تابع نمایی و لگاریتمی

تابع نمایی، معادلات و نامعادلات نمایی

1 - تابع $f(x)=\begin{cases} ۲^{ax} & , \quad x\geq ۰ \\ ۴^{-ax} & , \quad x<۰ \end{cases}$ مفروض است. اگر $f(۲)=۳$ باشد، آن‌گاه $f(-۴)+f(-۶)$ کدام است؟

① ۱۰۲۴ ② ۸۱۰ ③ ۵۱۲ ④ ۷۲۹

پاسخ: گزینه 2

$$f(x)=\begin{cases} ۲^{ax} & , \quad x\geq ۰ \\ ۴^{-ax} & , \quad x<۰ \end{cases} \quad , \quad f(۲)=۳ \Rightarrow ۲^{۲a}=۳ \Rightarrow ۴^{a}=۳$$

$$f(-۴)+f(-۶)=۴^{۴a}+۴^{۶a}=(۴^{a})^{۴}+(۴^{a})^{۶}$$

$$=۳^{۴}+۳^{۶}=۳^{۴}(۱+۳^{۲})=۸۱\times ۱۰=۸۱۰$$

---

2 - اگر $\frac{۱}{۲۰۴۸}=۴^{۲x-۱}$ باشد، آن‌گاه $[x]$ کدام است؟ ($[\ ]$، نماد جزء صحیح است.)

① -۳ ② -۲ ③ ۲ ④ ۳

پاسخ: گزینه 1

$$۴^{۲x-۱}=\frac{۱}{۲^{۱۱}}=۲^{-۱۱} \Rightarrow (۲^{۲})^{۲x-۱}=۲^{-۱۱} \Rightarrow ۲^{۴x-۲}=۲^{-۱۱}$$

$$\Rightarrow ۴x-۲=-۱۱ \Rightarrow ۴x=-۹ \Rightarrow -\frac{۹}{۴}=-۲/۲۵ \Rightarrow [x]=-۳$$

---

3 - کدام یک از گزینه‌های زیر نادرست است؟

① در تابع نمایی $y=a^{x}$ $(۰<a<۱)$، با افزایش x، مقدار y کم می‌شود.

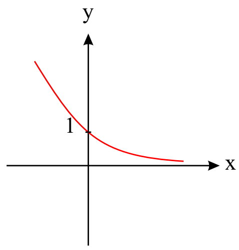
② در تابع نمایی $y=a^{x}$ $(a>۱)$، با افزایش x، مقدار y نیز زیاد می‌شود.

③ در تابع نمایی $y=a^{x}$ $(۰<a<۱)$، برای xهای منفی نسبت به xهای مثبت، با افزایش x، مقدار y با سرعت بیش‌تری کاهش می‌یابد.

④ در تابع نمایی $y=a^{x}$ $(a>۱)$، برای xهای منفی نسبت به xهای مثبت، با افزایش x، مقدار y با سرعت بیش‌تری افزایش می‌یابد.

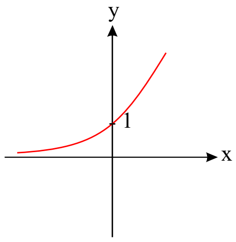
پاسخ: گزینه 4

اگر $۰<a<۱$ باشد، نمودار تابع نمایی $y=a^{x}$ به‌صورت مقابل است:



طبق نمودار، با افزایش x، y کاهش می‌یابد و برای xهای منفی نسبت به xهای مثبت با افزایش x سرعت کاهش y، بیش‌تر است. پس گزینه‌های «۱» و «۳» درست می‌باشند.

همچنین نمودار تابع نمایی $y=a^x$ و $a>1$، به‌صورت مقابل است:



طبق نمودار، با افزایش x، y نیز افزایش می‌یابد و برای xهای مثبت نسبت به xهای منفی با افزایش x، سرعت افزایش y، بیش‌تر است. درواقع برای xهای منفی نسبت به xهای مثبت، سرعت افزایش y کم‌تر است.

بنابراین گزینهٔ «۲» نیز درست است اما گزینهٔ «۴» نادرست می‌باشد.

4- داروها در بدن با ادرار دفع می‌شوند. فرض کنید ۳۰ میلی‌گرم از یک نوع دارو در بدن شخصی قرار دارد و مقدار آن در بدن شخص پس از t ساعت از رابطهٔ $A(t)=30(0{,}9)^t$ به‌دست می‌آید. چه درصدی از دارو پس از ۲ ساعت از بدن او خارج می‌شود؟

① ۹۰   ② ۱۰   ③ ۸۱   ④ ۱۹

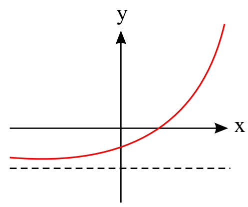
پاسخ: گزینه 4

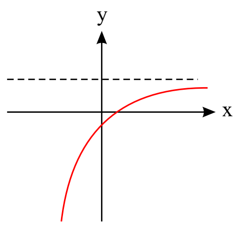
$$A(t)=30(0{,}9)^t \Rightarrow \begin{cases} A(0)=30\times 1=30 \\ A(2)=30(0{,}9)^2=30\times 0{,}81=24{,}3 \end{cases}$$

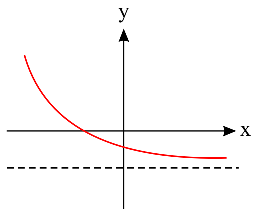
مقدار داروی خارج‌شده پس از ۲ ساعت برابر با $30-24{,}3=5{,}7$ میلی‌گرم است و درصد آن برابر است با:

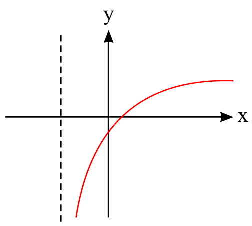
$$\frac{5{,}7}{30}\times 100=19\%$$

5- نمودار تابع $f(x)=2^{x+a}+b$ ، محور طول‌ها را در $x=1$ و محور عرض‌ها را در $y=-\frac{1}{4}$ قطع می‌کند. نمودار آن کدام می‌تواند باشد؟

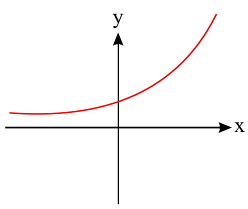
① 

② 

③ 

④ 

پاسخ: گزینه 1 نمودار تابع $y=2^x$ به‌صورت زیر است:



نمودار تابع f ، صرفاً از انتقال $y=2^x$ حاصل می‌شود. بنابراین با توجه به محل تلاقی نمودار تابع f ، با محورهای مختصات، نمودار گزینهٔ «۱» صحیح است.

6- مقدار انرژی آزادشده (E) برحسب ارگ در یک زمین‌لرزه از رابطهٔ $\log E=11{,}8+1{,}5M$ به‌دست می‌آید که در آن M واحد بزرگی زلزله برحسب ریشتر و E انرژی آزادشده است. مقدار انرژی آزاد شده در یک زمین‌لرزهٔ $6{,}2$ ریشتری چند واحد است؟

① $10^{21{,}7}$ ② $10^{21{,}1}$ ③ $10^{21{,}5}$ ④ $10^{21{,}8}$

پاسخ: گزینه 2

$M=۶/۲ \Rightarrow \log E = ۱۱/۸ + ۱/۵ \times ۶/۲ = ۱۱/۸ + ۹/۳ = ۲۱/۱ \Rightarrow E = ۱۰^{۲۱/۱}$

7- اگر نمودار تابع $f(x)=a(b)^x - ۱$، از دو نقطه‌ی $A(-\frac{۱}{۲}, \frac{۱}{۲})$ و $B(۱, ۱۱)$ بگذرد، $f(-۱)$ کدام است؟

① $-\frac{۳}{۴}$ ② $-\frac{۱}{۲}$ ③ $-\frac{۱}{۴}$ ④ $\frac{۳}{۴}$

پاسخ: گزینه 3

دو نقطه‌ی داده شده را در تابع $f(x)=ab^x - ۱$ صدق می‌دهیم.

$$A\left| \begin{matrix} -\frac{۱}{۲} \\ \frac{۱}{۲} \end{matrix} \right. \xrightarrow{\text{صدق}} \frac{۱}{۲} = ab^{-\frac{۱}{۲}} - ۱ \Rightarrow \frac{۳}{۲} = \frac{a}{\sqrt{b}} \Rightarrow \frac{۹}{۴} = \frac{a^۲}{b} \to a^۲ = \frac{۹}{۴}b \to a = \frac{۳}{۲}\sqrt{b}$$

$$B\left| \begin{matrix} ۱ \\ ۱۱ \end{matrix} \right. \xrightarrow{\text{صدق}} ۱۱ = ab - ۱ \Rightarrow ab = ۱۲ \Rightarrow \frac{۳}{۲}\sqrt{b}b = ۱۲$$

$$\Rightarrow b\sqrt{b} = ۸ \Rightarrow b = ۴ \Rightarrow a = ۳$$

پس: $f(x) = ۳ \times ۴^x - ۱ \Rightarrow f(-۱) = ۳ \times ۴^{-۱} - ۱ = \frac{۳}{۴} - ۱ = -\frac{۱}{۴}$

8- معادله‌ی $۴^x - ۶^x = ۲ \times ۹^x$ چند ریشه دارد؟

① هیچ ② ۲ ③ ۱ ④ بیشمار

پاسخ: گزینه 3

$$۴^x - ۶^x = ۲ \times ۹^x \Rightarrow ۲^{۲x} - ۲^x \times ۳^x = ۲ \times ۳^{۲x} \xrightarrow{\div ۳^{۲x}} \frac{۲^{۲x}}{۳^{۲x}} - \frac{۲^x}{۳^x} = ۲ \Rightarrow (\frac{۲}{۳})^{۲x} - (\frac{۲}{۳})^x = ۲$$

$$\xrightarrow{(\frac{۲}{۳})^x = t} t^۲ - t - ۲ = ۰ \xrightarrow{a+c=b} \begin{cases} t = -۱ \to (\frac{۲}{۳})^x = -۱ \to \text{امکان ندارد.} \\ t = -\frac{c}{a} = ۲ \to (\frac{۲}{۳})^x = ۲ \to \text{امکان‌پذیر است.} \end{cases}$$

پس معادله یک ریشه دارد.

9- فاصله‌ی نقطه‌ی تلاقی دو منحنی به معادلات $y=۲^x$ و $y=(\sqrt{۲})^{x+۱}+۴$ ، از نقطه‌ی $A(۰, ۴)$ کدام است؟

① ۲ ② ۳ ③ ۴ ④ ۵

پاسخ: گزینه 4 باید دو منحنی داده شده را با هم تلاقی دهیم و نقطه‌ی تلاقی را بدست آوریم.

$$۲^x = (\sqrt{۲})^{x+۱} + ۴ \to ۲^x = (۲^{\frac{۱}{۲}})^{x+۱} + ۴ \to ۲^x = (۲^{x+۱})^{\frac{۱}{۲}} + ۴$$

$$\to ۲^x = (۲^x \times ۲)^{\frac{۱}{۲}} + ۴ \xrightarrow{۲^x = A} A = \sqrt{۲A} + ۴ \to A - ۴ = \sqrt{۲A}$$

$$\xrightarrow{\text{توان ۲}} A^۲ - ۸A + ۱۶ = ۲A \to A^۲ - ۱۰A + ۱۶ = ۰ \to (A-۸)(A-۲) = ۰$$

$$\to \begin{cases} A = ۸ \to ۲^x = ۸ \to x = ۳ \xrightarrow{y=۲^x} y = ۸ \\ A = ۲ \quad \text{غ ق ق} \quad \text{(در معادله‌ی رادیکالی صدق نمی‌کند)} \end{cases}$$

حال باید فاصله‌ی نقطه‌ی $A\begin{vmatrix}0\\4\end{vmatrix}$ را از $B\begin{vmatrix}3\\8\end{vmatrix}$ حساب کنیم.

$$AB=\sqrt{(0-3)^2+(4-8)^2}=\sqrt{9+16}=\sqrt{25}=5$$

---

10 - نمودار یک تابع به‌صورت $f(x)=3^{Ax+B}$، نمودار تابع $y=x^2$ را در دو نقطه به طول‌های ۱ و ۳ قطع می‌کند. عرض نقطهٔ تلاقی تابع f با محور yها، کدام است؟

① $\frac{1}{27}$ ② $\frac{1}{9}$ ③ $\frac{1}{3}$ ④ $\sqrt{3}$

پاسخ: گزینه 3

$$y=x^2 \Rightarrow \begin{cases} x=1 \Rightarrow y=1 \Rightarrow M(1,1) \\ x=3 \Rightarrow y=9 \Rightarrow N(3,9) \end{cases}$$

نقاط M و N در تابع $f(x)=3^{Ax+B}$ صدق می‌کنند، پس داریم:

$$f(1)=1 \Rightarrow 3^{A+B}=1 \Rightarrow A+B=0 \quad , \quad f(3)=9 \Rightarrow 3^{3A+B}=9 \Rightarrow 3A+B=2$$

$$-\begin{cases} A+B=0 \\ 3A+B=2 \end{cases}$$
$$2A=2 \Rightarrow A=1 \Rightarrow B=-1$$

$$\Rightarrow f(x)=3^{x-1} \Rightarrow f(0)=3^{-1}=\frac{1}{3}$$

---

11 - حدود a کدام باشد تا تابع نمایی $(|a+2|-1)^x$ اکیداً نزولی باشد؟

① $(-2\,,\,-1)\cup(1\,,\,2)$ ② $(-3\,,\,-2)\cup(-1\,,\,0)$ ③ $(-4\,,\,-3)\cup(-1\,,\,0)$ ④ $(-4\,,\,-3)\cup(1\,,\,2)$

پاسخ: گزینه 3 تابع نمایی $y=a^x$ وقتی اکیداً نزولی است که $0<a<1$ باشد.

پس شرط این که تابع نمایی مورد نظر، اکیداً نزولی باشد، این است که $0<|a+2|-1<1$ باشد پس:

$$0<|a+2|-1<1 \Rightarrow 1<|a+2|<2 \ \rightarrow \begin{cases} |a+2|>1 \rightarrow \begin{cases} a+2>1 \rightarrow a>-1 \\ \text{یا} \\ a+2<-1 \rightarrow a<-3 \end{cases} \\ |a+2|<2 \rightarrow -2<a+2<2 \rightarrow -4<a<0 \end{cases}$$

از اشتراک جواب‌های بدست‌آمده به جواب $-4<a<-3 \cup -1<a<0$ می‌رسیم.

---

12 - کدام گزینه در مورد تابع $y=a^x$ $(0<a<1)$ درست است؟

① دامنهٔ تابع ، مجموعه اعداد حقیقی و برد آن اعداد نامنفی است.

② معکوس‌پذیر است و نمودار تابع معکوسش را در یک نقطه قطع می‌کند.

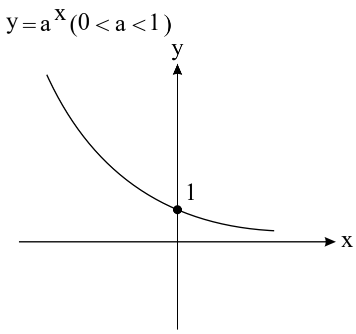
③ نمودار آن قرینهٔ نمودار تابع $y=a^{-x}$ نسبت به محور x ها است.

④ شیب خط گذرنده از هر دو نقطهٔ نمودار، مثبت است.

پاسخ: گزینه 2 بررسی گزینه‌ها:

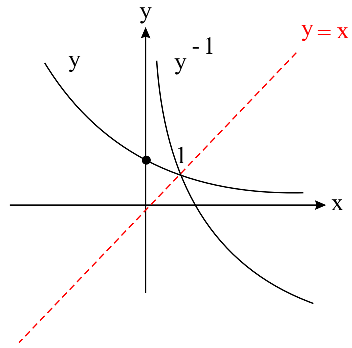
گزینهٔ ۱ :

توابع نهایی (درحالت کلی) محدودیتی برای x ندارند، پس دامنهٔ آن‌ها $\mathbb{R}$ است. برد تابع نهایی با ضابطهٔ $y=a^x \ (0<a<1)$ برابر $(0,+\infty)$ است، اما در گزینهٔ ۱ برد تابع اعداد نامنفی $[0,+\infty)$ بیان شده است. پس این گزینه نادرست است.



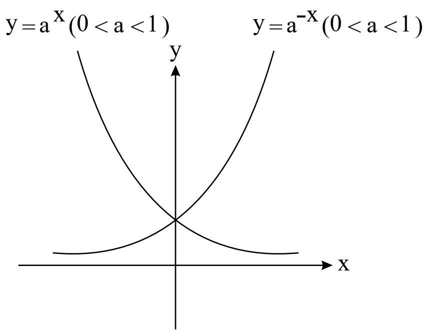
گزینهٔ ۲ :

هر خط به موازات محور x ها نمودار تابع را حداکثر در یک نقطه قطع می‌کند. بنابراین این تابع یک به یک و معکوس‌پذیر است:
برای رسم معکوس یک تابع معکوس‌پذیر، کافی است نمودار آن را نسبت به نیمساز ناحیهٔ اول و سوم ($y = x$) قرینه کنیم. همانطور که در نمودار مشخص است این تابع وارونش در یک نقطه (روی خط $y = x$) یکدیگر را قطع می‌کنند. پس این گزینه درست است.



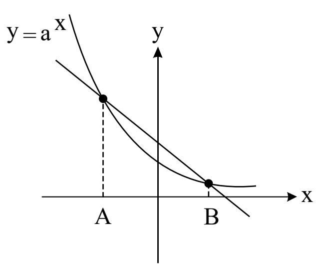
گزینهٔ ۳ :

نمودار تابع $y = a^x$ $(۰ < a < ۱)$ و $y = a^{-x}$ ، نسبت به محور y ها قرینه‌اند.



گزینهٔ ۴ :

دو نقطهٔ دلخواه A و B را در نظر بگیرید؛ همانطور که در شکل روبه‌رو واضح است، شیب خط گذرنده از هر دو نقطهٔ نمودار، منفی است.



13 - کدام‌یک از جداول مربوط به مقادیر ورودی و خروجی یک تابع نمایی است؟

① $\begin{array}{c|ccc} x & ۰ & ۱ & ۲ \\ \hline y & ۴ & ۸ & ۱۲ \end{array}$ ② $\begin{array}{c|ccc} x & ۲ & ۴ & ۸ \\ \hline y & ۹ & ۱۰ & ۱۱ \end{array}$ ③ $\begin{array}{c|ccc} x & -۱ & ۰ & ۳ \\ \hline y & ۱۶ & ۸ & ۱ \end{array}$ ④ $\begin{array}{c|ccc} x & ۰ & ۱ & ۲ \\ \hline y & ۲۵ & -۵ & ۱ \end{array}$

پاسخ: گزینه 3 روش اول:

باید متغیر x دنبالهٔ حسابی و متغیر y دنبالهٔ هندسی تشکیل دهند. همچنین مقادیر متغیر y نباید منفی باشند، زیرا برد تابع نمایی، شامل مقادیر مثبت است.

پس گزینهٔ «۱» مردود است، زیرا مقادیر x دنبالهٔ حسابی می‌سازند، ولی مقادیر y دنبالهٔ هندسی تشکیل نمی‌دهند.

گزینهٔ «۴» مردود است، زیرا مقادیر x دنبالهٔ حسابی و مقادیر y دنبالهٔ هندسی می‌سازند، ولی y مقادیر منفی را نیز اختیار می‌کند.

گزینهٔ «۲» مردود است، زیرا امکان این‌که مقادیر x، جملات یک دنباله حسابی و مقادیر y جملات یک دنبالهٔ هندسی باشند، وجود ندارد.

گزینهٔ «۳» صحیح است، زیرا اگر جملات ۱− و ۰ و ۳ جملات یک دنبالهٔ حسابی باشند، جملات ۱۶ و ۸ و ۱ می‌توانند جملات یک دنبالهٔ هندسی باشند، زیرا:

$$\begin{array}{c|ccccc} & \multicolumn{5}{c}{+1 \quad +1 \quad +1 \quad +1} \\ x & -1 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ \hline y & 16 & 8 & 4 & 2 & 1 \\ & \multicolumn{5}{c}{\times\frac{1}{2} \quad \times\frac{1}{2} \quad \times\frac{1}{2} \quad \times\frac{1}{2}} \end{array}$$

روش دوم:

صورت کلی توابع نمایی به‌صورت $y = a \cdot b^x$ است. دو نقطهٔ ابتدایی هر گزینه را برای به‌دست آوردن a و b در معادله قرار می‌دهیم. مختصات نقطهٔ سوم اگر در معادله صدق کرد، تابع نمایی است.

گزینهٔ ۱:

$x = ۰, y = ۴ \Rightarrow ۴ = a \cdot b^{۰} \Rightarrow a = ۴$

$x = ۱, y = ۸ \Rightarrow ۸ = ۴ \cdot b^{۱} \Rightarrow b = ۲$

$x = ۲, y = ۱۲ \Rightarrow ۱۲ \neq ۴ \times ۲^{۲} \Rightarrow$ تابع نمایی نیست.

گزینهٔ ۲:

$x = ۲, y = ۹ \Rightarrow ۹ = a \cdot b^{۲}$

$x = ۴, y = ۱۰ \Rightarrow ۱۰ = a \cdot b^{۴}$ $\Rightarrow b^{۲} = \frac{۱۰}{۹}, a = \frac{۸۱}{۱۰}$

$x = ۸\ ,\ y = ۱۱ \Rightarrow ۱۱ \neq \frac{۸۱}{۱۰} \cdot (\frac{۱۰}{۹})^{۴} \Rightarrow$ تابع نمایی نیست

گزینهٔ ۳:

$x = -۱, y = ۱۶ \Rightarrow ۱۶ = a \cdot b^{-۱}$

$x = ۰, y = ۸ \Rightarrow ۸ = a \cdot b^{۰}$ $\Rightarrow a = ۸, b = \frac{۱}{۲}$

$x = ۳, y = ۱ \Rightarrow ۱ = ۸ \cdot (\frac{۱}{۲})^{۳} \Rightarrow$ تابع نمایی است.

در توابع نمایی بنا به ضابطه، برد فقط شامل اعداد مثبت است یا فقط اعداد منفی و تناوبی مثبت و منفی نمی‌شود، درنتیجه گزینهٔ ۴ نمی‌تواند تابع نمایی باشد.

14 - نمودارهای دو تابع $f(x)=4^x$ و $g(x)=(\frac{1}{2})^{2x}+\frac{3}{2}$ در نقطه‌ی A متقاطع‌اند. فاصله‌ی نقطه‌ی A تا نقطه‌ی $(-\frac{1}{2}\ ,\ 1)$ ، کدام است؟

① ۱ ② $\sqrt{2}$ ③ 2 ④ $\sqrt{5}$

پاسخ: گزینه 2 محل تلاقی از حل معادله‌ی $f(x)=g(x)$ بدست می‌آید.

$$f(x)=g(x)\rightarrow 4^x=(\frac{1}{2})^{2x}+\frac{3}{2}\rightarrow 4^x=\frac{1}{4^x}+\frac{3}{2}\ ,\ 4^x=k\Rightarrow$$

$$k=\frac{1}{k}+\frac{3}{2}\rightarrow 2k^2=2+3k\rightarrow 2k^2-3k-2=0\rightarrow \Delta=9+16=25$$

$$\rightarrow k=\frac{3\pm 5}{4}\rightarrow \begin{cases} k=2\rightarrow 4^x=2\rightarrow 2^{2x}=2\rightarrow 2x=1\rightarrow x=\frac{1}{2}\rightarrow y=f(\frac{1}{2})=4^{\frac{1}{2}}=\sqrt{4}=2 \\ k=-\frac{1}{2}\rightarrow 4^x=-\frac{1}{2} \quad \text{غ.ق.ق} \end{cases}$$

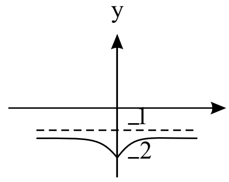
$$\begin{cases} A=(\frac{1}{2}, 2) \\ B=(-\frac{1}{2}, 1) \end{cases} \rightarrow |AB|=\sqrt{1+1}=\sqrt{2}$$

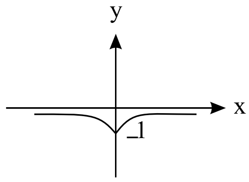
توجه: اگر $A\left|\begin{matrix} x_1 \\ y_1 \end{matrix}\right.$ و $B\left|\begin{matrix} x_2 \\ y_2 \end{matrix}\right.$ آنگاه:

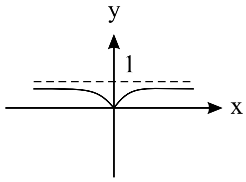
$$d_{AB}=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$$

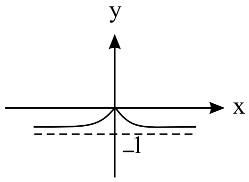
---

15 - نمودار تابع $y=\left|(0/2)^{|x|}-1\right|-1$ کدام است؟

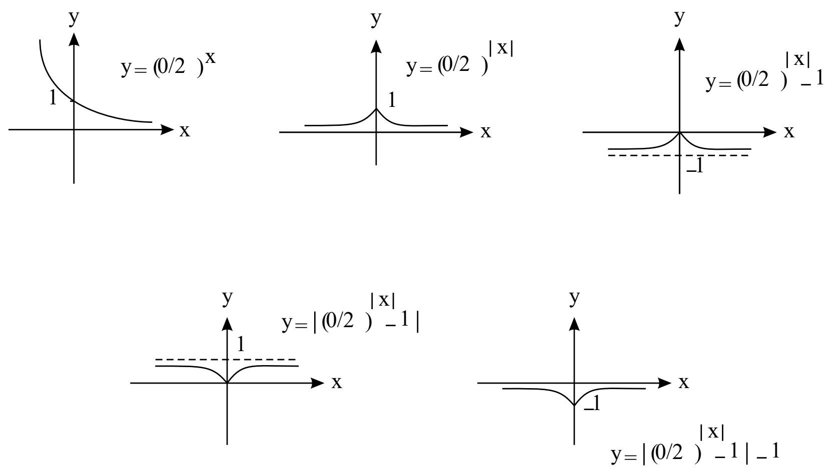
① 

② 

③ 

④ 

پاسخ: گزینه 2 برای رسم $f(|x|)$ از روی $f(x)$ باید سمت چپ محور yها را حذف کرده و قرینه‌ی سمت راست محور yها را نسبت به محور yها به شکل اضافه کرد.



16- چه تعداد از توابع زیر، تابع نمایی هستند؟

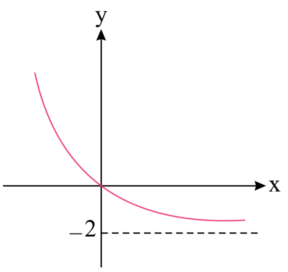
الف) $f(x)=(0/1)^x$ ب) $f(x)=(-3)^{2x-1}$ ج) $f(x)=(\sqrt{2})^{x+1}$ د) $f(x)=(2x+1)^{x+2}$

هـ) $f(x)=(\tan x\cdot\cot x)^x$ و) $f(x)=(\sqrt{x})^{\frac{1}{2}}$ ز) $f(x)=(\frac{2\pi}{3})^{4x+2}$ ح) $f(x)=(\sin 5\pi)^{x+3}$

① ۳ ② ۴ ③ ۵ ④ ۶

پاسخ: گزینه 1 بنا به تعریف، هر تابع با ضابطهٔ $f(x)=a^x$ که در آن $a\in\mathbb{R}$ و $a>0$ و $a\neq 1$ است یک تابع نمایی نامیده می‌شود. یعنی باید پایه تابع نمایی عددی ثابت و مثبت و مخالف ۱ باشد و توان آن دارای متغیر x باشد. فقط موارد «الف» و «ج» و «ز» تابع نمایی هستند، زیرا در قسمت «ب» پایه منفی است و در قسمت‌های «د» و «و» پایهٔ تابع، عدد ثابت نیست. همچنین در قسمت «هـ» پایه، عدد ثابت 1 است و در قسمت «ح» پایه، عدد ثابت صفر است.

17- نمودار تابع $f(x)=a+2^{-2x+b}$ به صورت مقابل است. مقدار $f(-2)$ چقدر است؟



① ۳۰
② ۱۴
③ ۶
④ ۲

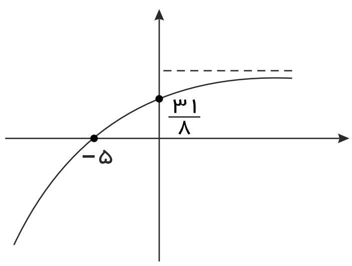
پاسخ: گزینه 1

$y=-2$ مجانب افقی $\Rightarrow a=-2$

$f(0)=0\Rightarrow -2+2^b=0\Rightarrow b=1$

$f(x)=-2+2^{-2x+1}\Rightarrow f(-2)=30$

18- نمودار تابع $f(x)=a-\dfrac{1}{2^{x+b}}$ در شکل مقابل رسم شده است. مقدار ab کدام است؟



① ۶ ② ۸

③ ۱۲ ④ ۱۶

پاسخ: گزینه 3 نمودار تابع از نقطهٔ $(0,\frac{31}{8})$ عبور می‌کند، پس:

$$f(0)=\frac{31}{8}\Rightarrow a-\frac{1}{2^b}=\frac{31}{8}\Rightarrow a=\frac{31}{8}+(\frac{1}{2})^b \qquad (1)$$

نمودار تابع از نقطهٔ $(-5,0)$ عبور می‌کند، پس:

$$f(-5)=0\Rightarrow a-\frac{1}{2^{-5+b}}=0\Rightarrow a=(\frac{1}{2})^{b-5} \qquad (2)$$

از دو معادلهٔ (1) و (2) نتیجه می‌شود:

$$\frac{31}{8}+(\frac{1}{2})^b=32(\frac{1}{2})^b\Rightarrow 31(\frac{1}{2})^b=\frac{31}{8}\Rightarrow(\frac{1}{2})^b=\frac{1}{8}\Rightarrow b=3$$

$$\Rightarrow a=\frac{31}{8}+(\frac{1}{2})^3=\frac{31}{8}+\frac{1}{8}=4$$

بنابراین: $ab=12$.

---

19 - نمودارهای دو تابع $y=(\frac{\sqrt{3}}{3})^{2x}$ و $y=3^x+\frac{8}{3}$ در نقطه‌ی A متقاطع‌اند. فاصله‌ی نقطه‌ی A از نقطه‌ی $(-1,1)$ کدام است؟

① ۱ ② $\sqrt{2}$ ③ ۲ ④ $\sqrt{5}$

پاسخ: گزینه 3 برای محاسبه‌ی نقطه‌ی برخورد باید دو تابع را قطع دهیم و می‌دانیم:

$$y=(\frac{\sqrt{3}}{3})^{2x}=(\frac{3^{\frac{1}{2}}}{3^1})^{2x}=(3^{-\frac{1}{2}})^{2x}=3^{-x}$$

$$3^x+\frac{8}{3}=3^{-x}\to 3^x+\frac{8}{3}=\frac{1}{3^x}$$

با تغییر متغیر $3^x=t$ این معادله‌ی تلاقی به یک معادله‌ی درجه‌ی دوم تبدیل می‌شود.

$$t+\frac{8}{3}=\frac{1}{t}\xrightarrow[\text{می‌کنیم}]{\text{طرفین را در } t \text{ ضرب}}t^2+\frac{8}{3}t-1=0\to 3t^2+8t-3=0$$

$$\Delta=64-4(3)\cdot(-3)=100\to t=\frac{-8\pm 10}{2(3)}\to t_1=-3\ ,\ t=\frac{1}{3}$$

چون $t=3^x>0$ است پس فقط $t=\frac{1}{3}$ مورد قبول است.

$$t=3^x=\frac{1}{3}=3^{-1}\Rightarrow x=-1\to y=3\Rightarrow A\left|\begin{matrix}-1\\3\end{matrix}\right. \quad \text{نقطه‌ی برخورد}$$

$$d=\sqrt{(-1+1)^2+(3-1)^2}=2 \quad (-1,1) \quad \text{فاصله‌ی نقطه‌ی برخورد دو منحنی تا نقطه‌ی}$$

---

20 - مجموعه جواب نامعادلهٔ $3^{x^2-|x|}\leq(\frac{\sqrt{3}}{3})^{4-4x}$ شامل چند عدد طبیعی است؟

① ۱ ② ۲ ③ ۳ ④ صفر

پاسخ: گزینه 2 در دو طرف نامعادله پایه را به عدد ۳ تبدیل می‌کنیم.

$$3^{x^2-|x|}\leq(\frac{3^{\frac{1}{2}}}{3})^{4-4x}\Rightarrow 3^{x^2-|x|}\leq(3^{-\frac{1}{2}})^{4-4x}\Rightarrow 3^{x^2-|x|}\leq 3^{2x-2}\xrightarrow{3>1}x^2-|x|\leq 2x-2$$

برای حل نامعادلهٔ فوق دو حالت زیر را در نظر می‌گیریم:

$x < 0 \Rightarrow x^2 - (-x) \leq 2x - 2 \Rightarrow x^2 - x + 2 \leq 0$

$\Delta = (-1)^2 - 4 \times 1 \times 2 = 1 - 8 = -7 \quad \Rightarrow x^2$ ضریب $= 1 > 0 \Rightarrow$ عبارت همواره مثبت $x^2 - x + 2$

پس نامعادلهٔ فوق جواب ندارد.

$x \geq 0 \Rightarrow x^2 - x \leq 2x - 2 \Rightarrow x^2 - 3x + 2 \leq 0 \Rightarrow (x-1)(x-2) \leq 0 \Rightarrow 1 \leq x \leq 2$

$\Rightarrow$ اعداد طبیعی : $1, 2$

21- فرض کنید برد تابع $f(x) = 2^{\sqrt[3]{9\cos^2(x)-1}} - 2^{\sqrt[3]{1-9\cos^2(x)}}$ به‌صورت $[a,b]$ باشد مقدار $b-a$ کدام است؟

① $\frac{9}{4}$ ② $\frac{15}{4}$ ③ $\frac{9}{2}$ ④ $\frac{21}{4}$

پاسخ: گزینه 4

$0 \leq \cos^2 x \leq 1 \Rightarrow 0 \leq 9\cos^2 x \leq 9 \Rightarrow -1 \leq 9\cos^2 x - 1 \leq 8 \Rightarrow -1 \leq \underbrace{\sqrt[3]{9\cos 2x - 1}}_{t} \leq 2$

$\Rightarrow -1 \leq t \leq 2$

$f(x) = 2^t - 2^{-t}$

تابع 2^t همواره صعودی است و تابع 2^{-t} همواره نزولی است پس تابع -2^{-t} نیز همواره صعودی است. پس می‌توان نتیجه گرفت تابع $f(x)$ یک تابع صعودی است.

کمترین مقدار تابع : $t = -1 \Rightarrow 2^{-1} - 2^1 = \frac{1}{2} - 2 = -\frac{3}{2}$

بیشترین مقدار تابع : $t = 2 \Rightarrow 2^2 - 2^{-2} = 4 - \frac{1}{4} = \frac{15}{4}$

$\Rightarrow [-\frac{3}{2}, \frac{15}{4}]$

$\Rightarrow b - a = \frac{15}{4} - (-\frac{3}{2}) = \frac{21}{4}$

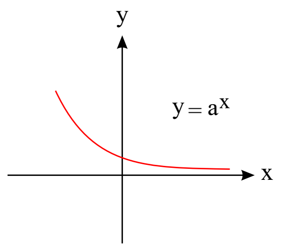
توجه: اگر تابع پیوسته $f(x)$ در بازهٔ $[a,b]$ اکیداً صعودی باشد آنگاه برد تابع برابر است با:

$R_f = [f(a)\ ,\ f(b)]$

22- به‌ازای چند مقدار صحیح m، تابع $f(x) = (\frac{3m+1}{4})^x$ نزولی است؟

① ۱ ② ۲ ③ ۳ ④ هیچ مقدار m

پاسخ: گزینه 2 تابع $y = a^x$ به‌ازای $0 < a < 1$ اکیداً نزولی است و به صورت

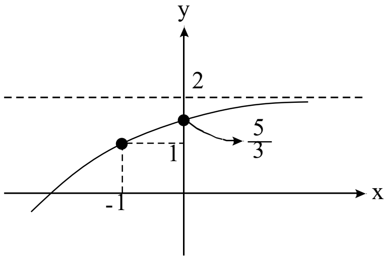


است و به‌ازای $a = 0$ و $a = 1$ تابع ثابت و درنتیجه هم صعودی و هم نزولی است پس برای آنکه تابع داده شده نزولی باشد باید:

$0 \leq \frac{3m+1}{4} \leq 1 \rightarrow 0 \leq 3m+1 \leq 4 \rightarrow -1 \leq 3m \leq 3 \rightarrow \frac{-1}{3} \leq m \leq 1$

که در این بازه، اعداد صحیح صفر و یک قرار دارند.

23- نمودار تابع نمایی $y = a - b^{x+c}$ مطابق شکل زیر است. حاصل $3b + a + c$ کدام است؟



① ۶

② ۵

③ ۴

④ ۳

پاسخ: گزینه 3 نمودار تابع داده شده قرینهٔ یک تابع نمایی نزولی نسبت به محور xها است که دو واحد به بالا انتقال داده شده است، پس $a = 2$، لذا خواهیم داشت:

$$y = 2 - b^{x+c}$$

نقاط $\left|\begin{matrix}-1\\1\end{matrix}\right.$ و $\left|\begin{matrix}0\\\frac{5}{3}\end{matrix}\right.$ روی نمودار تابع قرار دارند، بنابراین:

$$\left|\begin{matrix}0\\\frac{5}{3}\end{matrix}\right. \xrightarrow{\text{صدق}} \frac{5}{3} = 2 - b^{0+c} \Rightarrow b^c = \frac{1}{3} \quad (\star)$$

$$\left|\begin{matrix}-1\\1\end{matrix}\right. \xrightarrow{\text{صدق}} 1 = 2 - b^{-1+c} \Rightarrow b^{-1+c} = 1 \Rightarrow b^{-1} \times b^c = 1 \xrightarrow{(\star)} \frac{1}{3}b^{-1} = 1 \Rightarrow b = \frac{1}{3}\ ,\ c = 1$$

درنتیجه:

$$3b + a + c = 3 \times \frac{1}{3} + 2 + 1 = 4$$

24- معادلهٔ $2^{3x} = x^6$ چند ریشهٔ مثبت دارد؟

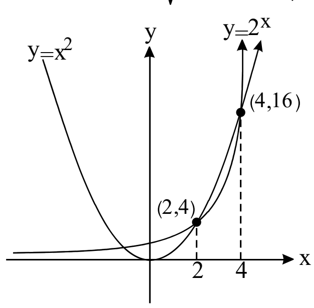
① ۱ ② ۲ ③ ۳ ④ ۴

پاسخ: گزینه 2

از دو طرف ریشهٔ سوم می‌گیریم:

$$\sqrt[3]{2^{3x}} = \sqrt[3]{x^6} \to 2^x = x^2$$

با توجه به شکل مقابل، این معادله دو ریشهٔ مثبت دارد:



25- برد تابع $f(x) = 2^{x+1} - \frac{4^x - 16}{2^x + 4}$ به‌صورت $(a, +\infty)$ است. مقدار a کدام است؟

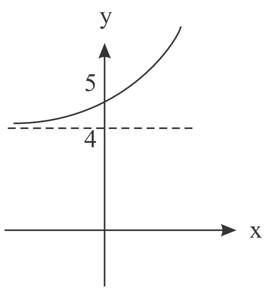
① ۲ ② صفر ③ ۴ ④ -4

پاسخ: گزینه 3 دامنهٔ تابع $f(x) = 2^{x+1} - \frac{4^x - 16}{2^x + 4}$ مجموعهٔ اعداد حقیقی است و داریم:

$$f(x)=2^{x+1}-\frac{(2^x)^2-4^2}{2^x+4}=2^{x+1}-\frac{(2^x-4)(2^x+4)}{2^x+4}=2^{x+1}-2^x+4$$

$$f(x)=2^x(2-1)+4=2^x+4$$

مطابق نمودار تابع f، بُرد آن $(4,+\infty)$ است، پس مقدار a برابر با ۴ است.



26- برد تابع $f(x)=\sqrt{4-3^{-x}}$ کدام است؟

① $(0,2)$ ② $[0,4)$ ③ $[0,2)$ ④ $[0,4]$

پاسخ: گزینه 3

$$f(x)=\sqrt{4-3^{-x}}\Rightarrow \text{شرط رادیکال}:\ 4-3^{-x}\geq 0\quad (1)$$

$$\text{می‌دانیم}:\ 3^{-x}=\left(\frac{1}{3}\right)^x>0\Rightarrow -3^{-x}<0\Rightarrow 4-3^{-x}<4\quad (2)$$

$$(1)\cap(2)\Rightarrow 0\leq 4-3^{-x}<4\Rightarrow 0\leq\sqrt{4-3^{-x}}<2\Rightarrow 0\leq f(x)<2\Rightarrow R_f=[0,2)$$

27- اگر مجموعه جواب نامعادلهٔ $(\sqrt{5}-2)^{x^2}>(\sqrt{5}+2)^{3x-4}$، بازهٔ (a,b) باشد، حاصل $b-a$ کدام است؟

① ۲ ② ۳ ③ ۴ ④ ۵

پاسخ: گزینه 4 حاصل‌ضرب دو عدد $\sqrt{5}-2$ و $\sqrt{5}+2$ برابر ۱ است، پس این دو عدد وارون یکدیگرند، پس $(\sqrt{5}-2)=(\sqrt{5}+2)^{-1}$

$$(\sqrt{5}-2)^{x^2}>(\sqrt{5}+2)^{3x-4}\Rightarrow(\sqrt{5}+2)^{-x^2}>(\sqrt{5}+2)^{3x-4}$$

$$\xrightarrow{(\sqrt{5}+2)>1}-x^2>3x-4\Rightarrow x^2+3x-4<0\Rightarrow(x+4)(x-1)<0\Rightarrow -4<x<1$$

پس:

$$b-a=1-(-4)=5$$

28- در تابع $f(x)=m\cdot a^x$ که رفتار نمایی دارد، اگر $f(3)=2$ و $f(11)=16$ باشد، مقدار $f(7)$ کدام است؟

① $8\sqrt{2}$ ② ۸ ③ ۴ ④ $4\sqrt{2}$

پاسخ: گزینه 4

$$f(x)=m\cdot a^x\Rightarrow f(3)=m\cdot a^3=2\ ,\ f(11)=m\cdot a^{11}=16\Rightarrow m\cdot a^3\times m\cdot a^{11}=2\times 16$$

$$\Rightarrow m^2\cdot a^{14}=32\Rightarrow(m\cdot a^7)^2=32\Rightarrow m\cdot a^7=\pm\sqrt{32}=\pm 4\sqrt{2}$$

در تابع نمایی $f(x)=m\cdot a^x$ باید $a>0$ و چون $m\cdot a^3=2$ پس قطعاً m هم مثبت است بنابراین داریم:

$$m\cdot a^7=4\sqrt{2}\ ,\quad f(7)=m\cdot a^7=4\sqrt{2}$$

۲۹- در یک آزمایش تکثیر سلول، تعداد سلول‌ها پس از گذشت t ساعت از رابطهٔ $A(t) = ka^t$ به‌دست می‌آید. در شروع آزمایش تعداد سلول‌ها ۴ است و بعد از مدت ۲ ساعت تعداد سلول‌ها ۳۶ می‌شود. چند ساعت بعد از شروع آزمایش تعداد سلول‌های موجود به ۲۹۱۶ خواهد رسید؟

(۱) ۴ (۲) ۶ (۳) ۸ (۴) ۹

پاسخ: گزینه 2

$$A(t) = ka^t \xrightarrow[t=۰]{\text{زمان شروع آزمایش}} A(۰) = ka^۰ \Rightarrow A(۰) = k$$

با توجه به صورت سوال در شروع آزمایش تعداد ۴ سلول موجود است، بنابراین:

$$k = ۴ \Rightarrow A(t) = ۴a^t$$

$$\xrightarrow[A(۲)=۳۶]{\text{بعد از گذشت ۲ ساعت}} A(۲) = ۴a^۲ \Rightarrow ۳۶ = ۴a^۲ \Rightarrow a^۲ = ۹ \xrightarrow[a\neq ۱]{a>۰} a = ۳ \Rightarrow A(t) = ۴ \times ۳^t$$

$$\xrightarrow[\text{تعداد سلول‌ها ۲۹۱۶}]{\text{بعد از گذشت } t \text{ ساعت}} A(t) = ۲۹۱۶ \Rightarrow ۴ \times ۳^t = ۲۹۱۶ \Rightarrow ۳^t = ۷۲۹ \Rightarrow t = ۶$$

توجه $a > ۰$ زیرا تعداد سلول‌ها نمی‌تواند عددی منفی باشد.

۳۰- مقدار یک ماده بعد از هر دورهٔ ۵ ساله ۲۰ درصد کاهش می‌یابد. اگر بعد از ۱۵ سال، ۱۹۲ گرم از آن باقی مانده باشد، مقدار اولیهٔ آن برحسب گرم کدام است؟

(۱) ۲۷۵ (۲) ۳۲۵ (۳) ۳۷۵ (۴) ۴۲۵

پاسخ: گزینه 3 ۲۰ درصد کاهش یعنی ۸۰ درصد آن باقی می‌ماند. پس اگر n را تعداد دوره و $A_\circ$ را مقدار اولیهٔ آن ماده درنظر بگیریم، مقدار آن بعد از n دوره از رابطهٔ زیر به دست می‌آید

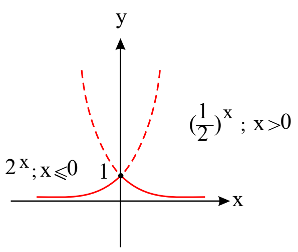
$$A_n = A_\circ \times (۰٫۸)^n \Rightarrow ۱۹۲ = A_\circ \times (۰٫۸۰)^{\frac{۱۵}{۵}} \Rightarrow A_\circ = ۱۹۲ \times (\frac{۵}{۴})^۳ \Rightarrow A_\circ = ۳۷۵ \quad \text{گرم}$$

۳۱- کدام خط، نمودار تابع $f(x) = \begin{cases} ۲^x & ; x \leq ۰ \\ (\frac{۱}{۲})^x & ; x > ۰ \end{cases}$ را در نقاط بیش‌تری قطع می‌کند؟

(۱) $y = ۰$ (۲) $y = \frac{۱}{۲}$ (۳) $y = ۱$ (۴) $y = ۲$

پاسخ: گزینه 2

نمودار تابع دوضابطه‌ای $f(x) = \begin{cases} ۲^x & ; x \leq ۰ \\ (\frac{۱}{۲})^x & ; x > ۰ \end{cases}$ را رسم می‌کنیم:



خط‌های $y = ۰$ و $y = ۲$ نمودار f را قطع نمی‌کنند.

خط $y = ۱$ در یک نقطه و خط $y = \frac{۱}{۲}$ در دو نقطه نمودار f را قطع می‌کنند.

پس خط $y = \frac{۱}{۲}$ در بین گزینه‌ها بیش‌ترین نقاط برخورد را با تابع f دارد.

32 - اگر نقطهٔ (a,b) محل تلاقی نمودارهای دو تابع $y=9(\frac{\sqrt{6}}{2})^{4x}+1$ و $y=12(\frac{3}{2})^{x}-3$ باشد، مقدار $a+b$ کدام است؟

① ۱ ② ۲ ③ ۳ ④ ۴

پاسخ: گزینه 4 برای یافتن محل تلاقی دو تابع، ضابطهٔ آن‌ها را برابر باهم قرار می‌دهیم.

$$y=9(\frac{\sqrt{6}}{2})^{4x}+1\ ,\ y=12(\frac{3}{2})^{x}-3\Rightarrow 9(\frac{\sqrt{6}}{2})^{4x}+1=12(\frac{3}{2})^{x}-3$$

$$\Rightarrow 9((\frac{\sqrt{6}}{2})^{2})^{2x}+4=12(\frac{3}{2})^{x}\Rightarrow 9(\frac{6}{4})^{2x}+4=12(\frac{3}{2})^{x}$$

$$9((\frac{3}{2})^{x})^{2}+4=12(\frac{3}{2})^{x}\ ,\ (\frac{3}{2})^{x}=A\Rightarrow 9A^{2}+4=12A$$

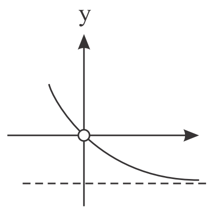
$$\Rightarrow 9A^{2}-12A+4=0\Rightarrow (3A-2)^{2}=0\Rightarrow 3A-2=0\Rightarrow A=\frac{2}{3}$$

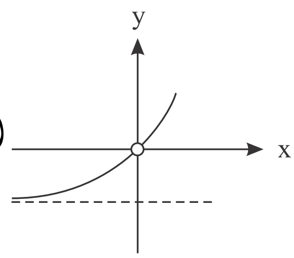
$$\Rightarrow (\frac{3}{2})^{x}=\frac{2}{3}=(\frac{3}{2})^{-1}\Rightarrow x=-1\Rightarrow y=12(\frac{3}{2})^{-1}-3=12(\frac{2}{3})-3=5$$

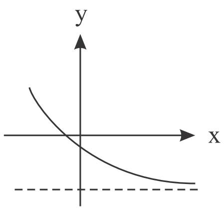
نقطهٔ تلاقی $=(-1,5)\Rightarrow a=-1,b=5\Rightarrow a+b=-1+5=4$

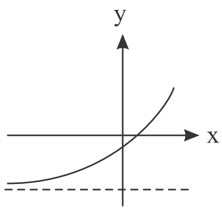
---

33 - نمودار تابع $f(x)=\dfrac{4^{x}-2^{x}-2}{2^{x}+1}$ کدام است؟

① 

② 

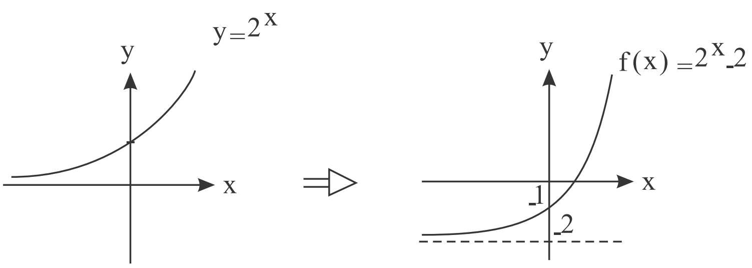
③ 

④ 

پاسخ: گزینه 4 تابع $f(x)$ را ساده می‌کنیم، برای این کار با تغییر متغیر $2^{x}=t$ داریم:

$$f(x)=\frac{(2^{2})^{x}-2^{x}-2}{2^{x}+1}=\frac{(2^{x})^{2}-2^{x}-2}{2^{x}+1}=\frac{t^{2}-t-2}{t+1}=\frac{(t-2)(t+1)}{t+1}\Rightarrow f(x)=2^{x}-2$$

برای رسم $f(x)=2^{x}-2$ باید نمودار تابع $y=2^{x}$ را ۲ واحد به پایین منتقل کنیم.



---

34 - اشتراک مجموعه جواب‌های دو نامعادلهٔ توانی $4^{2x-1}\geq\frac{1}{1024}$ و $9^{2x+2}<81^{2}$، چند عدد صحیح را شامل می‌شود؟

① ۳ ② ۴ ③ ۵ ④ ۶

پاسخ: گزینه 1

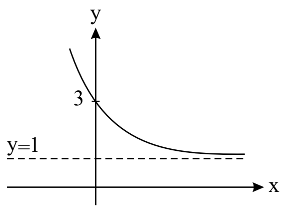
$$4^{2x-1}\geq\frac{1}{1024}\Rightarrow (2^{2})^{2x-1}\geq\frac{1}{2^{10}}\Rightarrow 2^{4x-2}\geq 2^{-10}\Rightarrow 4x-2\geq -10$$

$$\Rightarrow 4x \geq -8 \Rightarrow x \geq -2 \quad (1)$$

$$9^{2x+2} < 81^{2} \Rightarrow 9^{2x+2} < (9^{2})^{2} \Rightarrow 9^{2x+2} < 9^{4} \Rightarrow 2x+2 < 4 \Rightarrow x < 1 \quad (2)$$

$$(1) \cap (2) \Rightarrow -2 \leq x < 1 \Rightarrow \text{اعداد صحیح}: -2, -1, 0 \Rightarrow \text{۳ عدد صحیح}$$

35- نمودار مقابل مربوط به تابع با ضابطهٔ $f(x) = b + \left(\frac{1}{2}\right)^{x+a}$ است. $f^{-1}(2b)$ کدام است؟



① صفر ② ۱

③ ۲ ④ -1

پاسخ: گزینه 2 چون نمودار $y = (\frac{1}{2})^{x+a}$ یک واحد به بالا منتقل شده است تا نمودار $f(x) = b + (\frac{1}{2})^{x+a}$ حاصل شود، پس $b = 1$ است.

$$f(x) = 1 + (\frac{1}{2})^{x+a} \quad , \quad \begin{vmatrix} x = 0 \\ y = 3 \end{matrix} \Rightarrow f(0) = 3 \Rightarrow 1 + (\frac{1}{2})^{a} = 3 \Rightarrow 2^{-a} = 2 \Rightarrow -a = 1$$

$$\Rightarrow a = -1 \Rightarrow f(x) = 1 + (\frac{1}{2})^{x-1} \Rightarrow f^{-1}(2b) = k \xrightarrow{b=1} f^{-1}(2) = k \Rightarrow f(k) = 2$$

$$\Rightarrow 1 + (\frac{1}{2})^{k-1} = 2 \Rightarrow (\frac{1}{2})^{k-1} = 1 \Rightarrow k - 1 = 0 \Rightarrow k = 1 \Rightarrow f^{-1}(2) = 1$$

36- مجموعهٔ جواب نامعادلهٔ $\left(\frac{1}{81}\right)^{\frac{1}{x}} > 3^{x-1}$ کدام است؟

① $(0, +\infty)$ ② $(\frac{1}{2}, +\infty)$ ③ $(2, 8)$ ④ $(1, 2)$

پاسخ: گزینه 1

$$3^{x-1} > (\frac{1}{81})^{\frac{1}{x}} \Rightarrow 3^{x-1} > (3^{-4})^{\frac{1}{x}} \Rightarrow 3^{x-1} > 3^{-\frac{4}{x}} \quad (1)$$

$$3 > 1 \xrightarrow{(1)} x - 1 > -\frac{4}{x} \Rightarrow x - 1 + \frac{4}{x} > 0 \Rightarrow \frac{x^{2} - x + 4}{x} > 0$$

$$x^{2} - x + 4 = 0 \Rightarrow \Delta = 1 - 16 = -15 < 0 \Rightarrow \text{ضریب } x^{2} = 1 > 0$$

عبارت $x^{2} - x + 4$ عبارتی همواره مثبت است و داریم:

$$\frac{\overbrace{x^{2} - x + 4}^{\text{همواره مثبت}}}{x} > 0 \Rightarrow x > 0 \Rightarrow \text{جواب} = (0, +\infty)$$

37- اگر x ریشهٔ معادلهٔ $\frac{384}{2^x} = 2^x - 125$ باشد، در این صورت حاصل عبارت $x^2 + 2x$ کدام است؟

① ۶۳ ② ۶۴ ③ ۴۸ ④ ۱۲۰

پاسخ: گزینه 1

$$2^x - 125 = \frac{384}{2^x} \xrightarrow{\times 2^x} 2^{2x} - 125 \times 2^x = 384 \to (2^x)^2 - 125(2^x) - 384 = 0$$

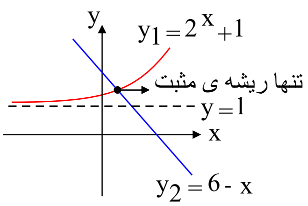
$$\xrightarrow{2^x = A} A^2 - 125A - 384 = 0 \to (A-128)(A+3) = 0$$

$$\to \begin{cases} A = 128 \to 2^x = 128 \to x = 7 \to x^2 + 2x = 49 + 14 = 63 \\ A = -3 \to 2^x = -3 \to \text{امکان ندارد.} \end{cases}$$

38- معادلهٔ $2^x + 1 = 6 - x$ چند ریشه دارد؟

① یک ریشهٔ مثبت ② یک ریشهٔ منفی ③ هیچ ④ ۲

پاسخ: گزینه 1 کافی است $y_1 = 2^x + 1$, $y_2 = 6 - x$ را رسم کنیم و مشاهده کنیم در چند جا همدیگر را قطع می‌کنند.



39- تابع $f(x) = (a^2 + a + k)^x$ به ازای تمام مقادیر حقیقی a یک تابع نمایی است. حدود k کدام است؟

① $k > \frac{1}{4}$ ② $k < \frac{1}{4}$ ③ $k > \frac{5}{4}$ ④ $k > \frac{3}{4}$

پاسخ: گزینه 3 برای این‌که تابع $f(x) = (a^2 + a + k)^x$ به ازای تمام مقادیر حقیقی a یک تابع نمایی باشد، باید داشته باشیم:

$$\text{همواره} \begin{cases} a^2 + a + k > 0 \\ a^2 + a + k \neq 1 \end{cases}$$

برای این‌که عبارت $a^2 + a + k$ به ازای هر $a \in \mathbb{R}$، همواره مثبت باشد، کافی است $\Delta < 0$ باشد (زیرا ضریب a^2 همواره مثبت است)؛ بنابراین باید داشته باشیم:

$$\Delta < 0 \Rightarrow 1 - 4(1)(k) < 0 \Rightarrow 1 - 4k < 0 \Rightarrow k > \frac{1}{4} \quad (I)$$

برای این‌که عبارت $a^2 + a + k$ همواره مخالف ۱ باشد، باید داشته باشیم:

$$a^2 + a + k \neq 1 \Rightarrow a^2 + a + k - 1 \neq 0 \Rightarrow \Delta < 0 \Rightarrow 1 - 4(k-1) < 0 \Rightarrow 1 - 4k + 4 < 0 \Rightarrow 4k > 5$$

$$\Rightarrow k > \frac{5}{4} \quad (II)$$

$$(I), (II) \xrightarrow{\text{اشتراک}} k > \frac{5}{4}$$

40- در معادلهٔ $(\sqrt{2} - 1)^{2x} + (3 + 2\sqrt{2})^x = 34$، حاصل‌ضرب جواب‌ها کدام است؟

① -4 ② -2 ③ -8 ④ -16

پاسخ: گزینه 1

$$(\sqrt{۲}-۱)^{۲x}+(۳+۲\sqrt{۲})^{x}=۳۴\ \Rightarrow((\sqrt{۲}-۱)^{۲})^{x}+(۳+۲\sqrt{۲})^{x}=۳۴$$

$$\Rightarrow(۳-۲\sqrt{۲})^{x}+(۳+۲\sqrt{۲})^{x}=۳۴$$

توجه شود که $۳-۲\sqrt{۲}=\dfrac{۱}{۳+۲\sqrt{۲}}$ زیرا $(۳-۲\sqrt{۲})(۳+۲\sqrt{۲})=۱$؛ بنابراین اگر فرض کنیم $(۳-۲\sqrt{۲})^{x}=t$

آن‌گاه $(۳+۲\sqrt{۲})^{x}=\dfrac{۱}{t}$ خواهد بود و خواهیم داشت:

$$t+\frac{۱}{t}=۳۴\Rightarrow\frac{t^{۲}+۱}{t}=۳۴\Rightarrow t^{۲}-۳۴t+۱=۰\ \Rightarrow t=\frac{۳۴\pm۲\sqrt{۲۸۸}}{۲}=۱۷\pm۱۲\sqrt{۲}$$

حال توجه شود که $۱۷+۱۲\sqrt{۲}=(۳+۲\sqrt{۲})^{۲}$ و $۱۷-۱۲\sqrt{۲}=(۳-۲\sqrt{۲})^{۲}$ بنابراین خواهیم داشت:

$$t=۱۷-۱۲\sqrt{۲}\Rightarrow(۳-۲\sqrt{۲})^{x}=۱۷-۱۲\sqrt{۲}\Rightarrow(۳-۲\sqrt{۲})^{x}=(۳-۲\sqrt{۲})^{۲}\ \Rightarrow x=۲$$

$$t=۱۷+۱۲\sqrt{۲}\Rightarrow(۳-۲\sqrt{۲})^{x}=۱۷+۱۲\sqrt{۲}\Rightarrow(۳-۲\sqrt{۲})^{x}=(۳+۲\sqrt{۲})^{۲}=(۳-۲\sqrt{۲})^{-۲}$$

$$\Rightarrow x=-۲$$

یعنی ریشه‌های معادلهٔ اصلی برابر $x=۲$ و $x=-۲$ و حاصل‌ضرب آن‌ها -۴ است.

41- اگر تابع f با ضابطهٔ $f(x)=\left(\dfrac{m+۱}{[m]+[-m]}\right)^{x}$ یک تابع نمایی باشد، حدود m کدام است؟

(۱) $m<-۱\ ,\ m\neq-۲$ (۲) $m<-۱\ ,\ m\not\in\mathbb{Z}$ (۳) $m<-۱$ (۴) $\varnothing$

پاسخ: گزینه 2 هر تابع با ضابطهٔ $f(x)=a^{x}$ که در آن $a\in\mathbb{R}$ و $a>۰$ و $a\neq۱$ یک تابع نمایی نامیده می‌شود.

دو شرط زیر را در نظر بگیرید:

شرط اول : $\dfrac{m+۱}{[m]+[-m]}>۰$

شرط دوم : $\dfrac{m+۱}{[m]+[-m]}\neq۱$

از طرفی می‌دانیم:

$$[m]+[-m]=\begin{cases}۰ & m\in\mathbb{Z}\\ -۱ & m\not\in\mathbb{Z}\end{cases}$$

بنابراین داریم:

شرط اول:

$$\frac{m+۱}{[m]+[-m]}>۰\Rightarrow\begin{cases}m\in\mathbb{Z}\ \text{اگر}\Rightarrow\dfrac{m+۱}{۰}\quad\text{تعریف نشده}\\ m\not\in\mathbb{Z}\ \text{اگر}\Rightarrow\dfrac{m+۱}{-۱}>۰\\ \Rightarrow-m-۱>۰\Rightarrow m<-۱\quad(۱)\end{cases}$$

بنابراین اگر $m\not\in\mathbb{Z}$ و $m<-۱$ باشد، شرط اول برقرار است.

شرط دوم:

$$\frac{m+۱}{[m]+[-m]}\neq ۱ \Rightarrow \begin{cases} m\in\mathbb{Z}\ \text{اگر} \Rightarrow \dfrac{m+۱}{۰}\neq ۱ & \text{تعریف نشده} \\ m\not\in\mathbb{Z}\ \text{اگر} \Rightarrow \dfrac{m+۱}{-۱}\neq ۱ \\ \Rightarrow m+۱\neq -۱ \Rightarrow m\neq -۲ \quad (۲) \end{cases}$$

دقت کنید $m\not\in\mathbb{Z}$: پس قطعاً m مخالف -۲ نیز هست، پس اگر $m\not\in\mathbb{Z}$ باشد، $\dfrac{m+۱}{[m]+[-m]}$ قطعاً مخالف **۱** خواهد بود.

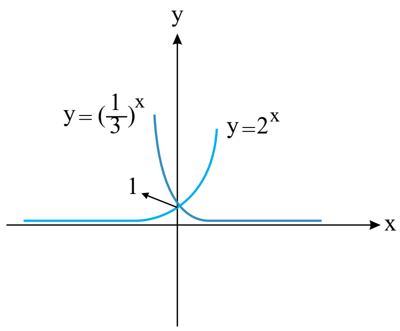
درنتیجه با توجه به اشتراک **(۱)** و **(۲)** بنابراین گزینهٔ **۲** پاسخ درست این تست است.

42- تعداد ریشه‌های کدام‌یک از معادلات زیر، از سایرین بیش‌تر است؟

① $۲^x=۳^{-x}$ ② $۲^x=۴-|x|$ ③ $x(۳^{-x})=-۱$ ④ $۴^x-۳^x+۱=۰$

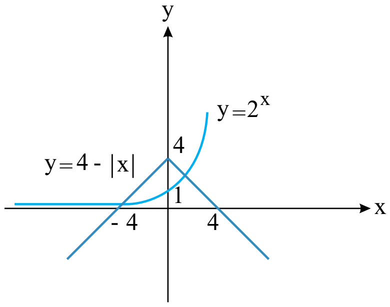
پاسخ: گزینه 2

برای یافتن تعداد جواب‌های هر یک از معادلات، باید از طریق تقاطع هندسی، تعداد مطلوب را بیابیم:

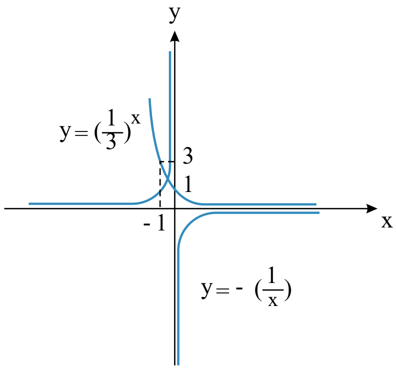


$۲^x=۳^{-x} \Rightarrow ۲^x=(\frac{۱}{۳})^x \Rightarrow$ معادله یک ریشه دارد

معادله دو ریشه دارد $\Leftarrow$ $۲^{x} = ۴ - |x| \Rightarrow$

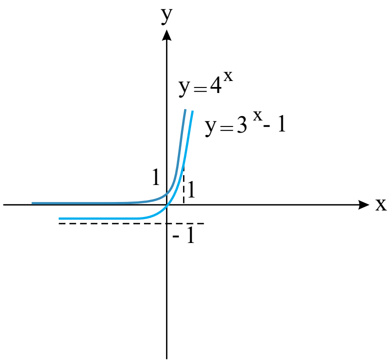


$$۴^{x} - ۳^{x} + ۱ = ۰ \Rightarrow ۴^{x} = ۳^{x} - ۱$$



$$x(۳^{-x}) = -۱ \Rightarrow -\frac{۱}{x} = (\frac{۱}{۳})^{x}$$

بنابراین معادله فوق دارای یک ریشه است.



$$۴^{x} - ۳^{x} + ۱ = ۰ \Rightarrow ۴^{x} = ۳^{x} - ۱$$

پس معادلهٔ فوق فاقد ریشهٔ حقیقی است.

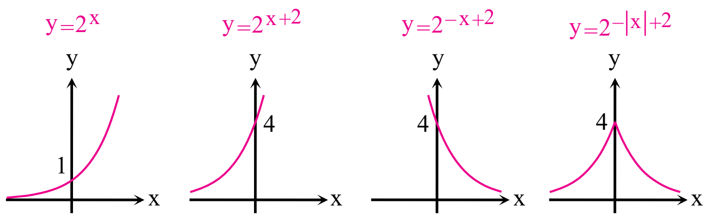
بنابراین معادلهٔ مربوط به گزینهٔ «۲» از سایر معادلات داده شده، تعداد بیش‌تری ریشه دارد.

43- به ازای چند مقدار طبیعی k، خط $y = k$ نمودار تابع $y = ۲^{۲-|x|}$ را در دو نقطه قطع می‌کند؟

① ۱   ② ۲   ③ ۳   ④ ۴

پاسخ: گزینه 3

نمودار تابع $y = ۲^{۲-|x|}$ را رسم می‌کنیم:



خط $y = k \in (۰, ۴)$ نمودار را در دو نقطه قطع می‌کند. اگر $k \in \mathbb{N}$ آنگاه $k = ۱, ۲, ۳$.

44- فاصلهٔ نقطهٔ تقاطع نمودارهای دو تابع $y=۵(\frac{\sqrt{۲}}{۲})^{۲x}$ و $y=۲^{x+۱}+۹$ از محور طول‌ها کدام است؟

① ۱ ② ۱۰ ③ ۱۱ ④ $\sqrt{۱۰۱}$

پاسخ: گزینه 2 برای یافتن نقطهٔ تقاطع دو تابع، آن‌ها را مساوی هم قرار می‌دهیم:

$$\begin{cases} y=۵(\frac{\sqrt{۲}}{۲})^{۲x} \\ y=۲^{x+۱}+۹ \end{cases} \Rightarrow ۵(\frac{\sqrt{۲}}{۲})^{۲x}=۲^{x+۱}+۹ \Rightarrow ۵((\frac{\sqrt{۲}}{۲})^{۲})^{x}=۲^{x}\times ۲+۹$$

$$۵(\frac{۱}{۲})^{x}=۲^{x}\times ۲+۹ \Rightarrow \frac{۵}{۲^{x}}=۲\times ۲^{x}+۹ \xrightarrow{۲^x=A} \frac{۵}{A}=۲A+۹$$

$$\xrightarrow{\times A} ۵=۲A^{۲}+۹A \Rightarrow ۲A^{۲}+۹A-۵=۰ \Rightarrow (۲A-۱)(A+۵)=۰ \Rightarrow \begin{cases} A=\frac{۱}{۲} \\ A=-۵ \ \text{غق} \end{cases}$$

$$A=\frac{۱}{۲} \Rightarrow ۲^{x}=\frac{۱}{۲} \Rightarrow x=-۱ \Rightarrow y=۲^{-۱+۱}+۹=۱۰ \Rightarrow A(-۱,۱۰)$$

فاصلهٔ نقطهٔ A تا محور xها برابر ۱۰ می‌باشد.

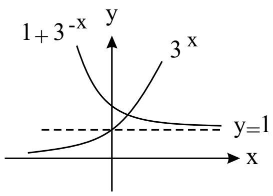
45- معادلهٔ $\left|۳^{-x}+۱\right|=\left|۳^{x}\right|$ چند جواب در مجموعهٔ اعداد حقیقی دارد؟

① صفر ② ۱ ③ ۲ ④ ۳

پاسخ: گزینه 2

$$\left|۳^{x}\right|=\left|۳^{-x}+۱\right| \Rightarrow ۳^{x}=\pm(۳^{-x}+۱)$$

(الف) $۳^{x}=۳^{-x}+۱$



طبق نمودار، معادله یک ریشه دارد

(ب) $۳^{x}=-۳^{-x}-۱$

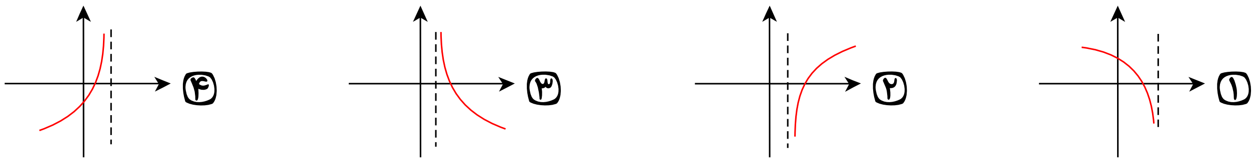
سمت چپ همواره مثبت و سمت راست همواره منفی است، پس معادلهٔ (ب) اصلاً جواب ندارد.

در کل معادله یک جواب دارد.

تستهای تابع نمایی و لگاریتمی

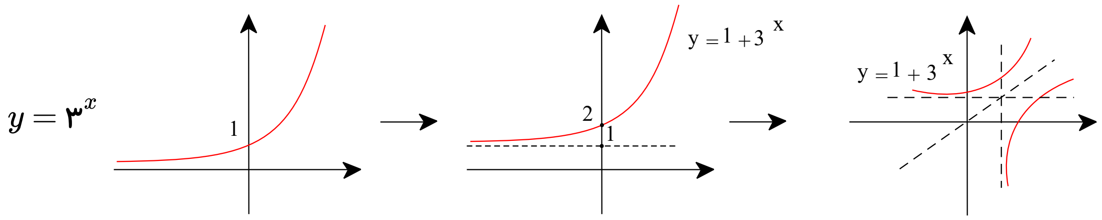
تابع لگاریتم، تعریف و شرایط لگاریتم

46- نمودار معکوس تابع $y = ۱ + ۳^x$ کدام است؟(با تغییر)



پاسخ: گزینه 2 توجه: هر تابعی با معکوس خود نسبت به نیم ساز اول و سوم قرینه است.

تابع $y = ۱ + ۳^x$ را نسبت به خط $y = x$ تقارن می‌دهیم.



47- تابع با ضابطه‌ی $f(x) = a + \log_۲(bx - ۴)$ ، از دو نقطه‌ی $(۲,۶)$ و $(۱۲,۱۰)$ می‌گذرد. aکدام است؟

① ۳ ② ۴ ③ ۵ ④ ۶

پاسخ: گزینه 3 می‌دانیم: $\log_b^a = c \rightleftarrows b^c = a$, $\boxed{\log_n^A - \log_n^B = \log_n^{\frac{A}{B}}}$

چون تابع از دو نقطه‌ی $(۲,۶)$ و $(۱۲,۱۰)$ می‌گذرد پس مختصات آن در تابع صدق می‌کند.

بنابراین:

$$(۱۲,۱۰) \xrightarrow{\text{تابع}} ۱۰ = a + \log_۲(۱۲b - ۴) \quad (I)$$
$$(۲,۶) \xrightarrow{\text{تابع}} ۶ = a + \log_۲(۲b - ۴)$$

این دو رابطه را از هم کم می‌کنیم:

$$۴ = \log_۲(۱۲b - ۴) - \log_۲(۲b - ۴) \Rightarrow ۴ = \log_۲ \frac{۱۲b - ۴}{۲b - ۴}$$
$$\frac{۱۲b - ۴}{۲b - ۴} = ۱۶ \Rightarrow b = ۳ \xrightarrow{(I)} a = ۵$$

48- اگر $\log ۵ = ۳k$ باشد، $\log \sqrt[۳]{۱/۶}$ کدام است؟

① $۱ - ۴k$ ② $۲ - ۵k$ ③ $۱ - ۲k$ ④ $۱ - k$

پاسخ: گزینه 1

می‌دانیم: $\boxed{\log_k^{a^n} = n\log_k^a \ , \ \log_k^{\frac{a}{b}} = \log_k^a - \log_k^b \ , \ \log ۵ = ۱ - \log ۲}$

$$\log \sqrt[۳]{۱/۶} = \log(۱/۶)^{\frac{۱}{۳}} = \frac{۱}{۳}\log ۱/۶ = \frac{۱}{۳}\log\frac{۱۶}{۱۰}$$
$$= \frac{۱}{۳}(\log ۱۶ - \log ۱۰) = \frac{۱}{۳}(۴\log ۲ - ۱) = \frac{۱}{۳}(۴(۱ - \log ۵) - ۱) = \frac{۱}{۳}(۳ - ۴\log ۵)$$
$$= \frac{۱}{۳}(۳ - ۱۲k) = \frac{۱}{۳}(۳(۱ - ۴k)) = ۱ - ۴k$$

49- اگر $3^{x^2-2}=81^{x}$ باشد، $\log_{6}^{(x-2)}$ کدام است؟

① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ $\frac{2}{3}$

پاسخ: گزینه 3 می‌دانیم:

$$y=\log_{6}^{x-2}\xrightarrow{\text{دامنه}}x-2>0\rightarrow\boxed{x>2}$$

$$3^{x^2-2}=81^{x}\rightarrow 3^{x^2-2}=3^{4x}\rightarrow x^2-2=4x\rightarrow x^2-4x=2$$

$$\rightarrow(x-2)^2-4=2\rightarrow(x-2)^2=6\rightarrow x-2=\pm\sqrt{6}\rightarrow\begin{cases}x=2+\sqrt{6}\\ x=2-\sqrt{6}<2\quad\text{غ ق ق}\end{cases}$$

می‌دانیم $\log_{k^m}^{a^n}=\frac{n}{m}\log_{k}^{a}$ است.

$$\log_{6}^{x-2}\xlongequal{x=2+\sqrt{6}}\log_{6}^{2+\sqrt{6}-2}=\log_{6}^{\sqrt{6}}=\log_{6}^{6^{\frac{1}{2}}}=\frac{1}{2}$$

50- اگر $4\sqrt{2}=4^{x}$ و $1+\log\sqrt{x+1}=\log y$ باشد مقدار y کدام است؟

① $7/5$ ② $12/5$ ③ 15 ④ 25

پاسخ: گزینه 3

می‌دانیم: $\boxed{\log_{k}^{a}+\log_{k}^{b}=\log_{k}^{ab}}$

$$4\sqrt{2}=4^{x}\Rightarrow 2^2\times 2^{\frac{1}{2}}=4^{x}\Rightarrow 2^{\frac{5}{2}}=2^{2x}\Rightarrow 2x=\frac{5}{2}\Rightarrow x=\frac{5}{4}$$

$$1+\log\sqrt{x+1}=\log y\Rightarrow\log 10+\log\sqrt{\frac{5}{4}+1}=\log y$$

$$\Rightarrow\log 10+\log\frac{3}{2}=\log y\Rightarrow\log 10\times\frac{3}{2}=\log y\Rightarrow y=15$$

51- اگر $(0/4)^{2x-1}=\left(\frac{125}{8}\right)^{x^2}$ باشد، $\log_{8}^{(9x+1)}$ کدام است؟

① $\frac{2}{3}$ ② $\frac{3}{4}$ ③ $\frac{4}{3}$ ④ $\frac{3}{2}$

پاسخ: گزینه 1

$$(0/4)^{2x-1}=(\frac{125}{8})^{x^2}\rightarrow(\frac{4}{10})^{2x-1}=(\frac{5}{2})^{3x^2}\rightarrow(\frac{2}{5})^{2x-1}=(\frac{2}{5})^{-3x^2}$$

$$\rightarrow 2x-1=-3x^2\rightarrow 3x^2+2x-1=0\xrightarrow{a+c=b}\begin{cases}x=-1\\ x=-\frac{c}{a}=\frac{1}{3}\end{cases}$$

در عبارت خواسته‌شده نمی‌توانیم به‌جای x عدد -1 را قرار دهیم چون جلوی لگاریتم منفی می‌شود و می‌دانیم که $\log_{k^m}^{a^n} = \dfrac{n}{m}\log_k^a$ است.

$$\log_8^{9x+1} \xlongequal{x=\frac{1}{3}} \log_8^4 = \log_{2^3}^{2^2} = \frac{2}{3}$$

---

52 - حاصل $A = \dfrac{1}{2}\log^{(7-4\sqrt{3})} + \log^{(2+\sqrt{3})}$ کدام است؟

① $\frac{2}{3}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ صفر

پاسخ: گزینه 4 ابتدا توجه کنید که:

$$7 - 4\sqrt{3} = 4 + 3 - 4\sqrt{3} = 2^2 + \sqrt{3}^2 - 2\times 2\sqrt{3} = (2-\sqrt{3})^2$$

بنابراین:

$$\frac{1}{2}\log^{(7-4\sqrt{3})} = \frac{1}{2}\log^{(2-\sqrt{3})^2} = \log^{(2-\sqrt{3})}$$

درنتیجه:

$$A = \log^{(2-\sqrt{3})} + \log^{(2+\sqrt{3})} = \log^{(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})} = \log^{(4-3)} = \log^1 = 0$$

---

53 - حاصل $\log_{\sqrt{3\sqrt[3]{3}}}^{3\sqrt[3]{9\sqrt{3}}}$ کدام است؟

① $\frac{7}{4}$ ② $\frac{11}{4}$ ③ $\frac{9}{4}$ ④ $\frac{13}{4}$

پاسخ: گزینه 2 ابتدا توجه کنید که:

$$3\sqrt[3]{9\sqrt{3}} = 3\times 3^{\frac{2}{3}}\times 3^{\frac{1}{6}} = 3^{\frac{11}{6}}$$

$$\sqrt{3\sqrt[3]{3}} = 3^{\frac{1}{2}}\times 3^{\frac{1}{6}} = 3^{\frac{2}{3}}$$

بنابراین:

$$\log_{\sqrt{2\sqrt[3]{3}}}^{3\sqrt[3]{9\sqrt{3}}} = \log_{3^{\frac{2}{3}}}^{3^{\frac{11}{6}}} = \frac{11}{6}\times\frac{3}{2}\log_3^3 = \frac{11}{4}$$

---

54 - حاصل عبارت $A = \log_{0.04}^{125} + 81^{\log_9^{\sqrt{5}}}$ کدام است؟

① $\frac{7}{3}$ ② $\frac{13}{2}$ ③ $\frac{7}{2}$ ④ $\frac{13}{3}$

پاسخ: گزینه 3

$$\log_{0.04}^{125} = \log_{5^{-2}}^{5^3} = \frac{3}{-2}\log_5^5 = -\frac{3}{2}$$

$$81^{\log_9^{\sqrt{5}}} = \sqrt{5}^{\log_9^{81}} = \sqrt{5}^2 = 5$$

بنابراین:

$$A=-\frac{۳}{۲}+۵=\frac{۷}{۲}$$

55- تابع $f(x)=۲-\log_۵(x+۵)$ محور xها را در نقطه‌ای به طول $x_۰$ و محور عرض‌ها را در نقطه‌ای به عرض $y_۰$ قطع می‌کند، حاصل $x_۰-y_۰$ کدام است؟

① ۱۹ ② ۲۱ ③ ۱۸ ④ ۲۰

پاسخ: گزینه 1

نکته : $a^b=c \Leftrightarrow \log_a^c=b$

$$f(x)=۲-\log_۵(x+۵)$$

$$x=۰ \Rightarrow y_۰=f(۰)=۲-\log_۵^۵=۲-۱=۱ \quad \Rightarrow y_۰=۱$$

$$y=۰ \Rightarrow ۲-\log_۵(x_۰+۵)=۰ \quad \Rightarrow \log_۵(x_۰+۵)=۲ \Rightarrow x_۰+۵=۵^۲ \Rightarrow x_۰=۲۰$$

بنابراین: $x_۰-y_۰=۱۹$

56- تابع با ضابطه‌ی $f(x)=a+\log_۲(۳x+b)^۲$ ، از دو نقطه‌ی $(۵,۱۱)$ و $(۲۱,۱۵)$ می‌گذرد، a کدام است؟

① ۱ ② ۲ ③ ۳ ④ ۴

پاسخ: گزینه 3

میدانیم: $\log_n^{\frac{A}{B}}$ $\log_n^A-\log_n^B=\log_n^{\frac{A}{B}}$, $\log_n^{a^b}=b\cdot\log_n^a$

$$f(x)=a+\log_۲{}^{(۳x+b)^۲} \to f(x)=a+۲\log_۲^{۳x+b}$$

$$f(۵)=۱۱ \to a+۲\log_۲^{۱۵+b}=۱۱$$

$$f(۲۱)=۱۵ \to a+۲\log_۲^{۶۳+b}=۱۵ \to a+۲\log_۲^{۶۳+b}=۱۱+۴$$

$$\to a+۲\log_۲^{۶۳+b}=a+۲\log_۲^{۱۵+b}+۴ \to \log_۲^{۶۳+b}-\log_۲^{۱۵+b}=۲$$

$$\to \log_۲{}^{\frac{۶۳+b}{۱۵+b}}=۲ \to \frac{۶۳+b}{۱۵+b}=۴ \to ۶۳+b=۶۰+۴b \to ۳b=۳ \to b=۱$$

$$a+۲\log_۲^{۱۶}=۱۱ \to a+۲\times۴=۱۱ \to a=۳$$

57- اگر $\log_۴^x=\frac{۱}{۲}$ و $\log_y^۲=۳$ مقدار $\log_y^{(x+۶)}$ کدام است؟

① $۲\sqrt{۲}$ ② $\frac{\sqrt[۳]{۲}}{۲}$ ③ ۶ ④ ۹

پاسخ: گزینه 4

$$\log_{۴}^{x}=\frac{۱}{۲}\Rightarrow x=۴^{\frac{۱}{۲}}=\sqrt{۴}=۲$$

$$\log_{y}^{۲}=۳\Rightarrow y^{۳}=۲\Rightarrow y=\sqrt[۳]{۲}$$

بنابراین:

$$\log_{y}^{(x+۶)}=\log_{\sqrt[۳]{۲}}^{۸}=\log_{۲^{\frac{۱}{۳}}}^{۲^{۳}}=۳\times۳\log_{۲}^{۲}=۹$$

58- حاصل عبارت $(\log_{۲۱}^{(۳)})^{۲}+\log_{۲۱}^{(۱۴۷)}\log_{۲۱}^{(۱۳۲۳)}$ کدام است؟

① ۱ ② ۲ ③ ۳ ④ ۴

پاسخ: گزینه 4

چون پایه لگاریتم عدد **۲۱** می‌باشد بنابراین اعداد **۱۴۷** و **۱۳۲۳** را به **۲۱** تقسیم می‌کنیم.

$$۱۳۲۳=۲۱^{۲}\times۳\quad,\quad ۱۴۷=۲۱\times۷\ \Rightarrow A=(\log_{۲۱}^{۳})^{۲}+\log_{۲۱}^{(۲۱\times۷)}\ \log_{۲۱}^{(۲۱^{۲}\times۳)}$$

$$A=(\log_{۲۱}^{۳})^{۲}+(\underbrace{\log_{۲۱}^{۲۱}}_{۱}+\log_{۲۱}^{۷})(\underbrace{\log_{۲۱}^{۲۱^{۲}}}_{۱}+\log_{۲۱}^{۳})\quad A=(\log_{۲۱}^{۳})^{۲}+(۱+\log_{۲۱}^{۷})\cdot(۲\log_{۲۱}^{۲۱}+\log_{۲۱}^{۳})$$

می‌دانیم:

$$۳\times۷=۲۱\Rightarrow\log_{۲۱}^{۳}+\log_{۲۱}^{۷}=\log_{۲۱}^{۲۱}\Rightarrow\log۷=۱-\log۳$$

$$A=(\log_{۲۱}^{۳})^{۲}+(۱+۱-\log_{۲۱}^{۳})\cdot(۲+\log_{۲۱}^{۳})=(\log_{۲۱}^{۳})^{۲}+(۴-(\log_{۲۱}^{۳})^{۲})$$

$$A=(\log_{۲۱}^{۳})^{۲}+۴-(\log_{۲۱}^{۳})^{۲}=۴$$

59- اگر $f(x)=\log_{۳}^{(x-۱)}$ ، آن‌گاه دامنه‌ی تعریف تابع $y=\sqrt{۴-f^{-۱}(x)}$ شامل چند عدد طبیعی است؟

① صفر ② ۱ ③ ۲ ④ ۳

پاسخ: گزینه 2 ابتدا باید ضابطه‌ی تابع معکوس را پیدا کنیم برای این منظور x را برحسب y به دست می‌آوریم و سپس yها را به x و x را به $f^{-۱}(x)$ تبدیل می‌کنیم.

$$y=\log_{۳}^{x-۱}\xrightarrow{\text{تعریف}}x-۱=۳^{y}\rightarrow x=۳^{y}+۱\rightarrow f^{-۱}(x)=۳^{x}+۱$$

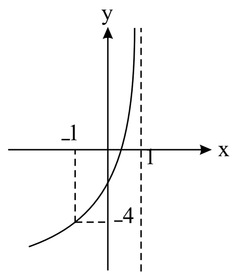
برای پیدا کردن دامنه‌ی تعریف تابع $y=\sqrt{۴-f^{-۱}(x)}$ کافی است زیر رادیکال را بزرگتر مساوی صفر قرار دهید.

$$۴-f^{-۱}(x)\geq ۰\rightarrow۴-(۳^{x}+۱)\geq ۰\rightarrow۴-۳^{x}-۱\geq ۰\rightarrow۳^{x}\leq۳^{۱}\rightarrow x\leq۱$$

که این جواب شامل یک عدد طبیعی می‌باشد. $(x=۱)$

توجه: در بازهٔ $x\leq۱$ این x مربوط به دامنهٔ تابع $f^{-۱}$ است و ربطی به دامنهٔ تابع لگاریتمی ندارد.

60- اگر نمودار تابع $f(x)=a-\log_{\sqrt{2}}^{-x+b}$ به‌صورت زیر باشد، آن‌گاه $f(-7)$ کدام است؟



① -5　② -8
③ -11　④ -13

پاسخ: گزینه 2 با توجه به شکل دامنهٔ تابع f به صورت $(-\infty\ ,\ +1)$ است و

$$-x+b>0 \Rightarrow x<b \Rightarrow D_f=(-\infty\ ,\ b) \Rightarrow \boxed{b=1}$$

با توجه به نمودار، این تابع از نقطهٔ $(-1\ ,\ -4)$ می‌گذرد.

$$-4=a-\log_{\sqrt{2}}^{2} \Rightarrow -4=a-2 \Rightarrow \boxed{a=-2} \Rightarrow f(x)=-2-\log_{\sqrt{2}}^{-x+1}$$

$$f(-7)=-2-\log_{\sqrt{2}}^{8}=-2-\log_{\sqrt{2}}^{(\sqrt{2})^6}=-2-6=-8$$

61- حاصل عبارت $A=(\log_{18}^{36})^2+4\log_{18}^{3}\times\log_{18}^{108}$ کدام است؟

① 4　② 5　③ 6　④ 7

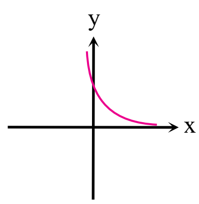
پاسخ: گزینه 1 ابتدا توجه کنید که

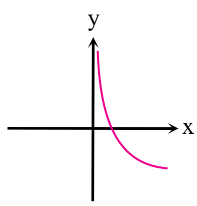
$$\log_{18}^{36}=\log_{18}^{6^2}=2\log_{18}^{6}$$
$$\log_{18}^{3}\times\log_{18}^{108}=\log_{18}^{3}\times\log_{18}^{3\times 36}=\log_{18}^{3}(\log_{18}^{3}+\log_{18}^{36})=\log_{18}^{3}(\log_{18}^{3}+2\log_{18}^{6})$$
$$=(\log_{18}^{3})^2+2\log_{18}^{3}\times\log_{18}^{6}$$

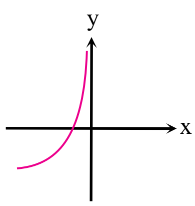
بنابراین عبارت داده شده به صورت زیر ساده می‌شود:

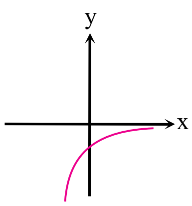
$$A=(2\log_{18}^{6})^2+4(\log_{18}^{3})^2+8\log_{18}^{3}\times\log_{18}^{6}=4((\log_{18}^{6})^2+(\log_{18}^{3})^2+2\log_{18}^{3}\times\log_{18}^{6})$$
$$=4(\log_{18}^{6}+\log_{18}^{3})^2=4(\log_{18}^{18})^2=4\times 1^2=4$$

62- نمودار معکوس تابع $y=\frac{1}{2}\log\frac{1}{x}$ چگونه است؟

① 

② 

③ 

④ 

پاسخ: گزینه 1 ضابطهٔ تابع وارون را می‌یابیم:

$$y=\frac{1}{2}\log x^{-1}=-\frac{1}{2}\log x \Rightarrow \log x=-2y \Rightarrow x=10^{-2y} \Rightarrow f^{-1}(x)=10^{-2x}=(\frac{1}{100})^x$$

که نمودار آن به صورت گزینهٔ (1) است.

63- از معادله‌ی لگاریتمی $\log_{۳}{}^{(۲x^{۲}+۱)} - \log_{۳}{}^{(x+۲)} = ۱$ ، مقدار لگاریتم $(۲x-۱)$ در پایه‌ی ۸، کدام است؟

① $-\frac{۲}{۳}$ ② $-\frac{۱}{۲}$ ③ $\frac{۱}{۲}$ ④ $\frac{۲}{۳}$

پاسخ: گزینه 4

می‌دانیم: $\boxed{\log_k^a - \log_k^b = \log_k^{\frac{a}{b}} \ , \ \log_{k^m}^{a^n} = \frac{n}{m}\log_k^a \ , \ \log_b^N = x \to N = b^x}$

$$\log_{۳}^{۲x^{۲}+۱} - \log_{۳}^{x+۲} = ۱ \to \log_{۳}^{\frac{۲x^{۲}+۱}{x+۲}} = ۱ \xrightarrow{\text{تعریف}} \frac{۲x^{۲}+۱}{x+۲} = ۳^{۱}$$

$$\to ۲x^{۲}+۱ = ۳x+۶ \to ۲x^{۲}-۳x-۵ = ۰ \xrightarrow{a+c=b} \begin{cases} x = -۱ \\ x = -\frac{c}{a} = \frac{۵}{۲} \end{cases}$$

هر دو جواب بدست آمده، قابل قبول هستند ولی برای محاسبه‌ی $\log_{۸}^{۲x-۱}$ فقط به جای x، می‌توانیم مقدار $x = \frac{۵}{۲}$ را جایگزین کنیم،

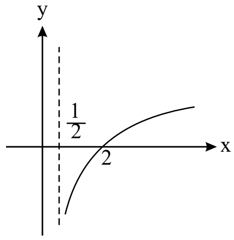
زیرا $x = -۱$ جلوی لگاریتم را منفی می‌کند.

$$\log_{۸}^{۲x-۱} \overset{x=\frac{۵}{۲}}{=\!=\!=} \log_{۸}^{۲(\frac{۵}{۲})-۱} = \log_{۸}^{۴} = \log_{۲^{۳}}^{۲^{۲}} = \frac{۲}{۳}$$

64- شکل زیر، نمودار تابع $y = -۱ + \log_b^{(۲x+a)}$ است. این منحنی خط $y = ۱$ را با کدام طول، قطع می‌کند؟

① ۴ ② ۵

③ ۶ ④ ۷



پاسخ: گزینه 2

$$\text{دامنهٔ تعریف لگاریتم}: \ ۲x+a > ۰ \to ۲x > -a \to x > -\frac{a}{۲} \xrightarrow[\text{با توجه به شکل}]{x>\frac{۱}{۲}} a = -۱$$

بنابراین تابع به‌صورت $y = -۱ + \log_b^{(۲x-۱)}$ است، از طرفی مقدار تابع در $x = ۲$ برابر صفر است.

$$۰ = -۱ + \log_b^{۳} \to \log_b^{۳} = ۱ \to b = ۳ \to y = -۱ + \log_{۳}^{(۲x-۱)}$$

اکنون کافی است که به‌جای y مقدار ۱ را قرار دهیم.

$$۱ = -۱ + \log_{۳}^{(۲x-۱)} \to \log_{۳}^{(۲x-۱)} = ۲ \xrightarrow{\log_b^a = c \to a = b^c} ۲x-۱ = ۳^{۲} \to ۲x-۱ = ۹ \to ۲x = ۱۰ \to x = ۵$$

65- از دو معادله‌ی $\log_{۳} x + \log_{۳} y = ۲$ و $x^{۲}+y^{۲} = ۴۶$، لگاریتم $(x+y)$ در پایه‌ی ۴ کدام است؟

① ۱٫۵ ② ۲ ③ ۳ ④ ۲٫۵

پاسخ: گزینه 1

می‌دانیم:

$$\boxed{a^{۲}+b^{۲} = (a+b)^{۲} - ۲ab \ , \ \log_k^a + \log_k^b = \log_k^{ab} \ , \ \log_b^N = x \to b^x = N \ , \ \log_{k^m}^{a^n} = \frac{n}{m}\log_k^a}$$

$\log_3^x + \log_3^y = ۲ \to \log_3^{xy} = ۲ \xrightarrow{\text{تعریف}} xy = ۳^۲ = ۹$

$x^۲ + y^۲ = ۴۶ \to (x+y)^۲ - ۲xy = ۴۶ \to (x+y)^۲ - ۱۸ = ۴۶$

$\to (x+y)^۲ = ۶۴ \to x+y = ۸$ یا $x+y = -۸$ غ ق ق (x, y اعدادی مثبت هستند.)

$\log_4^{x+y} = \log_4^8 = \log_{2^2}^{2^3} = \frac{3}{2}$

66- از دو معادلهٔ دومجهولی $۳^{۲x+y} = ۹ \times ۳^{x-y}$ و $\log(x+۲y) = ۱ + \log y$، مقدار x کدام است؟

① ۱٫۲ ② ۱٫۴ ③ ۱٫۵ ④ ۱٫۶

پاسخ: گزینه 4 می‌دانیم: $\boxed{\log_k^a + \log_k^b = \log_k^{ab}}$

$۳^{۲x+y} = ۹ \times ۳^{x-y} \to ۳^{۲x+y} = ۳^۲ \times ۳^{x-y} \to ۳^{۲x+y} = ۳^{۲+x-y}$

$\to ۲x + y = ۲ + x - y \to x + ۲y = ۲ \to x = ۲ - ۲y$

از طرفی: $\log(x+۲y) = ۱ + \log y \to \log(x+۲y) = \log ۱۰ + \log y \to \log(x+۲y) = \log ۱۰y$

$\to x + ۲y = ۱۰y \to x = ۸y \xrightarrow{x=۲-۲y} ۲ - ۲y = ۸y \to ۱۰y = ۲ \to y = \frac{۲}{۱۰} \xrightarrow{x=۸y} x = \frac{۱۶}{۱۰} = ۱٫۶$

67- از دو معادله‌ی دو مجهولی $۲^{x-۷} \times ۴^{x+y} = ۱$ و $\log y = ۲\log ۳ + \log x$، مقدار y کدام است؟

① ۱ ② ۲ ③ ۳ ④ ۴

پاسخ: گزینه 3 می‌دانیم: $\boxed{\log_k^{a^n} = n\log_k^a \ , \ \log_k^a + \log_k^b = \log_k^{ab}}$

$۲^{x-۷} \times ۴^{x+y} = ۱ \to ۲^{x-۷} \times (۲^۲)^{x+y} = ۱ \to ۲^{x-۷+۲x+۲y} = ۱ \to ۲^{۳x+۲y-۷} = ۱ \to ۳x + ۲y - ۷ = ۰$

$\log y = ۲\log ۳ + \log x \to \log y = \log ۹ + \log x \to \log y = \log ۹x \to y = ۹x$

پس: $\begin{cases} ۳x + ۲y = ۷ \\ y = ۹x \end{cases} \to ۳x + ۱۸x = ۷ \to ۲۱x = ۷ \to x = \frac{۱}{۳} \ , \ y = ۹(\frac{۱}{۳}) = ۳$

68- از معادله‌ی لگاریتمی $۲\log x = ۱ + \log(x + \frac{۱۲}{۵})$، مقدار $\log_5^{(۲x+۱)}$ کدام است؟

① -۱ ② $\frac{۱}{۲}$ ③ ۱ ④ ۲

پاسخ: گزینه 4

می‌دانیم: $\boxed{\log_k^{a^n} = n\log_k^a \ , \ \log_k^a + \log_k^b = \log_k^{ab}}$

$۲\log x = ۱ + \log(x + \frac{۱۲}{۵}) \Rightarrow \log x^۲ = \log ۱۰ + \log(x + \frac{۱۲}{۵})$

$\Rightarrow \log x^۲ = \log ۱۰(x + \frac{۱۲}{۵}) \Rightarrow x^۲ = ۱۰x + ۲۴$

$x^۲ - ۱۰x - ۲۴ = ۰ \Rightarrow (x - ۱۲)(x + ۲) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} x = ۱۲ & \text{ق ق} \\ x = -۲ & \text{غ ق ق (جلوی لگاریتم را منفی می‌کند)} \end{cases}$

$\log_5^{۲x+۱} = \log_5^{۲۵} = \log_5^{5^2} = ۲$

69- از معادله‌ی $\log ۲ - \log ۳۰ = \log(x+۳) + \log(۲x-۱)$ مقدار $\log_۸ x$ کدام است؟

① $-\frac{۱}{۲}$ ② $\frac{۱}{۳}$ ③ $\frac{۲}{۳}$ ④ $\frac{۳}{۲}$

پاسخ: گزینه 2

می‌دانیم: $\boxed{\log_k^a + \log_k^b = \log_k^{ab} \quad , \quad \log_k^a - \log_k^b = \log_k^{\frac{a}{b}} \quad , \quad \log_{k^m}^{a^n} = \frac{n}{m}\log_k^a}$

$$\log(۲x-۱)+\log(x+۳)=\log ۳۰-\log ۲ \to \log(۲x-۱)(x+۳)=\log ۱۵$$

$$\Rightarrow ۲x^۲+۵x-۳=۱۵ \Rightarrow ۲x^۲+۵x-۱۸=۰ \Rightarrow x=\frac{-۵\pm\sqrt{۲۵+۱۴۴}}{۴}$$

$$x=\frac{-۵\pm ۱۳}{۴} \Rightarrow \begin{cases} x=۲ & \text{ق ق} \\ x=-\frac{۱۸}{۴} & \text{(جلوی لگاریتم را منفی می‌کند) غ ق ق} \end{cases}$$

$$\log_۸ x=\log_{۲^۳}^۲=\frac{۱}{۳}$$

70- از تساوی $\log ۳ = \frac{۱}{۲}\log x^۲ + \log(۲x-۱)$، مقدار لگاریتم $\frac{x}{۳}$ در مبنای ۴ کدام است؟

① $-\frac{۱}{۲}$ ② $-\frac{۱}{۴}$ ③ $\frac{۱}{۴}$ ④ $\frac{۱}{۳}$

پاسخ: گزینه 1 می‌دانیم: $\boxed{\log_k^a + \log_k^b = \log_k^{ab} \quad , \quad \log_k^{a^n} = n\log_k^a \quad , \quad \log_{k^m}^{a^n} = \frac{n}{m}\log_k^a}$

$$\log(۲x-۱)+\frac{۱}{۲}\log x^۲=\log ۳ \Rightarrow \log(۲x-۱)+\log|x|=\log ۳ \to \log(۲x-۱)|x|=\log ۳ \Rightarrow (۲x-۱)|x|=۳$$

با توجه به این که $۲x-۱>۰$ است، پس $x>\frac{۱}{۲}$ و در نتیجه $|x|=x$ می باشد، لذا داریم:

$$(۲x-۱)(x)=۳ \Rightarrow ۲x^۲-x-۳=۰ \xrightarrow{a+c=b} ۰ \Rightarrow \begin{cases} x=-۱ & \text{(جلوی لگاریتم را منفی می‌کند) غ ق ق} \\ x=-\frac{c}{a}=\frac{۳}{۲} & \text{ق ق} \end{cases}$$

بنابراین برای یافتن لگاریتم $\frac{x}{۳}$ در مبنای ۴ داریم:

$$\log_۴^{\frac{x}{۳}}=\log_۴^{\frac{۱}{۲}}=\log_{۲^۲}^{۲^{-۱}}=-\frac{۱}{۲}$$

71- فرض کنید $\log_{\frac{۵}{۲}}^{(۳x-۲)} = \begin{vmatrix} \log ۲ & \log ۵ \\ \log ۵ & \log ۲ \end{vmatrix}$ مقدار x کدام است؟ $= ۱$

① ۹ ② $\frac{۱۷}{۳}$ ③ ۴ ④ $\frac{۷}{۳}$

پاسخ: گزینه 3

می‌دانیم:

$$\log a-\log b=\log\frac{a}{b} \quad , \quad \log a+\log b=\log a\cdot b \quad , \quad \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}=ad-bc$$

$\log_b^a \times \log_a^c = \log_b^c$

$$\begin{vmatrix} \log ۵ & \log ۲ \\ \log ۲ & \log ۵ \end{vmatrix} = (\log ۵)^۲ - (\log ۲)^۲ \xrightarrow{\text{اتحاد مزدوج}} (\log ۵ + \log ۲)(\log^۵ - \log^۲) = \log_{۱۰}^{۱۰} \log^{\frac{۵}{۲}} = \log^{\frac{۵}{۲}}$$

پس داریم:

$$\log^{\frac{۵}{۲}} \times \log_{\frac{۵}{۲}}^{۳x-۲} = ۱ \Rightarrow \log^{۳x-۲} = ۱ \Rightarrow ۳x - ۲ = ۱۰ \Rightarrow x = ۴$$

72- مجموعه جواب نامعادلهٔ $\log_{۰/۵}^{\frac{۲x+۳}{۴}} \geq -۱$ کدام است؟

① $(\frac{۳}{۲}, \frac{۵}{۲}]$ ② $(\frac{-۳}{۲}, \frac{۵}{۲}]$ ③ $(-\infty, \frac{۵}{۲}]$ ④ $(\frac{-۳}{۲}, +\infty)$

پاسخ: گزینه 2

می‌دانیم: $\boxed{\log_a^A \geq m \xrightarrow{۰<a<۱} A \leq a^m}$

$$\left.\begin{array}{l} \log_{۰/۵}^{\frac{۲x+۳}{۴}} \geq -۱ \rightarrow \frac{۲x+۳}{۴} \leq (۰/۵)^{-۱} \Rightarrow \frac{۲x+۳}{۴} \leq ۲ \Rightarrow x \leq \frac{۵}{۲} \quad (I) \\ \text{از طرفی} : \frac{۲x+۳}{۴} > ۰ \Rightarrow x > \frac{-۳}{۲} \quad (II) \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{اشتراک } II,I} \frac{-۳}{۲} < x \leq \frac{۵}{۲}$$

73- در معادله‌ی $\log_۹^x + \log_{x^۳}^۳ = \frac{۵}{۶}$ مجموع ریشه‌های آن کدام است؟

① $۳ + ۳\sqrt{۳}$ ② $۳ + \sqrt{۳}$ ③ $۳ + \sqrt[۳]{۹}$ ④ $۳ + ۲\sqrt{۳}$

پاسخ: گزینه 3

می‌دانیم: $\boxed{\log_k^a = \frac{۱}{\log_a^k} \ , \ \log_{k^m}^{a^n} = \frac{n}{m}\log_k^a \ , \ \log_b^N = x \rightarrow N = b^x}$

$$\log_۹^x + \log_{x^۳}^۳ = \frac{۵}{۶} \rightarrow \log_{۳^۲}^x + \log_{x^۳}^۳ = \frac{۵}{۶} \Rightarrow \frac{۱}{۲}\log_۳^x + \frac{۱}{۳}\log_x^۳ = \frac{۵}{۶}$$

$$\log_۳^x = t \Rightarrow \frac{۱}{۲}t + \frac{۱}{۳t} = \frac{۵}{۶} \Rightarrow \frac{۳t^۲ + ۲}{۶t} = \frac{۵}{۶} \Rightarrow ۳t^۲ - ۵t + ۲ = ۰$$

$$a + b + c = ۰ \Rightarrow \begin{cases} t = ۱ \Rightarrow \log_۳^x = ۱ \Rightarrow x = ۳^۱ = ۳ \\ t = \frac{c}{a} = \frac{۲}{۳} \Rightarrow \log_۳^x = \frac{۲}{۳} \Rightarrow x = ۳^{\frac{۲}{۳}} = \sqrt[۳]{۹} \end{cases} \xrightarrow{\text{مجموع ریشه‌ها}} ۳ + \sqrt[۳]{۹}$$

74- اگر $\log ۲ + \log ۳ + \log ۴ = a$ باشد، آنگاه حاصل $\frac{۳\log ۶ + \log ۶۴}{\log ۲۴ + \log ۱۰۰}$ کدام است؟

① $\frac{a^۲}{a+۳}$ ② $\frac{a+۳}{a+۴}$ ③ $\frac{a}{۳a+۶}$ ④ $\frac{۳a}{a+۲}$

پاسخ: گزینه 4

می‌دانیم: $\boxed{\log_k^a+\log_k^b=\log_k^{ab} \quad , \quad \log_k^{a^n}=n\log_k^a}$

$$\log 2+\log 3+\log 4=a \ \Rightarrow \log 2\times 3\times 4=a \Rightarrow \log 24=a$$

$$\frac{3\log 6+\log 64}{\log 24+\log 100}=\frac{3\log(2\times 3)+\log 8^2}{\log 24+\log 100}=\frac{3(\log 2+\log 3)+2\log 8}{\log 24+\log 100}=\frac{3\log 3+3\log 2+2\log 8}{\log 24+\log 100}$$

$$=\frac{3\log 3+\log 8+2\log 8}{\log 24+2}=\frac{3\log 3+3\log 8}{\log 24+2}=\frac{3(\log 3+\log 8)}{\log 24+2}=\frac{3\log 24}{\log 24+2}=\frac{3a}{a+2}$$

75- مجموعهٔ جواب‌های نامعادلهٔ $\log_4^{(1+x)}<\log_4^{(-x)}-1$ بازهٔ (a,b) است. مقدار $b-a$ کدام است؟

(1) $\frac{1}{2}$ (2) 1 (3) $\frac{1}{5}$ (4) $\frac{1}{4}$

پاسخ: گزینه 3 می‌دانیم اگر $K>1$، آن‌گاه از $\log_k^a<\log_k^b$، نتیجه می‌شود $a<b$

بنابراین:

$$\log_4^{(1+x)}<\log_4^{(-x)}-1 \Rightarrow \log_4^{(1+x)}-\log_4^{(-x)}<-1 \Rightarrow \log_4^{(-\frac{1+x}{x})}<\log_4^{\frac{1}{4}} \Rightarrow -\frac{1+x}{x}<\frac{1}{4} \quad (*)$$

از طرف دیگر باید $-x>0$ و $1+x>0$ تا نامعادله معنی‌دار باشد. یعنی $-1<x<0$. (I)

پس از $(*)$ نتیجه می‌شود:

$$\frac{1+x}{x}>-\frac{1}{4} \Rightarrow 4(1+x)<-x \Rightarrow 4+4x<-x \Rightarrow 5x<-4 \Rightarrow x<-\frac{4}{5} \quad (II)$$

از (I) و (II) نتیجه می‌شود $-1<x<-\frac{4}{5}$، پس $(a,b)=(-1,-\frac{4}{5})$ و درنتیجه $b-a=\frac{1}{5}$.

76- اگر x جواب معادلهٔ $\log_2^{(x+4)}-\log_4^x=2$ باشد، مقدار $\log_x^{(x+28)}$ کدام است؟

(1) $\frac{5}{2}$ (2) $\frac{3}{2}$ (3) 2 (4) 4

پاسخ: گزینه 1 توجه کنید که $\log_4^x=\log_{2^2}^x=\frac{1}{2}\log_2^x$؛ بنابراین معادله به‌صورت زیر است:

$$\log_2^{(x+4)}-\frac{1}{2}\log_2^x=2 \Rightarrow 2\log_2^{(x+4)}-\log_2^x=4$$

$$\log_2^{(x+4)^2}-\log_2^x=4 \Rightarrow \log_2^{\frac{(x+4)^2}{x}}=4 \Rightarrow \frac{(x+4)^2}{x}=2^4 \Rightarrow x^2+8x+16=16x \Rightarrow x^2-8x+16=0$$
$$\Rightarrow (x-4)^2=0 \Rightarrow x=4$$

بنابراین

$$\log_x^{(x+28)}=\log_4^{32}=\log_{2^2}^{2^5}=\frac{5}{2}\log_2^2=\frac{5}{2}$$