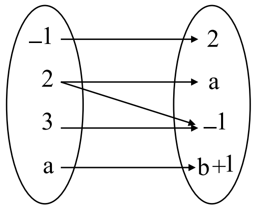
تابع

تعریف تابع

1 - نمودار پیکانی تابع f به‌صورت شکل زیر است. $a+b$ کدام است؟



① صفر ② ۱

③ ۲ ④ -۱

پاسخ: گزینه 1 عضو ۲ از مجموعهٔ اول به دو عضو a و -۱ مرتبط شده است. برای تابع بودن لازم است که $a=-۱$ باشد. در این صورت عضو -۱ نیز به دو عضو ۲ و $b+۱$ مرتبط خواهد شد. بنابراین باید $b=۱$ باشد.

$\Rightarrow a+b=۰$

---

2 - در کدام‌یک از رابطه‌های زیر y تابعی از x است؟

① $x-y^۲=۴$ ② $y-x^۲=۴$ ③ $|y-۱|-۲x=۰$ ④ $x^۲y=۰$

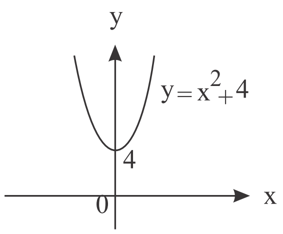
پاسخ: گزینه 2 y تابعی از x است هرگاه به‌ازای هر x فقط و فقط یک y وجود داشته باشد.

گزینهٔ «۱»: تابع نیست، زیرا اگر $x=۵$ باشد، آنگاه $y^۲=۱$ و $y=\pm۱$ که معرف تابع نیست.

گزینهٔ «۳»: تابع نیست، زیرا اگر $x=۱$ باشد، آنگاه $|y-۱|=۲$ در نتیجه -۱ یا $y=۳$ که معرف تابع نیست.

گزینهٔ «۴»: تابع نیست، زیرا اگر $x=۰$ باشد، آنگاه y هر مقداری می‌تواند داشته باشد.

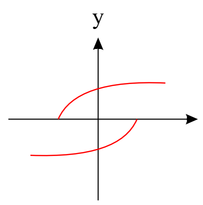
گزینهٔ «۲»: با توجه به نمودار مقابل، تابع است.

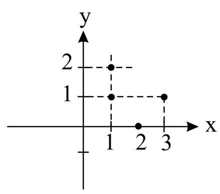


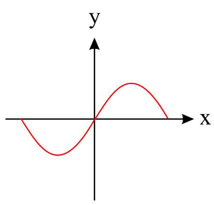
زیرا هر خطی موازی محور yها رسم کنیم، نمودار تابع را حداکثر در یک نقطه قطع می‌کند.

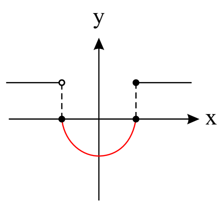
---

3 - کدام نمودار، نمایانگر نمودار یک تابع است؟

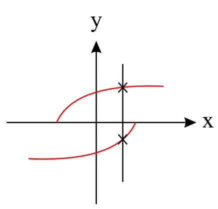
①


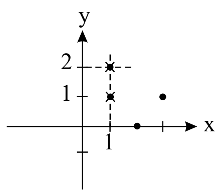
②


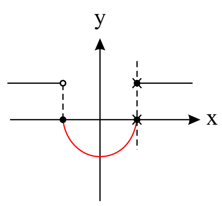
③


④


پاسخ: گزینه 3 نمودار یک رابطه، وقتی تابع است که خطوط موازی محور y در بیش از یک نقطه نمودار را قطع نکند.

(1


(2


(4


---

4 - چه تعداد تابع مانند f از مجموعهٔ $A=\{a,b,c,d\}$ به مجموعهٔ $B=\{e,f,c\}$ وجود دارد به شرطی که $f(a)=e$ و $f(b)\neq c$ باشد؟

① ۸۱ ② ۳۶ ③ ۲۷ ④ ۱۸

پاسخ: گزینه 4 با در نظر گرفتن تعداد انتخاب‌های هر عضو مجموعهٔ A داریم:

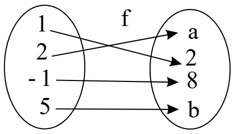
چون $f(a)=e$ پس a یک انتخاب و

چون $f(b)\neq c$ پس b دو انتخاب دارد.

$$\begin{array}{ccccccc} \{\, a & , & b & , & c & , & d \,\} \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ ۱ & \times & ۲ & \times & ۳ & \times & ۳ \quad = ۱۸ \end{array}$$

---

5 - شکل زیر نمایش پیکانی تابع خطی f است. حاصل ab کدام است؟



① ۱۰ ② -۱۰ ③ ۱۵ ④ -۱۵

پاسخ: گزینه 1 تابع f خطی است پس داریم:

$$f(x)=mx+n \to \begin{cases} f(۱)=۲ \Rightarrow m+n=۲ \\ f(-۱)=۸ \Rightarrow -m+n=۸ \end{cases} \Rightarrow n=۵, m=-۳ \Rightarrow f(x)=-۳x+۵$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a=f(۲)=-۶+۵=-۱ \\ b=f(۵)=-۱۵+۵=-۱۰ \end{cases} \Rightarrow ab=۱۰$$

---

6 - اگر $f=\{(۲\,,\,۴)\,,\,(a+۲\,,\,b)\,,\,(۲\,,\,-۲a)\,,\,(۰\,,\,۴)\,,\,(-۶\,,\,۲)\}$ نمایش یک تابع باشد، حاصل $a+b$ کدام است؟

① ۲ ② -۶ ③ ۶ ④ صفر

پاسخ: گزینه 1 برای اینکه f نمایش یک تابع باشد، نباید مؤلفه‌های اول زوج‌های متمایز یکسان باشند.

$$\Rightarrow -۲a=۴ \Rightarrow a=-۲$$
$$\Rightarrow f=\{(۲\,,\,۴)\,,\,(۰\,,\,b)\,,\,(۲\,,\,۴)\,,\,(۰\,,\,۴)\,,\,(-۶\,,\,۲)\}$$
$$\Rightarrow b=۴ \Rightarrow a+b=۲$$

---

7 - در تابع $f(x)=\begin{cases} x^۲+mx & x\leq ۱ \\ ۲mx+۲ & x\geq ۱ \end{cases}$ مقدار $f(m)$ کدام است؟

① -۱ ② ۰ ③ ۱ ④ ۲

پاسخ: گزینه 4

در توابع چند ضابطه‌ای برای تابع بودن نباید دامنه‌ی مشترکی بین ضابطه‌ها وجود داشته باشد در صورت وجود باید به ازای دامنه‌های مشترک ضابطه‌ها نیز با هم برابر باشند.

$$\begin{array}{l} f(۱)=۱+m \\ f(۱)=۲m+۲ \end{array} \xrightarrow{\text{شرط تابع بودن}} ۱+m=۲m+۲ \Rightarrow m=-۱$$

$$\Rightarrow f(-۱) \overset{\text{ضابطه بالا}}{=\!=\!=} (-۱)^۲+(-۱)(-۱)=۲$$

---

8 - مجموعه‌های $A=\{-۱,۴,۵,۶\}$ و $B=\{۶,۳,۹\}$ مفروض اند. چند تابع مانند f از A به B می‌توان نوشت که $f(-۱)\neq ۳$ باشد.

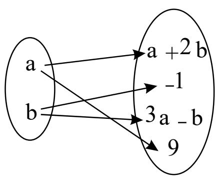
① ۲۹ ② ۲۷ ③ ۵۴ ④ ۵۶

پاسخ: گزینه 3 $f(-۱)\neq ۳$ یعنی عضو -۱ از A به عضو ۳ از B متناظر نمی‌شود پس برای -۱ دو انتخاب باقی می‌ماند. بقیهٔ اعضای A هر کدام ۳ انتخاب دارند.

$$\begin{array}{lccccccc} A: & -۱ & , & ۴ & , & ۵ & , & ۶ \\ & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ & ۲ & \times & ۳ & \times & ۳ & \times & ۳ \quad = ۵۴ \end{array}$$

---

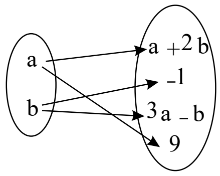
9 - اگر نمودار مقابل، یک تابع باشد، حاصل $\dfrac{۲a+b}{۳}$ کدام است؟



① ۱ ② ۲ ③ ۳ ④ ۴

پاسخ: گزینه 2

> از هر عضو در نمودار پیکانی فقط باید یک پیکان خارج شود، مگر آنکه تکراری باشد.



$$\begin{cases} a+2b=9 \\ 3a-b=-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a+2b=9 \\ 6a-2b=-2 \end{cases}$$

$$7a=7 \Rightarrow \boxed{a=1}$$

$$a+2b=9 \xrightarrow{a=1} 1+2b=9 \Rightarrow 2b=8 \Rightarrow \boxed{b=4}$$

$$\Rightarrow \frac{2a+b}{3}=\frac{2+4}{3}=2$$

---

10 - اگر رابطهٔ $f=\left\{(1,a),(b,a+2),(1,b^2-2),(b,a^2)\right\}$ یک تابع باشد، کدام گزینه صحیح نیست؟

(1) $ab=-1$　(2) $ab=4$　(3) $ab\neq 4$　(4) $ab=-4$

پاسخ: گزینه 3

$$(b,a+2),(b,a^2) \Rightarrow a^2=a+2 \to a^2-a-2=0$$

$$\Rightarrow (a-2)(a+1)=0 \to a=2\,,\, a=-1$$

$$(1,a),(1,b^2-2) \Rightarrow b^2-2=a$$

$$a=2 \to b^2-2=2 \to b^2=4 \to b=\pm 2 \;\to ab=2(\pm 2)=\pm 4$$

$$a=-1 \to b^2-2=-1 \to b^2=1 \to b=1 \to ab=(-1)(1)=-1$$

---

11 - چند تابع از مجموعهٔ $A=\left\{3^x \,|x\in\mathbb{Z}\,,\; |x|\leq 1\right\}$ به مجموعهٔ $B=\{5,9,0\}$ تعریف می‌شود که شامل زوج مرتب $(1,0)$ باشد ولی شامل $(3,9)$ نباشد؟

(1) ۶　(2) ۲۷　(3) ۹　(4) ۱۸

پاسخ: گزینه 1

$$A=\{3^x\,|x\in\mathbb{Z}\;,\;-1\leq x\leq 1\}=\left\{3^{-1},3^0,3^1\right\}=\left\{\frac{1}{3}\,,\,1\,,\,3\right\}$$

شامل زوج مرتب $(1,0)$ پس عضو ۱ از A فقط یک حالت دارد. فاقد $(3,9)$ یعنی عضو ۳ از A به ۹ متناظر نمی‌شود و به بقیهٔ اعضای B متناظر می‌شود. پس:

$$\begin{array}{lccccc} A: & \frac{1}{3} & , & 1 & , & 3 \\ & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ & 3 & \times & 1 & ,\times & 2 & =6 \end{array}$$

---

12 - در کدام‌یک از معادلات زیر، y تابعی از x است؟

(1) $\sqrt{x^2}+\sqrt{y^2}=1$　(2) $y^2+x^3=-1$　(3) $|y|+x^2+1=2x$　(4) $y=\begin{cases} x+2 & x\geq 0 \\ x-1 & x\leq 0 \end{cases}$

پاسخ: گزینه 3

گزینهٔ ۱) $|x|+|y|=1\;,\; x=0 \Rightarrow |y|=1 \Rightarrow y=\pm 1$ تابع نیست.

گزینهٔ ۲) $y^2+x^3=-1 \Rightarrow y^2=-x^3-1\;,\; x=-2 \Rightarrow y^2=-(-2)^3-1=7$

$\Rightarrow y^2=7 \Rightarrow y=\pm\sqrt{7}$ تابع نیست.

گزینهٔ ۳) $|y|+x^2+1-2x=0 \Rightarrow |y|+(x-1)^2=0$

مجموع دو عبارت نامنفی زمانی صفر است که هردو باهم صفر باشند.

$y=0\;,\; x-1=0 \Rightarrow x=1 \Rightarrow \{(1,0)\}$ تابع است.

گزینه ۴) $y=\begin{cases} x+2 & x\geq 0 \quad \Rightarrow x=0\Rightarrow y=2\\ x-1 & x\leq 0 \quad \Rightarrow x=0\Rightarrow y=-1\end{cases}$ تابع نیست.

13 - تابع $f=\{(2b,1),(a+c,a-b),(0,b),(d,c),(0,d-b)\}$ دو عضو دارد. $a+b$ کدام است؟ ($a,b>0$)

① ۲ ② ۳ ③ ۴ ④ ۵

پاسخ: گزینه 4 ابتدا شرط تابع بودن را در نظر می‌گیریم.

$(0,b)=(0,d-b)\Rightarrow d-b=b\Rightarrow d=2b$

$f=\{(2b,1),(a+c,a-b),(0,b),(2b,c)\}$

$(2b,1)=(2b,c)\Rightarrow c=1\Rightarrow f=\{(2b,1),(a+1,a-b),(0,b)\}$

حال با توجه به این که تابع f شامل دو زوج مرتب است، حالات زیر را داریم:

$(2b,1)=(0,b)\Rightarrow 2b=0 \;,\; b=1\Rightarrow b=0 \;,\; b=1\Rightarrow$ غیر ممکن

$(a+1,a-b)=(0,b)\Rightarrow a+1=0\Rightarrow a=-1 \;,\; a-b=b\Rightarrow -1=2b\Rightarrow b=-\frac{1}{2}$

چون $a,b>0$ پس $a=-1$ و $b=-\frac{1}{2}$ نیز غیر قابل قبول است.

$(2b,1)=(a+1,a-b)\Rightarrow \begin{cases} 2b=a+1 \Rightarrow a=2b-1\\ a-b=1 \Rightarrow 2b-1-b=1\Rightarrow b=2\Rightarrow a=3\end{cases}$

$a+b=3+2=5$

14 - اگر رابطه‌ی $f=\left\{(3,m^3-m),(-3m,m),(1,-2),(3,0),(2m,2),(m,3)\right\}$ تابع باشد؛ چند مقدار برای m موجود است؟

① ۳ ② ۲ ③ ۱ ④ صفر

پاسخ: گزینه 4

زمانی رابطه‌ای به شکل زوج مرتب تابع است که تمام زوج‌های مرتب آن مؤلفه‌های اول متفاوت داشته باشند یا اگر مؤلفهٔ اول دو زوج مرتب یکسان بود مؤلفه‌های دومشان نیز باهم برابر باشند

$$\begin{cases}(3,m^3-m)\\(3,0)\end{cases}\Rightarrow m^3-m=0\Rightarrow m(m^2-1)=0\Rightarrow\begin{cases}m=0 \quad I\\ m^2=1\Rightarrow\begin{cases}m=1 \quad II\\ m=-1 \quad III\end{cases}\end{cases}$$

با فرض I:

$$m=0\Rightarrow\begin{cases}(-3m,m)=(0,0)\\(2m,2)=(0,2)\\(m,3)=(0,3)\end{cases}\Rightarrow m\neq 0$$

فرض II:

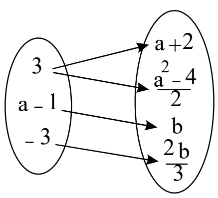
$$m=1\Rightarrow\begin{cases}(1,-2)=(1,-2)\\(m,3)=(1,3)\end{cases}\Rightarrow m\neq 1$$

فرض III:

$$m=-1\Rightarrow\begin{cases}(-3m,m)=(3,-1)\\(3,0)\end{cases}\Rightarrow m\neq -1$$

پس گزینه‌ی ۴ درست است و هیچ مقداری برای m نیست تا f تابع شود.

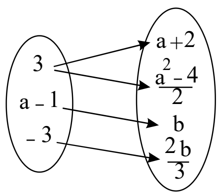
15 - اگر رابطهٔ زیر تابع باشد، آنگاه کدامیک از گزینه‌های زیر، فقط یک جواب خواهد داشت؟



① $a-b$ ② $a+b$

③ ab ④ $\frac{b}{a}$

پاسخ: گزینه 1



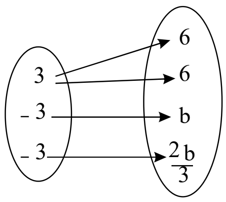
> یک نمودار پیکانی فقط در صورتی تابع است که از هر یک از اعضاء مجموعهٔ اول فقط یک پیکان خارج شود.
> اگر دو پیکان خارج شده بود، حتماً باید تکراری باشند.

باتوجه به اینکه از **۳** دو پیکان خارج شده و رابطه تابع است پس هر دو پیکان باید به مقداری مساوی ختم شوند. درنتیجه:

$$a+۲=\frac{a^۲-۴}{۲}\Rightarrow ۲a+۴=a^۲-۴\Rightarrow a^۲-۲a-۸=۰\Rightarrow (a-۴)(a+۲)=۰\Rightarrow \begin{cases}\boxed{a=-۲}\ (I)\\ \text{یا}\\ \boxed{a=۴}\ (II)\end{cases}$$

با فرض (I) سؤال را ادامه می‌دهیم: رابطه به شکل مقابل درمی‌آید:

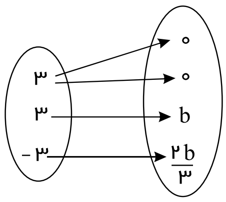
با استدلال مشابه خواهیم داشت:



$$b=\frac{۲b}{۳}\Rightarrow ۲b=۳b\Rightarrow \boxed{b=۰}$$

با فرض (II) سؤال را ادامه می‌دهیم: رابطه به شکل مقابل درمی‌آید:

و نتیجه می‌گیریم: $\boxed{b=۶}$



با فرض I داریم:

$$\begin{cases}a=-۲\\ b=۰\end{cases}\rightarrow a-b=-۲$$

با فرض II داریم:

$$\begin{cases}a=۴\\ b=۶\end{cases}\rightarrow a-b=-۲$$

می‌بینیم که با هر دو فرض، مقدار $a-b$ برابر است. در حالی که سایر گزینه‌ها مقادیر مختلفی خواهند داشت.

دامنه‌ی توابع

16 - دامنه‌ی تابع $f(x)=\frac{x}{۲[x]+۳}$ کدام است؟

① $\mathbb{R}-\{-\frac{۳}{۲}\}$ ② $\mathbb{R}-[-\frac{۳}{۲},-\frac{۱}{۲}]$ ③ $\mathbb{R}$ ④ $\mathbb{R}-\{-۱\}$

پاسخ: گزینه 3

$۲[x]+۳=۰\rightarrow [x]=-\frac{۳}{۲}\notin\mathbb{Z}\Rightarrow$ جواب ندارد

مخرج صفر نمی‌شود $\Rightarrow D_f=\mathbb{R}$

---

17 - دامنهٔ تابع $y=\sqrt{۳-\sqrt{۱-۴x}}$ شامل چند عدد صحیح است؟

① ۳ ② ۲ ③ ۴ ④ ۵

پاسخ: گزینه 1

برای توابعی که چند رادیکال داخل هم دارند باید ابتدا دامنهٔ رادیکال های داخلی را بیابیم و سپس دامنهٔ رادیکال بزرگتر را تعیین کرده و بعد اشتراک بگیریم.

$$1 - 4x \geq 0 \Rightarrow x \leq \frac{1}{4} \quad (1)$$

$$3 - \sqrt{1-4x} \geq 0 \Rightarrow \sqrt{1-4x} \leq 3 \Rightarrow 1 - 4x \leq 9 \Rightarrow 4x \geq -8 \Rightarrow x \geq -2 \quad (2)$$

$$(1) \cap (2) \Rightarrow x \in \left[-2, \frac{1}{4}\right] \xrightarrow{x \in \mathbb{Z}} x \in \{-2, -1, 0\}$$

---

18 - دامنه‌ی تابع $y = \sqrt{\dfrac{x+1}{x^2+x-2}}$ چیست؟

① $(-\infty, -2) \cup (-1, 1)$ ② $[-2, -1] \cup [1, +\infty)$ ③ $(-\infty, -2] \cup [-1, 1]$ ④ $(-2, -1] \cup (1, +\infty)$

پاسخ: گزینه 4 برای محاسبهٔ دامنهٔ توابع $y = \sqrt[2n]{f}$ باید $f \geqslant 0$ قرار دهیم:

x	$-\infty$		-2		-1		1	$+\infty$
$x+1$		$-$		$-$	0	$+$		$+$
x^2+x-2		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$
y		$-$	ت ن	$+$	0	$-$	ت ن	$+$

$$\frac{x+1}{x^2+x-2} \geq 0$$
$$\Rightarrow D = (-2, -1] \cup (1, +\infty)$$

---

19 - اگر $f(x) = \sqrt{x + |x+2|}$، دامنه‌ی تعریف تابع $f(-x)$ کدام است؟

① $x \leq -1$ ② $x \geq -1$ ③ $x \leq 1$ ④ $x \geq 1$

پاسخ: گزینه 3

$$f(x) = \sqrt{x + |x+2|} \Rightarrow f(-x) = \sqrt{-x + |-x+2|} = \sqrt{|x-2| - x}$$

برای پیدا کردن دامنه‌ی تعریف باید زیر رادیکال را بزرگ‌ترمساوی صفر قرار دهیم یعنی: $|x-2| - x \geq 0$

$$\left.\begin{array}{l} x \geq 2 : x - 2 - x \geq 0 \Rightarrow -2 \geq 0 \Rightarrow \varnothing \xrightarrow{\text{اشتراک با شرط}} \varnothing \\ x < 2 : -x + 2 - x \geq 0 \Rightarrow -2x \geq -2 \Rightarrow x \leq 1 \xrightarrow{\text{اشتراک با شرط}} x \leq 1 \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{اجتماع}} x \leq 1$$

---

20 - دامنه‌ی تعریف تابع $f(x) = \sqrt{1 - \log(x-1)}$ به کدام صورت است؟

① $(1, 2]$ ② $[2, 10]$ ③ $[1, 11)$ ④ $(1, 11]$

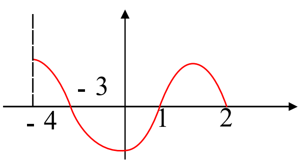
پاسخ: گزینه 4 جلوی لگاریتم باید مثبت باشد و زیر رادیکال،باید بزرگتر مساوی صفر باشد.

$$x - 1 > 0 \rightarrow x > 1 \quad (I)$$
$$1 - \log(x-1) \geq 0 \rightarrow \log(x-1) \leq 1 \rightarrow \log(x-1) \leq \log 10 \rightarrow x - 1 \leq 10 \rightarrow x \leq 11 \quad (II)$$

از اشتراک I و II به جواب $1 < x \leq 11$ یا $x \in (1, 11]$ می‌رسیم.

---

21 - شکل روبه‌رو نمودار تابع $y = f(x)$ است. دامنهٔ تابع $\sqrt{xf(x)}$ کدام است؟



① $[-3, 2]$ ② $[0, 2]$ ③ $[-4, -3] \cup [1, 2]$ ④ $[-3, 0] \cup [1, 2]$

پاسخ: گزینه 4 برای محاسبهٔ دامنهٔ توابع رادیکالی فرجهٔ زوج باید زیر رادیکال نامنفی باشد.

$x \cdot f(x) \geq 0 \Rightarrow$ بازه‌هایی صحیح است که x و $f(x)$ هم‌علامت باشند

یعنی منحنی در ناحیه‌های اول و سوم باشد. لذا:

$$D_f = [-3, 0] \cup [1, 2]$$

22 - به‌ازای کدام مجموعهٔ مقادیر k، بازهٔ $(k-۲,۳k+۲)$ زیرمجموعه‌ای از دامنهٔ تابع $f(x)=\dfrac{\sqrt{۹-x^۲}}{x-۱}$ است؟

① $(\frac{۱}{۳},۳]$ ② $[-\frac{۱}{۳},\frac{۱}{۳})$ ③ $[-۱,\frac{۱}{۳})$ ④ $[-۱,-\frac{۱}{۳})$

پاسخ: گزینه 4

$$f(x)=\frac{\sqrt{۹-x^۲}}{x-۱}\quad,\quad ۹-x^۲\geq ۰\Rightarrow x^۲\leq ۹\Rightarrow -۳\leq x\leq ۳$$

$$x-۱\neq ۰\Rightarrow x\neq ۱\Rightarrow D_f=[-۳,۳]-\{۱\}=[-۳,۱)\cup(۱,۳]$$

اگر بازهٔ $(k-۲,۳k+۲)$ زیرمجموعه‌ای از دامنهٔ تابع باشد، یکی از دو حالت زیر اتفاق می‌افتد.

$$\begin{cases}k-۲\geq -۳\\ ۳k+۲\leq ۱\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}k\geq -۱\\ k\leq -\dfrac{۱}{۳}\end{cases}\Rightarrow -۱\leq k\leq -\frac{۱}{۳}\qquad(۱)$$

یا

$$\begin{cases}k-۲\geq ۱\\ ۳k+۲\leq ۳\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}k\geq ۳\\ k\leq \dfrac{۱}{۳}\end{cases}\Rightarrow\varnothing\qquad(۲)$$

$$(۱)\cup(۲)\Rightarrow -۱\leq k\leq -\frac{۱}{۳}\Rightarrow k\in[-۱,-\frac{۱}{۳}]$$

ظاهراً طراح سؤال به این نکته که $k=-\frac{۱}{۳}$ نیز می‌تواند باشد توجه نکرده است.

$$k=-\frac{۱}{۳}\Rightarrow(k-۲,۳k+۲)=(-\frac{۱}{۳}-۲,-۱+۲)=(-\frac{۷}{۳},۱)\subset D_f$$

---

23 - دامنهٔ تغییرات تابع $f(x)=\log_۶\dfrac{۱}{۶+\sqrt{|x|}-|x|}$ کدام است؟

① $(-۹,۹)$ ② $(-۴,۹)$ ③ $(۴,۹)$ ④ $(-۴,۴)$

پاسخ: گزینه 1 می‌دانیم: برای محاسبهٔ دامنه تابع $y=\log(f(x))$ باید $f(x)>۰$ قرار داده و حدود x را پیدا کنیم.

$$\frac{۱}{۶+\sqrt{|x|}-|x|}>۰\Rightarrow ۶+\sqrt{|x|}-|x|>۰\xrightarrow{\sqrt{|x|}=t}۶+t-t^۲>۰\Rightarrow t^۲-t-۶<۰$$

$$\Rightarrow\begin{cases}t=۳\\ t=-۲\end{cases}\quad\begin{array}{c|ccccc} t & & -۲ & & ۳ & \\ \hline t^۲-t-۶ & + & ۰ & - & ۰ & +\end{array}\Rightarrow -۲<t<۳\Rightarrow -۲<\sqrt{|x|}<۳$$

پس داریم:

$$\underbrace{-۲<\sqrt{|x|}}_{\text{بدیهی}}\Rightarrow\sqrt{|x|}<۳\Rightarrow|x|<۹\Rightarrow -۹<x<۹$$

روش دوم: عددگذاری

فقط گزینهٔ $۵-=x\Leftarrow$ قابل قبول را قبول کرده است و جواب مسئله است.

---

24 - دامنهٔ تابع $f=\{(-۱,۷),(۲a-b,۰),(a+۴b,۷)\}$ مجموعهٔ $\{-۱,۲,۵\}$ است. حاصل $۳a+۳b$ کدام است؟

① ۵ ② ۶ ③ ۷ ④ ۸

پاسخ: گزینه 3 تابع f شامل ۳ زوج مرتب است و مجموعهٔ دامنهٔ آن نیز سه عضوی است. بنابراین باید یکی از دو حالت زیر برقرار باشد.

$$\left.\begin{matrix}\begin{cases}۲a-b=۲\\ a+۴b=۵\end{cases}\\ \text{یا}\\ \begin{cases}۲a-b=۵\\ a+۴b=۲\end{cases}\end{matrix}\right\}\Rightarrow ۳a+۳b=۷$$

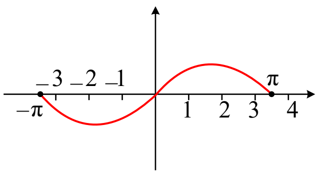
---

25 - چند عدد صحیح از بازهٔ $[-\pi,\pi]$ در دامنهٔ تابع $f(x)=\sqrt{\sin x}$ قرار دارند؟

① ۳ ② ۴ ③ ۷ ④ ۸

پاسخ: گزینه 2 به نمودار تابع $y=\sin x$ روی بازهٔ $[-\pi,\pi]$ توجه کنید.

اعداد صحیح ۳−، ۲− و ... و ۳ در بازهٔ $[-\pi,\pi]$ قرار دارند و فقط $\sin ۰$، $\sin ۱$، $\sin ۲$ و $\sin ۳$ اعداد مثبت هستند. پس فقط اعداد صحیح ۰، ۱، ۲ و ۳ از این بازه در دامنهٔ تابع f قرار دارند.



---

26 - اگر دامنهٔ تابع $f(x)=\dfrac{۲x-۴}{۳x^۲+۲ax+b}$ به صورت $\mathbb{R}-\{۲\}$ باشد، آنگاه $f(a-b)$ کدام است؟

① $\dfrac{۱}{۳۰}$ ② $-\dfrac{۱}{۳۰}$ ③ $\dfrac{۱}{۴۸}$ ④ $-\dfrac{۱}{۴۸}$

پاسخ: گزینه 2 چون $D_f=\mathbb{R}-\{۲\}$ می‌باشد، پس عبارت درجه دوم مخرج کسر باید ریشهٔ مضاعف ۳ داشته باشد، بنابراین داریم:

$$۳(x-۲)^۲=۳x^۲+۲ax+b\to ۳x^۲-۱۲x+۱۲=۳x^۲+۲ax+b\to\begin{cases}a=-۶\\ b=۱۲\end{cases}\to a-b=-۱۸$$

$$f(x)=\frac{۲x-۴}{۳(x-۲)^۲}\to f(-۱۸)=\frac{-۳۶-۴}{۳(-۱۸-۲)^۲}=\frac{-۴۰}{۱۲۰۰}=-\frac{۱}{۳۰}$$

---

27 - اگر دامنهٔ دو تابع $f(x)=\dfrac{۲}{\frac{۶}{x-۱}-۳}$ و $g(x)=\dfrac{۲x-۴}{x^۲-mx+n}$ برابر باشند، حاصل $m+n$ کدام است؟

① ۷ ② ۶ ③ ۵ ④ ۴

پاسخ: گزینه 1 در تابع f را مخرج کسرها نباید صفر شود. بنابراین:

$$x-۱\neq ۰\to x\neq ۱$$

در تابع f داریم:

$$\frac{۶}{x-۱}-۳\neq ۰\Rightarrow\frac{۶}{x-۱}\neq ۳\to ۳x-۳\neq ۶\to x\neq ۳$$

چون دامنهٔ تابع f و g برابرند، لذا:

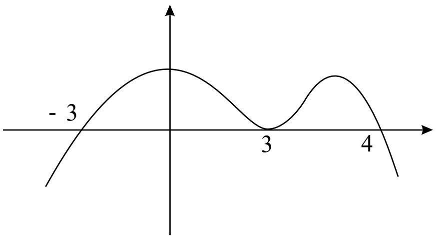
$$D_f=\mathbb{R}-\{۱,۳\}$$
$$D_g=\mathbb{R}-\{۱,۳\}$$

بنابراین ۱ و ۳ ریشه‌های مخرج تابع g هستند.

یعنی ۱ و ۳ ریشه‌های معادلهٔ $x^۲-mx+n=۰$ هستند.

$$\left.\begin{matrix}\text{مجموع ریشه‌ها}:\ S=-\dfrac{b}{a}=-\dfrac{-m}{۱}=m=۱+۳=۴\\ \text{حاصلضرب ریشه‌ها}:\ P=\dfrac{c}{a}=\dfrac{n}{۱}=n=۱\times ۳=۳\end{matrix}\right\}\to m+n=۴+۳=۷$$

28 - نمودار تابع f در شکل مقابل رسم شده است. در دامنهٔ تابع $g(x) = \sqrt{(۹ - x^۲)f(x)}$ چند عدد صحیح وجود ندارد؟



① ۱
② ۲
③ ۳
④ صفر

پاسخ: گزینه 4 دامنهٔ تابع g مقادیری از x هستند که در نامعادله $(۹ - x^۲)f(x)$ صدق می‌کنند. این نامعادله را به کمک جدول تعیین علامت مقابل حل می‌کنیم.

x	$-\infty$		-۳		۳		۴		$+\infty$
$۹ - x^۲$		$-$	۰	$+$	۰	$-$		$-$	
$f(x)$		$-$	۰	$+$	۰	$+$	۰	$-$	
$(۹ - x^۲)f(x)$		$+$	۰	$+$	۰	$-$	۰	$+$	

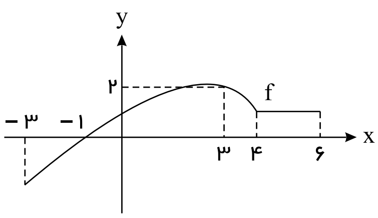
بنابراین :

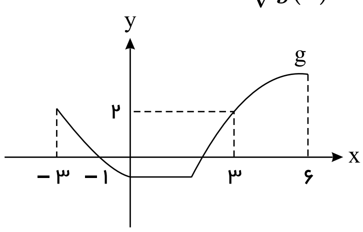
$$D_g = (-\infty, ۳] \cup [۴, +\infty)$$

و درنتیجه تمام اعداد صحیح در دامنهٔ تابع g قرار دارند.

---

29 - نمودار توابع f و g به صورت مقابل است. دامنهٔ تابع $h(x) = \frac{x}{\sqrt{g(x) - f(x)}}$ کدام است؟



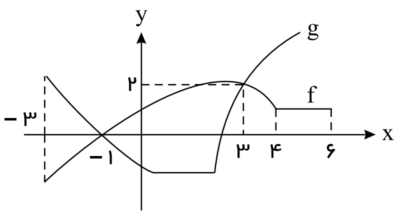


① $(-۳ , -۱) \cup (۳ , ۶)$
② $(-۱ , ۳) \cup [۴ , ۶]$
③ $(-۱ , ۳) \cup [۴ , ۶)$
④ $[-۳ , -۱) \cup (۳ , ۶]$

پاسخ: گزینه 4

نمودار توابع f و g در یک دستگاه مختصات به صورت زیر است:

$$g(x) - f(x) > ۰ \Rightarrow g(x) > f(x)$$



جواب نامعادلهٔ فوق، محدوده‌ای است که نمودار g بالاتر از نمودار f قرار دارد. طبق شکل فوق داریم:

$-۳ \le x < -۱$ یا $۳ < x \le ۶ \Rightarrow D_h = [-۳ , -۱) \cup (۳ , ۶]$

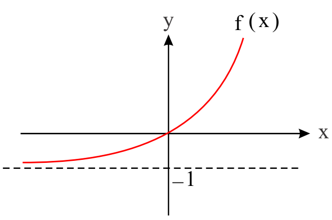
---

30 - اگر $f(x) = ۳^x - ۱$ باشد، دامنهٔ تابع $g(x) = \sqrt{\frac{(x + ۱)f(x)}{x + ۲}}$ کدام است؟

① $(-\infty, -۲) \cup [-۱, ۰]$ ② $(-۲, -۱] \cup [۰, +\infty)$ ③ $(-\infty, -۱]$ ④ $[-۱, +\infty)$

پاسخ: گزینه 2

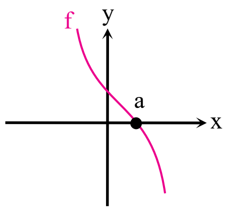
با توجه به نمودار تابع $f(x) = ۳^x - ۱$، جواب $f(x) = ۰$ برابر $x = ۰$ است.



x	$-\infty$		-2		-1		0		$+\infty$
$f(x)$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$x+1$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$x+2$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
عبارت ≥ 0		$-$	ن	$+$	0	$-$	0	$+$	

$$\frac{(x+1)f(x)}{(x+2)} \geq 0 \Rightarrow \quad \Rightarrow D_g = (-2,-1] \cup [0,+\infty)$$

31 - نمودار تابع $f(x)$ به صورت مقابل است. اگر دامنهٔ تابع $y=\sqrt{(x-1)f(2+x)}$ بازهٔ $[-1,1]$ باشد، مقدار a کدام است؟

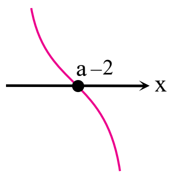


① ۱ ② ۲

③ ۳ ④ ۴

پاسخ: گزینه 1

$f(x+2)$ نسبت به محور x مطابق شکل مقابل است. در دو حالت $g(x)=(x-1)f(x+2)$ را تعیین علامت می کنیم:



الف) $a-2>1$:

		1		a−2	
x−1	−	0	+		+
f(x+2)	+		+	0	−
g(x)	−	0	+	0	−

$\Rightarrow g(x) \geq 0 \Rightarrow D=[1,a-2]$

که نمی‌تواند برابر $[-1,1]$ باشد.

ب) $a-2<1$:

		a−2		1	
x−1	−		−	0	+
f(x+2)	+	0	−		−
g(x)	−	0	+	0	−

$\Rightarrow g(x) \geq 0 \Rightarrow D=[a-2,1]=[-1,1] \Rightarrow a=1$

راه دوم: در حالت خاص فرض کنید $f(x)=-x+a$ و مسئله را حل کنید.

32 - دامنهٔ تابع $f(x)=\dfrac{x+2}{x^3-mx+m-1}$ بصورت $D_f=\mathbb{R}-\{1\}$ است، حدود m کدام است؟

① $m<\frac{3}{4}$ ② $m>\frac{5}{3}$ ③ $m<-\frac{3}{4}$ ④ $m>1$

پاسخ: گزینه 1 باید ریشه‌های مخرج را بررسی کنیم.

$$x^3-mx+m-1=0 \Rightarrow x^3-1-m(x-1)=0 \Rightarrow (x-1)(x^2+x+1)-m(x-1)=0$$

چون دامنه $\mathbb{R}-\{1\}$ است پس پرانتز دوم یا ریشه ندارد و یا ریشه مضاعف $x=1$ دارد. $(x-1)(x^2+x+1-m)=0$

$$x^2+x+1-m=0 \to \Delta<0 \Rightarrow 1-4(1-m)<0 \Rightarrow 1-4+4m<0$$

$$\Rightarrow 4m<3 \Rightarrow m<\frac{3}{4}$$

یا $(x-1)^2=(x^2+x+1-m) \Rightarrow x^2-2x+1=x^2+x+(1-m) \Rightarrow$ غیر ممکن

33 - تمام دامنهٔ تابع $y=\dfrac{\sqrt{x(x^2-1)}}{\sqrt{|x|+x}}$ کدام است؟

① $x>1$ ② $-1\le x<0$ ③ $0<x\le 1$ ④ $x\ge 1$

پاسخ: گزینه 4 برای تعیین دامنهٔ توابع $y=\sqrt[2k]{f}$ باید $f\ge 0$ باشد توجه کنیم اگر رادیکال در مخرج باشد زیر رادیکال باید بزرگتر از صفر باشد.

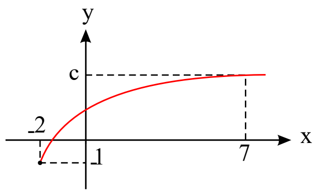
$$|x|+x>0\Rightarrow\begin{cases}x\le 0\to -x+x>0\to 0>0 \text{ غ ق ق}\\ x>0\to x+x>0\to 2x>0\to x>0\end{cases}\Rightarrow x>0\quad(I)$$

$$x(x^2-1)\ge 0\xrightarrow{\text{تعیین علامت}}\begin{array}{c|ccccccc} x & & -1 & & 0 & & 1 & \\ \hline x(x^2-1) & - & | & + & | & - & | & + \end{array}\Rightarrow -1\le x\le 0 \text{ یا } x\ge 1\quad(II)$$

$(I)\cap(II): D=[1,+\infty)$

---

34 - نمودار تابع $f(x)=\sqrt{x+a}+b$ به‌صورت مقابل است. $a+b+c$ کدام است؟



① 2 ② 3

③ 4 ④ 5

پاسخ: گزینه 2 با در نظر گرفتن دامنهٔ تابع از روش شکل و از روی ضابطه داریم:

$$\left.\begin{array}{r}f(x)=\sqrt{x+a}+b\Rightarrow x+a\ge 0\Rightarrow x\ge -a\\ \text{از روی شکل}:\ x\ge -2\end{array}\right\}\Rightarrow -a=-2\Rightarrow a=2$$

$$f(x)=\sqrt{x+2}+b\Rightarrow\left|\begin{array}{l}x=-2\\ y=-1\end{array}\right.\Rightarrow f(-2)=-1\Rightarrow\sqrt{-2+2}+b=-1\Rightarrow b=-1$$

$$f(x)=\sqrt{x+2}-1\Rightarrow c=f(7)\Rightarrow c=\sqrt{9}-1=3-1=2\Rightarrow c=2$$

$$a+b+c=2-1+2=3$$

---

35 - تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\dfrac{1}{[\cos\pi x]}$، در کدام بازه قابل تعریف است؟ ([]، نماد جزء صحیح است.)

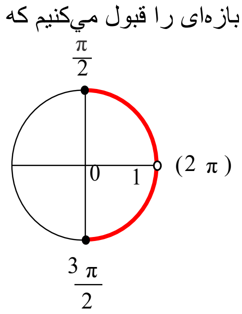
① $[0,1]$ ② $(0,1)$ ③ $(\frac{1}{2},\frac{3}{2})$ ④ $(-\frac{1}{2},\frac{1}{2})$

پاسخ: گزینه 3

$$[\cos\pi x]=0\Rightarrow 0\le\cos\pi x<1$$

بازه‌ای را قبول می‌کنیم که در آن بازه $\cos\pi x$ در رابطه‌ی $0\le\cos\pi x<1$ صدق نکند.

$$0\le\cos\pi x<1\Rightarrow \text{باتوجه به دایره‌ی مثلثاتی}\Rightarrow\begin{cases}0<\pi x\le\dfrac{\pi}{2}\\ \dfrac{3\pi}{2}\le\pi x<2\pi\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}0<x\le\dfrac{1}{2}\\ \dfrac{3}{2}\le x<2\end{cases}$$



این بازه ریشه‌های مخرج هستند و می‌دانیم که در توابع کسری، دامنهٔ تابع برابر است با: $\mathbb{R}-\{\text{ریشه‌های مخرج}\}$ یعنی ریشه‌های مخرج نباید در دامنهٔ تابع باشند با توجه به گزینه‌ها، در گزینهٔ ۳ ریشه‌های مخرج وجود ندارد.

بنابراین جواب گزینه‌ی ۳ می‌شود.

36 - اگر $f(x)=۲^x$ باشد، دامنه تابع $y=\sqrt{f\left(\frac{۱}{x}\right)-f(x)}$ ، به کدام صورت است؟

① $\mathbb{R}-(-۱,۱)$ ② $[-۱,۰)\cup(۰,۱]$ ③ $[-۱,۰)\cup[۱,+\infty)$ ④ $(-\infty,-۱]\cup(۰,۱]$

پاسخ: گزینه 4

چون $f(x)=۲^x$ است پس $f(\frac{۱}{x})=۲^{\frac{۱}{x}}$ می‌باشد پس:

$$y=\sqrt{f(\frac{۱}{x})-f(x)} \xrightarrow{D_y} f(\frac{۱}{x})-f(x)\geq ۰ \Rightarrow ۲^{\frac{۱}{x}}-۲^x\geq ۰ \Rightarrow ۲^{\frac{۱}{x}}\geq ۲^x \quad (*)$$

می‌دانیم تابع نمایی $y=۲^x$ صعودی است، پس از نامساوی (*) نتیجه می‌گیریم:

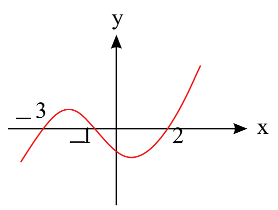
$$\frac{۱}{x}\geq x \Rightarrow \frac{۱}{x}-x\geq ۰ \Rightarrow \frac{۱-x^۲}{x}\geq ۰ \Rightarrow \underbrace{\frac{(۱-x)(۱+x)}{x}}_{P(x)}\geq ۰$$

باتوجه به جدول تعیین علامت $P(x)$، مجموعه جواب نامساوی اخیر برابر است با $(-\infty,-۱]\cup(۰,۱]$

x		-۱		۰		۱	
$P(x)$	$+$	۰	$-$		$+$	۰	$-$

---

37 - شکل زیر، نمودار تابع با ضابطه $f(x)$ است. دامنه تابع غیرنقطه‌ای $\sqrt{(x+۱)\,f(x)}$ کدام است؟



① $[-۳,۲]$ ② $[-۱,+\infty)$

③ $(-\infty,-۱]$ ④ $\mathbb{R}-(-۳,۲)$

پاسخ: گزینه 4 باتوجه به شکل تابع $f(x)$ در نقاط به طول‌های -۳ و -۱ و ۲ محور x ها را قطع می‌کند.

$$\text{شرط دامنه}:\ (x+۱)\cdot f(x)\geq ۰ \rightarrow \begin{cases} x+۱=۰ \rightarrow x=-۱ \\ f(x)=۰ \rightarrow x=-۳\,,\,-۱\,,\,۲ \end{cases}$$

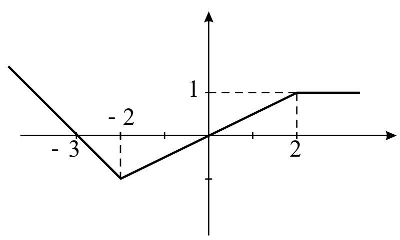
توجه: چون عدد $x=-۱$ دو بار تکرار شده است. پس ریشه مضاعف محسوب شده و علامت معادله در طرفین ریشهٔ مضاعف تغییر نمی‌کند.

x	$-\infty$		-۳		-۱		۲		$+\infty$
$(x+۱)\cdot f(x)\geq ۰$		$+$	۰	$-$	۰	$-$	۰	$+$	

$$D_f=(-\infty\,,-۳]\cup[۲\,,+\infty)=\mathbb{R}-(-۳\,,۲)$$

---

38 - نمودار تابع f به‌صورت زیر است. چند عدد صحیح در دامنهٔ تابع $g(x)=\frac{۱}{\sqrt{۱-f(x)}}$ قرار دارند؟



① ۲

② ۳

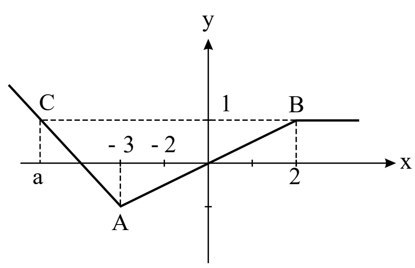
③ ۵

④ صفر

پاسخ: گزینه 3

دامنهٔ تابع g مجموعهٔ اعدادی هستند که در نامعادلهٔ $۱-f(x)>۰$ صدق می‌کنند.

بنابراین $f(x)<۱$.



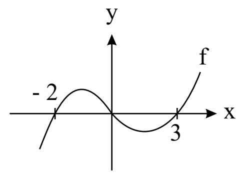
مطابق شکل بالا مجموعهٔ جواب‌های نامعادلهٔ بالا بازهٔ $(a,۲)$ است. برای پیدا کردن a توجه کنید که معادلهٔ خط AB به‌صورت $y=\frac{۱}{۲}x$ است. پس $y_A=\frac{۱}{۲}(-۲)=-۱$. پس خط AC از نقطه‌های $(-۲,-۱)$ و $(-۳,۰)$ عبور می‌کند و معادلهٔ آن به‌صورت $y=-x-۳$ است. پس:

$$\begin{cases} y_c=۱ \\ x_c=a \end{cases} \Rightarrow ۱=-a-۳ \Rightarrow a=-۴$$

بنابراین دامنهٔ g بازهٔ $(-۴,۲)$ است که پنج عدد صحیح ۱ و ۰ و ۱− و ۲− و ۳− در آن قرار دارند.

---

39 - نمودار تابع f به صورت مقابل است. دامنه تابع $g(x)=\sqrt{\frac{x-۱}{f(x)}}$ کدام است؟



۱) $(-\infty\,,\,-۲)\cup(۰\,,\,۱]\cup(۳\,,\,+\infty)$

۲) $(-۲\,,\,۰)\cup[۱\,,\,۳)$

۳) $(-\infty\,,\,-۲)\cup[۱\,,\,+\infty)$

۴) $(-۲\,,\,۰)\cup(۳\,,\,+\infty)$

پاسخ: گزینه 1

برای تعیین دامنه g باید نامعادله $\frac{x-۱}{f(x)}\geq ۰$ را حل کنیم.

x	$-\infty$	-۲		۰		۱		۳	$+\infty$
x − ۱	−		−		−	۰	+		+
f (x)	−	۰	+	۰	−		−	۰	+
$\frac{x-۱}{f(x)}$	+	ت ن	−	ت ن	+	۰	−	ت ن	+

$x<-۲$ یا $۰<x\leq ۱$ یا $x>۳$

$D_g=(-\infty\,,\,-۲)\cup(۰\,,\,۱]\cup(۳\,,\,+\infty)$

---

40 - دامنه‌ی تابع $f(x)=\sqrt{\log_{۰/۴}^{\log(۳x+۱)}}$ کدام است؟

۱) $(۰,۳]$

۲) $[۰,۳]$

۳) $[۰,۳)$

۴) $(۰,۳)$

پاسخ: گزینه 1

برای محاسبهٔ دامنهٔ توابع $y=log_B^A$ باید سه شرط $A>۰, B>۰, B\neq ۱$ را لحاظ کنیم و نیز می‌دانیم:

$$\begin{cases} \log_a^f\geq ۰ \xrightarrow{۰<a<۱} ۰<f\leq ۱ \\ \log_a^f\geq ۰ \xrightarrow{a>۱} f\geq ۱ \end{cases}$$

$\log_{۰/۴}^{\log ۳x+۱}\geq ۰\Rightarrow ۰<\log ۳x+۱\leq ۱\Rightarrow ۱<۳x+۱\leq ۱۰\Rightarrow ۰<x\leq ۳ \qquad (۱)$

$\log ۳x+۱>۰\Rightarrow ۳x+۱>۱\Rightarrow x>۰ \qquad (۲)$

$۳x+۱>۰\Rightarrow x>-\frac{۱}{۳} \qquad (۳)$

$(۱)\cap(۲)\cap(۳)\Rightarrow ۰<x\leq ۳$

---

41 - دامنهٔ تابع گویای $f(x)=\dfrac{x^۲+۳+\frac{۱}{x}}{x^۲+۶x+k}$ به‌صورت $D_f=\mathbb{R}-\{a,b\}$ است. مقدار $|k+a+b|$ کدام است؟

۱) ۴

۲) ۶

۳) ۹

۴) ۱۲

پاسخ: گزینه 2 باتوجه به وجود $\frac{۱}{x}$ در ضابطهٔ تابع f، پس $x=۰$ در دامنهٔ تابع f قرار ندارد یعنی یکی از دو مقدار a و b برابر صفر است. (مثلاً $a=۰$). حال چون فقط یک عدد دیگر (b) در دامنهٔ f وجود ندارد، دو حالت به‌وجود می‌آید.

حالت ۱- مخرج ریشهٔ مضاعف دارد و آن ریشهٔ مضاعف هم همان b است.

$x^۲+۶x+k=۰\Rightarrow \Delta=۰\Rightarrow ۳۶-۴k=۰\Rightarrow k=۹\Rightarrow x^۲+۶x+۹=۰\Rightarrow (x+۳)^۲=۰$

$\Rightarrow x+۳=۰\Rightarrow x=-۳\Rightarrow b=-۳\Rightarrow |k+a+b|=|۹+۰-۳|=۶$

حالت **۲-** مخرج دو ریشه دارد که یکی از آن‌ها $x=0$ است.

$$x^2+6x+k=0 \xrightarrow{x=0} k=0 \Rightarrow x^2+6x=0 \Rightarrow x(x+6)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=-6 \Rightarrow b=-6 \end{cases}$$

$$|k+a+b|=|0+0-6|=6$$