جدول $m \times n$ سیاه یا سفید شده است به‌طوری که هر خانهٔ سیاه با تعداد فردی از خانه‌های سیاه ضلع مشترک دارد. ثابت کنید تعداد خانه‌های سیاه عددی زوج است.

(ژاپن ـ ۲۰۰۱)

۶. یک جدول $m \times n$ داریم $(m > 2, n > 2)$ که به‌صورت دلخواه در خانه‌های آن اعداد ۰ یا ۱ قرار داده‌ایم. در هر حرکت می‌توانیم به هر یک از سه خانهٔ این جدول که تشکیل یکی از اشکال زیر را می‌دهند یک واحد اضافه کنیم. آیا با حرکاتی از نوع بالا می‌توانیم اعداد نوشته شده در تمام خانه‌های جدول را زوج کنیم؟



(مرحلهٔ اول دهمین المپیاد کامپیوتر ایران ـ ۱۳۷۸)

۷. آیا جایگشتی از اعداد ۱ تا ۱۹۷۸ وجود دارد به‌طوری که هر دو عدد مجاور و هر دو عددی که فقط یک عدد بین آنها قرار دارد نسبت به هم اول باشند؟
(لنینگراد ـ ۱۹۷۸)

۸. یک شیء در صفحه روی نقاط با مختصات صحیح حرکت می‌کند. در هر گام این شیء یک واحد به سمت راست، چپ، بالا یا پایین می‌رود. اگر این شیء از مبدأ شروع به حرکت کند، پس از ۱۰ مرحله در چند نقطهٔ مختلف از صفحه می‌تواند باشد؟

۱) ۱۲۰ ۲) ۱۲۱ ۳) ۲۲۱ ۴) ۲۳۰ ۵) ۲۳۱
(مسابقهٔ ریاضی دبیرستانی امریکا ـ ۲۰۰۶)

۹. به چند حالت می‌توان یک جدول ۳×۳ را با اعداد ۰ و ۱ پر کرد که تعداد ۱ های موجود در همسایه‌های هر خانه، فرد باشد. دو خانه همسایهٔ یکدیگرند اگر در یک ضلع یا یک گوشه مشترک باشند. پس تعداد همسایه‌ها حداقل ۳ و حداکثر ۸تاست. هیچ خانه‌ای همسایهٔ خودش محسوب نمی‌شود.

۱) ۰ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۸ ۵) ۳۲
(مرحلهٔ اول چهاردهمین المپیاد کامپیوتر ایران ـ ۱۳۸۲)

۱۰. فرض‌کنید A_n مجموعهٔ همهٔ اعداد به فرم $\pm۱\pm۲\pm\cdots\pm n$ باشد. تعداد اعضای A_n را تعیین‌کنید.
(رومانی ـ ۲۰۱۰)

۱۱. فرض‌کنید $x_۱$، $x_۲$، ... و $x_{۲۵}$ عددهای صحیح و $y_۱$، $y_۲$، ... و $y_{۲۵}$ همان عددها منتها با ترتیبی دیگر باشند. ثابت کنید حاصل $(x_۱-y_۱)(x_۲-y_۲)\cdots(x_{۲۵}-y_{۲۵})$ عددی زوج است.
(لنینگراد ـ ۱۹۷۶)

۱۲. فرض کنید $a_۱, a_۲, \ldots, a_{۱۳۷۹}$ جایگشتی از اعداد ۱ تا ۱۳۷۹ باشد، $f_i=|a_i-i|$ و $L=f_۱f_۲\cdots f_{۱۳۷۹}$. با در نظر گرفتن کلیهٔ جایگشت‌ها، L مساوی چند تا از اعداد ۱ تا ۱۰ می‌تواند باشد؟

۱) ۰ ۲) ۳ ۳) ۵ ۴) ۷ ۵) ۱۰
(مرحلهٔ اول هجدهمین المپیاد ریاضی ایران ـ ۱۳۷۸)

۱۳. برای کدام‌یک از مقادیر n می‌توان اعداد ۱ تا n را به دو دسته تقسیم کرد که مجموع اعداد دو دسته برابر باشند؟

۱) ۲۰۰۳ ۲) ۲۰۰۲ ۳) ۱۳۸۲ ۴) ۱۰ ۵) ۹
(مرحلهٔ اول چهاردهمین المپیاد کامپیوتر ایران ـ ۱۳۸۲)

۱۴. n سکه دور یک دایره با فواصل مساوی چیده شده‌اند و در ابتدای کار همهٔ آنها به رو هستند. به ازای هر $i\in\{۱,۲,۳,\ldots,n\}$، دقیقاً یک بار i سکهٔ متوالی دلخواه را انتخاب می‌کنیم

و همهٔ آنها را برمی‌گردانیم. مقدار n برابر کدام‌یک از گزینه‌های زیر باشد تا بتوان این n مرحله را طوری انجام داد که در پایان کار، همهٔ سکه‌ها در وضعیت اولیه (به‌رو) باشند؟

۱) ۲۰۰۹ ۲) ۱۳۹۱ ۳) ۲۰۱۰ ۴) ۱۳۸۹ ۵) ۱۳۹۰

(مرحلهٔ دوم بیستمین المپیاد کامپیوتر ایران ـ ۱۳۸۹)

۱۵. یک nضلعی را «کامل» می‌نامیم اگر به ازای هر عدد صحیح i $(1 \leq i \leq n)$، دقیقاً یک ضلع به طول i داشته باشد و هر دو ضلع مجاور آن بر هم عمود باشند. کمترین عدد n که به ازای آن، nضلعی کامل وجود دارد چند است؟

۱) ۴ ۲) ۶ ۳) ۸ ۴) ۱۲ ۵) ۱۶

(مرحلهٔ اول سیزدهمین المپیاد کامپیوتر ایران ـ ۱۳۸۱)

۱۶. به ازای چه nهایی مجموعهٔ $\{1, 2, \dots, 4n\}$ را می‌توان به n زیرمجموعهٔ ۴ عضوی افراز کرد به‌طوری که در هر زیرمجموعه یک عضو برابر میانگین سه عضو دیگر باشد؟

(هند ـ ۱۹۹۹)

۱۷. خانه‌های یک جدول 4×4 سفید شده‌اند. هر بار می‌توان یک خانه انتخاب و آن را به همراه خانه‌هایی که با آن ضلع مشترک دارند تغییر رنگ دهیم (از سفید به سیاه و از سیاه به سفید). پس از انجام n حرکت از این نوع همهٔ خانه‌های جدول سیاه شده‌اند. ثابت کنید n عددی زوج است.

(رومانی ـ ۲۰۰۹)

۱۸. اعداد ۱ تا ۴۹ در خانه‌های یک جدول 7×7 قرار گرفته‌اند. مجموع اعداد هر سطر و هر ستون را محاسبه می‌کنیم. در بین ۱۴ عدد به‌دست آمده مجموع اعداد فرد را A و مجموع اعداد زوج را B می‌نامیم. آیا ممکن است که A برابر B باشد؟

(بالتیک ـ ۲۰۰۱)

۱۹. ۵۰ عدد طبیعی متمایز نابیشتر از ۱۰۰ داده شده به‌طوری که مجموع آنها عددی زوج است. آیا همواره می‌توان این اعداد را به دو دسته با مجموع برابر تقسیم کرد؟

(تورنمنت شهرها ـ ۲۰۱۱)

۲۰. اعداد ۱ تا ۲۰۱۰ دور یک دایره نوشته شده‌اند به‌طوری که اگر در جهت حرکت عقربه‌های ساعت دور دایره حرکت کنیم اعداد به‌طور متناوب زیاد و کم می‌شوند. ثابت کنید دو عدد مجاور دور دایره یافت می‌شود که تفاضل آنها عددی زوج است.

(تورنمنت شهرها ـ ۲۰۱۱)