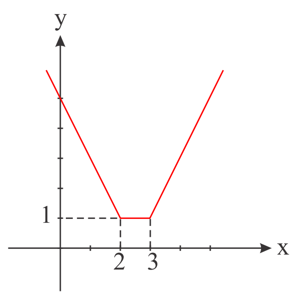
تابع

انواع تابع تابع یکنوا و تابع $y=x^3$

1 - در بازه‌ای که تابع با ضابطه $f(x)=|x-۲|+|x-۳|$ اکیداً نزولی است، نمودار آن با نمودار تابع $g(x)=۲x^۲-x-۱۰$، در چند نقطه مشترک هستند؟

① ۱ ② ۲ ③ ۳ ④ فاقد نقطه مشترک

پاسخ: گزینه 1 تابع داده‌شده یک تابع گلدانی است که در $x<۲$ اکیداً نزولی است.



$$y=|x-۲|+|x-۳| \xrightarrow{x<۲} y=-x+۲-x+۳ \to y=-۲x+۵$$

$$\begin{cases} f(x)=-۲x+۵ \\ g(x)=۲x^۲-x-۱۰ \end{cases} \xrightarrow{\text{تلاقی}} ۲x^۲-x-۱۰=-۲x+۵ \to ۲x^۲+x-۱۵=۰$$

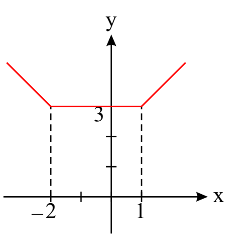
$$\xrightarrow{\Delta=b^۲-۴ac=۱+۱۲۰=۱۲۱} \begin{cases} x=\dfrac{-۱+۱۱}{۴}=\dfrac{۵}{۲}\ (x<۲ \text{ غ ق ق (با توجه به}) \\ x=\dfrac{-۱-۱۱}{۴}=-۳ \quad \text{ق ق} \end{cases} \to$$ در یک نقطه مشترک هستند.

---

2 - تابع با ضابطه $f(x)=|x+۲|+|x-۱|$، در کدام بازه، اکیداً نزولی است؟

① $(-\infty,-۲)$ ② $(-\infty,۱)$ ③ $(-۲,۱)$ ④ $(۱,+\infty)$

پاسخ: گزینه 1 تابع داده‌شده یک تابع گلدانی است که در $x=-۲$ و $x=۱$ (ریشه‌های داخل قدرمطلق) دارای شکست است.



$\to x<-۲$: اکیداً نزولی

---

3 - در مورد تابع با ضابطه $f(x)=|\dfrac{x+۲}{|x+۲|}-x|$ چه تعداد از گزاره‌های زیر درست می‌باشد؟

این تابع خط $y=۱$ را در ۳ نقطه قطع می‌کند.

این تابع در بازهٔ $(-۲\ ,\ +۱)$ اکیداً نزولی است.

این تابع در بازهٔ $(-\infty\ ,\ -۲)$ وارون‌پذیر است.

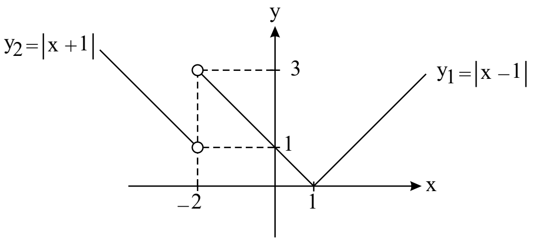
این تابع در فاصلهٔ $(-۴\ ,\ -۱)$ اکیداً یکنوا است.

① ۱ ② ۲ ③ ۳ ④ ۴

تکلیف یکنوایی و بخش پذیری

پاسخ: گزینه 2 با شرط‌های $x < -۲$, $x > -۲$ قدر مطلق داخل را از بین می‌بریم:

$$f(x) = |\frac{x+۲}{|x+۲|} - x| = \begin{cases} |۱-x| \ ; \ x > -۲ \\ |۱+x| \ ; \ x < -۲ \end{cases}$$



با رسم نمودار این تابع دو ضابطه‌ای معلوم می‌شود:

این تابع خط $y = ۱$، را در دو نقطه قطع کرده است.

این تابع در بازهٔ $(-۲ \ , \ ۱)$ اکیداً نزولی است.

این تابع در بازهٔ $(-\infty \ , \ -۲)$، یک به یک و لذا وارون‌پذیر است.

این تابع در بازهٔ $(-۴ \ , \ -۱)$ اکیداً یکنوا نیست.

---

4 - اگر تابع $f(x) = (x-۱)^۲ + mx^۲ - nx + ۳$ هم صعودی و هم نزولی باشد، حاصل $m \times n$ کدام است؟

① ۲ ② -۲ ③ ۱ ④ صفر

پاسخ: گزینه 1 می‌دانیم فقط تابع ثابت $f(x) = k$ هم صعودی و هم نزولی است، پس داریم:

$$f(x) = (x-۱)^۲ + mx^۲ - nx + ۳ = x^۲ - ۲x + ۱ + mx^۲ - nx + ۳$$

$$f(x) = (۱+m)x^۲ - (۲+n)x + ۴ \Rightarrow \text{تابع ثابت} \Rightarrow \begin{cases} ۱ + m = ۰ \to m = -۱ \\ ۲ + n = ۰ \to n = -۲ \end{cases}$$

$$m \times n = (-۱)(-۲) = ۲$$

---

5 - اگر تابع f روی $\mathbb{R}$ اکیداً نزولی باشد، در کدام بازه نمودار $f(x^۳)$ پایین‌تر از نمودار $f(۲-x^۲)$ قرار می‌گیرد؟

① $(۱ \ , +\infty)$ ② $(-\infty \ , -۱)$ ③ $[۱ \ , +\infty)$ ④ $(-\infty \ , -۱]$

پاسخ: گزینه 1 نمودار $f(x^۳)$ پایین‌تر از نمودار $f(۲-x^۲)$ قرار می‌گیرد، یعنی $f(x^۳) < f(۲-x^۲)$ و با توجه به این که f اکیداً نزولی است، داریم:

$$f(x^۳) < f(۲-x^۲) \xrightarrow{f \text{ اکیداً نزولی}} x^۳ > ۲ - x^۲ \Rightarrow x^۳ + x^۲ - ۲ > ۰ \Rightarrow x^۳ - ۱ + x^۲ - ۱ > ۰$$

$$\Rightarrow (x-۱)(x^۲+x+۱) + (x-۱)(x+۱) > ۰ \Rightarrow (x-۱)(x^۲+x+۱+x+۱) > ۰$$

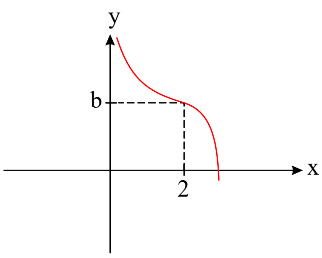
$$\Rightarrow (x-۱)(x^۲+۲x+۲) > ۰ \quad (۱)$$

$$x^۲ + ۲x + ۲ = ۰ \Rightarrow \Delta = ۴ - ۸ = -۴ < ۰ \text{ و } x^۲ \text{ ضریب } > ۰ \Rightarrow \text{.همواره مثبت است } x^۲ + ۲x + ۲$$

$$(۱) \Rightarrow x - ۱ > ۰ \Rightarrow x > ۱$$

---

6 - نمودار $f(x) = -(x-۱)^۳ + ax^۲ + cx + ۱۰$ به‌صورت مقابل می‌باشد، حاصل $a+b+c$ کدام است؟



① -۴
② -۳
③ ۴
④ ۳

پاسخ: گزینه 2

$$y = -(x-۱)^۳ + ax^۲ + cx + ۱۰ = -(x^۳ - ۳x^۲ + ۳x - ۱) + ax^۲ + cx + ۱۰$$

$$= -x^۳ + (a+۳)x^۲ + (c-۳)x + ۱۱$$

حال با توجه به این که ضریب $x^۳$ برابر -۱ می‌باشد، پس نمودار داده شده از انتقال $y=-x^۳$ به اندازهٔ ۲ واحد به راست و b واحد به بالا حاصل شده است، بنابراین داریم:

$$y=-x^۳ \xrightarrow[x\to x-۲]{\text{۲ واحد به راست}} y=-(x-۲)^۳ \xrightarrow{b \text{ واحد به بالا}} y=-(x-۲)^۳+b$$

$$y=-(x^۳-۶x^۲+۱۲x-۸)+b=-x^۳+۶x^۲-۱۲x+۸+b$$

حال در مقایسه با تابع f داده شده داریم:

$$-x^۳+۶x^۲-۱۲x+۸+b=-x^۳+(a+۳)x^۲+(c-۳)x+۱۱$$

$$\begin{matrix} a+۳=۶ \\ a=۳ \end{matrix}\ ,\ \begin{matrix} c-۳=-۱۲ \\ c=-۹ \end{matrix}\ ,\ \begin{matrix} ۸+b=۱۱ \\ b=۳ \end{matrix} \Rightarrow a+b+c=۳+۳-۹=-۳$$

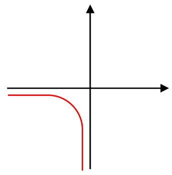
---

7 - تابع f با ضابطه‌ی $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x}+۱ & ; \quad x\geq ۰ \\ \frac{۱}{x} & ; \quad x<۰\end{cases}$، بر روی مجموعه‌ی اعداد حقیقی چگونه است؟

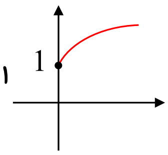
(۱) یک به یک - نزولی　(۲) یک به یک - صعودی　(۳) یک به یک - غیر یکنوا　(۴) غیر یک به یک - غیر یکنوا

پاسخ: گزینه 3 بهترین و سریعترین روش برای بررسی توابع چند ضابطه ای، رسم آنهاست.

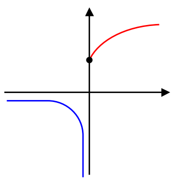
$$\begin{cases} y=\frac{۱}{x} \\ x<۰ \end{cases}$$



$$y=\sqrt{x}+۱$$

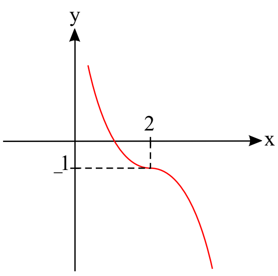


خطوط موازی محور xها نمودار این تابع را حداکثر در یک نقطه قطع می‌کنند پس یک به یک است و این تابع ابتدا نزولی و بعد صعودی است که غیریکنوا محسوب می‌شود.



---

8 - اگر نمودار تابع $y=-x^۳+ax^۲+bx+c$ به‌صورت مقابل باشد، حاصل $a-b+۲c$ کدام است؟



(۱) -۳۶

(۲) ۳۲

(۳) ۳۶

(۴) -۳۲

پاسخ: گزینه 2 با توجه به این که ضریب پشت $x^۳$ برابر -۱ می‌باشد، پس نمودار داده‌شده از انتقال نمودار $y=-x^۳$ به‌صورت زیر حاصل شده است:

$$y=-x^۳ \xrightarrow[x\to x-۲]{\text{۲ واحد به راست}} y=-(x-۲)^۳ \xrightarrow[\text{پایین}]{\text{یک واحد به}} y=-(x-۲)^۳-۱$$

$$y=-(x^۳-۶x^۲+۱۲x-۸)-۱=-x^۳+۶x^۲-۱۲x+۷=-x^۳+ax^۲+bx+c$$

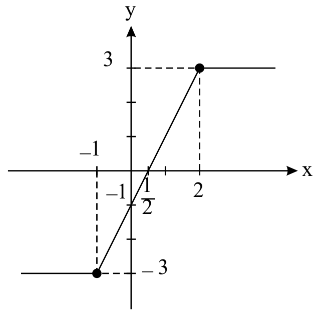
$$\Rightarrow a=۶\ ,\ b=-۱۲\ ,\ c=۷ \Rightarrow a-b+۲c=۶-(-۱۲)+۲\times ۷=۶+۱۲+۱۴=۳۲$$

---

9 - تابع با ضابطهٔ $f(x)=|x+۱|-|x-۲|$، در کدام بازه، اکیداً صعودی است؟

(۱) $(-\infty,۲)$　(۲) $(-۱,+\infty)$　(۳) $(-۱,۲)$　(۴) $(۲,+\infty)$

پاسخ: گزینه 3 تابع داده‌شده یک تابع سرسره‌ای (آبشاری) است که در $x=-۱$ و $x=۲$ (ریشه‌های داخل قدرمطلق) دارای شکست است.



$\longrightarrow -1 < x < 2$: اکیداً صعودی

---

10 - اگر تابع f اکیداً صعودی و g اکیداً نزولی باشند و تابع fog تعریف شده باشد، تابع fog چگونه است؟

(۱) اکیداً نزولی (۲) اکیداً صعودی (۳) نزولی غیراکید (۴) صعودی غیراکید

پاسخ: گزینه 1

$$x_1 < x_2 \xrightarrow{g \text{ اکیداً نزولی}} g(x_1) > g(x_2)$$

با فرض $g(x_1) = t_1$ و $g(x_2) = t_2$ داریم:

$$t_1 > t_2 \xrightarrow{f \text{ اکیداً صعودی}} f(t_1) > f(t_2) \Rightarrow f(g(x_1)) > f(g(x_2))$$

$$\Rightarrow (fog)(x_1) > (fog)(x_2) \Rightarrow \text{اکیداً نزولی } fog$$

---

11 - اگر تابع f در بازه اعداد حقیقی اکیداً نزولی باشد، دامنه تابع $g(x) = \sqrt{f(|x+3|) - f(|x-2|)}$ کدام است؟

(۱) $D_g = (-\infty, -\frac{1}{2}]$ (۲) $D_g = (-\infty, \frac{1}{2}]$ (۳) $D_g = [-\frac{1}{2}, +\infty)$ (۴) $D_g = [\frac{1}{2}, +\infty)$

پاسخ: گزینه 1 اگر تابع f اکیداً نزولی و $f(a) \geq f(b)$، آنگاه $a \leq b$ است.

$$g(x) = \sqrt{f(|x+3|) - f(|x-2|)} \Rightarrow f(|x+3|) - f(|x-2|) \geq 0$$

$$\Rightarrow f(|x+3|) \geq f(|x-2|) \Rightarrow |x+3| \leq |x-2|$$

برای حل این نوع نامعادلات، طرفین را به توان ۲ می‌رسانیم.

$$(x+3)^2 \leq (x-2)^2 \Rightarrow x^2 + 6x + 9 \leq x^2 - 4x + 4$$

$$\Rightarrow 10x \leq -5 \Rightarrow x \leq -\frac{1}{2} \Rightarrow D_g = (-\infty, -\frac{1}{2}]$$

---

12 - تابع f در بازهٔ اعداد حقیقی اکیداً نزولی است. اگر $f(x-3) \leq f(3x+7)$، آنگاه بزرگترین محدودهٔ x کدام است؟

(۱) $x < -5$ (۲) $x > -5$ (۳) $x \leq -5$ (۴) $x \geq -5$

پاسخ: گزینه 3 اگر تابع f اکیداً نزولی و $f(a) \leq f(b)$، آنگاه $a \geq b$ است. پس داریم:

$$f(x-3) \leq f(3x+7) \Rightarrow x-3 \geq 3x+7 \Rightarrow -7-3 \geq 3x - x \Rightarrow 2x \leq -10 \Rightarrow x \leq -5$$

---

13 - توابع f و g روی $\mathbb{R}$ اکیداً نزولی می‌باشند و تابع fog نیز روی $\mathbb{R}$ تعریف شده است، اگر $fog(m^2+1) = 3a-1$ و $fog(m^2+3) = 2a+4$، آنگاه بزرگترین محدودهٔ a کدام است؟

(۱) $a > 5$ (۲) $a < -5$ (۳) $a \in \mathbb{R}$ (۴) $a < 5$

پاسخ: گزینه 4 می‌دانیم: m^2+3 و m^2+1 همواره مثبت هستند و m^2+3 از m^2+1 بزرگتر است، پس داریم:

$$m^2+1 < m^2+3 \xrightarrow{g \text{ اکیداً نزولی}} g(m^2+1) > g(m^2+3) \xrightarrow{f \text{ اکیداً نزولی}} f(g(m^2+1)) < f(g(m^2+3))$$

$$\Rightarrow fog(m^2+1) < fog(m^2+3) \Rightarrow 3a-1 < 2a+4 \Rightarrow a < 5$$

14 - به ازای چند مقدار صحیح a، تابع $y=(a+1)x^2-2(2a+1)x-2$ در بازهٔ $(1\ ,\ \infty)$ صعودی است؟

① 1 ② 2 ③ هیچ ④ بی‌شمار

پاسخ: گزینه 2 لازم است تقعر سهمی رو به بالا باشد تا تابع در بازه‌ای مثل $(1\ ,\ \infty)$ که از راست نامتناهی است، صعودی باشد. پس $a+1>0$ یا $a>-1$. ضمناً اگر S رأس سهمی باشد، باید $x_S\le 1$ ؛ پس:

$$-\frac{-2(2a+1)}{2(a+1)}\le 1 \Rightarrow \frac{2a+1}{a+1}\le 1 \Rightarrow \frac{a}{a+1}\le 0 \Rightarrow -1<a\le 0 \xrightarrow{a>-1} -1<a\le 0$$

حال دقت کنید که اگر $a=-1$ باشد، داریم $y=2x-2$ که تابعی است صعودی اکید. پس باید:

$$a\in(-1\ ,\ 0]\cup\{-1\}=[-1\ ,\ 0]$$

که شامل دو مقدار صحیح است.

---

15 - تابع f تابعی اکیداً صعودی و تابع g تابعی اکیداً نزولی است. تابع $h(x)=fogof^{-1}(x^3)$ چگونه است؟

① صعودی اکید ② نزولی اکید ③ ابتدا صعودی سپس نزولی ④ ابتدا نزولی سپس صعودی

پاسخ: گزینه 2 f تابعی اکیداً صعودی است پس f^{-1} نیز اکیداً صعودی است. تابع x^3 نیز صعودی اکید است. بنابراین در تابع ترکیبی $fogof^{-1}(x^3)$ تنها یک تابع اکیداً نزولی است (به تعداد فرد) و بنابراین h تابعی اکیداً نزولی خواهد بود. یعنی:

$$h(x)=fogof^{-1}(x^3)=\boxed{+}\times\boxed{-}\times\boxed{+}\times\boxed{+}=\boxed{-}$$

---

16 - اگر تابع $f(x)=mx+4-3x$ هم صعودی و هم نزولی باشد، m کدام است؟

① $m>3$ ② $m<3$ ③ $m=0$ ④ $m=3$

پاسخ: گزینه 4 می‌دانیم فقط تابع ثابت $f(x)=k$ هم صعودی و هم نزولی است، پس داریم:

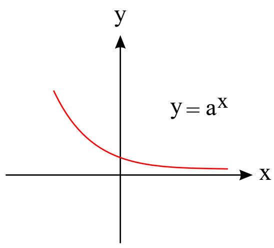
$$f(x)=mx-3x+4=(m-3)x+4\Rightarrow \text{تابع ثابت}\Rightarrow m-3=0\to m=3$$

---

17 - به‌ازای چند مقدار صحیح m، تابع $f(x)=(\frac{3m+1}{4})^x$ نزولی است؟

① 1 ② 2 ③ 3 ④ هیچ مقدار m

پاسخ: گزینه 2 تابع $y=a^x$ به‌ازای $0<a<1$ اکیداً نزولی است و به صورت



است و به‌ازای $a=0$ و $a=1$ تابع ثابت و درنتیجه هم صعودی و هم نزولی است پس برای آنکه تابع داده شده نزولی باشد باید:

$$0\le\frac{3m+1}{4}\le 1\to 0\le 3m+1\le 4\to -1\le 3m\le 3\to\frac{-1}{3}\le m\le 1$$

که در این بازه، اعداد صحیح صفر و یک قرار دارند.

---

18 - حدود m کدام باشد تا تابع $f=\{(5,6),(3,m^2-m),(-4,2),(4,m^2-m)\}$ یک تابع صعودی باشد؟

① $(-2,1)\cup(2,3)$ ② $[-2,3]-(-1,2)$ ③ $[-2,3]-[-1,2]$ ④ $[-2,1]\cup[2,3]$

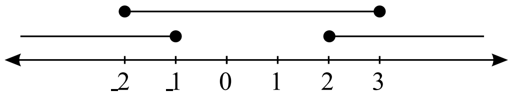
پاسخ: گزینه 2 ابتدا xها را از کوچک به بزرگ مرتب می‌کنیم.

$$f:\{(-4,2),(3,m^2-m),(4,m^2-m),(5,6)\}$$

می‌دانیم در تابع صعودی اگر $x_1<x_2$ باشد آن‌گاه $f(x_1)\le f(x_2)$ است پس:

$$\text{۲} \leq m^{\text{۲}} - m \leq \text{۶} \rightarrow \begin{cases} m^{\text{۲}} - m \geq \text{۲} \rightarrow m^{\text{۲}} - m - \text{۲} \geq \text{۰} \rightarrow (m-\text{۲})(m+\text{۱}) \geq \text{۰} \\ \xrightarrow{\text{تعیین علامت}} m \leq -\text{۱} \ \text{یا}\ m \geq \text{۲} \quad (I) \\ m^{\text{۲}} - m \leq \text{۶} \rightarrow m^{\text{۲}} - m - \text{۶} \leq \text{۰} \rightarrow (m-\text{۳})(m+\text{۲}) \leq \text{۰} \\ \xrightarrow{\text{تعیین علامت}} -\text{۲} \leq m \leq \text{۳} \quad (II) \end{cases}$$

از اشتراک جواب‌های (I) و (II) داریم:



$$\rightarrow m \in [-\text{۲},\text{۳}] - (-\text{۱},\text{۲})$$

---

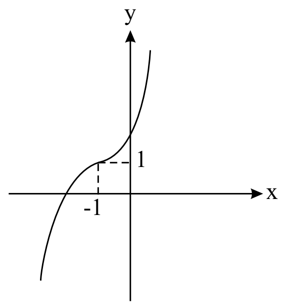
19 - تابع $f(x) = |x(x^{\text{۲}} + \text{۳}x + \text{۳}) + \text{۲}|$ در بازهٔ $[a, +\infty)$ صعودی اکید است. حداقل مقدار a کدام است؟

① $-\text{۱}$ ② $-\text{۲}$ ③ $-\sqrt[\text{۳}]{\text{۲}}$ ④ $-\text{۱} - \sqrt[\text{۳}]{\text{۲}}$

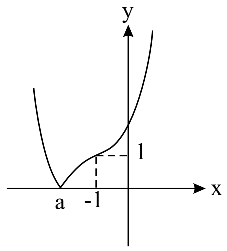
پاسخ: گزینه 2 ابتدا ضابطهٔ f را ساده‌تر می‌کنیم:

$$f(x) = |x^{\text{۳}} + \text{۳}x^{\text{۲}} + \text{۳}x + \text{۱} + \text{۱}| = |(x+\text{۱})^{\text{۳}} + \text{۱}|$$

نمودار تابع $y = (x+\text{۱})^{\text{۳}} + \text{۱}$ را به کمک انتقال تابع $y = x^{\text{۳}}$ رسم می‌کنیم:



برای رسم نمودار f، کافیست قسمتی از نمودار را که زیر محور xهاست، نسبت به محور xها قرینه کنیم و آن قسمت از نمودار را که بالای محور xهاست حفظ کنیم:



برای به‌دست آوردن a باید معادلهٔ $f(x) = \text{۰}$ را حل کنیم:

$$(x+\text{۱})^{\text{۳}} + \text{۱} = \text{۰} \rightarrow (x+\text{۱})^{\text{۳}} = -\text{۱} \rightarrow x + \text{۱} = -\text{۱} \rightarrow x = -\text{۲}$$

پس تابع f در بازهٔ $[-\text{۲}, +\infty)$ صعودی اکید است و حداقل مقدار a برابر با $-\text{۲}$ است.

---

20 - تابع $f = \left\{(-\text{۶},\text{۲}), (\text{۰},\text{۴}), (\text{۶},\text{۷}), (\text{۷},\text{۹}), (\text{۲}, m^{\text{۲}} - \text{۳})\right\}$ غیریکنوا است. m چند عدد صحیح را نمی‌تواند بپذیرد؟

① صفر ② ۲ ③ ۴ ④ ۶

پاسخ: گزینه 2 با مرتب کردن اعضای دامنهٔ تابع داریم:

x	$-\text{۶}$	۰	۲	۶	۷
y	۲	۴	$m^{\text{۲}} - \text{۳}$	۷	۹

با توجه به این که تابع غیریکنوا است، باید $m^{\text{۲}} - \text{۳} < \text{۴}$ یا $m^{\text{۲}} - \text{۳} > \text{۷}$ باشد، داریم:

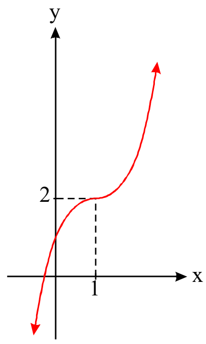
$$m^{\text{۲}} - \text{۳} < \text{۴} \Rightarrow m^{\text{۲}} < \text{۷} \Rightarrow -\sqrt{\text{۷}} < m < \sqrt{\text{۷}} \quad (\text{۱})$$

$$m^{\text{۲}} - \text{۳} > \text{۷} \Rightarrow m^{\text{۲}} > \text{۱۰} \Rightarrow m < -\sqrt{\text{۱۰}} \ \text{یا}\ m > \sqrt{\text{۱۰}} \quad (\text{۲})$$

$$\text{مجموعه جواب} : \ (\text{۱}) \cup (\text{۲}) \Rightarrow (-\infty, -\sqrt{\text{۱۰}}) \cup (-\sqrt{\text{۷}}, \sqrt{\text{۷}}) \cup (\sqrt{\text{۱۰}}, +\infty)$$

m اعداد صحیح ۳ و ۳- را نمی‌تواند بپذیرد.

21 - نمودار تابع با ضابطهٔ $y=(x-a)^{۳}+b$ به‌صورت زیر است. حاصل $a\cdot b$ کدام است؟



۱) ۲   ۲) -۲

۳) ۳   ۴) -۳

پاسخ: گزینه 1 نمودار این تابع از انتقال‌های افقی و عمودی نمودار تابع $y=x^{۳}$ به دست آمده است. اگر نمودار $y=x^{۳}$ را یک واحد به سمت راست (در راستای محور xها) و سپس دو واحد به سمت بالا (در راستای محور yها) انتقال دهیم ضابطهٔ $y=(x-۱)^{۳}+۲$ به‌دست می‌آید که همان ضابطهٔ مربوط به نمودار داده شده در صورت سؤال است. پس:

$$a=۱\ ,\ b=۲\Rightarrow a\cdot b=۲$$

---

22 - اگر تابع f نزولی و دامنهٔ آن $\mathbb{R}$ باشد، دامنهٔ تابع $y=\sqrt{f(۲)-f(|x-۱|)}$ کدام است؟

۱) $(-\infty,-۳]\cup[۱,+\infty)$ ۲) $[-۱,۳]$ ۳) $(-\infty,-۱]\cup[۳,+\infty)$ ۴) $\mathbb{R}$

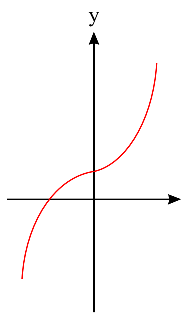
پاسخ: گزینه 3 در تابع نزولی به‌ازای هر $x_۱$ و $x_۲$ متعلق به دامنه اگر $x_۱<x_۲$ باشد آن‌گاه $f(x_۱)\geq f(x_۲)$ است. برای تعیین دامنهٔ تعریف توابع رادیکالی با فرجهٔ زوج کافی است زیر رادیکال را بزرگتر مساوی صفر قرار دهیم.

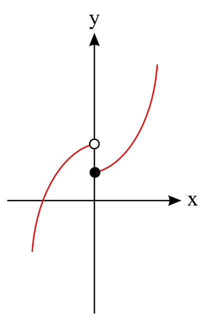
$$f(۲)-f(|x-۱|)\geq ۰\to f(۲)\geq f(|x-۱|)\xrightarrow{f\ \text{نزولی است}}۲\leq|x-۱|$$

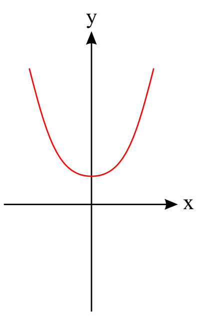
$$\to\begin{cases}x-۱\geq ۲\to x\geq ۳\\ \text{یا}\\ x-۱\leq -۲\to x\leq -۱\end{cases}\to x\in(-\infty,-۱]\cup[۳,+\infty)$$

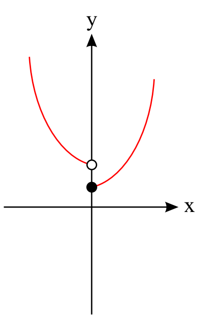
---

23 - نمودار تابع $y=x^{۲}|x|+۱$ به کدام صورت است؟

۱)


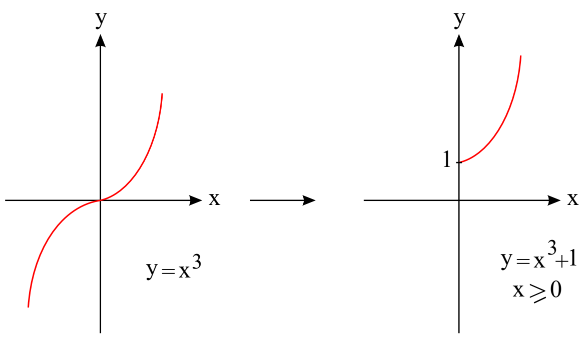
۲)


۳)


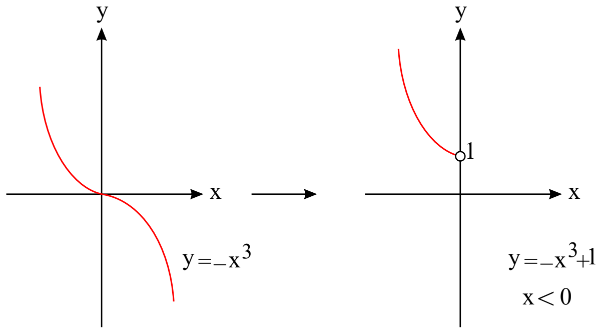
۴)


پاسخ: گزینه 3 ابتدا به صورت مشروط، قدر مطلق را از بین می‌بریم.

$$x\geq ۰\to y=x^{۲}(x)+۱\to y=x^{۳}+۱$$



$x < ۰ \rightarrow y = x^{۲}(-x) + ۱ \rightarrow y = -x^{۳} + ۱$

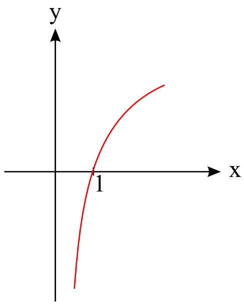


از ترکیب دو شکل به شکل گزینهٔ سوم می‌رسیم.

---

24 - اگر تابع f اکیداً صعودی و $f(۱) = ۰$ باشد، آنگاه دامنهٔ $g(x) = \sqrt{(x^{۳} - x)f(x)}$ برابر $\mathbb{R} - (a,b)$ است. حاصل $a + b$ کدام است؟

① ۱ ② صفر ③ -۱ ④ ۲



پاسخ: گزینه 3 شکل فرضی را می‌توان برای تابع f در نظر گرفت. برای تعیین دامنهٔ تعریف توابع رادیکالی با فرجهٔ زوج، کافی است زیر رادیکال را بزرگتر مساوی صفر قرار دهیم.

$$(x^{۳} - x)f(x) \geq ۰ \rightarrow \begin{cases} x^{۳} - x = ۰ \rightarrow x(x^{۲} - ۱) = ۰ \rightarrow x = ۰ \ , \ x = \pm ۱ \\ f(x) = ۰ \rightarrow x = ۱ \end{cases}$$

$\rightarrow$

x	$-\infty$		-۱		۰		۱		$+\infty$
$x^{۳} - x$		$-$	۰	$+$	۰	$-$	۰	$+$	
$f(x)$		$-$		$-$		$-$	۰	$+$	
عبارت ≥ ۰		$+$	۰	$-$	۰	$+$	۰	$+$	

بنابراین دامنهٔ تعریف تابع داده شده به صورت $\mathbb{R} - (-۱, ۰)$ است پس:

$$\begin{cases} a = -۱ \\ b = ۰ \end{cases} \rightarrow a + b = -۱$$

---

25 - به‌ازای $x \in [a,b]$، تابع $f = \{(۱, ۲x + ۷), (-۲, ۱۰ - x), (۰, x^{۲} + ۴)\}$ یک تابع صعودی است. بیش‌ترین مقدار $b - a$ کدام است؟

① ۳ ② ۴ ③ ۱ ④ ۲

پاسخ: گزینه 3 ابتدا xها را از کوچک به بزرگ مرتب می‌کنیم.

$$f = \{(-۲, ۱۰ - x), (۰, x^{۲} + ۴), (۱, ۲x + ۷)\}$$

در تابع صعودی با افزایش x، مقدار y ثابت مانده یا افزایش می‌یابد، پس باید $۱۰ - x \leq x^{۲} + ۴ \leq ۲x + ۷$ باشد.

$$۱۰ - x \leq x^{۲} + ۴ \rightarrow x^{۲} + x - ۶ \geq ۰ \rightarrow (x + ۳)(x - ۲) \geq ۰ \xrightarrow{\text{تعیین علامت}} x \leq -۳ \text{ یا } x \geq ۲ \quad (I)$$

$$x^{۲} + ۴ \leq ۲x + ۷ \rightarrow x^{۲} - ۲x - ۳ \leq ۰ \rightarrow (x - ۳)(x + ۱) \leq ۰ \xrightarrow{\text{تعیین علامت}} -۱ \leq x \leq ۳ \quad (II)$$

از اشتراک I و II به جواب $۲ \leq x \leq ۳$ می‌رسیم.

$$x \in [۲, ۳] \rightarrow b - a = ۳ - ۲ = ۱$$

---

26 - اگر f در مجموعه اعداد حقیقی اکیداً نزولی باشد، دامنهٔ تعریف تابع $y = \sqrt{f(|x|) - f(۲)}$ کدام است؟

① $[۲, +\infty)$ ② $[-۲, ۲]$ ③ $(-\infty, ۰]$ ④ $[-۳, ۲]$

پاسخ: گزینه 2 اگر f تابعی اکیداً نزولی و $f(a) \leq f(b)$ آنگاه $a \geq b$.

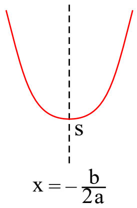
$y=\sqrt{f(|x|)-f(۲)} \Rightarrow f(|x|)-f(۲)\geq ۰ \Rightarrow f(|x|)\geq f(۲) \xrightarrow{f \text{ اکیداً نزولی}} |x|\leq ۲$
$\Rightarrow -۲\leq x\leq ۲ \Rightarrow \text{دامنه} = [-۲,۲]$

---

27 - تابع $f(x)=۳x^۲+kx+۳k^۲$ در بازهٔ $[-۲,+\infty)$ صعودی است. حدود k کدام است؟

(۱) $k\geq -۱۲$ (۲) $k\leq -۱۲$ (۳) $k\geq ۱۲$ (۴) $k\leq ۱۲$

پاسخ: گزینه 3 تابع $y=ax^۲+bx+c$ با شرط $a>۰$ به صورت



است که در بازهٔ $[\frac{-b}{۲a},+\infty)$ صعودی است پس $x=-۲$ می‌تواند طول رأس سهمی و یا بزرگتر از طول رأس سهمی باشد.

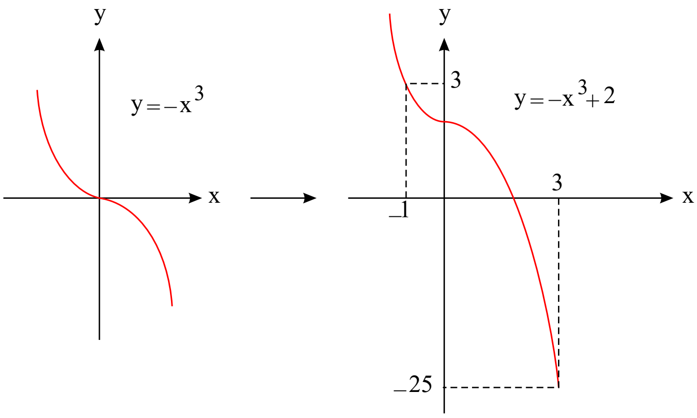
$-۲\geq \frac{-b}{۲a} \to -۲\geq \frac{-k}{۶} \to k\geq ۱۲$

---

28 - اگر دامنهٔ تابع $f(x)=-x^۳+۲$ بازهٔ $[-۱,۳]$ باشد، برد آن به صورت $[a,b]$ می‌باشد. حاصل $b-a$ کدام است؟

(۱) ۲۸ (۲) ۳۲ (۳) ۱۸ (۴) ۲۲

پاسخ: گزینه 1 با رسم تابع داده شده و تعیین نقاط ابتدائی و انتهایی بازهٔ داده شده، برد تابع مشخص می‌شود.



پس برد تابع به صورت $[-۲۵,۳]$ است و $b-a=۲۸$ می‌باشد.

---

29 - تابع $f(x)=x^۳+۶x^۲+mx-n$ در سه نقطه محور طول‌ها را قطع می‌کند که حاصل‌ضرب طول این نقاط برابر -۹ است. اگر $f(-۲)=۱۹$ باشد، مقدار m کدام است؟

(۱) -۹ (۲) -۳ (۳) 9 (۴) 3

پاسخ: گزینه 4 فرض می‌کنیم تابع در سه نقطهٔ $x=\alpha$، $x=\beta$ و $x=\gamma$ محور xها را قطع کرده است و چون ضریب $x^۳$ برابر یک است، داریم:

$f(x)=(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)=x^۳+۶x^۲+mx-n \Rightarrow (x^۲-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta)(x-\gamma)=x^۳+۶x^۲+mx-n$
$\Rightarrow x^۳-(\alpha+\beta)x^۲+\alpha\beta x-\gamma x^۲+(\alpha+\beta)\gamma x-\alpha\beta\gamma = x^۳+۶x^۲+mx-n$
$\Rightarrow x^۳-(\alpha+\beta+\gamma)x^۲+(\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma)x-\alpha\beta\gamma = x^۳+۶x^۲+mx-n \quad (۱)$

از طرفی حاصل‌ضرب طول نقاط برخورد با محور xها یعنی $\alpha\beta\gamma$ برابر -۹ است، پس:

$\alpha\beta\gamma=-۹ \xrightarrow{(۱)} -\alpha\beta\gamma=-n \Rightarrow n=-۹ \Rightarrow f(x)=x^۳+۶x^۲+mx+۹$

$f(-۲)=-۸+۲۴-۲m+۹=-۲m+۲۵=۱۹ \Rightarrow ۲m=۶ \Rightarrow m=۳$

تبدیل نمودار توابع تبدیل نمودار

30 - نمودار تابع $f(x)=x|x-۱|-۳x$ در بازهٔ $(-۲,۲)$ چگونه است؟

① صعودی ② ابتدا صعودی، سپس نزولی ③ نزولی ④ ابتدا نزولی، سپس صعودی

پاسخ: گزینه 2 در تابع $f(x)=ax^{۲}+bx+c$ طول نقطه رأس سهمی $x=-\dfrac{b}{۲a}$ است و اگر $a>۰$ ، سهمی رو به بالا و اگر $a<۰$ ، سهمی رو به پایین است.

با توجه به ریشهٔ عبارت داخل قدرمطلق، تابع را به‌صورت دوضابطه‌ای می‌نویسیم.

$$f(x)=x|x-۱|-۳x\ ,\ x-۱=۰\Rightarrow x=۱$$

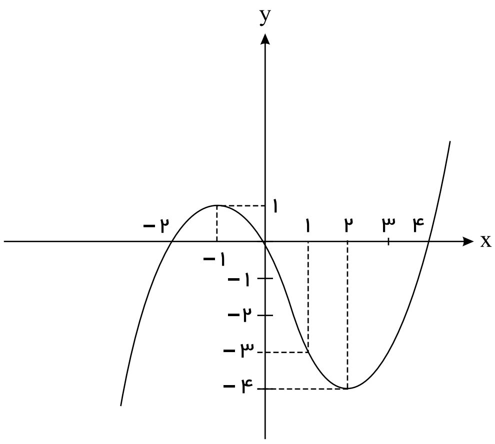
$$x\leq ۱\Rightarrow f(x)=x(۱-x)-۳x=-x^{۲}-۲x\Rightarrow x_{\text{رأس}}=-\frac{b}{۲a}=-\frac{-۲}{-۲}=-۱$$

$$y_{\text{رأس}}=-(-۱)^{۲}-۲(-۱)=-۱+۲=۱\ \Rightarrow \text{رأس}(-۱,۱)$$

$$x\geq ۱\Rightarrow f(x)=x(x-۱)-۳x=x^{۲}-۴x\Rightarrow x_{\text{رأس}}=-\frac{b}{۲a}=-\frac{-۴}{۲}=۲$$

$$y_{\text{رأس}}=۲^{۲}-۴\times ۲=۴-۸=-۴\Rightarrow \text{رأس}(۲,-۴)$$

نمودار f به‌صورت مقابل است.



با توجه به نمودار مشخص است که تابع در بازهٔ $(-۲,۲)$ ابتدا صعودی، سپس نزولی است.

انواع تابع تابع یکنوا و تابع y=x³

31 - تابع $f(x)=-۲x^{۳}-۶, D_f=[-۲,۳)$ مفروض است. اگر برد تابع بازهٔ $(a,b]$ باشد، حاصل $a\cdot b$ کدام است؟

① -۶۰۰ ② -۵۴۰ ③ ۶۰۰ ④ ۵۴۰

پاسخ: گزینه 1 با توجه به راهنمایی‌های فوق داریم:

$$-۲\leq x<۳\Rightarrow (-۲)^{۳}\leq x^{۳}<۳^{۳}\Rightarrow -۸\leq x^{۳}<۲۷\xrightarrow{\times(-۲)}۱۶\geq -۲x^{۳}>-۵۴$$

$$\xrightarrow{-۶}-۵۴-۶<-۲x^{۳}-۶\leq ۱۶-۶\Rightarrow -۶۰<f(x)\leq ۱۰\Rightarrow R_f=(-۶۰,۱۰]$$

بنابراین $a=-۶۰$ و $b=۱۰$ و خواست سؤال برابر است با:

$$ab=-۶۰۰$$

32 - تابع نمایی $f(x)=(\frac{3-K}{2+7K})^x$ اکیداً نزولی است. حدود K کدام است؟

① $(-\frac{2}{7},3)$ ② $(\frac{1}{8},3)$ ③ $(\frac{1}{8},+\infty)$ ④ $(-\infty,-\frac{2}{7})$

پاسخ: گزینه 2 برای این‌که تابع نمایی $f(x)=(\frac{3-K}{2+7K})^x$ اکیداً نزولی باشد، باید نامعادلهٔ زیر را حل کنیم.

$$0<\frac{3-K}{2+7K}<1$$

$$\frac{3-K}{2+7K}>0 \Rightarrow \begin{array}{c|ccccc} K & & -\frac{2}{7} & & 3 & \\ \hline \frac{3-K}{2+7K} & - & \text{ن} & + & 0 & - \end{array} \Rightarrow -\frac{2}{7}<K<3 \quad (1)$$

$$\frac{3-K}{2+7K}<1 \Rightarrow \frac{3-K}{2+7K}-1<0 \Rightarrow \frac{3-K-2-7K}{2+7K}<0 \Rightarrow \frac{1-8K}{2+7K}<0 \Rightarrow \begin{array}{c|ccccc} K & & -\frac{2}{7} & & \frac{1}{8} & \\ \hline \frac{1-8K}{2+7K} & - & \text{ن} & + & 0 & - \end{array}$$

$$\Rightarrow K<-\frac{2}{7} \text{ یا } K>\frac{1}{8} \quad (2)$$

حال اشتراک (۱) و (۲) را به‌دست می‌آوریم.

$$(1)\cap(2):\frac{1}{8}<K<3 \Rightarrow K\in(\frac{1}{8},3)$$

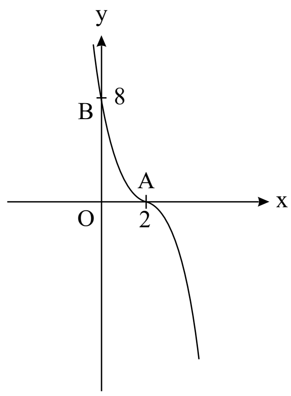
---

33 - خط واصل بین نقاط تلاقی منحنی $y=-(x-2)^3$ با محورهای مختصات را رسم می‌کنیم، مساحت محصور بین این خط با محورهای مختصات کدام است؟

① ۴ ② ۸ ③ ۱۶ ④ ۶

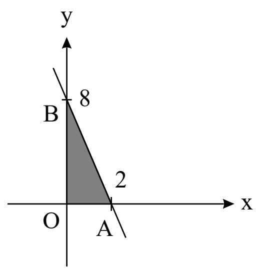
پاسخ: گزینه 2 نقاط برخورد منحنی $y=-(x-2)^3$ با محورهای مختصات به‌صورت زیر است:

$$y=-(x-2)^3 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \Rightarrow y=-(-2)^3=8 \\ y=0 \Rightarrow x-2=0 \Rightarrow x=2 \end{cases}$$



حال مساحت مثلث OAB را می‌یابیم:

$$S=\frac{1}{2}\times 2\times 8=8$$



34 - اگر $f=\{(۲,۳),(-۱,-۱),(۰,[k-۱])\}$ و $g(x)=۳^x$ مفروض باشند، به ازای کدام مقادیر k تابع $f-g$ نزولی است؟ ([] نماد جزء صحیح است.)

① $[-۳,۱]$ ② $[-۴,۱)$ ③ $[-۴,\frac{۲}{۳}]$ ④ $[-۳,\frac{۲}{۳}]$

پاسخ: گزینه 2

$f=\{(۲,۳),(-۱,-۱),(۰,[k-۱])\}\to D_f=\{۲,-۱,۰\}$
$g(x)=۳^x\to D_g=\mathbb{R}\to D_f\cap D_g=\{۲,-۱,۰\}$

مقدار تابع g را در اشتراک دامنه f و g می‌یابیم.

$$g(۲)=۳^۲=۹, g(-۱)=۳^{-۱}=\frac{۱}{۳}, g(۰)=۳^۰=۱$$

$$f-g=\{(-۱,-۱-\frac{۱}{۳}),(۰,[k-۱]-۱),(۲,۳-۹)\}=\{(-۱,-\frac{۴}{۳}),(۰,[k]-۲),(۲,-۶)\}$$

مقادیر x را از کم به زیاد مرتب می‌کنیم.

$$-۱<۰<۲\Rightarrow (f-g)(-۱)\geq(f-g)(۰)\geq(f-g)(۲)\Rightarrow -\frac{۴}{۳}\geq[k]-۲\geq-۶$$

$$\left.\begin{array}{l}[k]-۲\leq-\frac{۴}{۳}\Rightarrow[k]\leq۲-\frac{۴}{۳}\Rightarrow[k]\leq\frac{۲}{۳}\\ [k]-۲\geq-۶\Rightarrow[k]\geq-۴\end{array}\right\}\Rightarrow -۴\leq[k]\leq\frac{۲}{۳}\Rightarrow -۴\leq k<۱\Rightarrow k\in[-۴,۱)$$

---

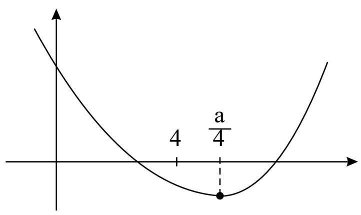
35 - تابع $f(x)=۲x^۲-ax+۱$ روی بازهٔ $(-\infty,۴]$ اکیداً نزولی است. مجموعهٔ مقادیر ممکن a کدام است؟

① $[۱۶,+\infty)$ ② $(۱۶,+\infty)$ ③ $(-\infty,۸]$ ④ $(-\infty,۸)$

پاسخ: گزینه 1 اگر طول رأس سهمی تابع چند جمله‌ای درجهٔ دوم خارج بازه‌ای باشد، یا ابتدا یا انتهای بازه باشد، این تابع روی آن بازه یکنواست. طول رأس سهمی $y=۲x^۲-ax+۱$ برابر است با $x=\frac{a}{۴}$ که باید خارج از بازهٔ $(-\infty,۴]$ قرار داشته باشد یا انتهای آن باشد. پس:

$$\frac{a}{۴}\geq۴\Rightarrow a\geq۱۶$$

در واقع در نمودار مقابل عدد ۴ باید منطبق بر $\frac{a}{۴}$ یا کوچک‌تر از آن باشد.



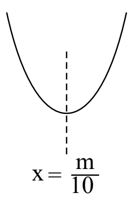
---

36 - تابع $f(x)=۵x^۲-mx+۴m^۲$ در بازهٔ $(-\infty,-۶]$ نزولی است. حدود m کدام است؟

① $m\leq-۶۰$ ② $m\geq۶۰$ ③ $m\geq-۶۰$ ④ $m\leq۶۰$

پاسخ: گزینه 3 طول رأس سهمی $f(x)=۵x^۲-mx+۴m^۲$ را می‌یابیم.

$$x_{رأس}=-\frac{b}{۲a}=-\left(\frac{-m}{۲\times۵}\right)=\frac{m}{۱۰}\Rightarrow$$



ضریب $x^۲$ در سهمی f مثبت است، پس سهمی روبه بالا بوده و قبل از نقطه رأس، تابع نزولی است.

چون سهمی در بازهٔ $(-\infty,-۶]$ نزولی است، پس -۶ کمتر یا مساوی طول رأس سهمی است، یعنی:

$$-۶\leq\frac{m}{۱۰}\Rightarrow m\geq-۶۰$$

بخش‌پذیری

37 - باقی‌ماندهٔ تقسیم چند جمله‌ای $f(x)$ بر $x^{۲}+۵x+۴$ برابر با $۳x+۲$ است. باقی‌ماندهٔ تقسیم $f(۱-x)-f(x-۶)$ بر $x-۲$ کدام است؟

① ۱۰ ② ۹ ③ ۱۱ ④ ۸

پاسخ: گزینه 2 رابطهٔ تقسیم را می‌نویسیم.

$$f(x)=(x^{۲}+۵x+۴)q(x)+۳x+۲\quad(۱)$$

باقی‌ماندهٔ تقسیم $f(۱-x)-f(x-۶)$ بر $x-۲$ به‌صورت زیر است.

$$x-۲=۰\Rightarrow x=۲\Rightarrow \text{باقی‌مانده}\, r=f(۱-۲)-f(۲-۶)=f(-۱)-f(-۴)$$

برای محاسبه $f(-۱)$ و $f(-۴)$ از رابطهٔ (۱) استفاده می‌کنیم.

$$f(-۱)=(۱-۵+۴)q(-۱)+۳(-۱)+۲=۰-۳+۲=-۱$$
$$f(-۴)=(۱۶-۲۰+۴)q(-۴)+۳(-۴)+۲=۰-۱۲+۲=-۱۰$$
$$r=f(-۱)-f(-۴)=-۱-(-۱۰)=۹$$

38 - اگر خارج قسمت تقسیم $f(x)=x^{۶}-۲x^{۳}+۵x+۴$ بر $۲x-۲$ برابر $q(x)$ باشد، باقی‌ماندهٔ تقسیم $f(x)q(x)$ بر $۲x+۲$ کدام است؟

① ۶ ② ۲ ③ ۳ ④ ۴

پاسخ: گزینه 3 باقی‌ماندهٔ تقسیم $f(x)q(x)$ بر $۲x+۲$ برابر $f(-۱)q(-۱)$ می‌باشد.

حال برای تعیین $q(-۱)$ ابتدا باقی‌ماندهٔ تقسیم $f(x)$ بر $۲x-۲$ را به‌دست آورده، سپس با نوشتن رابطهٔ تقسیم، مقدار آن را به دست می‌آوریم:

$$۲x-۲=۰\Rightarrow x=۱\Rightarrow r=f(۱)=۱-۲(۱)+۵(۱)+۴=۸$$

$$x^{۶}-۲x^{۳}+۵x+۴=(۲x-۲)q(x)+۸$$

$$\xrightarrow{x=-۱}۱+۲-۵+۴=-۴q(-۱)+۸$$

$$\Rightarrow ۲=-۴q(-۱)+۸\Rightarrow -۶=-۴q(-۱)\Rightarrow q(-۱)=\frac{۳}{۲}$$

$$f(-۱)=۱+۲-۵+۴=۲\Rightarrow f(-۱)q(-۱)=۲\times\frac{۳}{۲}=۳$$

39 - اگر به‌ازای هر x تساوی $f(x)\left(x^{۳}+۱\right)=x^{۱۸}-۱$ برقرار باشد، باقی‌ماندهٔ تقسیم چندجمله‌ای $f(x)$ بر $۳x+۳$ کدام است؟

① ۱ ② -۱ ③ صفر ④ -۶

پاسخ: گزینه 4 می‌دانیم اگر n یک عدد طبیعی زوج باشد، اتحاد $x^{n}-a^{n}=(x+a)\left(x^{n-۱}-ax^{n-۲}+a^{۲}x^{n-۳}-\cdots-a^{n-۱}\right)$ همواره برقرار است. بنابراین داریم:

$$x^{۱۸}-۱=\left((x^{۳})^{۶}-۱\right)=(x^{۳}+۱)\left((x^{۳})^{۵}-(x^{۳})^{۴}+(x^{۳})^{۳}-(x^{۳})^{۲}+x^{۳}-۱\right)$$
$$\Rightarrow f(x)=x^{۱۵}-x^{۱۲}+x^{۹}-x^{۶}+x^{۳}-۱$$

حال برای تعیین باقی‌ماندهٔ تقسیم $f(x)$ بر $۳x+۳$ ، کافی است ریشهٔ معادلهٔ $۳x+۳=۰$ را در چندجمله‌ای $f(x)$ قرار دهیم:

$$۳x+۳=۰\Rightarrow x=-۱\Rightarrow f(-۱)=-۱-۱-۱-۱-۱-۱=-۶$$

40 - اگر باقی‌ماندهٔ تقسیم $f(x)$ بر $۱-۹x$ برابر ۲ باشد، باقی‌ماندهٔ تقسیم $f(x^{۲})$ بر $۳x+۱$ کدام است؟

① -۲ ② $۳x-۱$ ③ ۲ ④ صفر

پاسخ: گزینه 3

اگر خارج قسمت را $g(x)$ بنامیم، داریم:

$$f(x) = (۹x - ۱)g(x) + ۲ \Rightarrow f(x^۲) = (۹x^۲ - ۱)g(x^۲) + ۲ = (۳x + ۱)\underbrace{[(۳x - ۱)g(x^۲)]}_{Q(x)} + ۲$$

تساوی اخیر به ما می‌گوید که باقی‌ماندهٔ تقسیم $f(x^۲)$ بر $(۳x + ۱)$ نیز برابر ۲ خواهد بود.

---

41 - دامنهٔ تابع اکیداً نزولی f بازهٔ $[-۱, \frac{۵}{۲}]$ و دامنهٔ تابع $g(x) = \sqrt{f(x^۲) - f(۳ - ۲x)}$ بازهٔ $[a, b]$ است. حاصل $b - a$ کدام است؟

① ۴ ② $\frac{۷}{۲}$ ③ $\frac{۳}{۴}$ ④ ۳

پاسخ: گزینه 3

$$D_g : f(x^۲) \geq f(۳ - ۲x)$$

از آنجایی که f اکیداً نزولی است، داریم:

$$x^۲ \leq ۳ - ۲x$$

با در نظر گرفتن شرط دامنهٔ f نیز داریم:

$$-۱ \leq x^۲ \leq ۳ - ۲x \leq \frac{۵}{۲}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x^۲ \geq -۱ \Rightarrow x \in \mathbb{R} & (۱) \\ x^۲ \leq ۳ - ۲x \Rightarrow x^۲ + ۲x - ۳ \leq ۰ \Rightarrow -۳ \leq x \leq ۱ & (۲) \\ ۳ - ۲x \leq \frac{۵}{۲} \Rightarrow x \geq \frac{۱}{۴} & (۳) \end{cases}$$

از اشتراک بازه‌های $(۱), (۲)$ و (۳) داریم:

$$D_g = [\frac{۱}{۴}, ۱] \Rightarrow b - a = \frac{۳}{۴}$$

---

42 - چندجمله‌ای $p(x) = ۳x^۳ - kx + ۲$ بر چندجمله‌ای $x + ۲$ بخش‌پذیر است. باقی‌ماندهٔ تقسیم $p(x)$ بر $x + ۱$ کدام است؟

① -۶ ② ۷ ③ ۱۳ ④ ۱۰

پاسخ: گزینه 4 چندجمله‌ای موردنظر بر $x + ۲$ بخش‌پذیر است؛ یعنی مقدار آن به‌ازای $x = -۲$ برابر صفر است. در نتیجه داریم:

$$p(-۲) = ۳(-۲)^۳ - k(-۲) + ۲ = ۰ \Rightarrow -۲۲ + ۲k = ۰ \Rightarrow k = ۱۱$$

حال باقی‌ماندهٔ تقسیم چندجمله‌ای $p(x) = ۳x^۳ - ۱۱x + ۲$ بر عبارت $x + ۱$ ، برابر است با مقدار آن به‌ازای $x = -۱$ ، داریم:

$$r = p(-۱) = ۳(-۱)^۳ - ۱۱(-۱) + ۲ = ۱۰$$

---

43 - اگر خارج قسمت تقسیم چندجمله‌ای $p(x) = x^۹ - ۵x^۳ + ۴x^۲ + ۲$ بر $x - ۱$ چندجمله‌ای $g(x)$ باشد، باقی‌ماندهٔ تقسیم چندجمله‌ای $g(x)$ بر $x + ۱$ کدام است؟

① ۵ ② ۴ ③ -۴ ④ -۵

پاسخ: گزینه 3 ابتدا باقی‌ماندهٔ تقسیم چندجمله‌ای $p(x)$ بر $x - ۱$ را به‌دست می‌آوریم:

$$r = p(۱) = ۱ - ۵ + ۴ + ۲ = ۲$$

بنابر قضیهٔ تقسیم داریم:

$$x^۹ - ۵x^۳ + ۴x^۲ + ۲ = (x - ۱)g(x) + ۲$$

در تساوی فوق $x = -۱$ را قرار می‌دهیم و داریم:

$$-۱ + ۵ + ۴ + ۲ = -۲g(-۱) + ۲ \Rightarrow g(-۱) = -۴$$

بنابراین باقی‌ماندهٔ تقسیم چندجمله‌ای $g(x)$ بر $x + ۱$ برابر $g(-۱) = -۴$ است.

44 - اگر باقی ماندهٔ تقسیم چندجمله‌ای $f(x)$ بر $2x^2-2$ برابر با $5x+2$ باشد، باقی‌ماندهٔ تقسیم $f(x)$ بر $x-1$ کدام است؟

① ۱۰　② ۸　③ ۹　④ ۷

پاسخ: گزینه 4 با استفاده از قضیهٔ تقسیم، $f(x)$ به‌صورت زیر است:

$$f(x)=(2x^2-2)Q(x)+5x+2$$

باقی‌ماندهٔ $f(x)$ بر $x-1$ برابر است با $f(1)$.

$$\Rightarrow f(1)=5+2=7$$

---

45 - چندجمله‌ای $f(x)=ax^2+bx+1$ بر $x+1$ بخش‌پذیر است و باقی‌ماندهٔ آن بر $x-1$ برابر 1 است. مقدار a کدام است؟

① 1　② $\frac{1}{2}$　③ $-\frac{1}{2}$　④ -1

پاسخ: گزینه 3 $f(x)$ بر $x+1$ بخش‌پذیر است. یعنی $f(-1)=0$ است و چون باقی‌ماندهٔ آن بر $x-1$ برابر 1 است، $f(1)=1$ است، داریم:

$$\begin{cases} f(-1)=a-b+1=0\Rightarrow b-a=1 & (1)\\ f(1)=a+b+1=1\Rightarrow b+a=0 & (2)\end{cases}$$

در نتیجه بنابر (1) و (2) داریم:

$$\Rightarrow b=\frac{1}{2},a=-\frac{1}{2}$$

---

46 - خارج‌قسمت تقسیم چند جمله‌ای $p(x)=2x^5+x^2-1$ بر $x+1$ ، چند جمله‌ای $q(x)$ است. باقی‌ماندهٔ $q(x)$ بر $x-1$ کدام است؟

① -2　② 1　③ -1　④ 2

پاسخ: گزینه 4

بنابر قضیه تقسیم داریم:

$$p(x)=(x+1)q(x)+r$$
$$r=p(-1)=2(-1)^5+(-1)^2-1=-2\Rightarrow p(x)=(x+1)q(x)-2$$

باقی‌ماندهٔ تقسیم $q(x)$ بر $x-1$ برابر $q(1)$ است.

$$x=1: p(1)=2q(1)-2\xrightarrow{p(1)=2}q(1)=2$$

---

47 - چندجمله‌ای $x^{10}-1$ را بر چندجمله‌ای $(x^2-1)(x-2)$ تقسیم می‌کنیم. مقدار باقی‌مانده به ازای $x=\sqrt{2}$ کدام است؟

① ۳۴۱　② ۲۵۵　③ ۸۵　④ ۱۰۲۳

پاسخ: گزینه 1 توجه کنید که

$$x^{10}-1=(x^2)^5-1^5=(x^2-1)(x^8+x^6+x^4+x^2+1)$$

قضیه تقسیم را می‌نویسیم:

$$x^{10}-1=(x^2-1)(x-2)q(x)+r(x)$$

با تقسیم طرفین تساوی بالا بر x^2-1 داریم:

$$\frac{x^{10}-1}{x^2-1}=(x-2)q(x)+\frac{r(x)}{x^2-1}$$

باقی‌ماندهٔ تقسیم $p(x)=\frac{x^{10}-1}{x^2-1}$ بر $x-2$ برابر $p(2)$ است. دقت کنید که $p(2)$ باید با $\frac{r(x)}{x^2-1}$ متحد باشد.

$$p(2)=\frac{2^{10}-1}{2^2-1}=\frac{1023}{3}=341=\frac{r(x)}{x^2-1}\Rightarrow r(x)=341(x^2-1)\Rightarrow r(\sqrt{2})=341$$

---

48 - اگر باقی‌ماندهٔ تقسیم $f(x)=x^2+mx-2$ بر $x+1$ برابر 2 باشد. باقی‌ماندهٔ تقسیم آن بر $x-1$ کدام است؟

① 1　② -4　③ -1　④ 4

پاسخ: گزینه 2 باقی‌ماندهٔ تقسیم $f(x)$ بر $x+1$ برابر $f(-1)$ است.

$$\Rightarrow f(-1)=1-m-2=2\Rightarrow m=-3\Rightarrow f(x)=x^2-3x-2$$

باقی‌ماندهٔ تقسیم $f(x)$ بر $x-1$ برابر $f(1)$ است:

$$f(1)=1-3-2=-4$$

---

49 - در تجزیهٔ $x^{10}+32$ کدام عامل موجود است؟

① $x-2$ ② $x+2$ ③ x^2+2 ④ x^2+4

پاسخ: گزینه 3 می‌دانیم a^5+b^5 بر $a+b$ بخش‌پذیر است. پس داریم:

$$x^{10}+32=(x^2)^5+2^2=(x^2+2)Q(x)$$

پس $x^{10}+32$ بر x^2+2 بخش‌پذیر است.

---

50 - اگر $f(x)$ چندجمله‌ای و $x^{12}-1=(x^2-1)f(x)$ باشد مقدار $f(1)$ کدام است؟

① -12 ② -6 ③ 6 ④ 12

پاسخ: گزینه 3

$$x^2=t \Rightarrow t^6-1=(t-1)f(x)=(t-1)(t^5+t^4+t^3+t^2+t+1) \Rightarrow f(x)=x^{10}+x^8+x^6+x^4+x^2+1$$

$$\Rightarrow f(1)=6$$