تابع

وارون تابع محاسبهٔ وارون تابع

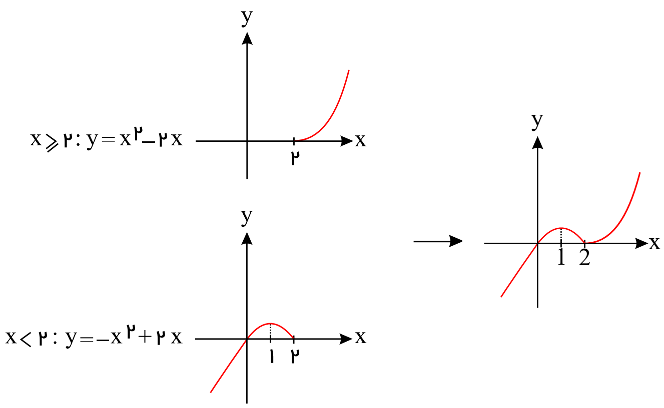
1 - تابع با ضابطهٔ $y=x\,|x-۲|$، در یک بازه، نزولی است. ضابطهٔ معکوس آن در این بازه، کدام است؟

① $f^{-۱}(x)=۱-\sqrt{۱+x}\ ;\ x<۰$ ② $f^{-۱}(x)=۱-\sqrt{۱-x}\ ;\ x<۱$

③ $f^{-۱}(x)=۱+\sqrt{۱-x}\ ;\ ۰<x<۱$ ④ $f^{-۱}(x)=۱-\sqrt{۱-x}\ ;\ ۰<x<۱$

پاسخ: گزینه 3 ابتدا با تعیین علامت، قدرمطلق را برمی‌داریم:

$$y=\begin{cases} x^{۲}-۲x & x\geq ۲ \\ -x^{۲}+۲x & x<۲ \end{cases}$$



پس تابع در $(۱,۲)$ نزولی است. حال ضابطهٔ معکوس را پیدا می‌کنیم.

$$y=-x^{۲}+۲x\to y=-(x^{۲}-۲x)\to y=-((x-۱)^{۲}-۱)\to y=-(x-۱)^{۲}+۱$$

$$\to (x-۱)^{۲}=۱-y\to x-۱=\pm\sqrt{۱-y}\xrightarrow[\text{سمت چپ مثبت است}]{۱<x<۲} x-۱=\sqrt{۱-y}\to x=۱+\sqrt{۱-y}$$

$$\to f^{-۱}(x)=۱+\sqrt{۱-x}$$

روش دوم:

متوجه شدیم که تابع، $y=-x^{۲}+۲x$ $(۱<x<۲)$ است. یک عدد دلخواه مثلاً $x=\frac{۳}{۲}$ در تابع قرار می‌دهیم.

$x=\frac{۳}{۲}\to y=\frac{۳}{۴}\to \begin{vmatrix}\frac{۳}{۲}\\ \frac{۳}{۴}\end{vmatrix}\in f\to \begin{vmatrix}\frac{۳}{۴}\\ \frac{۳}{۲}\end{vmatrix}\in f^{-۱}\to$ فقط در گزینهٔ سوم صدق می‌کند.

---

2 - نمودار تابع $f(x)=\dfrac{x+۴}{x-۲}$، با دامنهٔ $\mathbb{R}-\{۲\}$، نمودار وارون خود را با کدام طول قطع می‌کند؟

① $-۱\ ,\ -۴$ ② $-۱\ ,\ ۴$ ③ $۱\ ,\ -۴$ ④ $۱\ ,\ ۴$

پاسخ: گزینه 2 ابتدا وارون تابع دادەشده را پیدا کرده و آن را با تابع اصلی تلاقی می‌دهیم و می‌دانیم برای پیدا کردن تابع وارون کافی است که x را برحسب y به‌دست آورده و سپس جای x و y را عوض می‌کنیم.

$$y=\frac{x+۴}{x-۲}\to xy-۲y=x+۴\to xy-x=۲y+۴\to x(y-۱)=۲y+۴\to x=\frac{۲y+۴}{y-۱}$$

$$\rightarrow f^{-1}(x)=\frac{2x+4}{x-1}$$

تلاقی: $f(x)=f^{-1}(x)\rightarrow \frac{x+4}{x-2}=\frac{2x+4}{x-1}\rightarrow 2x^2-4x+4x-8=x^2-x+4x-4$

$$\rightarrow x^2-3x-4=0 \xrightarrow{a+c=b} \begin{cases} x=-1 \\ x=-\frac{c}{a}=4 \end{cases}$$

3- اگر $f(x)=x^2-2x-3\,;\ x\geq 1$ باشد، نمودارهای دو تابع $f^{-1}(x)$ و $g(x)=\frac{x-9}{2}$ با کدام طول، متقاطع هستند؟

① ۱۲ ② ۱۵ ③ ۱۸ ④ ۲۱

پاسخ: گزینه 4 برای پیدا کردن تابع وارون، کافی است x را برحسب y به‌دست آورده و سپس جای x و y را عوض کنیم.

$$f(x)=x^2-2x-3\rightarrow y=(x-1)^2-1-3\rightarrow y=(x-1)^2-4\rightarrow (x-1)^2=y+4$$

$$\rightarrow x-1=\pm\sqrt{(y+4)}\xrightarrow{x\geq 1} x-1=\sqrt{y+4}\rightarrow x=1+\sqrt{y+4}\rightarrow f^{-1}(x)=1+\sqrt{x+4}$$

$$f^{-1}(x)=g(x)\rightarrow 1+\sqrt{x+4}=\frac{x-9}{2}\xrightarrow{\text{مشاهدهٔ گزینه‌ها}} x=21$$

توجه کنید حل معادلهٔ آخر بدین صورت است:

$$2\sqrt{x+4}=x-11\xrightarrow{\text{توان } 2} 4x+16=x^2+121-22x\rightarrow x^2-26x+105=0$$

$$\rightarrow (x-21)(x-5)=0\rightarrow \begin{cases} x=21 & \text{ق ق} \\ x=5 & (\text{در معادله صدق نمی‌کند})\ \text{غ ق ق} \end{cases}$$

4- ضابطه‌ی معکوس $f(x)=\begin{cases} \frac{|x|}{x}\sqrt{|x|} & , x\neq 0 \\ 0 & , x=0 \end{cases}$ به کدام صورت است؟

① $f(x)=x\sqrt{|x|}\,;\ x\in\mathbb{R}$ ② $f^{-1}(x)=x\sqrt{|x|}\,;\ x\in\mathbb{R}-\{0\}$

③ $f^{-1}(x)=x|x|\,;\ x\in\mathbb{R}-\{0\}$ ④ $f^{-1}(x)=x|x|\,;\ x\in\mathbb{R}$

پاسخ: گزینه 4

$$f(x)=\begin{cases} \frac{|x|}{x}\sqrt{|x|} & , x\neq 0 \\ 0 & , x=0 \end{cases} = \begin{cases} \sqrt{x} & x>0 \\ 0 & x=0 \\ -\sqrt{-x} & x<0 \end{cases}$$

$$y=\sqrt{x}\rightarrow x=y^2\rightarrow f^{-1}(x)=x^2\ ,\ \overbrace{x>0}^{\text{برد } y_1=\sqrt{x}}$$

$$y=-\sqrt{-x}\rightarrow -x=y^2\rightarrow x=-y^2\rightarrow f^{-1}(x)=-x^2\ ,\ \underbrace{x<0}_{\text{برد } y_2=-\sqrt{-x}}$$

$$\rightarrow f^{-1}(x) = \begin{cases} x^2 & , \ x > 0 \\ 0 & , \ x = 0 \\ -x^2 & , \ x < 0 \end{cases} \quad \rightarrow f^{-1}(x) = x|x| \ , x \in \mathbb{R}$$

5- قرینه‌ی خط به معادله‌ی $3y - 2x = 4$ را نسبت به خط $y = x$، خط d می‌نامیم. عرض از مبدأ خط d کدام است؟

① -2 ② -1 ③ 1 ④ 2

پاسخ: گزینه 1 دو تابع f و f^{-1} نسبت به خط $y = x$ متقارن هستند و می‌دانیم برای پیدا کردن ضابطه‌ای معکوس یک تابع، ابتدا رابطه را برحسب x بدست می‌آوریم و سپس جای x و y را عوض می‌کنیم.

$$3y - 2x = 4 \rightarrow 2x = 3y - 4 \rightarrow x = \frac{3}{2}y - 2 \rightarrow f^{-1}(x) = \frac{3}{2}x - 2 \xrightarrow{x=0} \text{عرض از مبدأ} = -2$$

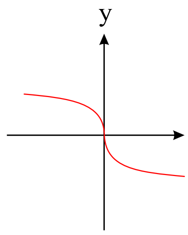
6- دو تابع $f = \{(2,5),(6,3),(3,7),(4,1),(1,9)\}$ و $g(x) = \dfrac{x}{x-1}$ مفروض‌اند. اگر $f^{-1}\left(g(2a)\right) = 6$ باشد، a کدام است؟

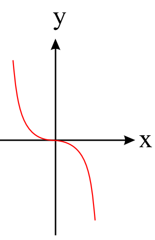
① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{3}{4}$ ③ $\frac{3}{2}$ ④ $\frac{5}{2}$

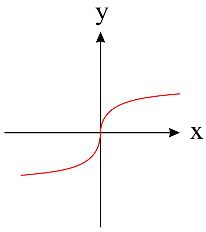
پاسخ: گزینه 2 می‌دانیم اگر $f(a) = b$ باشد آن‌گاه $f^{-1}(b) = a$ است.

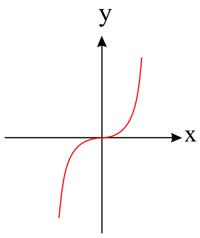
$$f^{-1}\left(g(2a)\right) = 6 \rightarrow f(6) = g(2a) \rightarrow 3 = \frac{2a}{2a-1} \rightarrow 6a - 3 = 2a \rightarrow 4a = 3 \rightarrow a = \frac{3}{4}$$

7- اگر $f(x) = x\,|x|$ باشد، نمودار تابع $y = f^{-1}(x)$ کدام است؟

①


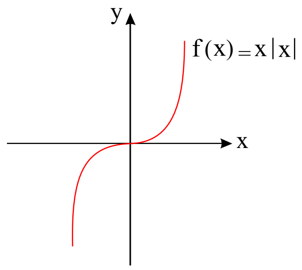
②


③


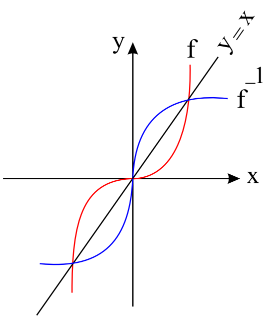
④


پاسخ: گزینه 3

$$f(x) = x\,|x| = \begin{cases} x^2 & x \geq 0 \\ -x^2 & x < 0 \end{cases} \rightarrow$$



برای رسم تابع معکوس، کافی است قرینهٔ شکل را نسبت به نیمساز ناحیهٔ اول و سوم، رسم کنیم.



8- اگر $f(x)=\frac{۲}{۵}x-۴$ و $g(x)=x^۳+x$ باشند، مقدار $(g^{-1}of^{-1})(۸)$، کدام است؟

① ۱٫۵ ② ۲ ③ ۲٫۵ ④ ۳

پاسخ: گزینه 4 می‌دانیم اگر $f(a)=b$ باشد آنگاه $f^{-1}(b)=a$ است.

$(g^{-1}of^{-1})(۸)=g^{-1}(f^{-1}(۸))$

برای محاسبهٔ $f^{-1}(۸)$ بدین صورت عمل می‌کنیم:

$$۸=\frac{۲}{۵}x-۴\ \rightarrow \frac{۲}{۵}x=۱۲\ \rightarrow ۲x=۶۰\ \rightarrow x=۳۰$$

پس : $g^{-1}(f^{-1}(۸))=g^{-1}(۳۰)$

برای محاسبهٔ $g^{-1}(۳۰)$ بدین صورت عمل می‌نماییم.

$$۳۰=x^۳+x\ \rightarrow x=۳$$

9- ضابطه‌ی معکوس تابع $y=۲-\sqrt{x-۱}$، به کدام صورت است؟

① $f^{-1}(x)=x^۲-۴x+۵:x\le ۲$ ② $f^{-1}(x)=-x^۲+۴x-۵:x\le ۲$

③ $f^{-1}(x)=x^۲-۴x+۵:x\ge ۱$ ④ $f^{-1}(x)=-x^۲+۴x-۵:x\ge ۱$

پاسخ: گزینه 1

ابتدا x را برحسب y به‌دست می‌آوریم و سپس جای x و y را عوض می‌کنیم.

$$y=۲-\sqrt{x-۱}\Rightarrow (\sqrt{x-۱})^۲=(۲-y)^۲\Rightarrow x-۱=۴-۴y+y^۲$$

$$\Rightarrow x=y^۲-۴y+۵\ \Rightarrow\ f^{-1}(x)=x^۲-۴x+۵\ ,\ x\le ۲$$

چون $\sqrt{x-۱}$ مثبت است، پس $-\sqrt{x-۱}$ منفی بوده و $y=۲-\sqrt{x-۱}$ همواره کوچک تر مساوی ۲ می شود، بنابراین دامنه‌ی تابع معکوس $x\le ۲$ است.

10- ضابطه‌ی وارون تابع $y=\begin{cases}\sqrt{x} & ;\ x\ge ۰\\ -\sqrt{-x} & ;\ x<۰\end{cases}$ ، کدام است؟

① $f^{-1}(x)=x|x|;x\in\mathbb{R}$ ② $f^{-1}(x)=-x^۲;x<۰$ ③ $f^{-1}(x)=\pm x^۲;x\in\mathbb{R}$ ④ $f^{-1}(x)=\pm x|x|;x\in\mathbb{R}$

پاسخ: گزینه 1

روش اول:

ضابطه‌ی بالا: $y=\sqrt{x}\ ,\ x\ge ۰\Rightarrow y\ge ۰\ \Rightarrow y^۲=x\Rightarrow f^{-1}(x)=x^۲\ ,\ x\ge ۰$

ضابطه‌ی پایین: $y=-\sqrt{-x}\ ,\ x<۰\Rightarrow y<۰\ \Rightarrow y^۲=-x\Rightarrow x=-y^۲\Rightarrow f^{-1}(x)=-x^۲\ ,\ x<۰$

بنابراین ضابطه‌ی تابع وارون به‌صورت $f^{-1}(x)=\begin{cases}x^۲ & x\ge ۰\\ -x^۲ & x<۰\end{cases}$ و یا به‌صورت $f^{-1}(x)=x|x|\ ,\ x\in R$ است.

روش دوم:

یک x دلخواه در تابع قرار می‌دهیم.

$$x=۴ \xrightarrow{\text{تابع}} y=۲ \quad \begin{vmatrix} ۴ \\ ۲ \end{vmatrix} \in f \Rightarrow \begin{vmatrix} ۲ \\ ۴ \end{vmatrix} \in f^{-۱}$$

گزینه ای درست است که اگر به جای x آن ۲ قرار دهیم حاصل ۴ می شود. (گزینه‌ی اول)

---

11 - اگر $f=\{(۱,۲),(۲,۵),(۰,۳),(۴,-۱)\}$ و $g=\{(۲,۳),(-۱,۴),(۴,۱),(۳,۰)\}$ تابع $gof^{-۱}$ کدام است؟

① $gof^{-۱}(x)=\{(۰,۰),(۱,۳)\}$
② $gof^{-۱}(x)=\{(۲,۴),(۳,۵)\}$
③ $gof^{-۱}(x)=\{(۲,۰),(-۱,۴)\}$
④ $gof^{-۱}(x)=\{(۵,۳),(-۱,۱)\}$

پاسخ: گزینه 4

$$f^{-۱}=\{(۲,۱),(۵,۲),(۳,۰),(-۱,۴)\} \quad , \quad g=\{(۲,۳),(-۱,۴),(۴,۱),(۳,۰)\}$$

$$gof^{-۱}(x)=g(f^{-۱}(x))= \left.\begin{array}{l} g(f^{-۱}(۲))=g(۱)=\varnothing \\ g(f^{-۱}(۵))=g(۲)=۳ \\ g(f^{-۱}(۳))=g(۰)=\varnothing \\ g(f^{-۱}(-۱))=g(۴)=۱ \end{array}\right\} \rightarrow gof^{-۱}(x)=\{(۵,۳)(-۱,۱)\}$$

---

12 - با فرض $x\geq ۲\ ;\ f(x)=x^۲-۴x+۹$ و $g(x)=\dfrac{۳-x}{۲}$ ، حاصل $(f^{-۱}og^{-۱})(-۹)$ کدام است؟

① ۳
② ۴
③ ۵
④ ۶

پاسخ: گزینه 4 می‌دانیم که $f(a)=b \rightarrow f^{-۱}(b)=a$ است.

$$f^{-۱}og^{-۱}(-۹)=f^{-۱}(g^{-۱}(-۹))=f^{-۱}(۲۱)=۶$$

توجه کنید:

$$g^{-۱}(-۹)=a \rightarrow g(a)=-۹ \rightarrow \frac{۳-a}{۲}=-۹ \rightarrow ۳-a=-۱۸ \rightarrow a=۲۱$$

$$f^{-۱}(۲۱)=b \rightarrow f(b)=۲۱ \rightarrow b^۲-۴b+۹=۲۱ \rightarrow b^۲-۴b-۱۲=۰ \rightarrow (b-۶)(b+۲)=۰$$
$$\rightarrow \begin{cases} b=۶ \\ b=-۲ \ \text{(با توجه به دامنه) غ ق ق} \end{cases}$$

---

13 - اگر $f(x)=x+\sqrt{x}$ و $g(x)=\dfrac{۹x+۶}{۱-x}$ باشند، مقدار $(g^{-۱}of^{-۱})(۲۰)$، کدام است؟

① $\frac{۲}{۵}$
② $\frac{۳}{۵}$
③ $\frac{۲}{۳}$
④ $\frac{۳}{۴}$

پاسخ: گزینه 1 می‌دانیم که $f(a)=b \rightarrow f^{-۱}(b)=a$ است.

$$g^{-۱}of^{-۱}(۲۰)=g^{-۱}(f^{-۱}(۲۰))=g^{-۱}(۱۶)=\frac{۲}{۵}$$

توجه کنید:

$$f^{-۱}(۲۰)=a \rightarrow f(a)=۲۰ \rightarrow a+\sqrt{a}=۲۰ \rightarrow a=۱۶$$

$$g^{-۱}(۱۶)=b \rightarrow g(b)=۱۶ \rightarrow \frac{۹b+۶}{۱-b}=۱۶ \rightarrow ۱۶-۱۶b=۹b+۶ \rightarrow ۲۵b=۱۰ \rightarrow b=\frac{۲}{۵}$$

14 - اگر $f(x)=۴-۳^{۲x}$ باشد، دامنه‌ی تابع $g(x)=\sqrt{xf^{-۱}(x)}$ ، کدام است؟ (با تغییر)

① $[۲,۳]$ ② $[۳,۴)$ ③ $[۰,۳]$ ④ $[۰,۴)$

پاسخ: گزینه 3

می‌دانیم: $\log_a^a e=۱$, $\log a^b=b\cdot\log a$

ابتدا $f^{-۱}(x)$ را می‌یابیم:

$$f(x)=۴-۳^{۲x}\to y=۴-۳^{۲x}\to ۳^{۲x}=۴-y\xrightarrow[\text{پایهٔ سه می‌گیریم}]{\text{از طرفین لگاریتم در}}۲x=\log_۳(۴-y)\to x=\frac{۱}{۲}\log_۳(۴-y)$$

$$\to f^{-۱}(x)=\frac{۱}{۲}\log_۳(۴-x) \qquad ۴-x>۰\to x<۴\to D_{f^{-۱}}=(-\infty,۴)$$

$$g(x)=\sqrt{xf^{-۱}(x)}\Rightarrow g(x)=\sqrt{\frac{۱}{۲}x\cdot\log_۳(۴-x)}\Rightarrow\log_۳(۴-x)=۰\Rightarrow ۴-x=۱\Rightarrow x=۳$$

برای یافتن دامنهٔ $g(x)$ باید ریشه‌های عبارت زیر رادیکالی را بیابیم و سپس تعیین علامت کنیم.

x	$-\infty$		۰		۳		۴
$\frac{۱}{۲}x\log(۴-x)$		$-$		$+$		$-$	

جواب: $D_f=[۰,۳]$

انواع تابع تابع یک به یک

15 - اگر رابطه‌ی $f=\left\{(۳,۲),(a,۵),(۳,a^۲-a),(b,۲),(-۱,۴)\right\}$ تابع یک به یک باشد، دوتایی (a,b) کدام است؟

① $(-۱,۱)$ ② $(-۱,۳)$ ③ $(۲,۱)$ ④ $(۲,۳)$

پاسخ: گزینه 4 الف) شرط تابع بودن: هیچ دو زوج مرتب متمایز، مولفه‌ی اول برابر نداشته باشند.

$$(۳,۲)=(۳,a^۲-a)\Rightarrow a^۲-a=۲\Rightarrow a^۲-a-۲=۰$$

$$\Rightarrow(a-۲)(a+۱)=۰\Rightarrow\begin{cases}a=۲\\a=-۱\end{cases}$$

ب) شرط یک به یک بودن: هیچ دو زوج مرتب متمایز، مولفه‌ی دوم برابر نداشته باشند.

$$(۳,۲)=(b,۲)\Rightarrow b=۳$$

اما از میان دو مقدار به دست آمده برای a ، باید یکی را به گونه ای انتخاب کنیم که شرایط (الف) و (ب) کماکان برقرار بماند. در نتیجه فقط $a=۲$ قابل قبول می‌باشد زیرا اگر $a=-۱$ باشد، دو زوج مرتب $(-۱,۴)$ و $(-۱,۵)$ در مجموعه دیده می‌شوند که در آن صورت مجموعه‌ی حاصل تابع نخواهد بود. در نتیجه $(a,b)=(۲,۳)$ می‌باشد.

وارون تابع محاسبهٔ وارون تابع

16 - اگر $f=\{(۱,۲),(۲,۵),(۳,۴),(۴,۶)\}$ و $g=\{(۲,۳),(۴,۲),(۵,۶),(۳,۱)\}$ دو تابع باشند، برد تابع $(g^{-۱}of)-f$، کدام است؟

① $\{-۱,۴\}$ ② $\{۲,۳\}$ ③ $\{۳,۴\}$ ④ $\{۲,-۱\}$

پاسخ: گزینه 4

$$f=\{(۱,۲),(۲,۵),(۳,۴),(۴,۶)\} \quad , \quad g=\{(۲,۳),(۴,۲),(۵,۶),(۳,۱)\}$$

$$g^{-۱} = \{(۳,۲),(۲,۴),(۶,۵),(۱,۳)\} \Rightarrow g^{-۱}of = \{(۱,۴),(۴,۵)\}$$

$$g^{-۱}of - f = \{(۱,۴-۲),(۴,۵-۶)\} = \{(۱,۲),(۴,-۱)\} \Rightarrow \text{برد} = \{۲,-۱\}$$

17- اگر $g(x) = f(x) + \sqrt{f(x)}$ و $f^{-۱}(x) = \sqrt[۳]{۲x}$ حاصل $g^{-۱}(۶)$ کدام است؟

① ۱　② ۲　③ ۳　④ ۴

پاسخ: گزینه 2

می‌دانیم: اگر $f(x)$ تابع معکوس‌پذیر باشد و $A\left|\begin{matrix}a\\b\end{matrix}\right.$ روی $f(x)$ باشد آنگاه:

$$f(a) = b \Rightarrow f^{-۱}(b) = a$$
$$g^{-۱}(۶) = a \Rightarrow g(a) = ۶$$
$$g(a) = f(a) + \sqrt{f(a)} \Rightarrow ۶ = f(a) + \sqrt{f(a)} \Rightarrow f(a) = ۴ \Rightarrow f^{-۱}(۴) = a \Rightarrow f^{-۱}(۴) = ۲ \Rightarrow a = ۲$$

18- با توجه به ماشین $x \Rightarrow f \Rightarrow g \Rightarrow x$ اگر $f(x) = ۲x - ۱$، آنگاه $g(۰)$ کدام است؟

① ۱　② ۰　③ $\frac{۱}{۲}$　④ ۲

پاسخ: گزینه 3 با توجه به ماشین داده شده $g(f(x)) = x$ است یعنی $g(x) = f^{-۱}(x)$.

$$f^{-۱}(x) = \frac{x+۱}{۲} \Rightarrow f^{-۱}(۰) = \frac{۱}{۲}$$

19- اگر $f(x) = ۱ + \sqrt{x}$ و $g(x) = x^۲$ و $x > ۰$ آنگاه ضابطه $g^{-۱}of^{-۱}$ کدام است؟

① $x-۱$　② $x+۱$　③ $x^۲-۱$　④ $x^۲+۱$

پاسخ: گزینه 1

می‌دانیم: $(fog)^{-۱} = g^{-۱}of^{-۱}$

$$g^{-۱}of^{-۱} = (fog)^{-۱} \Rightarrow fog(x) = f(g(x)) = f(x^۲) = ۱ + x$$
$$\Rightarrow y = x + ۱ \Rightarrow y - ۱ = x \Rightarrow (fog)^{-۱} = x - ۱$$

20- فرض کنید M نقطهٔ تلاقی منحنی $y = \sqrt{x+۳} - ۱$ با تابع وارون خود باشد، فاصلهٔ نقطهٔ M از مبدأ مختصات کدام است؟

① $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$　② $\sqrt{۲}$　③ ۳　④ $۲\sqrt{۲}$

پاسخ: گزینه 2 تابع در واقع $y = \sqrt{x}$ است که سه واحد به سمت چپ و یک واحد به سمت پایین انتقال یافته است. پس قطعاً صعودی است. می‌دانیم محل تقاطع یک تابع صعودی و معکوسش روی نیمساز ربع اول و سوم یعنی $y = x$ خواهد بود پس کافی است تابع را با $y = x$ در یک دستگاه حل کنیم تا محل تقاطع حاصل شود.

$$\begin{cases} y = \sqrt{x+۳} - ۱ \\ y = x \end{cases} \Rightarrow \sqrt{x+۳} - ۱ = x \Rightarrow \sqrt{x+۳} = x + ۱ \xrightarrow{\text{توان ۲}} x + ۳ = x^۲ + ۲x + ۱ \Rightarrow x^۲ + x + ۱$$
$$\Rightarrow x^۲ + x - ۲ = ۰ \xrightarrow{\text{مجموع ضرایب صفر}} \begin{cases} x = ۱ \\ x = -۲ \end{cases} \quad \$$$

دقت کنید $x = -۲$ ریشهٔ اضافی است و باعث برابری دو تابع فوق نمی‌شود و نقطهٔ تقاطع $A(۱,۱)$ خواهد بود.

$$|OA| = \sqrt{۱^۲ + ۱^۲} = \sqrt{۲}$$

21- تابع با ضابطهٔ $f(x)=\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}$ را در نظر بگیرید. شیب خط مماس بر منحنی $f^{-1}(x)$ در نقطه‌ای به‌طول 2 واقع بر آن کدام است؟

① -12 ② -8 ③ $+8$ ④ $+12$

پاسخ: گزینه 1 ابتدا تابع معکوس را به‌دست می‌آوریم:

$$y=\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}\Rightarrow y\sqrt{x}-y=\sqrt{x}+1\ \Rightarrow y\sqrt{x}-\sqrt{x}=y+1\Rightarrow \sqrt{x}(y-1)\ =y+1\Rightarrow x=(\frac{y+1}{y-1})^2$$
$$\Rightarrow f^{-1}(x)=(\frac{x+1}{x-1})^2$$

$$(f^{-1})'(x)=2(\frac{x+1}{x-1})\times(\frac{-2}{(x-1)^2})\ \Rightarrow (f^{-1})'(2)=2\times3\times(-2)=-12$$

انواع تابع تابع یک به یک

22- تابع $f(x)=\begin{cases}x^2-ax+2 & x\le 2\\ -\sqrt{x+2} & x>2\end{cases}$ یک به یک است. مجموعهٔ مقدارهای ممکن a کدام است؟

① $(-\infty,4]$ ② $[-4,4]$ ③ $(0,4]$ ④ $\{4\}$

پاسخ: گزینه 3 تابع چند جمله‌ای درجهٔ دوم روی بازه‌هایی که طول رأس سهمی نمودار آن‌ها خارج بازهٔ مورد نظر باشد یا ابتدای بازه یا انتهای بازه باشد، یک به یک است. در سهمی به معادلهٔ $y=a^2-ax+2$ طول رأس سهمی $x=\dfrac{a}{2}$ است. پس $\dfrac{a}{2}\ge 2\Rightarrow a\ge 4$ از طرف دیگر برای این که تابع f یک به یک باشد، باید برد تابع‌های $y_1=x^2-ax+2$ و $y=-\sqrt{x+2}$ نباید مشترک داشته باشد. پس:

$$y_1=x^2-ax+2\ \Rightarrow y_1\ge-\frac{\Delta}{4}\ \Rightarrow y_1\ge\frac{8-a^2}{4}\quad (1)$$

$$y_2=-\sqrt{x+2}\ ,\ x>2\ \rightarrow \sqrt{x+2}>2\Rightarrow-\sqrt{x+2}<-2\ \Rightarrow y_2<-2\Rightarrow\frac{8-a^2}{4}\ge-2$$
$$\Rightarrow 8-a^2\ge-8\ \Rightarrow a^2\ge-8\Rightarrow a^2\le16\Rightarrow-4\le a\le4\quad (2)$$

با توجه به (1) و (2) واضح است که فقط به ازای $a=4$ تابع f یک به یک است.

23- به ازای چند مقدار m رابطهٔ $f=\{(2,m^3-m),(3,m+1),(m,2),(2,0),(m^2,2m)\}$ تابعی یک به یک است؟

① ۱ ② ۲ ③ ۳ ④ صفر

پاسخ: گزینه 4 برای اینکه f تابع باشد باید:

$$\begin{cases}(2,m^3-m)\in f\\ (2,0)\in f\end{cases}\ \Rightarrow m^3-m=0\ \Rightarrow m(m^2-1)=0\ \Rightarrow m=0,m=\pm1$$

اگر $m=0$ آن‌گاه:

$f=\{(2,0),(3,1),(0,2),(0,0)\}, f$ تابع نیست

اگر $m = ۱$ آن‌گاه:

$f = \{(۲,۰),(۳,۲),(۱,۲)\}$، f تابعی یک به یک نیست

اگر $m = -۱$ آن‌گاه:

$f = \{(۲,۰),(۳,۰),(-۱,۲),(۱,-۲)\}$، f تابعی یک به یک نیست

پس هیچ مقدار m ای وجود ندارد که f تابعی یک به یک باشد.

---

24 - کدام تابع یک به یک نیست؟

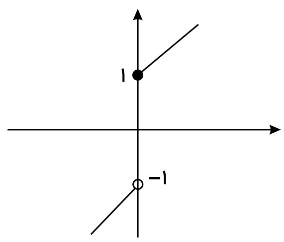
① $y=\begin{cases} x+۱ & x \geq ۰ \\ x-۱ & x < ۰ \end{cases}$ ② $y=\begin{cases} x-۱ & x \geq ۱ \\ x+۱ & x < -۱ \end{cases}$ ③ $y=\begin{cases} ۳x+۲ & x \geq ۰ \\ ۲x+۳ & x < ۰ \end{cases}$ ④ $y=\begin{cases} ۳x-۲ & x \geq ۱ \\ ۲x-۳ & x < ۱ \end{cases}$

پاسخ: گزینه 3 در گزینهٔ «۳» مقدار تابع به ازای $x = ۰$ و $x = -\frac{۱}{۲}$ برابر ۲ است. پس این تابع یک به یک نیست. نمودار تابع‌های گزینه‌های ۱ و ۲ و ۴ نشان می‌دهد که یک به یک هستند.

بررسی سایر گزینه‌ها:

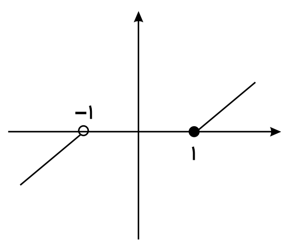
گزینهٔ «۱»:

$$y=\begin{cases} x+۱ & x \geq ۰ \\ x-۱ & x < ۰ \end{cases}$$



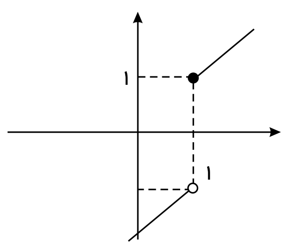
گزینهٔ «۲»:

$$y=\begin{cases} x-۱ & x \geq ۱ \\ x+۱ & x < -۱ \end{cases}$$



گزینهٔ «۴»:

$$y=\begin{cases} ۳x-۲ & x \geq ۱ \\ ۲x-۳ & x < ۱ \end{cases}$$



25- با توجه به شکل مقابل اگر $f(x)=\dfrac{3x+1}{x-2}$ ، g تابعی یک به یک و $g(m)=4$ باشد، مقدار m کدام است؟

$x \to \boxed{f} \to \boxed{g} \to x$

① ۱۱ ② ۱۲ ③ ۱۳ ④ ۱۵

پاسخ: گزینه 3 از نمودار داده شده نتیجه می‌شود $g(f(x))=x$.

بنابراین $g(f(4))=4$. از طرف دیگر $g(m)=4$ و چون g یک به یک است، پس:

$$f(4)=m \Rightarrow m=\frac{3\times 4+1}{3-2}=13$$

26- چند تابع یک به یک از $A=\{1,2,3,4\}$ به $B=\{1,2,3,4,5\}$ مانند f می‌توان تعریف کرد که $f(1)=1$ باشد؟

① ۱۲ ② ۲۴ ③ ۱۲۰ ④ ۶۰

پاسخ: گزینه 2

تابعی یک به یک است که هیچ دو زوج مرتب متمایزی مؤلفه‌ی دوم یکسان نداشته باشند.

مؤلفه‌ی ۱ تنها به ۱ وصل می‌شود و مؤلفه‌ی ۲، چهار انتخاب دارد و مؤلفه‌ی ۳ تنها سه انتخاب دارد و مؤلفه‌ی ۴ تنها دو انتخاب

بنابراین:

تعداد توابع یک به یک شامل $(1,1)$ $=4\times 3\times 2=24$

27- در تابع $f(x)=|2x+2|+ax$ حدود a را طوری تعیین کنید که تابع یک به یک باشد؟

① $a>2$ ② $a<-2$ ③ $-2<a<2$ ④ $a>2$ یا $a<-2$

پاسخ: گزینه 4

برای آن که تابع رو به رو یک به یک باشد باید ضرایب x هم علامت باشند (باید هر دو صعودی یا هر دو نزولی باشند)

$$f(x)=\begin{cases} x(2+a)+2 & x\geq -1 \\ x(a-2)-2 & x<-1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2+a>0 \Rightarrow a>-2 \\ a-2>0 \Rightarrow a>2 \end{cases} \Rightarrow a>2$$

$$\begin{cases} 2+a<0 \Rightarrow a<-2 \\ a-2<0 \Rightarrow a<2 \end{cases} \Rightarrow a<-2$$

28- کدامیک از توابع زیر یک به یک است؟

① $y=x^7-x+3$ ② $y=x^2-4x-9$ ③ $y=x^3-x^8$ ④ $y=\dfrac{2x-1}{x}$

پاسخ: گزینه 4

$1)y=3 \to x^7-x+3=3 \to x(x^6-1)=0 \to x=0\ ,\ x=\pm 1$ یک به یک نیست

$2)y=-9 \to x^2-4x-9=-9 \to x(x-4)=0 \to x=0\ ,\ x=4$ یک به یک نیست

$3)y=0 \to x^3-x^8=0 \to x^3(1-x^5)=0 \to x=0\ ,\ x=1$ یک به یک نیست

$$4)f(x_1)=f(x_2) \Rightarrow \frac{2x_1-1}{x_1}=\frac{2x_2-1}{x_2} \Rightarrow 2x_1x_2-x_2=2x_1x_2-x_1$$

$\Rightarrow -x_2=-x_1 \Rightarrow x_1=x_2$ یک به یک است

29- برای کدام مقدار m تابع $y=\dfrac{2x+m+4}{x+m}$ یک به یک نیست؟

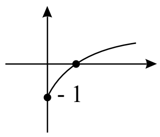
(1) -4 (2) 4 (3) 3 (4) -3

پاسخ: گزینه 2 نکته: تابع $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ زمانی یک به یک نمی‌باشد که: $\dfrac{b}{d}=\dfrac{a}{c}$ باشد.

$$\frac{2}{1}=\frac{m+4}{m}\Rightarrow 2m=m+4\rightarrow m=4$$

30- تابع $y=\begin{cases}\sqrt{x}-1 & x\geq 0\\ ax+b & x<0\end{cases}$ در چه شرایطی یک به یک است؟

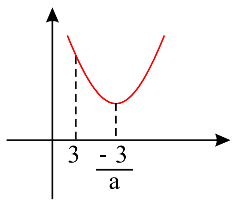
(1) $\begin{cases}a>0\\ b\leq -1\end{cases}$ (2) $\begin{cases}a\leq 0\\ b<-1\end{cases}$ (3) $\begin{cases}a>0\\ b\geq -1\end{cases}$ (4) $\begin{cases}a\geq 0\\ b>-1\end{cases}$

پاسخ: گزینه 1 با توجه به نمودار ضابطهٔ اول 

معادلهٔ خط ضابطهٔ دوم نمی‌تواند دارای شیب منفی باشد، پس $a>0$.

چون اگر شیب خط منفی باشد، در هر صورت خط افقی نمودار کلی را در دو نقطه قطع می‌کند. عرض از مبدأ خط نیز می‌تواند حداکثر به دلیل مشابه با -1 برابر باشد، پس $b\leq -1$.

31- تابع $y=ax^2+6x$ در بازهٔ $(-\infty,3)$ یک به یک است. حدود a کدام است؟



(1) $a\geq -1$ (2) $0<a\leq 1$

(3) $a\leq 1$ (4) $-1\leq a<0$

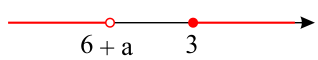
پاسخ: گزینه 4

$$3\leq -\frac{3}{a}\Rightarrow 3+\frac{3}{a}\leq 0\Rightarrow \frac{3(a+1)}{a}\leq 0\Rightarrow -1\leq a<0$$

32- به ازای کدام مقادیر a تابع $f(x)=\begin{cases}x^2-2x & x\geq 3\\ 2x+a & x<3\end{cases}$ یک به یک است؟

(1) $a\leq -3$ (2) $a\geq -3$ (3) $a\leq 3$ (4) $a\geq 3$

پاسخ: گزینه 1



$$y=x^2-2x\xrightarrow{x\geq 3}y\geq 3$$
$$y=2x+a\xrightarrow{x<3}y<6+a$$
$$6+a\leq\Rightarrow a\geq -3$$

33- اگر تابع $f(x)=\{(-1,1)\,,\,(1,2)\,,\,(2,3)\,,\,(a,m-1)\,,\,(a+2,b)\,,\,(m,3)\}$ یک به یک باشد مقدار b کدام است؟

(1) -1 (2) 1 (3) 3 (4) 2

پاسخ: گزینه 4

$$\xrightarrow{\text{یک به یک}} (2,3)\ ,\ (m,3) \in f \Rightarrow m = 2 \Rightarrow f = \{(-1,1),(1,2),(2,3),(a,1),(a+2,b),(2,3)\}$$

$$\xrightarrow{\text{یک به یک}} (a,1)\ ,\ (-1,1) \in f \Rightarrow a = -1 \Rightarrow f = \{(-1,1),(1,2),(2,3),(-1,1),(1,b),(2,3)\}$$

$$\xrightarrow{\text{تابع}} (1,b)\ ,\ (1,2) \in f \Rightarrow b = 2$$

وارون تابع محاسبهٔ وارون تابع

34- با فرض $g(x) = f(2x-1)$ و $f^{-1}(x) = \frac{1}{5}x^3 - \sqrt[3]{x-7}$، حاصل $f^{-1}(g^{-1}(f(-3)))$ کدام است؟

① $-\frac{11}{5}$ ② $\frac{11}{5}$ ③ $-\frac{9}{5}$ ④ $\frac{9}{5}$

پاسخ: گزینه 4 $x = -1$ را در رابطهٔ $g(x) = f(2x-1)$ قرار می‌دهیم:

$$x = -1 \Rightarrow g(-1) = f(-3)$$

بنابراین:

$$g^{-1}(f(-3)) = g^{-1}(g(-1)) = (g^{-1}og)(-1) = -1$$

$$f^{-1}(g^{-1}(f(-3))) = f^{-1}(-1) = \frac{1}{5}(-1)^3 - \sqrt[3]{-1-7} = -\frac{1}{5} - \sqrt[3]{-8} = -\frac{1}{5} + 2 = \frac{9}{5}$$

35- تابع $f(x) = ax + 3$ با وارونش بیش از یک نقطهٔ تقاطع دارند، حاصل $f^{-1}(-4)$ کدام است؟

① 1 ② 7 ③ -1 ④ -7

پاسخ: گزینه 2 وارون تابع f را می‌یابیم:

$$f(x) = ax + 3 \Rightarrow y = ax + 3 \Rightarrow ax = y - 3 \Rightarrow x = \frac{1}{a}y - \frac{3}{a} \Rightarrow y = f^{-1}(x) = \frac{1}{a}x - \frac{3}{a}$$

توابع f و f^{-1} هر دو خطی هستند و چون در بیش از یک نقطه متقاطع هستند، پس بر هم منطبق‌اند، یعنی داریم:

$$f^{-1}(x) = f(x) \Rightarrow \frac{1}{a}x - \frac{3}{a} = ax + 3 \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{a} = a \Rightarrow a^2 = 1 \Rightarrow a = \pm 1 \\ -\frac{3}{a} = 3 \Rightarrow a = -1 \end{cases} \Rightarrow a = -1$$

تابع f^{-1} به‌صورت زیر است:

$$f^{-1}(x) = -x + 3 \Rightarrow f^{-1}(-4) = -(-4) + 3 = 7$$

36- نمودار تابع $f(x) = \frac{-x+m}{3}$ در نقطه‌ای به طول -2 نمودار تابع وارونش را قطع می‌کند. ضابطهٔ تابع وارون آن کدام است؟

① $f^{-1}(x) = -3x + 8$ ② $f^{-1}(x) = 3x - 8$ ③ $f^{-1}(x) = -3x - 8$ ④ $f^{-1}(x) = 3x + 8$

پاسخ: گزینه 3 ضابطهٔ وارون تابع را به‌دست می‌آوریم.

$$y = \frac{-x+m}{3} \to 3y = -x + m \Rightarrow x = m - 3y \Rightarrow f^{-1}(x) = m - 3x$$

چون نمودار f و f^{-1} در $x = -2$ متقاطع‌اند، پس:

$$f(-۲)=f^{-۱}(-۲) \Rightarrow \frac{۲+m}{۳}=m+۶ \Rightarrow ۲+m=۳m+۱۸ \Rightarrow m=-۸$$

بنابراین:

$$f^{-۱}(x)=-۸-۳x$$

37- اگر $f(x)=\sqrt{x^۳+۱}$ و $g=\{(۲,۴),(۳,۱),(۱,۳),(۴,۲)\}$، مقدار $f^{-۱}(۳g^{-۱}(۳))$ کدام است؟

① ۱ ② ۲ ③ ۳ ④ ۴

پاسخ: گزینه 2 اگر $f(a)=b$ آنگاه $f^{-۱}(b)=a$ و بالعکس. پس اگر فرض کنیم $f^{-۱}(۳g^{-۱}(۳))=a$، آنگاه:

$$f(a)=۳g^{-۱}(۳)$$

از طرف دیگر $g(۱)=۳$، پس $g^{-۱}(۳)=۱$ و درنتیجه:

$$f(a)=۳ \Rightarrow \sqrt{a^۳+۱}=۳ \Rightarrow a^۳+۱=۹ \Rightarrow a^۳=۸ \Rightarrow a=۲$$

پس: $f^{-۱}(۳g^{-۱}(۳))=۲$.

38- توابع f و g بر روی $\mathbb{R}$ یک به یک هستند. اگر $g(x)=f^{-۱}(x)+۲\sqrt{f^{-۱}(x)}$ و $f(x)=۲\sqrt{x}-۳g^{-۱}(x+۶)$ باشند، آنگاه $g^{-۱}(۱۵)$ کدام است؟

① $-\frac{۲}{۳}$ ② $\frac{۲}{۳}$ ③ $-\frac{۳}{۲}$ ④ $\frac{۳}{۲}$

پاسخ: گزینه 4

$$g^{-۱}(۱۵)=a \Rightarrow g(a)=۱۵ \Rightarrow f^{-۱}(a)+۲\sqrt{f^{-۱}(a)}=۱۵$$

از تغییر متغیر $\sqrt{f^{-۱}(a)}=t$ استفاده می‌کنیم.

$$t^۲+۲t-۱۵=۰ \Rightarrow (t-۳)(t+۵)=۰ \begin{cases} t=-۵ \Rightarrow \sqrt{f^{-۱}(a)}=-۵ \text{ غ.ق.ق} \\ t=۳ \Rightarrow \sqrt{f^{-۱}(a)}=۳ \end{cases} \Rightarrow f^{-۱}(a)=۹$$

$$\Rightarrow a=f(۹) \Rightarrow a=۲\sqrt{۹}-۳g^{-۱}(۹+۶) \Rightarrow a=۶-۳g^{-۱}(۱۵) \rightarrow a=۶-۳a \Rightarrow ۴a=۶ \rightarrow a=\frac{۳}{۲}$$

39- فرض کنید $f^{-۱}(x)=۶x+۲x^۳$ و $g^{-۱}(x)=ax^۳+bx$. اگر $f(۲x)=۳g(\frac{x}{۴})$ آنگاه $a+b$ کدام است؟

① ۱۰ ② ۸ ③ ۹ ④ ۷

پاسخ: گزینه 3 فرض می‌کنیم $y=f(۲x)$ پس داریم:

$$y=f(۲x) \Rightarrow ۲x=f^{-۱}(y) \Rightarrow x=\frac{۱}{۲}f^{-۱}(y) \qquad (۱)$$

$$f(۲x)=۳g(\frac{x}{۴}) \Rightarrow ۳g(\frac{x}{۴})=y \Rightarrow g(\frac{x}{۴})=\frac{y}{۳} \rightarrow \frac{x}{۴}=g^{-۱}(\frac{y}{۳}) \Rightarrow x=۴g^{-۱}(\frac{y}{۳}) \qquad (۲)$$

از (۱) و (۲) داریم:

$$\frac{۱}{۲}f^{-۱}(y)=۴g^{-۱}(\frac{y}{۳}) \xrightarrow{y\to x} \frac{۱}{۲}f^{-۱}(x)=۴g^{-۱}(\frac{x}{۳})$$

از ضابطه‌های داده شده برای $f^{-۱}$ و $g^{-۱}$ استفاده می‌کنیم.

$$\frac{۱}{۲}(۶x+۲x^۳)=۴(a(\frac{x}{۳})^۳+b\frac{x}{۳}) \Rightarrow ۳x+x^۳=\frac{۴a}{۲۷}x^۳+\frac{۴b}{۳}x$$

تساوی فوق به ازای هر x برقرار است پس:

$$\frac{۴a}{۲۷} = ۱ \Rightarrow a = \frac{۲۷}{۴}, \frac{۴b}{۳} = ۳ \Rightarrow b = \frac{۹}{۴}$$
$$a + b = \frac{۲۷}{۴} + \frac{۹}{۴} = \frac{۳۶}{۴} = ۹$$

40- نمودار تابع‌های $f(x) = \sqrt[۵]{۹ - x^۵}$ و $f^{-۱}(x)$ چند نقطهٔ مشترک دارند؟

(۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) بی‌شمار

پاسخ: گزینه 4 تابع وارون f به‌صورت زیر است:

$$f(x) = \sqrt[۵]{۹ - x^۵} \Rightarrow y = \sqrt[۵]{۹ - x^۵} \xrightarrow{\text{توان ۵}} y^۵ = ۹ - x^۵ \Rightarrow x^۵ = ۹ - y^۵ \Rightarrow x = \sqrt[۵]{۹ - y^۵}$$
$$\Rightarrow y = f^{-۱}(x) = \sqrt[۵]{۹ - x^۵}$$

دامنهٔ تابع f برابر $\mathbb{R}$ است و تابع وارون f برابر با خود f است، یعنی معادلهٔ $f^{-۱}(x) = f(x)$ بی‌شمار جواب دارد.

بی‌نام