تابع

ترکیب توابع مسائل مربوط به f(x)

1 - اگر $f(2x-3)=4x^2-14x+13$ باشد، ضابطه‌ی $f(x)$، برابر کدام است؟

① x^2-x+3 ② x^2-2x-1 ③ x^2-2x+1 ④ x^2-x+1

پاسخ: گزینه 4 روش اول:

$$2x-3=t \to 2x=t+3 \to x=\frac{t+3}{2}$$

پس : $f(t)=4(\frac{t+3}{2})^2-14(\frac{t+3}{2})+13 \to f(t)=(t+3)^2-7(t+3)+13$

$$\to f(t)=t^2+9+6t-7t-21+13 \to f(t)=t^2-t+1 \to f(x)=x^2-x+1$$

روش دوم: یک عدد دلخواه مانند $x=2$ را انتخاب می‌کنیم.

$$f(2x-3)=4x^2-14x+13 \xrightarrow{x=2} f(1)=16-28+13 \to f(1)=1$$

تنها گزینه‌ی چهارم است که اگر به جای x آن عدد یک قرار دهیم حاصل برابر یک می‌شود.

---

2 - فرض کنیم $f(g(x))=x^2+\frac{1}{x^2}-4$ و $g(x)=x-\frac{1}{x}$، در این صورت $f(x)$ کدام است؟

① x^2-2 ② x^2+2 ③ x^2-4 ④ x^2+4

پاسخ: گزینه 1

با تغییر متغیر داریم:

$$x-\frac{1}{x}=t \to x^2+\frac{1}{x^2}-2=t^2 \to x^2+\frac{1}{x^2}=t^2+2$$

$$f(x-\frac{1}{x})=x^2+\frac{1}{x^2}-4 \xrightarrow{(x-\frac{1}{x})=t} f(t)=t^2-2 \Rightarrow f(x)=x^2-2$$

---

3 - اگر $f(g(x))=9x^2-12x+10$ و $f(x)=3x-2$ باشد، حاصل $g(6)$ کدام است؟

① 88 ② 92 ③ 84 ④ 86

پاسخ: گزینه 1 با توجه به ضابطه تابع $f(x)$ داریم:

$$f(x)=3x-2 \to f(g(x))=3g(x)-2$$

بنابراین : $3g(x)-2=9x^2-12x+10 \to 3g(x)=9x^2-12x+12$

$$\to g(x)=3x^2-4x+4 \to g(6)=3\times 36-4\times 6+4 \quad =108-24+4 \to g(6)=88$$

---

4 - اگر $f(x)=2x+3$ و $g(f(x))=8x^2+22x+20$ باشند، ضابطه تابع fog، کدام است؟

① $2x^2-7x+3$ ② $2x^2-3x+7$ ③ $4x^2-2x+13$ ④ $4x^2-4x+11$

پاسخ: گزینه 3

ابتدا از روی ضابطه‌ی توابع $f(x)$ و $gof(x)$، ضابطه $g(x)$ را یافته، سپس ضابطه fog را می‌یابیم.

$f(x) = 2x + 3$

$g(f(x)) = 8x^2 + 22x + 20$

$g(2x+3) = 8x^2 + 22x + 20$

$$2x + 3 = t \rightarrow x = \frac{t-3}{2} \rightarrow g(t) = 2(t^2 - 6t + 9) + 11(t-3) + 20 \rightarrow g(x) = 2x^2 - x + 5$$

$(fog)(x) = 2(2x^2 - x + 5) + 3 = 4x^2 - 2x + 13$

5- اگر $g(x) = 2x - 3$ و $(fog)(x) = 4(x^2 - 4x + 5)$ باشند. تابع $f(x)$ کدام است؟

① $x^2 - 4x + 3$ ② $x^2 - 4x + 5$ ③ $x^2 - 2x + 5$ ④ $x^2 - 2x + 3$

پاسخ: گزینه 3 ابتدا تابع $g(x) = 2x - 3$ را در داخل تابع $fog(x)$ می‌سازیم بنابراین داریم:

$(fog)(x) = 4(x^2 - 4x + 5) = 4x^2 - 16x + 20$

$= 4x^2 - 12x + 9 - 4x + 6 + 5$

$= (2x-3)^2 - 2(2x-3) + 5$

$= g^2(x) - 2g(x) + 5 \Rightarrow f(x) = x^2 - 2x + 5$

راه حل تستی

قرار می دهیم $x = 2$:

$g(2) = 4 - 3 = 1$

$f(g(2)) = f(1) = 4(4 - 8 + 5) = 4$

در گزینه ها تابعی را می یابیم که $f(1) = 4$ باشد. اگر بیش از یک گزینه باقی ماند با یک عدد دیگر همین روند را تکرار می کنیم.

6- اگر $f(x) = x^2 + \frac{1}{x^2}$، تابع $(f(\sqrt{x}))^2 - f(x)$ چگونه است؟

① ثابت ② همانی ③ نه صعودی نه نزولی ④ یک به یک

پاسخ: گزینه 1

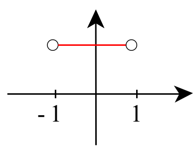
تابع $f(\sqrt{x})$ را تشکیل می‌دهیم بنابراین:

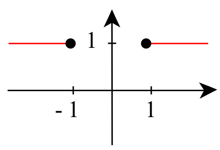
$$f(\sqrt{x}) = (\sqrt{x})^2 + \frac{1}{(\sqrt{x})^2} = x + \frac{1}{x} \Rightarrow g(x) = (f(\sqrt{x}))^2 - f(x) = (x + \frac{1}{x})^2 - (x^2 + \frac{1}{x^2})$$

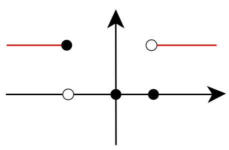
$= (x^2 + \frac{1}{x^2} + 2) - (x^2 + \frac{1}{x^2}) = 2$ تابع ثابت

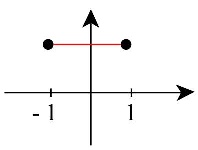
جبر توابع

7- اگر $f(x) = x + \sqrt{x^2 - 1}$ و $g(x) = x - \sqrt{x^2 - 1}$ باشد آن‌گاه نمودار $(f \cdot g)(x)$ کدام است؟

①


②


③


④


پاسخ: گزینه 2

$D_{f \cdot g} = D_f \cap D_g$

$$\begin{cases} g(x)=x-\sqrt{x^۲-۱} \\ f(x)=x+\sqrt{x^۲-۱} \end{cases} \Rightarrow x^۲-۱\geq ۰ \Rightarrow x^۲\geq ۱ \Rightarrow |x|\geq ۱ \Rightarrow x\leq -۱ \quad \text{یا} \quad x\geq ۱$$

نمودار تابع $y=f\cdot g$ خط افقی $y=۱$ است که در بازهٔ $(\infty,-۱)\cup[۱,+\infty]$ رسم می‌شود.

$y=(f\cdot g)(x)=f(x)g(x)=x^۲-x^۲+۱=۱$

8- اگر $f(x)=\sqrt{۴-x}$ و $g=\{(۵,۱),(۲,۵),(۱,۴),(۴,۳)\}$ باشد، دامنهٔ تابع $\frac{g}{f}$ چند عضو دارد؟

① ۱ ② ۲ ③ ۳ ④ ۴

پاسخ: گزینه 2 بنا به تعریف داریم:

$$D_{\frac{g}{f}}=(D_f\cap D_g)-\{x\in D_f|f(x)=۰\}$$

$$=((-\infty,۴]\cap\{۱,۲,۴,۵\})-\{۴\}=\{۱,۲,۴\}-\{۴\}=\{۱,۲\}$$

پس دامنهٔ تابع $\frac{g}{f}$ دارای دو عضو است.

ترکیب توابع دامنهٔ توابع ترکیبی

9- اگر $f(g(x))=۳x^۲-۶x-۵$ و $f(x)=۳x+۴$ باشد، $g(۲)$ کدام است؟

① صفر ② ۲ ③ -۵ ④ -۳

پاسخ: گزینه 4

$$f(x)=۳x+۴\rightarrow f(g(x))=۳g(x)+۴$$

$$\text{پس}: ۳g(x)+۴=۳x^۲-۶x-۵\rightarrow ۳g(x)=۳x^۲-۶x-۹$$

$$\rightarrow g(x)=x^۲-۲x-۳\rightarrow g(۲)=۴-۴-۳=-۳$$

10- اگر $f(x)=\sqrt{x}$ و $g(x)=\frac{۱}{x^۲}$ باشد، دامنهٔ تابع gof کدام است؟

① $(۰,+\infty)$ ② $[۰,+\infty)$ ③ $\mathbb{R}$ ④ $\mathbb{R}-\{۰\}$

پاسخ: گزینه 1 ابتدا دامنهٔ توابع f و g را می‌یابیم.

$$f(x)=\sqrt{x}\,;x\geq ۰\Rightarrow D_f=[۰,+\infty)$$

$$g(x)=\frac{۱}{x^۲}\,;x^۲\neq ۰\Rightarrow x\neq ۰\Rightarrow D_g=\mathbb{R}-\{۰\}$$

$$D_{gof}=\{x\in D_f|f(x)\in D_g\}=\{x\geq ۰|f(x)\neq ۰\}$$

$$f(x)\neq ۰\Rightarrow\sqrt{x}\neq ۰\Rightarrow x\neq ۰\Rightarrow D_{gof}=(۰,+\infty)$$

11- توابع $f(x)=x^۲+۲x$ و $g=\{(-۱,۲),(۳,۰),(۶,۷)\}$ مفروض هستند. مقدار a برای برقراری تساوی $g(f(a))=۲$ کدام است؟

① -۱ ② ۱ ③ -۲ ④ صفر

پاسخ: گزینه 1 با توجه به تابع g داریم: $g(-۱)=۲$ بنابراین زمانی $g(f(a))=۲$ است که $f(a)=-۱$ باشد

$$f(a)=-۱ \Rightarrow a^۲+۲a=-۱ \Rightarrow a^۲+۲a+۱=۰ \Rightarrow (a+۱)^۲=۰ \Rightarrow a+۱=۰ \Rightarrow a=-۱$$

12- اگر $f(x)=x^۲-۳x$ و $g=\{(۲,۱),(۳,-۱),(۱,۰),(-۲,۲)\}$، آنگاه مقدار تابع $y=(f-۲g)of$ در نقطه‌ای به طول ۱ کدام است؟

① ۱ ② ۶ ③ -۴ ④ ۴

پاسخ: گزینه 2 می‌دانیم $f(۱)=-۲$ است. پس:

$$((f-۲g)of)(۱)=(f-۲g)(f(۱))=(f-۲g)(-۲)$$

$$=f(-۲)-۲g(-۲)=\left((-۲)^۲-۳(-۲)\right)-۲(۲)=(۴+۶)-۴=۶$$

13- اگر $f(x)=\sqrt{۳-x}$ و $g(x)=\log_۲(x^۲+۲x)$ باشند، دامنه‌ی تعریف تابع fog، کدام است؟

① $[-۴,۲]$ ② $[-۲,۰]$ ③ $[-۴,-۱]\cup(۱,۲]$ ④ $[-۴,-۲)\cup(۰,۲]$

پاسخ: گزینه 4 روش اول:

ابتدا دامنه‌ی تعریف دو تابع f , g را به‌دست می‌آوریم:

$$D_f: ۳-x\geq ۰ \to x\leq ۳$$

$$D_g: x^۲+۲x>۰ \to x(x+۲)>۰ \xrightarrow{\text{تعیین علامت}} x<-۲ \text{ یا } x>۰$$

$$D_{fog}=\{x\in D_g\,,\, g(x)\in D_f\}=\{x<-۲ \text{ یا } x>۰\,,\, \log_۲^{x^۲+۲x}\leq ۳\}$$

$$=\{x<-۲ \quad \text{یا} \quad x>۰\,,\, x^۲+۲x\leq ۲^۳\}=\{x<-۲ \quad \text{یا} \quad x>۰\,,\, x^۲+۲x-۸\leq ۰\}$$

$$=\{x<-۲ \quad \text{یا} \quad x>۰\,,\, (x+۴)(x-۲)\leq ۰\}=\{x<-۲ \quad \text{یا} \quad x>۰\,,\, -۴\leq x\leq ۲\}$$

$$=-۴\leq x<-۲ \quad \text{یا} \quad ۰<x\leq ۲ \to [-۴,-۲)\cup(۰,۲]$$

البته می‌توانیم $fog(x)$ را تشکیل داده (تابع را ساده نکنید) سپس دامنه‌ی آن را به‌دست آورید.

روش دوم:

$x=-۱$: در دامنه‌ی تعریف g قرار ندارد بنابراین در دامنه‌ی تعریف fog هم نباید باشد یعنی هر گزینه‌ای که $x=-۱$ دارد نادرست است. پس فقط گزینه‌ی چهارم درست است.

14- دو تابع با ضابطه‌های $f(x)=[x]+[-x]$ و $g(x)=x^۲+x-۲$ مفروض‌اند. اگر $g(f(x))=-۲$ باشد، مجموعه مقادیر x کدام است؟

① $\mathbb{R}-\mathbb{Z}$ ② $\mathbb{R}$ ③ $\mathbb{Z}$ ④ $\varnothing$

پاسخ: گزینه 2

می‌دانیم: $[x]+[-x]=\begin{cases} ۰ & x\in\mathbb{Z} \\ -۱ & x\not\in\mathbb{Z}\end{cases}$

$$f(x)=\begin{cases} -۱ & x\not\in\mathbb{Z} \\ ۰ & x\in\mathbb{Z}\end{cases} \Rightarrow g(f(x)):\begin{cases} x\not\in\mathbb{Z}: & g(-۱)=۱-۱-۲=-۲ \\ x\in\mathbb{Z}: & g(۰)=-۲\end{cases}$$

پس به ازای هر عدد حقیقی برقرار است.

15- اگر $f(x)=\dfrac{۱-x^۲}{۱+x^۲}$ و $g(x)=\sqrt{x-x^۲}$ باشند، دامنه‌ی تابع gof، کدام است؟

① $[۰,۱]$ ② $[-۱,۱]$ ③ $\mathbb{R}$ ④ $\mathbb{R}-(-۱,۱)$

پاسخ: گزینه 2 می‌دانیم: $D_{gof(x)}=\{x\in D_f|f(x)\in D_g\}$

$$f(x)=\frac{۱-x^۲}{۱+x^۲}\to D_f=\mathbb{R}$$

$$g(x)=\sqrt{x-x^۲}\quad\to x-x^۲\geq ۰\to x(۱-x)\geq ۰$$

تعیین علامت

		۰		۱	
$x-x^۲$	$-$	۰	$+$	۰	$-$

$\to D_g=[۰,۱]$

$$D_{g(f(x))}=\{x\in D_f|f(x)\in D_g\}=\left\{x\in\mathbb{R}\,|\,۰\leq\frac{۱-x^۲}{۱+x^۲}\leq ۱\right\}$$

چون $۱+x^۲>۰$ باضرب طرفین در این مقدار علامت نامساوی تغییر نمیکند. $۰\leq\frac{۱-x^۲}{۱+x^۲}\leq ۱\to$

$\to ۰\leq ۱-x^۲\leq ۱+x^۲$

$۱-x^۲\geq ۰\to x^۲\leq ۱\to -۱\leq x\leq ۱\quad (I)$

$۱-x^۲\leq ۱+x^۲\to ۲x^۲\geq ۰\to$ همواره برقرار $\xrightarrow{(II)} I\cap II\Rightarrow D_{gof}=[-۱,۱]$

16- اگر $f=\{(۲\,,\,a)\,,\,(۱\,,\,۲)\,,\,(۶\,,\,۴)\}$ و $g(x)=x-\sqrt{x}$ باشد، آنگاه با فرض $(۴\,,\,۳)\in fog$ و $(b\,,\,۲)\in gof$، حاصل $۲a-b$ کدام است؟

① -۳ ② -۴ ③ ۲ ④ صفر

پاسخ: گزینه 4 باتوجه به تعریف تابع fog و gof داریم:

$$(۴\,,\,۳)\in fog\to fog(۴)=۳\to f(g(۴))=۳\xrightarrow{g(۴)=۴-\sqrt{۴}=۲} f(۲)=۳\ (۲\,,\,۳)\in f\to\boxed{a=۳}$$

$$(b\,,\,۲)\in gof\to gof(b)=۲\to g(f(b))=۲\xrightarrow{f(b)=m} g(m)=۲\to m-\sqrt{m}-۲=۰$$

$$\to(\sqrt{m}-۲)(\sqrt{m}+۱)=۰\to\begin{cases}\sqrt{m}=۲\to m=۴\\ \sqrt{m}=-۱\ \text{غ ق ق}\end{cases}\to f(b)=۴\to\boxed{b=۶}\to ۲a-b$$

$$=۲\times ۳-۶=۰$$

17- اگر $f(x)=۳x-۴$ باشد، با توجه به ماشین مقابل مقدار $g(-\frac{۱}{۶})$ کدام است؟

$$x\to\boxed{g(x)-۱}\to\boxed{۳f(x)}\to ۶x-۲$$

① ۱ ② ۲ ③ ۳ ④ ۴

پاسخ: گزینه 2 با توجه به ماشین داده شده می‌توان نوشت:

$$۳f(g(x)-۱)=۶x-۲\Rightarrow ۳(۳(g(x)-۱)-۴)=۶x-۲$$

$$۳(۳g(x)-۷)=۶x-۲\Rightarrow ۹g(x)-۲۱=۶x-۲\quad\Rightarrow g(x)=\frac{۶x+۱۹}{۹}$$

بنابراین:

$$g(-\frac{۱}{۶})=\frac{۶(-\frac{۱}{۶})+۱۹}{۹}=\frac{۱۸}{۹}=۲$$

---

18 - اگر $f=\{(۴,۲),(۳,۷),(-۱,۱)\}$ و $g=\{(۳,۴),(۴,-۱),(-۲,۳)\}$ باشند، حاصل جمع اعضای برد تابع $\frac{f-۲g}{fog}$ کدام است؟

① ۳ ② ۳/۵ ③ ۴ ④ ۴/۵

پاسخ: گزینه 2 ابتدا توابع $f-۲g$ و fog را تشکیل می‌دهیم:

$$f=\{(۴,۲),(۳,۷),(-۱,۱)\}$$

$$g=\{(۳,۴),(۴,-۱),(-۲,۳)\}\to ۲g=\{(۳,۸),(۴,-۲),(-۲,۶)\}$$
$$f-۲g=\{(۴,۲-(-۲)),(۳,۷-۸)\}=\{(۴,۴),(۳,-۱)\}$$

دامنهٔ fog زیرمجموعهٔ دامنهٔ g است، پس:

$$\left.\begin{array}{l}(fog)(۳)=f(g(۳))=f(۴)=۲\\(fog)(۴)=f(g(۴))=f(-۱)=۱\\(fog)(-۲)=f(g(-۲))=f(۳)=۷\end{array}\right\}\Rightarrow fog=\{(۳,۲),(۴,۱),(-۲,۷)\}$$

$$\frac{f-۲g}{fog}=\left\{(۴,\frac{۴}{۱}),(۳,\frac{-۱}{۲})\right\}=\left\{(۴,۴),(۳,-\frac{۱}{۲})\right\}$$
$$\text{حاصل جمع اعضای برد}=۴-\frac{۱}{۲}=\frac{۷}{۲}=۳/۵$$

انواع تابع تابع ثابت - همانی - خطی

19 - هرگاه رابطهٔ $f=\{(۲m,m+۱),(۳,۲m-۱),(n,۲n-۱)(۳,m+۲)\}$ تابعی خطی باشد، مقدار n کدام است؟

① ۱ ② ۲ ③ ۳ ④ ۴

پاسخ: گزینه 3 دو زوج مرتب $(۳,۲m-۱)$ و $(۳,m+۲)$ عضو رابطه هستند که مؤلفه‌های اول برابر دارند، پس برای تابع بودن f، مؤلفه‌های دوم آن‌ها نیز باید برابر باشند:

$$\Rightarrow ۲m-۱=m+۲\ \Rightarrow m=۳$$

با توجه به مقدار به‌دست آمده برای m داریم:

$$f=\{(۶,۴)(۳,۵)(n,۲n-۱)\}$$

قرار است f تابعی خطی باشد، پس ابتدا با توجه به مختصات نقاط $A(۳,۵)$ و $B(۶,۴)$ ضابطهٔ تابع خطی f را به‌دست می‌آوریم:

$$\text{شیب خط}=\frac{۵-۴}{۳-۶}=-\frac{۱}{۳}$$
$$\Rightarrow y-۴=-\frac{۱}{۳}(x-۶)\ \Rightarrow f(x)=-\frac{۱}{۳}x+۶$$

در حال حاضر نقطهٔ $(n,۲n-۱)$ روی این خط قرار گرفته است.

$$۲n-۱=-\frac{n}{۳}+۶\ \Rightarrow ۲n-۷=-\frac{n}{۳}\ \Rightarrow ۶n-۲۱=-n\ \Rightarrow n=۳$$

20- اگر نمودار تابع $y=ax+b$ را سه واحد به پایین و دو واحد در جهت منفی محور x جابه‌جا کنیم به نمودار تابع $g(x)=\dfrac{x-3}{2}$ می‌رسیم. حاصل $\dfrac{a}{b}$ کدام است؟

① $-\dfrac{1}{2}$ ② 2 ③ -1 ④ 1

پاسخ: گزینه 4

$$y=ax+b \xrightarrow[\text{دو واحد به چپ}]{\text{سه واحد به پایین}} y=a(x+2)+b-3=ax+2a+b-3$$

پس برابری $ax+2a+b-3=\dfrac{1}{2}x-\dfrac{3}{2}$ را خواهیم داشت:

$$\begin{cases} a=\dfrac{1}{2} \\ 2a+b-3=-\dfrac{3}{2} \xrightarrow{a=\frac{1}{2}} b=\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \frac{a}{b}=1$$

21- اگر f تابعی خطی باشد به صورتی که رابطهٔ $f(x-1)+f(x+2)=x$ برقرار باشد، آن‌گاه $f(2)$ کدام است؟

① $\dfrac{5}{2}$ ② $\dfrac{3}{4}$ ③ 1 ④ $\dfrac{1}{2}$

پاسخ: گزینه 2 فرم کلی تابع خطی بصورت $f(x)=ax+b$ است که داریم:

$$f(x-1)+f(x+2)=x \ \Rightarrow a(x-1)+b+a(x+2)+b=x$$

$$\Rightarrow ax-a+b+ax+2a+b=x \ \Rightarrow 2ax+a+2b=x \ \Rightarrow \begin{cases} 2a=1 \to a=\dfrac{1}{2} \\ a+2b=0 \to \dfrac{1}{2}+2b=0 \to b=-\dfrac{1}{4} \end{cases}$$

پس: $f(x)=\dfrac{1}{2}x-\dfrac{1}{4} \Rightarrow f(2)=\dfrac{2}{2}-\dfrac{1}{4}=1-\dfrac{1}{4}=\dfrac{3}{4}$

22- در تابع خطی f با شیب منفی، می‌دانیم $f(1)=2$ و $f(f(-1))=-8$ است. مقدار $f(2)$ کدام است؟

① $\dfrac{9}{2}$ ② $\dfrac{7}{2}$ ③ 3 ④ صفر

پاسخ: گزینه 4 اگر فرض کنیم $f(x)=ax+b$ باشد، داریم:

$$f(1)=a+b=2 \Rightarrow b=2-a \quad (1)$$
$$f(-1)=-a+b \Rightarrow f(f(-1))=f(-a+b)=a(-a+b)+b=-a^2+ab+b=-8$$
$$\Rightarrow -a^2+a(2-a)+2-a=-8 \Rightarrow -a^2+2a-a^2+2-a=-8$$
$$\Rightarrow 2a^2-a-10=0 \Rightarrow \begin{cases} a=-2 \\ a=\dfrac{5}{2} \end{cases}$$

چون شیب نمودار f منفی است، $a=\dfrac{5}{2}$ قابل قبول نیست. بنابراین داریم:

$a=-۲ \xrightarrow{(۱)} b=۴ \Rightarrow f(x)=-۲x+۴ \Rightarrow f(۲)=۰$

23- اگر $\{(۴a+b, ۴a^۲+b+۱), (۴a+b^۲, ۲b+۱), (b^۲, ۱)\}$ یک تابع همانی باشد، $a+b$ کدام است؟

① $\frac{۳}{۲}$ ② $-\frac{۳}{۲}$ ③ $\frac{۱}{۲}$ ④ $-\frac{۱}{۲}$

پاسخ: گزینه 1 باتوجه به اینکه تابع $y=x$ همانی است، خواهیم داشت:

$$۴a+b=۴a^۲+b+۱ \Rightarrow ۴a^۲-۴a+۱=۰ \Rightarrow (۲a-۱)^۲=۰ \Rightarrow a=\frac{۱}{۲}$$

$$۴a+b^۲=۲b+۱ \xrightarrow{a=\frac{۱}{۲}} ۲+b^۲=۲b+۱ \quad \Rightarrow b^۲-۲b+۱=۰ \Rightarrow (b-۱)^۲=۰$$
$$\Rightarrow b=۱ \Rightarrow a+b=۱+\frac{۱}{۲}=\frac{۳}{۲}$$

24- تابع f همانی، تابع g ثابت و تابع h خطی است. اگر داشته باشیم: $۲f(-۲)=g(۲)$, $h(-۲)=g(۰)+۱$ و $h(۲)=f(۲)+g(۳)+۱$، مجموعهٔ جواب نامعادلهٔ $h(x)\geq ۰$ کدام است؟ (دامنهٔ هر تابع، $\mathbb{R}$ است.)

① $(-\infty\ ,\ -۲]$ ② $[۰\ ,\ +\infty)$ ③ $[۴\ ,\ +\infty)$ ④ $(-\infty\ ,\ ۰]$

پاسخ: گزینه 3

تابع همانی : $f(x)=x \Rightarrow f(-۲)=-۲\ ,\ f(۲)=۲$

تابع ثابت : $g(x)=c$

$$\begin{cases} g(x)=c \\ ۲f(-۲)=g(۲) \end{cases} \Rightarrow -۴=c$$

تابع خطی : $h(x)=ax+b$

$$\begin{cases} h(-۲)=-۲a+b=-۳ \\ h(۲)=۲a+b=-۱ \end{cases} \Rightarrow a=\frac{۱}{۲}\ ,\ b=-۲$$

$$\Rightarrow h(x)=\frac{۱}{۲}x-۲ \xrightarrow{h(x)\geq ۰} \frac{۱}{۲}x-۲\geq ۰ \Rightarrow x\geq ۴$$

25- اگر دامنهٔ تابع خطی $g(x)=-۲x+۲$ ، بازهٔ $[-۲\ ,\ ۳]$ باشد، برد این تابع کدام است؟

① $[-۶\ ,\ ۶]$ ② $[-۴\ ,\ ۶]$ ③ $[-۴\ ,\ ۴]$ ④ $[۴\ ,\ ۶]$

پاسخ: گزینه 2

$$-۲\leq x\leq ۳ \xrightarrow{\times(-۲)} -۶\leq -۲x\leq ۴ \xrightarrow{+۲} -۴\leq -۲x+۲\leq ۶$$
$$\Rightarrow -۴\leq g(x)\leq ۶ \Rightarrow \text{برد تابع } g=[-۴\ ,\ ۶]$$

26- توابع f و g با دامنهٔ $\mathbb{R}$ به‌ترتیب همانی و ثابت هستند. اگر $\frac{۳f(g(۲))-g(f(-۱))}{f(۳)-۲g(۰)}=۲$ باشد، $g(۰)$ کدام است؟

① صفر ② ۱ ③ ۴ ④ $\frac{۲}{۳}$

پاسخ: گزینه 2 ضابطهٔ تابع همانی f را به‌صورت $f(x)=x$ و ضابطهٔ تابع ثابت g را به‌صورت $g(x)=k$ در نظر می‌گیریم.

داریم:

$$\frac{۳f(g(۲))-g(f(-۱))}{f(۳)-۲g(۰)}=\frac{۳f(k)-g(-۱)}{۳-۲k}=\frac{۳k-k}{۳-۲k}=\frac{۲k}{۳-۲k}=۲\Rightarrow k=۱$$

پس تابع ثابت g به‌صورت $g(x)=۱$ است.

$\Rightarrow g(۰)=۱$

27- اگر تابع $f(x)=\dfrac{۳x^۲+ax-b}{x^۲-۴x+۵}$ تابعی ثابت باشد، حاصل $۲a-۳b+۱۴f(-۱)$ کدام است؟

① -۲۷ ② ۲۷ ③ ۶۳ ④ -۶۳

پاسخ: گزینه 3 چون تابع f تابع ثابت است، پس به شکل $f(x)=k$ خواهد بود (یعنی به ازای هر مقدار دلخواه برای x باید به‌صورت $f(x)=k$ تبدیل شود).

$$f(x)=k\Rightarrow\frac{۳x^۲+ax-b}{x^۲-۴x+۵}=k\quad\Rightarrow ۳x^۲+ax-b=kx^۲-۴kx+۵k$$

چون باید تساوی فوق به ازای هر مقدار حقیقی x برقرار باشد، پس باید ضرایب جملات هم‌درجه، در طرفین تساوی با هم برابر باشند، یعنی باید داشته باشیم:

$$\begin{cases}k=۳\\-۴k=a\Rightarrow a=-۱۲\\۵k=-b\Rightarrow b=-۵k=-۱۵\end{cases}$$

بنابراین ضابطهٔ تابع $f(x)$ به‌صورت $f(x)=۳$ خواهد بود و داریم:

$۲a-۳b+۱۴f(-۱)=۲(-۱۲)-۳(-۱۵)+۱۴(۳)=۶۳$

28- اگر $f=\{(۱,۲),(۲,۲a-b),(۳,۳a+b)\}$ تابع ثابت باشد حاصل $\sqrt{a^۲-۲b}$ کدام است؟

① $۰/۹$ ② ۱ ③ $۱/۱$ ④ $۱/۲$

پاسخ: گزینه 4

تابع ثابت $f(x)=k$

$f(۱)=۲$

تابع ثابت $\Rightarrow f(x)=۲$

$$\begin{cases}f(۲)=\ ۲=۲a-b\\f(۳)=\ \underline{۲=۳a+b}\end{cases}$$

$$۴=۵a\Rightarrow\boxed{a=\frac{۴}{۵}}$$

$$۲=۲a-b\xrightarrow{a=\frac{۴}{۵}}۲=\frac{۸}{۵}-b\Rightarrow -b=\frac{۱۰}{۵}-\frac{۸}{۵}\Rightarrow b=\frac{-۲}{۵}$$

$$a^۲-۲b=\left(\frac{۴}{۵}\right)^۲-۲\left(\frac{-۲}{۵}\right)=\frac{۱۶}{۲۵}+\frac{۴}{۵}=\frac{۱۶+۲۰}{۲۵}=\frac{۳۶}{۲۵}\Rightarrow\sqrt{a^۲-۲b}=\frac{۶}{۵}=۱/۲$$

29- در صورتی که $f(x)+۲xf(\frac{-۱}{x})=۲x-۳$ ضابطه‌ی $f(x)$ کدام است؟

① $f(x)=\frac{۸x+۱}{۵}$ ② $f(x)=۸x$ ③ $f(x)=\frac{۸x}{۵}$ ④ $f(x)=\frac{۲}{۵}x+۱$

پاسخ: گزینه 1

در رابطه‌ی داده شده، x را به $\frac{-۱}{x}$ تبدیل می‌کنیم.

$$f(\frac{-۱}{x})-\frac{۲}{x}f(x)=-\frac{۲}{x}-۳$$

$$\begin{array}{r} \\ \times(-۲x)\end{array}\begin{cases} f(x)+۲xf(\frac{-۱}{x})=۲x-۳ \\ f(\frac{-۱}{x})-\frac{۲}{x}f(x)=\frac{-۲}{x}-۳\end{cases}\xrightarrow{\text{جمع می‌کنیم}}۵f(x)=۴+۶x+۲x-۳\rightarrow ۵f(x)=۸x+۱\Rightarrow f(x)=\frac{۸x+۱}{۵}$$

30- $f(x)=\frac{۲x^۳+ax^۲+bx+c}{g(x)}$ تابعی همانی با دامنهٔ $\mathbb{R}-\{۱\}$ است. $a+b-c$ کدام است؟

① -۱ ② -۲ ③ -۳ ④ -۴

پاسخ: گزینه 2 تابع f، تابع همانی $f(x)=x$ با دامنهٔ $\mathbb{R}-\{۱\}$ است؛ پس ریشهٔ مخرج فقط $x=۱$ است و در ضمن تابع $g(x)$ یک چندجمله درجهٔ دوم است؛ پس $g(x)=k(x-۱)^۲$. در این صورت:

$$xg(x)=۲x^۳+ax^۲+bx+c$$

اما دقت کنید که:

$$xg(x)=kx(x^۲-۲x+۱)=kx^۳-۲kx^۲+kx$$

پس:

$$k=۲\ ,\ a=-۴\ \ ,\ b=۲\ ,\ c=۰\ \Rightarrow a+b-c=-۴+۲-۰=-۲$$

31- اگر در تابع خطی $f(x)$ ، $f(۲)=۴$ و $f(f(۰))=-۸$ باشد؛ آنگاه ضابطه‌ی این تابع کدام می‌تواند باشد؟

① $y=۲x+۸$ ② $y=۸x-۲$ ③ $y=۲x-۳$ ④ $y=۳x-۲$

پاسخ: گزینه 4

فرم تابع خطی : $y=ax+b$

$$f(۲)=۴\rightarrow ۴=۲a+b\Rightarrow b=۴-۲a\quad (I)$$

$$f(۰)=b$$

$$f(f(۰))=f(b)=-۸\Rightarrow ab+b=b(a+1)=-۸$$

$$\xrightarrow{(I)}(۴-۲a)(a+۱)=-۸\Rightarrow ۴a+۴-۲a^۲-۲a+۸=۰\Rightarrow -۲a^۲+۲a+۱۲=۰$$

$$a^۲-a-۶=۰\Rightarrow (a-۳)(a+۲)=۰\Rightarrow\begin{cases} a=۳\Rightarrow b=-۲ & y=۳x-۲ \\ a=-۲\Rightarrow b=۸ & y=-۲x+۸\end{cases}$$