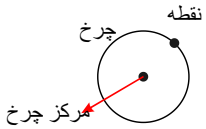




علی رضا رضایی

۱- طول کمانی که یک نقطه روی یک چرخ دوار به شعاع $\frac{1}{\pi}$ متر در هر ساعت طی می کند برابر با $2,5$ متر است. اگر این نقطه نسبت به مرکز چرخ به اندازه 90° درجه دوران کرده و سپس از کار بایستد، این چرخ جمعاً چند ساعت چرخیده است؟



۵ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

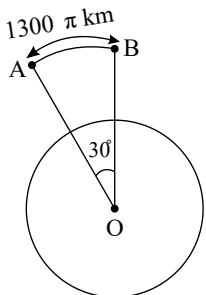
۱ (۱)

پاسخ: گزینه ۲

$$D = 90^\circ \Rightarrow \frac{900}{180} = \frac{\theta}{\pi} \Rightarrow \theta = 5\pi \Rightarrow \text{طول کمان طی شده } l = r \cdot \theta = \frac{1}{\pi} \times 5\pi = 5$$

چون هر یک ساعت $2,5$ متر می چرخد، پس در مدت ۲ ساعت ۵ متر می چرخد.

۲- ماهواره ای در یک مدار دایره ای به دور زمین در حال حرکت است. اگر این ماهواره مسافتی معادل 1300π کیلومتر را طی کند، با توجه به شکل، ماهواره در چه فاصله ای از سطح زمین بر حسب کیلومتر در حال حرکت است؟ (شعاع زمین 6400 کیلومتر است.)



$\frac{1300\pi}{3}$ (۲)

۱۴۰۰ (۱)

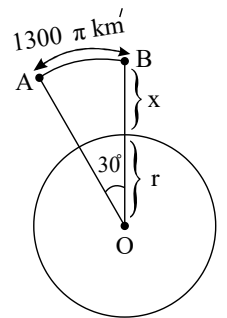
$\frac{149\pi}{3}$ (۴)

۷۸۰۰ (۳)

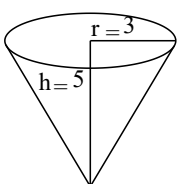
پاسخ: گزینه ۱ می دانیم 30° معادل $\frac{\pi}{6}$ رادیان است، پس داریم:

$$\widehat{AB} \text{ طول کمان } l = (x + r) \cdot \frac{\pi}{6} = 1300\pi \Rightarrow x + r = 6 \times 1300$$

$$\Rightarrow x + 6400 = 7800 \Rightarrow x = 1400 \text{ km}$$



۳- مساحت شکل گسترده مخروط مقابل چقدر است؟



34π (۴)

$\pi\sqrt{34}$ (۳)

$3\pi\sqrt{34}$ (۲)

$3\sqrt{34}$ (۱)

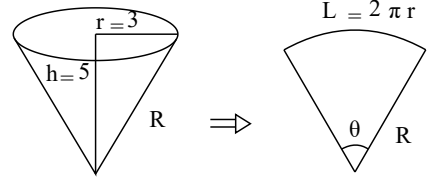
پاسخ: گزینه ۲

$$R^2 = r^2 + h^2 = 9 + 25 = 34 \rightarrow R = \sqrt{34}$$

$$L = 2\pi r = 2\pi \times 3 = 6\pi$$

$$\theta = \frac{L}{R} = \frac{6\pi}{\sqrt{34}} \rightarrow \text{مساحت } S = \frac{\theta}{2\pi} \times \pi R^2 = \frac{\frac{6\pi}{\sqrt{34}}}{2\pi} \times \pi \times 34$$

$$S = \frac{6\pi}{2\pi\sqrt{34}} \times \pi \times 34 = \frac{3\pi \times 34}{\sqrt{34}} = 3\pi\sqrt{34}$$



۴- اگر اندازه یک زاویه بر حسب رادیان ۳ برابر شود به اندازه آن زاویه بر حسب درجه، 60° اضافه می‌شود. اندازه زاویه اولیه بر حسب رادیان کدام است؟

$\frac{\pi}{3}$ (۴)

$\frac{\pi}{4}$ (۳)

$\frac{\pi}{6}$ (۲)

$\frac{\pi}{12}$ (۱)

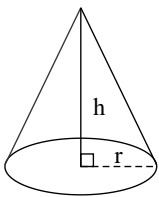
پاسخ: گزینه ۲ اگر اندازه زاویه بر حسب رادیان را با R و بر حسب درجه را با D نشان دهیم، داریم:

$$R_2 = 3R_1, \quad D_2 = 60 + D_1, \quad \frac{R}{\pi} = \frac{D}{180} \Rightarrow D = \frac{180R}{\pi}$$

$$D_2 = 60 + D_1 \Rightarrow \frac{180R_2}{\pi} = 60 + \frac{180R_1}{\pi} \Rightarrow 180R_2 = 60\pi + 180R_1$$

$$3R_2 = \pi + 3R_1 \Rightarrow 3 \times 3R_1 = \pi + 3R_1 \Rightarrow 6R_1 = \pi \Rightarrow R_1 = \frac{\pi}{6}$$

۵- در شکل مقابل، یک مخروط با شعاع قاعده r و ارتفاع $h = 2\sqrt{2}r$ نشان داده شده است. در شکل گسترده مخروط، اندازه زاویه قطاع حاصل چند درجه است؟



۱۲۰ (۲)

۹۰ (۱)

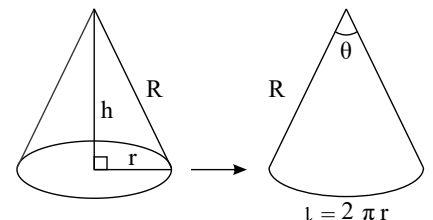
۱۵۰ (۴)

۱۳۵ (۳)

پاسخ: گزینه ۲

$$h = 2\sqrt{2}r, \quad R^2 = h^2 + r^2$$

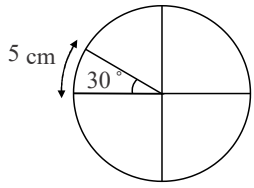
$$\Rightarrow R^2 = 8r^2 + r^2 = 9r^2 \Rightarrow R = 3r$$



$$\theta = \frac{l}{R} = \frac{2\pi r}{3r} = \frac{2\pi r}{3r} = \frac{2\pi}{3} \Rightarrow \frac{D}{180} = \frac{\frac{2\pi}{3}}{\pi} = \frac{2}{3}$$



$$\Rightarrow D = \frac{2 \times 180}{3} = 120^\circ$$



$$\frac{800}{\pi} \text{ (ب)}$$

$$\frac{620}{\pi} \text{ (د)}$$

$$\frac{900}{\pi} \text{ (ا)}$$

$$\frac{700}{\pi} \text{ (ج)}$$

پاسخ: گزینه ۱

$$\theta = \frac{l}{r} \rightarrow \frac{\pi}{6} = \frac{5}{r} \rightarrow r = \frac{30}{\pi}$$

$$\Rightarrow S = \pi r^2 = \pi \times \frac{900}{\pi^2} = \frac{900}{\pi}$$

۷- در یک مثلث قائم الزاویه، اختلاف دو زاویه حاده برابر با 18° است. کوچکترین زاویه مثلث چند رادیان است؟

$$\frac{2\pi}{5} \text{ (د)}$$

$$\frac{3\pi}{10} \text{ (ب)}$$

$$\frac{\pi}{5} \text{ (د)}$$

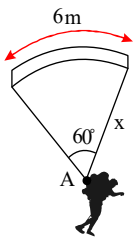
$$\frac{\pi}{10} \text{ (ا)}$$

پاسخ: گزینه ۲

$$\left. \begin{array}{l} x - y = 18^\circ \\ x + y = 90^\circ \end{array} \right\} \Rightarrow 2x = 108^\circ \Rightarrow x = 54^\circ, y = 90^\circ - 54^\circ \Rightarrow y = 36^\circ$$

$$\frac{36}{180} = \frac{R}{\pi} \Rightarrow R = \frac{36\pi}{180} = \frac{\pi}{5}$$

۸- مطابق شکل، یک چتر نجات به حالت دایره‌ای در هنگام پرواز به اندازه 60° درجه باز شده است. مقدار x چند متر است؟ (نقطه A را مرکز دایره فرض کنید.)



$$18\pi \text{ (ب)}$$

$$\frac{18}{\pi} \text{ (د)}$$

$$\frac{\pi}{10} \text{ (ا)}$$

$$10\pi \text{ (ج)}$$

پاسخ: گزینه ۴

$$\theta = \frac{l}{r} \rightarrow \frac{\pi}{3} = \frac{6}{x} \rightarrow x = \frac{18}{\pi}$$

۹- زاویه $\frac{13\pi}{6}$ در کدام ناحیه قرار دارد؟

چهارم (د)

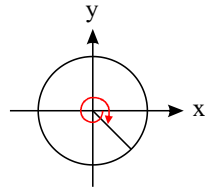
سوم (ب)

دوم (د)

اول (ا)

پاسخ: گزینه ۴

$$-\frac{13\pi}{6} = -\frac{12\pi + \pi}{6} = -2\pi - \frac{\pi}{6} \rightarrow \text{ناحیه چهارم}$$



۱۰- نقاط انتهایی مربوط به کمان‌های $2-\pi$ و 7 رادیان، به ترتیب از راست به چپ در کدام نواحی دایره مثلثاتی قرار می‌گیرند؟

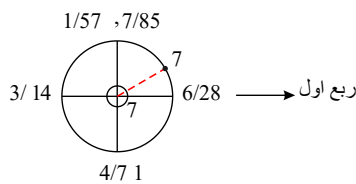
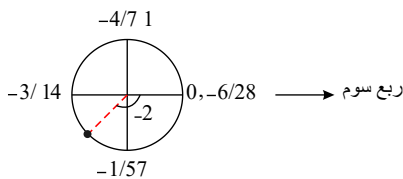
دوم و دوم (۴)

سوم و اول (۳)

سوم و دوم (۲)

دوم و اول (۱)

پاسخ: گزینه ۳



۱۱- اندازه زاویه یک رادیان تقریباً چند برابر π است؟

۲۵ برابر (۴)

۱۸ برابر (۳)

$\frac{3}{\pi^2}$ برابر (۲)

π برابر (۱)

پاسخ: گزینه ۳ ابتدا باید بینیم یک رادیان معادل چند درجه است.

$$\frac{D}{180} = \frac{1}{\pi} \Rightarrow D = \frac{180}{\pi} \text{ درجه} \Rightarrow \frac{180}{\pi} = \frac{180}{\pi^2} = \frac{180}{(3,14)^2} \simeq \frac{180}{9,8596} \approx 18$$

۱۲- در یک پیست دوچرخه سواری به شکل دایره، فاصله دوچرخه سوار از مرکز پیست ۶ متر است. وقتی که دوچرخه سوار مسافت ۱۰ متر را طی می‌کند. چه زاویه‌ای را نسبت به مرکز پیست بر حسب درجه طی کرده است؟

$\frac{1}{3}$ (۴)

$\frac{5}{3}$ (۳)

$\frac{400}{\pi}$ (۲)

$\frac{300}{\pi}$ (۱)

پاسخ: گزینه ۱ اگر زاویه θ در دایره‌ای به شعاع r ، طول L را جدا کند (مسافتی به طول L را طی کند)، در این صورت اندازه θ بر حسب رادیان برابر $\frac{L}{r}$ است.

$$\theta = \frac{L}{r} = \frac{10}{6} = \frac{5}{3}$$



$$\frac{D}{180^\circ} = \frac{R}{\pi} \xrightarrow{R=\theta=\frac{5}{3} \text{ رادیان}} D = \frac{180^\circ \times \frac{5}{3}}{\pi} \Rightarrow D = \frac{300^\circ}{\pi}$$

۱۳- طول برف پاک کن اتومبیلی ۲۴ سانتی متر است. اگر برف پاک کن کمانی به اندازه ۱۲۰ درجه طی کند، طول کمان طی شده توسط نوک برف پاک کن تقریباً چند سانتی متر است؟ ($\pi \simeq 3,14$)

- ۱۵۰ (۱) ۶۰ (۲) ۲۵ (۳) ۵۰ (۴)

پاسخ: گزینه ۴ طول برف پاک کن، شعاع دایره می باشد و داریم:

$$r = 24 \text{ cm}, \alpha = 120^\circ \Rightarrow \text{طول کمان} = \frac{120^\circ}{360^\circ} \times 2\pi r = \frac{2\pi r}{3} = \frac{2\pi \times 24}{3} = 16\pi \text{ cm}$$

$$\Rightarrow \text{طول کمان} = 16 \times 3,14 = 50,24$$

۱۴- در یک مثلث اندازه یک زاویه ۳۰° و تفاضل دو زاویه دیگر بر حسب رادیان $\frac{\pi}{10}$ است. اندازه زاویه بزرگ تر چند رادیان است؟

- $\frac{7\pi}{15}$ (۱) $\frac{14\pi}{15}$ (۲) $\frac{\pi}{2}$ (۳) $\frac{\pi}{3}$ (۴)

پاسخ: گزینه ۱ اگر در مثلث ABC زاویه $\hat{A} = 30^\circ = \frac{\pi}{6}$ باشد آن گاه داریم:

$$\left. \begin{aligned} \hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = \pi &\Rightarrow \hat{B} + \hat{C} = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6} \\ \hat{B} - \hat{C} = \frac{\pi}{10} \end{aligned} \right\} \Rightarrow 2\hat{B} = \frac{5\pi}{6} + \frac{\pi}{10}$$

طبق صورت سؤال داریم:

$$\Rightarrow \hat{B} = \frac{5\pi}{12} + \frac{\pi}{20} = \frac{28\pi}{60} = \frac{7\pi}{15}$$

$$\Rightarrow \hat{C} = \frac{5\pi}{6} - \frac{7\pi}{15} = \frac{25\pi - 14\pi}{30} = \frac{11\pi}{30}$$

بنابراین بزرگ ترین زاویه برابر $\frac{7\pi}{15}$ می باشد.

۱۵- شعاع چرخ کوچک یک تراکتور ۵۰ سانتی متر و شعاع چرخ بزرگ آن ۸۰ سانتی متر است. اگر چرخ بزرگ مسافت ۲۰ متر را طی کرده باشد، چرخ کوچک چه زاویه ای را بر حسب رادیان طی می کند؟

- ۱۰ (۱) ۲۰ (۲) ۲۵ (۳) ۴۰ (۴)

پاسخ: گزینه ۴ مقدار مسافتی که هر یک از چرخ ها روی زمین طی می کنند، یکسان است. پس:

$$L = r\theta \xrightarrow{\substack{L=20m \\ r=0,5m}} \theta = \frac{L}{r} = \frac{20}{0,5} = 40 \text{ rad}$$



۱۶- مجموع و تفاضل دو زاویه به ترتیب از راست به چپ برابر با $\frac{11\pi}{18}$ رادیان و 40° است. اندازه زاویه کوچکتر چند رادیان است؟

(۴) $\frac{5\pi}{12}$

(۳) $\frac{5\pi}{36}$

(۲) $\frac{7\pi}{12}$

(۱) $\frac{7\pi}{36}$

پاسخ: گزینه ۱ زاویه بزرگ را x و زاویه کوچک را y در نظر می‌گیریم و داریم:

$$\begin{cases} x + y = \frac{11\pi}{18} \\ x - y = 40^\circ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y = \frac{11\pi}{18} \\ x - y = \frac{4\pi}{9} \end{cases}$$

رادیان $40^\circ \times \frac{\pi}{180} = \frac{4\pi}{9}$

$$2x = \frac{15\pi}{18} \Rightarrow x = \frac{5\pi}{36}$$

$$x + y = \frac{11\pi}{18} \Rightarrow y = \frac{11\pi}{18} - x = \frac{22\pi}{36} - \frac{5\pi}{36} = \frac{7\pi}{36}$$

۱۷- کدامیک بزرگتر است؟

(۴) $\sin 4$

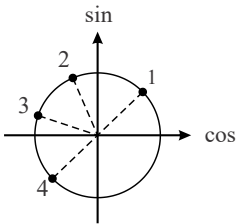
(۳) $\sin 3$

(۲) $\sin 2$

(۱) $\sin 1$

پاسخ: گزینه ۲

می‌دانیم $1 \text{ rad} \simeq 57^\circ$ است. پس زاویه‌ها به شکل زیر روی دایره مثلثاتی قرار می‌گیرند. تصویر هر نقطه روی دایره مثلثاتی بر محور عمودی برابر با سینوس زاویه متناظر با آن نقطه است، پس مقدار سینوس ۲ رادیان از همه بزرگتر است.



۱۸- در شکل مقابل مساحت قسمت رنگی چند واحد سطح است؟

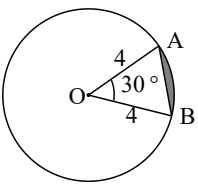
(۲) $\frac{1}{3}(\pi - 12)$

(۱) $\frac{1}{3}(\pi - 3)$

(۴) $\frac{1}{3}(4\pi - 12)$

(۳) $\frac{1}{3}(4\pi - 4)$

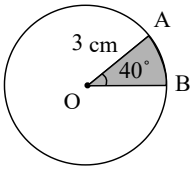
پاسخ: گزینه ۴



مثلث $S_{\triangle OAB} = \frac{1}{2} \times 4 \times 4 \sin 30^\circ = \frac{16}{2} \times \frac{1}{2} = 4$

قطاع $S_{OAB} = \frac{30}{360} \pi r^2 = \frac{1}{12} \times \pi \times 4^2 = \frac{16\pi}{12} = \frac{4\pi}{3}$

رنگی $S = \frac{4\pi}{3} - 4 = \frac{1}{3}(4\pi - 12)$



۱۹- در شکل مقابل مساحت قطاع هاشور زده شده چقدر است؟

π (۴)

۶ (۳)

$\frac{\pi}{2}$ (۲)

۹ (۱)

پاسخ: گزینه ۴

$$S = \frac{40}{360} \times \pi r^2 = \frac{1}{9} \pi \times 3^2 = \pi$$

۲۰- مساحت مثلثی که دو ضلع آن برابر ۴ و ۶ است، برابر $6\sqrt{3}$ است. طول ضلع سوم مثلث حداکثر چقدر است؟

$2\sqrt{21}$ (۴)

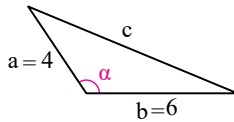
$2\sqrt{15}$ (۳)

$2\sqrt{19}$ (۲)

$2\sqrt{17}$ (۱)

پاسخ: گزینه ۲

باتوجه به شکل:



$$S = \frac{1}{2} ab \sin \alpha \Rightarrow 6\sqrt{3} = \frac{1}{2} \times 4 \times 6 \times \sin \alpha \Rightarrow \sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Rightarrow \cos \alpha = \pm \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = \pm \frac{1}{2}$$

(در واقع $\alpha = \frac{\pi}{3}$ است یا $\alpha = \frac{2\pi}{3}$ اگر $\cos \alpha = -\frac{1}{2}$)

طول ضلع سوم بیش تر از زمانی است که $\cos \alpha = -\frac{1}{2}$ و مطابق قضیه کسینوس ها داریم:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \alpha = 16 + 36 - 2 \times 4 \times 6 \times \left(-\frac{1}{2}\right) = 52 + 24 = 76$$

$$\Rightarrow c = \sqrt{76} = 2\sqrt{19}$$

۲۱- اندازهی دو قطر از متوازی الاضلاع ۱۲ و $8\sqrt{3}$ واحد است. این دو قطر با زاویهی ۶۰ درجه متقاطع هستند. مساحت

این متوازی الاضلاع کدام است؟

۷۲ (۴)

۶۴ (۳)

۵۴ (۲)

۴۸ (۱)

پاسخ: گزینه ۴ مساحت هر چهارضلعی از نصف حاصل ضرب دو قطر در سینوس زاویهی بینشان به دست می آید.

$$S = \frac{1}{2} (12)(8\sqrt{3})(\sin 60^\circ) = (48\sqrt{3})\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 24 \times 3 = 72$$



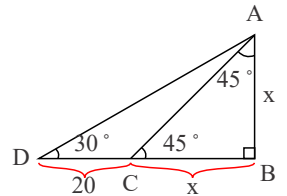
۲۲- دو ناظر A و B که در سطح زمین قرار دارند و با فاصله ۲۰ متر از هم در یک طرف برجی ایستاده‌اند، نوک این برج را با زاویه‌های 30° و 45° نسبت به افق می‌بینند. ارتفاع این برج چند متر است؟ (A, B و پای برج روی یک خط قرار دارند).

- ۱ $10(\sqrt{3}+1)$
 ۲ $10(\sqrt{3}-1)$
 ۳ $20(\sqrt{3}+1)$
 ۴ $20(\sqrt{3}-1)$

پاسخ: گزینه ۱

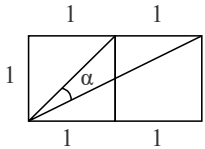
$$\triangle ABC : \hat{ACB} = \hat{CAB} = 45^\circ \Rightarrow AB = BC = x$$

$$\triangle ADB : \tan 30^\circ = \frac{AB}{DB} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{x}{20+x}$$



$$\Rightarrow 3x = 20\sqrt{3} + \sqrt{3}x \Rightarrow (3 - \sqrt{3})x = 20\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow x = \frac{20\sqrt{3}}{3 - \sqrt{3}} \times \frac{3 + \sqrt{3}}{3 + \sqrt{3}} = \frac{60\sqrt{3} + 60}{9 - 3} \Rightarrow x = \frac{60(\sqrt{3} + 1)}{6} = 10(\sqrt{3} + 1)$$



۲۳- در مستطیل روبه‌رو، $\sin \alpha$ کدام است؟

۲ $\frac{\sqrt{10}}{5}$

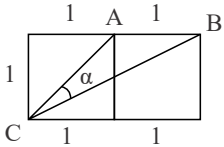
۱ $\frac{\sqrt{10}}{10}$

۴ $\frac{3\sqrt{10}}{10}$

۳ $\frac{1}{3}$

پاسخ: گزینه ۱

$$\rightarrow \begin{cases} S_{\triangle ABC} = \frac{1 \times 1}{2} = \frac{1}{2} \\ AC^2 = 1^2 + 1^2 = 2 \Rightarrow AC = \sqrt{2}, \quad BC^2 = 1^2 + 2^2 = 5 \Rightarrow BC = \sqrt{5} \end{cases}$$



$$S_{ABC} = \frac{1}{2} CA \times CB \times \sin \alpha \Rightarrow \frac{1}{2} \times \sqrt{2} \times \sqrt{5} \sin \alpha = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \sqrt{10} \sin \alpha = 1 \Rightarrow \sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{10}}{10}$$



۲۴- طول دو ضلع مثلثی به مساحت ۶ به صورت $a = 3\sqrt{2}$ و $b = 4$ و زاویه بین آنها θ است. اگر θ را 75° کاهش و طول اضلاع a و b را $\sqrt{2}$ برابر کنیم، مساحت مثلث چند برابر می‌شود؟

- ① ۱ ② $\sqrt{2}$ ③ $\sqrt{3}$ ④ $\sqrt{6}$

پاسخ: گزینه ۴ مساحت هر مثلث برابر با نصف حاصل ضرب دو ضلع در سینوس زاویه بین آن دو ضلع است.

$$S = \frac{1}{2}ab \sin \theta \Rightarrow 6 = \frac{1}{2} \times 3\sqrt{2} \times 4 \sin \theta \Rightarrow 6 = 6\sqrt{2} \sin \theta \Rightarrow \sin \theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow \theta = 45^\circ \text{ یا } 135^\circ$$

چون θ را 75° کاهش داده‌ایم، پس $\theta = 135^\circ$ قابل قبول است.

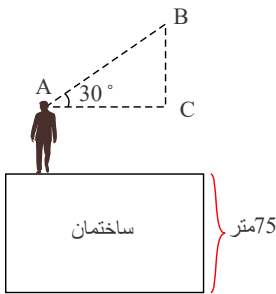
$$\theta' = 135^\circ - 75^\circ = 60^\circ, \quad a' = \sqrt{2}a = \sqrt{2} \times 3\sqrt{2} = 6, \quad b' = \sqrt{2}b = \sqrt{2} \times 4 = 4\sqrt{2}$$

$$S' = \frac{1}{2}a'b' \sin \theta' = \frac{1}{2} \times 6 \times 4\sqrt{2} \sin 60^\circ = 12\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{6} \Rightarrow \frac{S'}{S} = \frac{6\sqrt{6}}{6} = \sqrt{6}$$

۲۵- شخصی با قد ۱٫۸ متر از روی پشت‌بام ساختمانی به ارتفاع ۷۵ متر بالگردی را که از روبرو به آن شخص در حال نزدیک شدن است می‌بیند. اگر زاویه دید شخص نسبت به سطح افق 30° درجه و فاصله بالگرد تا شخص در راستای زاویه دید شخص در حدود $440,4$ متر باشد، بالگرد در چند متری از سطح زمین قرار دارد؟

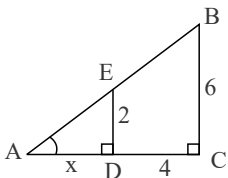
- ① ۲۹۶٫۸ ② ۲۹۵٫۲ ③ ۲۹۷ ④ ۲۲۲

پاسخ: گزینه ۳



$$\sin 30^\circ = \frac{BC}{AB} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{BC}{440,4} \Rightarrow BC = 220,2$$

$$\Rightarrow \text{فاصله بالگرد تا سطح زمین} = 220,2 + 1,8 + 75 = 297 \text{ (متر)}$$



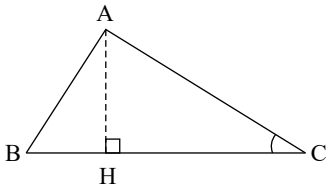
۲۶- با توجه به شکل مقابل، حاصل $\tan A$ چقدر است؟

- ① ۱ ② ۲ ③ ۳ ④ ۴

پاسخ: گزینه ۱ با توجه به شکل صورت سؤال داریم:

$$\tan \hat{A} = \frac{2}{x} = \frac{6}{x+4} \rightarrow 2(x+4) = 6x \rightarrow 2x+8 = 6x$$

$$\rightarrow 4x = 8 \rightarrow x = 2 \rightarrow \tan \hat{A} = \frac{2}{2} = 1$$



۲۷- در شکل زیر، $\cot C = \frac{\sqrt{5}}{2}$ و $AC = 96$. اندازه ارتفاع AH کدام است؟

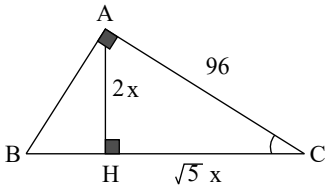
۵۶ (۲)

۴۸ (۱)

۷۲ (۴)

۶۴ (۳)

پاسخ: گزینه ۳ چون $\cot C = \frac{CH}{AH} = \frac{\sqrt{5}}{2}$ است می توان $CH = \sqrt{5}x$ و $AH = 2x$ را در نظر گرفت.



$$\Delta AHC : (96)^2 = (2x)^2 + (\sqrt{5}x)^2 \rightarrow 96 \times 96 = 4x^2 + 5x^2 \rightarrow 96 \times 96 = 9x^2$$

$$\rightarrow x^2 = 32 \times 32 \rightarrow x = 32 \rightarrow AH = 2x = 64$$

۲۸- حاصل عبارت $\frac{\cos 285^\circ - \sin 255^\circ}{\sin 525^\circ - \sin 105^\circ}$ با فرض $\tan 15^\circ = 0,28$ ، کدام است؟

$\frac{16}{9}$ (۴)

$\frac{9}{16}$ (۳)

$-\frac{9}{16}$ (۲)

$-\frac{16}{9}$ (۱)

پاسخ: گزینه ۱ ابتدا تمام زوایا را بر حسب 15° می نویسیم:

$$\begin{aligned} \cos 285^\circ &= \cos(270^\circ + 15^\circ) = \sin 15^\circ, \quad \sin 255^\circ = \sin(270^\circ - 15^\circ) = -\cos 15^\circ \\ \sin 525^\circ &= \sin(540^\circ - 15^\circ) = \sin(180^\circ - 15^\circ) = \sin 15^\circ, \quad \sin 105^\circ = \sin(90^\circ + 15^\circ) = \cos 15^\circ \end{aligned}$$

$$\text{بنابراین داریم: } \frac{\cos 285^\circ - \sin 255^\circ}{\sin 525^\circ - \sin 105^\circ} = \frac{\sin 15^\circ + \cos 15^\circ}{\sin 15^\circ - \cos 15^\circ}$$

تمام جملات را بر $\cos 15^\circ$ تقسیم می کنیم در نتیجه:

$$\frac{\tan 15^\circ + 1}{\tan 15^\circ - 1} = \frac{0,28 + 1}{0,28 - 1} = \frac{1,28}{-0,72} = \frac{-128}{72} = -\frac{16}{9}$$

۲۹- حاصل عبارت $\sin\left(\frac{17\pi}{3}\right) \cos\left(\frac{-17\pi}{6}\right) + \tan\left(\frac{19\pi}{4}\right) \sin\left(\frac{-11\pi}{6}\right)$ کدام است؟

$\frac{1}{2}$ (۴)

$\frac{1}{4}$ (۳)

$-\frac{1}{2}$ (۲)

$-\frac{1}{4}$ (۱)

پاسخ: گزینه ۳ هر کدام از نسبت های مثلثاتی داده شده را حساب می کنیم.

$$\sin \frac{17\pi}{3} = \sin\left(6\pi - \frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\sin \frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$



$$\cos\left(\frac{-17\pi}{6}\right) = \cos\frac{17\pi}{6} = \cos\left(3\pi - \frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) = -\cos\frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan\frac{19\pi}{4} = \tan\left(5\pi - \frac{\pi}{4}\right) = \tan\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) = -\tan\frac{\pi}{4} = -1$$

$$\sin\left(\frac{-11\pi}{6}\right) = -\sin\frac{11\pi}{6} = -\sin\left(2\pi - \frac{\pi}{6}\right) = -\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) = \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned} \text{پس : } \sin\left(\frac{17\pi}{3}\right) \cos\left(\frac{-17\pi}{6}\right) + \tan\left(\frac{19\pi}{4}\right) \sin\left(\frac{-11\pi}{6}\right) &= \left(\frac{-\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{-\sqrt{3}}{2}\right) + (-1)\left(\frac{1}{2}\right) \\ &= \frac{3}{4} - \frac{1}{2} = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

۳- حاصل $\sin\frac{\pi}{12} \sin\frac{7\pi}{12}$ کدام است؟

④ $\frac{-1}{3}$

③ $\frac{-1}{4}$

② $\frac{1}{4}$

① $\frac{1}{3}$

پاسخ: گزینه ۲

$\sin u \cdot \cos u = \frac{1}{2} \sin 2u$

 می دانیم:

$$\sin\frac{\pi}{12} \sin\frac{7\pi}{12} = \sin\frac{\pi}{12} \sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{12}\right) = \sin\frac{\pi}{12} \cos\frac{\pi}{12} = \frac{1}{2} \sin\left(\frac{2\pi}{12}\right) = \frac{1}{2} \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{4}$$

۳۱- اگر $\tan\theta = 2$ ، $\frac{\cos\left(3\frac{\pi}{2} + \theta\right) - \cos(\pi + \theta)}{\sin(\pi - \theta) - \sin(3\pi + \theta)}$ باشد مقدار کدام است؟

④ ۳

③ ۲

② ۱٫۲

① -۲

پاسخ: گزینه ۴

$$\begin{aligned} \frac{\cos\left(3\frac{\pi}{2} + \theta\right) - \cos(\pi + \theta)}{\sin(\pi - \theta) - \sin(3\pi + \theta)} &= \frac{\sin\theta + \cos\theta}{\sin\theta + \sin\theta} = \frac{\sin\theta + \cos\theta}{2\sin\theta} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cot\theta \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{10}{2} = \frac{2}{4} + \frac{10}{4} = \frac{12}{4} = 3 \end{aligned}$$

۳۲- حاصل عبارت $\tan\frac{17\pi}{6} \sin\frac{11\pi}{3} + \cos\frac{10\pi}{3}$ کدام است؟

④ $\sqrt{3}$

③ ۱

② صفر

① -۱



پاسخ: گزینه ۲

$$\begin{aligned} \tan \frac{17\pi}{6} \sin \frac{11\pi}{3} + \cos \frac{10\pi}{3} &= \tan\left(3\pi - \frac{\pi}{6}\right) \sin\left(4\pi - \frac{\pi}{3}\right) + \cos\left(3\pi + \frac{\pi}{3}\right) \\ &= \tan\left(-\frac{\pi}{6}\right) \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) + \cos\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) = \left(-\tan \frac{\pi}{6}\right)\left(-\sin \frac{\pi}{3}\right) - \cos \frac{\pi}{3} \\ &= \tan \frac{\pi}{6} \sin \frac{\pi}{3} - \cos \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} = \frac{3}{6} - \frac{1}{2} = 0 \end{aligned}$$

۳۳- حاصل $A = \frac{\cos^2(25^\circ + x) + \cos^2(65^\circ - x)}{\cot(25^\circ + x) \cot(x + 115^\circ)}$ به ازای $x = 22,5^\circ$ کدام است؟

- ① صفر ② ۱ ③ -۱ ④ تعریف نشده

پاسخ: گزینه ۳ $(25^\circ + x) + (65^\circ - x) = 90^\circ$ ؛ ضمناً $(x + 115) - (x + 25) = 90$ ، پس:

$$A = \frac{\sin^2(65^\circ - x) + \cos^2(65^\circ - x)}{-\cot(25^\circ + x) \tan(25^\circ + x)} = \frac{1}{-1} = -1$$

۳۴- کدام تساوی زیر نادرست است؟

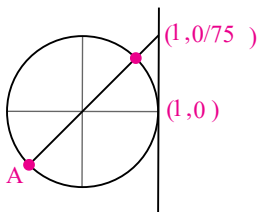
- ① $\tan(\pi - \theta) = \tan \pi - \tan \theta$
 ② $\cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = \cos \frac{\pi}{2} - \sin \theta$
 ③ $\sin\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = \cos \frac{\pi}{2} + \cos \theta$
 ④ $\cot(\pi + \theta) = \cot \pi + \cot \theta$

پاسخ: گزینه ۴

$$\begin{aligned} \tan(\pi - \theta) &= -\tan \theta, & \cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) &= -\sin \theta \\ \sin\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) &= \cos \theta, & \cot(\pi + \theta) &= \cot \theta \end{aligned}$$

دقت کنید که $\cot \pi$ تعریف نشده است.

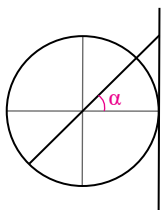
۳۵- باتوجه به شکل مجموع مختصات نقطه A کدام است؟



- ① -۱ ② $-1,2$
 ③ $-1,4$ ④ $-1,6$

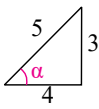
پاسخ: گزینه ۳

باتوجه به شکل مقابل، می دانیم $\tan \alpha = 0,75$ و می خواهیم $\sin(\pi + \alpha)$ و $\cos(\pi + \alpha)$ را بیابیم.





وقتی $\tan \alpha = \frac{3}{4}$ با توجه به مثلث زیر می توان نوشت:

$$\sin \alpha = \frac{3}{5}, \cos \alpha = \frac{4}{5}$$


بنابراین:

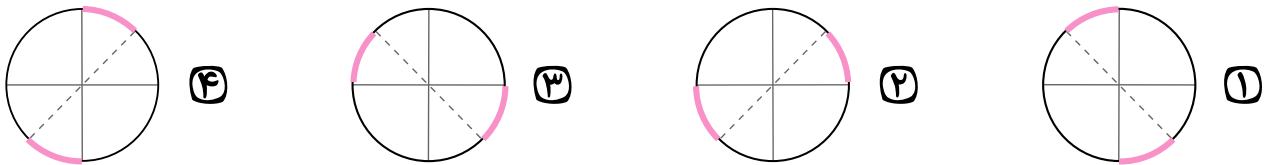
$$\sin(\pi + \alpha) = -\sin \alpha = -\frac{3}{5}$$

$$\cos(\pi + \alpha) = -\cos \alpha = -\frac{4}{5}$$

پس:

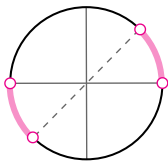
$$A\left(-\frac{4}{5}, -\frac{3}{5}\right) \Rightarrow -\frac{4}{5} - \frac{3}{5} = -\frac{7}{5} = -1,4$$

۳۶- اگر $\sin \theta \cos \theta > 0$ و $\tan \theta < \cot \theta$ ، آنگاه انتهای کمان θ در دایره مثلثاتی، در کدام ناحیه هاشورزده قرار دارد؟



پاسخ: گزینه ۲. $\sin \theta \cos \theta > 0$ ؛ پس $\sin \theta$ و $\cos \theta$ هم علامت‌اند؛ پس انتهای کمان θ در ناحیه اول یا سوم است؛ در این نواحی $\tan \theta$ و $\cot \theta$ مثبت‌اند؛ پس دو طرف رابطه $\tan \theta < \cot \theta$ را در $\tan \theta$ ضرب می‌کنیم:

$$\tan^2 \theta < 1 \Rightarrow |\tan \theta| < 1 \Rightarrow -1 < \tan \theta < 1$$



بنابراین انتهای کمان θ مطابق مقابل است:

۳۷- حاصل $\frac{-\tan 20^\circ (3 \sin 70^\circ + 5 \cos 160^\circ)}{\sin 340^\circ - 2 \sin(-20^\circ)}$ کدام است؟

۲ (۴)

$\sqrt{3}$ (۳)

-۲ (۲)

$-\sqrt{3}$ (۱)

پاسخ: گزینه ۴

$$\frac{-\tan 20^\circ (3 \sin 70^\circ + 5 \cos 160^\circ)}{\sin 340^\circ - 2 \sin(-20^\circ)} = \frac{-\tan 20^\circ (3 \cos 20^\circ - 5 \cos 20^\circ)}{2 \sin 20^\circ - \sin 20^\circ}$$

$$= \frac{-\tan 20^\circ (-2 \cos 20^\circ)}{\sin 20^\circ} = 2 \tan 20^\circ \cot 20^\circ = 2$$



۳۸- اگر $\frac{\sin 13^\circ + 2 \cos 23^\circ}{4 \sin 23^\circ + \sin 32^\circ} = a$ باشد، مقدار $\tan 4^\circ$ کدام است؟

$\frac{a+6}{7a+5}$ (۴)

$\frac{2a+5}{a+1}$ (۳)

$\frac{4a+1}{2-a}$ (۲)

$\frac{4a+3}{a+2}$ (۱)

پاسخ: گزینه ۲

$$\sin 13^\circ = \sin(9^\circ + 4^\circ) = \cos 4^\circ$$

$$\cos 23^\circ = \cos(27^\circ - 4^\circ) = -\sin 4^\circ$$

$$\sin 23^\circ = \sin(27^\circ - 4^\circ) = -\cos 4^\circ$$

$$\sin 32^\circ = \sin(36^\circ - 4^\circ) = -\sin 4^\circ$$

در نتیجه:

$$\Rightarrow \frac{\cos 4^\circ - 2 \sin 4^\circ}{-4 \cos 4^\circ - \sin 4^\circ} = a \xrightarrow{\div \cos 4^\circ} \frac{1 - 2 \tan 4^\circ}{-4 - \tan 4^\circ} = a$$

$$\Rightarrow 1 - 2 \tan 4^\circ \cdot a = -4a - a \tan 4^\circ \Rightarrow (a - 2) \tan 4^\circ = -4a - 1 \Rightarrow \tan 4^\circ = \frac{4a + 1}{2 - a}$$

۳۹- اگر $3 \sin x = 8 \cot x$ باشد، مقدار $\sin\left(\frac{3\pi}{2} - 2x\right)$ کدام است؟

$-\frac{7}{9}$ (۴)

$\frac{1}{3}$ (۳)

$-\frac{4}{9}$ (۲)

$\frac{7}{9}$ (۱)

پاسخ: گزینه ۱ ابتدا از تساوی $3 \sin x = 8 \cot x$ مقدار $\cos x$ را به دست می آوریم.

$$3 \sin x = \frac{8 \cos x}{\sin x} \Rightarrow 3 \sin^2 x = 8 \cos x \Rightarrow 3(1 - \cos^2 x) = 8 \cos x$$

$$\Rightarrow 3 - 3 \cos^2 x = 8 \cos x \Rightarrow 3 \cos^2 x + 8 \cos x - 3 = 0$$

$$\Rightarrow (3 \cos x - 1)(\cos x + 3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \cos x = -3 \text{ ق ق} \\ \cos x = \frac{1}{3} \text{ ق ق} \end{cases}$$

در نتیجه:



$$\Rightarrow \sin\left(\frac{3\pi}{2} - 2x\right) = -\cos 2x = 1 - 2\cos^2 x = 1 - 2\left(\frac{1}{9}\right) = \frac{7}{9}$$

۴- اگر $\sin x - \sin^2 x > 0$ و $\tan x + \cos x < 0$ باشد، انتهای کمان x در کدام ربع دایره مثلثاتی قرار دارد؟

④ چهارم

③ اول

② سوم

① دوم

پاسخ: گزینه ۱

$$\sin x - \sin^2 x > 0 \Rightarrow \sin x \underbrace{(1 - \sin x)}_{\oplus} > 0 \Rightarrow \sin x > 0$$

x در ربع اول یا دوم است.

$$\tan x + \cot x < 0 \Rightarrow \tan x + \frac{1}{\tan x} < 0 \Rightarrow \tan x < 0$$

بنابراین x در ربع دوم است.