

## مثلثات

روابط مثلثاتی فرمول‌های اصلی و نتایج آن

1- اگر  $\frac{\pi}{2} < x < \pi$  باشد، حاصل عبارت  $\frac{\tan x}{\sqrt{1 + \tan^2 x}} \left( \frac{1}{\sin x} - \sin x \right)$ ، کدام است؟

- ①  $-\cos^2 x$      
  ②  $-\cos x$      
  ③  $\cos^2 x$      
  ④  $\cos x$

پاسخ: گزینه 1 می‌دانیم که  $1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$  است و چون  $\frac{\pi}{2} < x < \pi$  است انتهای کمان در ناحیه دوم دایره مثلثاتی است.

$$\frac{\tan x}{\sqrt{1 + \tan^2 x}} \left( \frac{1}{\sin x} - \sin x \right) = \frac{\tan x}{\sqrt{\frac{1}{\cos^2 x}}} \left( \frac{1 - \sin^2 x}{\sin x} \right) = \frac{\tan x}{\frac{1}{|\cos x|}} \left( \frac{\cos^2 x}{\sin x} \right)$$

$$= - \left( \frac{\sin x}{\cos x} \right) (\cos x) \left( \frac{\cos^2 x}{\sin x} \right) = -\cos^2 x$$

2- اگر  $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$  باشد، حاصل  $\sqrt{1 + \tan^2 x} \left( 2 \sin^2 \frac{\pi}{4} - \sin^2 x \right)$ ، کدام است؟

- ①  $\sin x$      
  ②  $\cos x$      
  ③  $-\sin x$      
  ④  $-\cos x$

پاسخ: گزینه 4 می‌دانیم که  $1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$  است و چون  $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$  است انتهای کمان در ناحیه سوم دایره مثلثاتی است.

$$\sqrt{1 + \tan^2 x} \left( 2 \sin^2 \frac{\pi}{4} - \sin^2 x \right) = \sqrt{\frac{1}{\cos^2 x}} \left( 2 \left( \frac{\sqrt{2}}{2} \right)^2 - \sin^2 x \right) = \frac{1}{|\cos x|} (1 - \sin^2 x)$$

$$= \frac{-1}{\cos x} (\cos^2 x) = -\cos x$$

3- حاصل عبارت تعریف شده  $A = \frac{\sin^2 x}{3 - 3 \cos^2 x + \sin^2 x}$  کدام است؟

- ①  $\frac{1}{3}$      
  ②  $\frac{1}{2}$      
  ③  $-\frac{1}{2}$      
  ④  $\frac{1}{4}$

پاسخ: گزینه 4

$$A = \frac{\sin^2 x}{3 - 3 \cos^2 x + \sin^2 x} = \frac{\sin^2 x}{3 - 3(1 - \sin^2 x) + \sin^2 x} = \frac{\sin^2 x}{3 - 3 + 3 \sin^2 x + \sin^2 x} = \frac{1}{4}$$

4- اگر  $\sin x + \tan x > 0$  و  $\frac{1}{\cos x} - \sin x \tan x < 0$  باشد انتهای کمان  $x$  در کدام ناحیه است؟

- ① اول     
  ② دوم     
  ③ سوم     
  ④ چهارم

پاسخ: گزینه 3

می‌دانیم  $\sin x = \cos x \tan x$  و  $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$  بنابراین:



$$\cos x \tan x + \tan x > 0 \Rightarrow \underbrace{\tan x(1 + \cos x)}_{>0} > 0 \Rightarrow \tan x > 0 \quad (1) \quad \text{اول یا سوم} \quad \xrightarrow{(1),(2)} \text{سوم}$$

$$\frac{1}{\cos x} - \frac{\sin^2 x}{\cos x} = \frac{1 - \sin^2 x}{\cos x} < 0 \Rightarrow \frac{\cos^2 x}{\cos x} < 0 \Rightarrow \cos x < 0 \Rightarrow (2) \quad \text{دوم یا سوم}$$

نسبت‌های مثلثاتی مجموع و تفاضل زوایا

5- اگر  $-\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{4}$  و  $\frac{1 - \tan x}{1 + \tan x} = \frac{1 - m}{2 + m}$  باشد، حدود تغییرات  $m$  کدام است؟

(1)  $-1 < m < 2$       (2)  $-2 < m < 1$       (3)  $m > 1$       (4)  $m < -2$

پاسخ: گزینه 2

می‌دانیم:

$$\tan\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = \frac{1 - \tan x}{1 + \tan x}$$

$$-\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{4} \Rightarrow 0 < \frac{\pi}{4} - x < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \tan\left(\frac{\pi}{4} - x\right) > 0 \Rightarrow \frac{1 - m}{2 + m} > 0 \Rightarrow -2 < m < 1$$

6- مقدار  $\sin 15^\circ$  کدام است؟

(1)  $\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$       (2)  $\frac{\sqrt{5} - \sqrt{2}}{4}$       (3)  $\frac{\sqrt{7} - \sqrt{2}}{5}$       (4)  $\frac{\sqrt{7} - \sqrt{2}}{4}$

پاسخ: گزینه 1

برای محاسبه نسبت‌های مثلثاتی زوایه‌های غیرمعرف، باید آن زوایه را به مجموع یا تفاضل دو زوایه معروف تبدیل کنیم و سپس از فرمولهای مجموع و تفاضل زوایه‌ها استفاده کنیم:

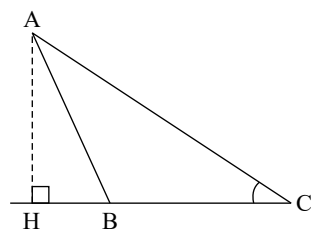
$$\sin 15 = \sin(45 - 30) = \sin 45 \cos 30 - \sin 30 \cos 45 = \frac{\sqrt{2}}{2} \left( \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} \right) = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$$

فرمول‌های اصلی و نتایج آن

7- در شکل زیر، فرض کنید  $\sin C = \frac{5}{13}$  و  $CH = 9$ ، اندازه ارتفاع  $AH$ ، کدام است؟

(1)  $3,25$       (2)  $3,5$       (3)  $3,6$       (4)  $3,75$

پاسخ: گزینه 4



$$1 + \cot^2 C = \frac{1}{\sin^2 C} \rightarrow 1 + \cot^2 C = \frac{169}{25} \rightarrow \cot^2 C = \frac{144}{25} \rightarrow \cot C = \frac{12}{5}$$

$$\triangle AHC : \cot C = \frac{CH}{AH} \rightarrow \frac{12}{5} = \frac{9}{AH} \rightarrow 12AH = 45 \rightarrow AH = 3,75$$

مفاهیم مقدماتی نسبت‌های مثلثاتی در مثلث قائم‌الزاویه و کاربردهای آن

8- اگر  $\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1}{4}$  باشد حاصل  $\frac{\tan(\alpha) - \sin(\alpha)}{\sin(\alpha) - \cos(\alpha)}$  کدام است؟

- ①  $-\frac{91}{105}$       ②  $-\frac{16}{105}$       ③  $\frac{16}{105}$       ④  $\frac{91}{105}$

پاسخ: گزینه 2  
می‌دانیم:

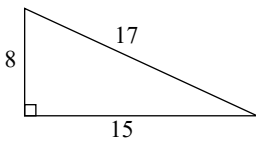
$$\tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha}, \quad 1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$$

$$tg\alpha = \frac{2tg\frac{\alpha}{2}}{1 - tg^2\frac{\alpha}{2}} = \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{16}} = \frac{8}{15}$$

از طرفی:

$$1 + tg^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha} \Rightarrow 1 + \frac{64}{225} = \frac{1}{\cos^2\alpha} \Rightarrow \sin\alpha = \sqrt{1 - \frac{225}{289}} = \frac{8}{17}$$

\* البته با داشتن اعداد فیثاغورثی 8 و 15 و 17 ساده‌تر توانستیم  $\sin\alpha$  و  $\cos\alpha$  را محاسبه کنیم.



$$\frac{tg\alpha - \sin\alpha}{\sin\alpha - \cos\alpha} = \frac{\frac{8}{15} - \frac{8}{17}}{\frac{8}{17} - \frac{15}{17}} = \frac{\frac{8 \times 17 - 8 \times 15}{15 \times 17}}{\frac{-7}{17}} = \frac{\frac{16}{15}}{-7} = -\frac{16}{105}$$

دقت کنید اگر  $\frac{\alpha}{2}$  در ربع اول باشد با توجه به مقدار  $tg\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{4}$  نیز ربع اول خواهد بود و اگر  $\frac{\alpha}{2}$  در ربع سوم باشد باز هم  $\alpha$  در ربع اول خواهد بود.

روابط مثلثاتی فرمول‌های اصلی و نتایج آن

9- اگر  $3 \sin^2 x - 3 \sin x \cos x + 7 \cos^2 x = 3$  باشد، آن‌گاه مجموع مقادیر ممکن برای  $\tan x$  کدام است؟

- ① -1      ② -3      ③ 1      ④ 3

پاسخ: گزینه 2 می‌دانیم که  $1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$  است.

ابتدا طرفین تساوی را بر  $\cos^2 x$  تقسیم می‌کنیم:

$$\frac{3 \sin^2 x}{\cos^2 x} - 3 \frac{\sin x}{\cos x} + 7 = \frac{3}{\cos^2 x} \Rightarrow 3 \tan^2 x - 3 \tan x + 7 = 3(1 + \tan^2 x)$$

$$\Rightarrow \tan^2 x + 3 \tan x - 4 = 0 \xrightarrow{\text{جمع ضرایب صفر}} \begin{cases} \tan x = 1 \\ \tan x = \frac{c}{a} = -4 \end{cases}$$

مجموع مقادیر ممکن برای  $\tan x$ :  $1 + (-4) = -3$

10- اگر  $\sin x + \cos x = \frac{\sqrt{6}}{2}$  باشد، حاصل  $\tan x + \cot x$  کدام است؟

۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

پاسخ: گزینه 4

$$\sin x + \cos x = \frac{\sqrt{6}}{2} \xrightarrow{\text{توان } 2} (\sin x + \cos x)^2 = \frac{6}{4} = \frac{3}{2} \Rightarrow 1 + 2 \sin x \cos x = \frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow 2 \sin x \cos x = \frac{1}{2} \Rightarrow \sin x \cos x = \frac{1}{4}$$

$$\tan x + \cot x = \frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin x \cos x} = \frac{1}{\frac{1}{4}} = 4$$

11- اگر  $\cot \alpha = 2$  باشد، حاصل  $\frac{\sin^6 \alpha + \cos^3 \alpha \sin \alpha}{4 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha}$  عبارت کدام است؟

$\frac{2}{3}$  (۴)

$\frac{6}{7}$  (۳)

$\frac{9}{16}$  (۲)

$\frac{3}{4}$  (۱)

پاسخ: گزینه 2 با توجه به  $\cot \alpha = 2$  یک رابطه بین  $\sin \alpha$  و  $\cos \alpha$  بدست می‌آوریم.

$$\cot \alpha = 2 \Rightarrow \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = 2 \xrightarrow{\sin \alpha \neq 0} \cos \alpha = 2 \sin \alpha$$

حال در صورت تست، به جای تمام  $\cos \alpha$ ها، مساوی آن یعنی  $2 \sin \alpha$  را قرار می‌دهیم.

$$\begin{aligned} \frac{\sin^6 \alpha + \cos^3 \alpha \sin \alpha}{4 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha} &= \frac{\sin^6 \alpha + (2 \sin \alpha)^3 \sin \alpha}{4 \sin^2 \alpha (2 \sin \alpha)^2} \\ &= \frac{\sin^6 \alpha + 8 \sin^4 \alpha \sin \alpha}{4 \sin^2 \alpha \times 4 \sin^2 \alpha} = \frac{\sin^6 \alpha + 8 \sin^5 \alpha}{16 \sin^4 \alpha} = \frac{9 \sin^5 \alpha}{16 \sin^4 \alpha} = \frac{9}{16} \end{aligned}$$

12- اگر  $\sin x + \cos x = \frac{5}{4}$  باشد، حاصل  $\sin x - \cos x$  چقدر می‌تواند باشد؟

$\frac{\sqrt{7}}{4}$  (۴)

$\frac{7}{16}$  (۳)

$\frac{3}{4}$  (۲)

$\frac{9}{16}$  (۱)

پاسخ: گزینه 4 دو طرف تساوی داده شده را به توان 2 می‌رسانیم:

$$(\sin x + \cos x)^2 = \left(\frac{5}{4}\right)^2$$

$$\underbrace{\sin^2 x + \cos^2 x}_1 + 2 \sin x \cos x = \frac{25}{16} \Rightarrow 2 \sin x \cos x = \frac{25}{16} - 1 = \frac{9}{16}$$

$$\Rightarrow 2 \sin x \cos x = \frac{9}{16}$$

حاصل عبارت  $(\sin x - \cos x)^2$  را بدست می‌آوریم:



$$\underbrace{\sin^2 x + \cos^2 x}_1 - \underbrace{2 \sin x \cos x}_{\frac{9}{16}} = 1 - \frac{9}{16} = \frac{7}{16}$$

بنابراین داریم:

$$\sin x - \cos x = \pm \sqrt{\frac{7}{16}} = \pm \frac{\sqrt{7}}{4}$$

نسبت‌های مثلثاتی مجموع و تفاضل زوایا

13- اگر  $\tan \alpha$  و  $\tan \beta$  برابر ریشه‌های معادله  $2x^2 + 3x - 1 = 0$  باشند،  $\tan(\alpha + \beta)$  کدام است؟

- ① 1      ②  $\frac{3}{2}$       ③ -3      ④ -1

پاسخ: گزینه 4 می‌دانیم:

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \cdot \tan \beta}$$

چون  $\tan \alpha$  و  $\tan \beta$  ریشه‌های معادله  $2x^2 + 3x - 1 = 0$  هستند، پس داریم:

$$S = \tan \alpha + \tan \beta = -\frac{b}{a} = -\frac{3}{2}$$

$$P = \tan \alpha \cdot \tan \beta = \frac{c}{a} = -\frac{1}{2}$$

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \cdot \tan \beta} = \frac{-\frac{3}{2}}{1 - (-\frac{1}{2})} = \frac{-\frac{3}{2}}{\frac{3}{2}} = -1$$

14- حاصل  $\frac{\sqrt{\tan x} + \sqrt{\cot x}}{\sqrt{2 \tan x + 2 \cot x}}$  به ازای  $x = 10^\circ$  کدام است؟

- ①  $\sqrt{2}$       ②  $\frac{\sqrt{2}}{2}$       ③  $\sin 55^\circ$       ④  $\cos 55^\circ$

پاسخ: گزینه 3

نکته:  $\sin x + \cos x = \sqrt{2} \sin(x + 45^\circ)$

$$A = \sqrt{\tan x} + \sqrt{\cot x} = \sqrt{\frac{\sin x}{\cos x}} + \sqrt{\frac{\cos x}{\sin x}} = \frac{\sin x + \cos x}{\sqrt{\sin x \cos x}}$$

$$B = \sqrt{2 \tan x + 2 \cot x} = \sqrt{2 \frac{\sin x}{\cos x} + 2 \frac{\cos x}{\sin x}} = \sqrt{\frac{2 \sin^2 x + 2 \cos^2 x}{\sin x \cos x}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\sin x \cos x}}$$

$$\Rightarrow \frac{A}{B} = \frac{\frac{\sin x + \cos x}{\sqrt{\sin x \cos x}}}{\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\sin x \cos x}}} = \frac{\sin x + \cos x}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2} \sin(x + 45^\circ)}{\sqrt{2}} = \sin(x + 45^\circ)$$

بنابراین حاصل عبارت داده شده، به ازای  $x = 10^\circ$ ، برابر  $\sin 55^\circ$  خواهد بود.

15- عبارت  $A = \frac{\sin 20^\circ \cos 50^\circ + \sin 50^\circ \cos 20^\circ}{\sin 40^\circ \sin 10^\circ - \cos 40^\circ \cos 10^\circ}$  با کدام گزینه برابر است؟

- ①  $\frac{1}{2 \sin 20^\circ}$       ②  $-\frac{1}{2 \sin 20^\circ}$       ③  $2 \sin 20^\circ$       ④  $-2 \sin 20^\circ$

پاسخ: گزینه 2

$$A = \frac{\sin(20^\circ + 50^\circ)}{-\cos(40^\circ + 10^\circ)} = \frac{\sin 70^\circ}{-\cos 50^\circ} = \frac{\cos 20^\circ}{-\sin 40^\circ} = \frac{\cos 20^\circ}{-2 \sin 20^\circ \cos 20^\circ} = \frac{-1}{2 \sin 20^\circ}$$

16- حاصل  $\tan 15^\circ + \tan 60^\circ$  برابر کدام است؟

- ①  $2\sqrt{3}$       ②  $2\sqrt{3} - 1$       ③  $2$       ④  $3$

پاسخ: گزینه 3

$$\begin{aligned} \tan 15^\circ + \tan 60^\circ &= \frac{\sin 15^\circ}{\cos 15^\circ} + \frac{\sin 60^\circ}{\cos 60^\circ} \\ &= \frac{\sin 15^\circ \cos 60^\circ + \sin 60^\circ \cos 15^\circ}{\cos 15^\circ \cos 60^\circ} = \frac{\sin(15^\circ + 60^\circ)}{\cos 15^\circ \cos 60^\circ} \\ &= \frac{\sin 75^\circ}{\cos 15^\circ \cos 60^\circ} = \frac{1}{\cos 60^\circ} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2 \end{aligned}$$

توجه: چون زوایای  $15^\circ$  و  $75^\circ$  متمم یکدیگر هستند، پس:

$$\sin 75^\circ = \cos 15^\circ$$

17- اگر  $\tan(\frac{\pi}{4} - \alpha) = \frac{1}{8}$  و  $\tan(\frac{\pi}{4} + \beta) = 5$  باشد، مقدار  $\tan(\alpha + \beta)$  کدام است؟

- ①  $3$       ②  $2$       ③  $4$       ④  $1$

پاسخ: گزینه 1 با فرض  $x = \frac{\pi}{4} - \alpha$  و  $y = \frac{\pi}{4} + \beta$  داریم:

$$\alpha = \frac{\pi}{4} - x, \quad \beta = y - \frac{\pi}{4}$$

در نتیجه:

$$\tan(\alpha + \beta) = \tan(y - x) = \frac{\tan y - \tan x}{1 + \tan y \tan x} = \frac{5 - \frac{1}{8}}{1 + 5(\frac{1}{8})} = \frac{\frac{39}{8}}{\frac{13}{8}} = 3$$

18- اگر  $\tan(80^\circ + \alpha) = \frac{1}{2}$  باشد، مقدار  $\tan(55^\circ - \alpha)$  کدام است؟

- ①  $-3$       ②  $\frac{1}{3}$       ③  $-\frac{1}{3}$       ④  $3$

پاسخ: گزینه 1 با فرض  $x = 80^\circ + \alpha$  و  $y = 55^\circ - \alpha$  داریم:

$$x + y = 80^\circ + \alpha + 55^\circ - \alpha = 135^\circ \Rightarrow x + y = 135^\circ, \quad \tan x = \frac{1}{2}$$



$$\tan(x+y) = \tan 135^\circ \Rightarrow \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y} = \tan(180^\circ - 45^\circ)$$

$$\Rightarrow \frac{\frac{1}{2} + \tan y}{1 - \frac{1}{2}\tan y} = -\tan 45^\circ \Rightarrow \frac{\frac{1}{2} + \tan y}{1 - \frac{1}{2}\tan y} = -1 \Rightarrow \frac{1}{2} + \tan y = -1 + \frac{1}{2}\tan y$$

$$\Rightarrow \tan y - \frac{1}{2}\tan y = -1 - \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{2}\tan y = -\frac{3}{2} \Rightarrow \tan y = -3$$

$$\Rightarrow \tan(55^\circ - \alpha) = -3$$

19- حاصل  $A = (1 - \cot 17^\circ)(1 - \cot 28^\circ)$  کدام است؟

- ۱ (۲)      ۲ (۱)      ۳ (۲)      ۴ (۱)      ۵ (۲)

پاسخ: گزینه 1 چون  $17 + 28 = 45$  است و  $\cot 45$  یک عدد مشخص و آشناست پس باید از بسط  $\cot(a+b)$  استفاده کنیم:

$$\text{می‌دانیم: } \cot(a+b) = \frac{\cot a \cot b - 1}{\cot a + \cot b}$$

$$\cot 45^\circ = \cot(17^\circ + 28^\circ) = \frac{\cot 17^\circ \cot 28^\circ - 1}{\cot 28^\circ + \cot 17^\circ} = 1 \Rightarrow \cot 17^\circ \cot 28^\circ - 1 = \cot 28^\circ + \cot 17^\circ$$

$$\rightarrow \cot 17^\circ \cot 28^\circ - \cot 28^\circ - \cot 17^\circ = 1$$

$$A = (1 - \cot 17^\circ)(1 - \cot 28^\circ) = 1 - \cot 28^\circ - \cot 17^\circ + \cot 17^\circ \cot 28^\circ = 1 + 1 = 2$$

20- اگر  $\tan(2\alpha + \frac{\beta}{3}) = \sqrt{3} + 1$  و  $\tan(2\alpha - \frac{\beta}{3}) = \sqrt{3} - 1$  باشد،  $\tan \frac{2\beta}{3}$  برابر است با:

- ۱ (۲)      ۲ (۳)      ۳ (۲)      ۴ (۱)      ۵ (۲)

پاسخ: گزینه 3 با کمی دقت معلوم است که:

$$\left(2\alpha + \frac{\beta}{3}\right) - \left(2\alpha - \frac{\beta}{3}\right) = \frac{2\beta}{3}$$

حال از طرفین تانژانت می‌گیریم.

$$\tan \left[ \left(2\alpha + \frac{\beta}{3}\right) - \left(2\alpha - \frac{\beta}{3}\right) \right] = \tan \left( \frac{2\beta}{3} \right) \Rightarrow \frac{\sqrt{3} + 1 - (\sqrt{3} - 1)}{1 + (\sqrt{3} + 1)(\sqrt{3} - 1)} = \frac{2}{1 + 3 - 1} = \frac{2}{3}$$

21- ساده‌شده عبارت  $\frac{1 + \tan 21^\circ \tan 15^\circ}{\tan 21^\circ - \tan 15^\circ}$  کدام است؟

- ۱ (۲)      ۲ (۳)      ۳ (۲)      ۴ (۱)      ۵ (۲)

پاسخ: گزینه 1

نکته:  $\tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \tan \beta}$



$$\frac{1 + \tan 21^\circ \tan 15^\circ}{\tan 21^\circ - \tan 15^\circ} = \frac{1}{\frac{\tan 21^\circ - \tan 15^\circ}{1 + \tan 21^\circ \tan 15^\circ}} = \frac{1}{\tan(21^\circ - 15^\circ)} = \frac{1}{\tan 6^\circ}$$

$$= \frac{1}{\tan(18^\circ + 15^\circ)} = \frac{1}{\tan 33^\circ} = \cot 33^\circ = \cot(90^\circ - 57^\circ) = \tan 57^\circ$$

22- اگر  $\tan(\alpha + 70^\circ) = 3$  باشد، مقدار  $\tan(65^\circ - \alpha)$  کدام است؟

Ⓐ -3

Ⓑ 2

Ⓒ  $\frac{1}{2}$

Ⓓ  $\frac{1}{3}$

پاسخ: گزینه 3

می‌دانیم:

$$\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan \alpha \pm \tan \beta}{1 \mp \tan \alpha \tan \beta} \quad \text{و} \quad \tan 135^\circ = \tan(180^\circ - 45^\circ) = \tan 45^\circ = -1$$

$$65^\circ - \alpha = 135^\circ - (\alpha + 70^\circ) \Rightarrow \tan(65^\circ - \alpha) = \tan(135^\circ - (\alpha + 70^\circ))$$

$$= \frac{\tan 135^\circ - \tan(\alpha + 70^\circ)}{1 + \tan 135^\circ \tan(\alpha + 70^\circ)} = \frac{-1 - 3}{1 + (-1)(3)} = 2$$

23- عبارت  $\sin(\alpha + \frac{\pi}{3}) + \sin(\alpha + 3\pi) + \sin(\alpha + \frac{5\pi}{3})$  برابر است با:

Ⓐ  $-2 \sin \alpha$

Ⓑ  $\cos \alpha$

Ⓒ 1

Ⓓ صفر

پاسخ: گزینه 1

$$\sin(\alpha + \frac{\pi}{3}) + \sin(2\pi + \pi + \alpha) + \sin(2\pi - \frac{\pi}{3} + \alpha)$$

$$= \sin \alpha \cos \frac{\pi}{3} + \cos \alpha \sin \frac{\pi}{3} + \sin(\pi + \alpha) + \sin(\alpha - \frac{\pi}{3})$$

$$= \frac{1}{2} \sin \alpha + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \alpha - \sin \alpha + \sin \alpha \cos \frac{\pi}{3} - \cos \alpha \sin \frac{\pi}{3}$$

$$= \frac{1}{2} \sin \alpha + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \alpha - \sin \alpha + \frac{1}{2} \sin \alpha - \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \alpha = \sin \alpha - \sin \alpha = 0$$

24- هرگاه  $\cot(\alpha - \frac{\pi}{4}) = \frac{1}{3}$  باشد، مقدار  $\cot 2\alpha$  کدام است؟

Ⓐ  $\frac{4}{3}$

Ⓑ  $\frac{3}{4}$

Ⓒ  $-\frac{3}{4}$

Ⓓ  $-\frac{4}{3}$

پاسخ: گزینه 3

می‌دانیم:

$$\tan(a - b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \cdot \tan b} \Rightarrow \tan(a - \frac{\pi}{4}) = \frac{\tan a - 1}{1 + \tan a}$$

$$\cot(\alpha - \frac{\pi}{4}) = \frac{1}{3} \Rightarrow \tan(\alpha - \frac{\pi}{4}) = 3 \Rightarrow \frac{\tan \alpha - 1}{1 + \tan \alpha} = 3$$





$$3 + 3 \tan \alpha = \tan \alpha - 1 \Rightarrow \tan \alpha = -2$$

$$\tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha} = \frac{2(-2)}{1 - (-2)^2} = \frac{-4}{-3} = \frac{4}{3} \Rightarrow \cot 2\alpha = \frac{1}{\frac{4}{3}} = \frac{3}{4}$$

25- اگر  $\sin x \cos x = \frac{1}{4}$  باشد،  $\sin(x - \frac{\pi}{4})$  کدام است؟

$\pm \frac{\sqrt{6}}{6}$  (۴)                       $\pm \frac{1}{6}$  (۳)                       $\pm \sqrt{\frac{6}{6}}$  (۲)                       $\pm \frac{\sqrt{3}}{3}$  (۱)

پاسخ: گزینه 4

$$\sin x \cos x = \frac{1}{4}, \quad A = \sin(x - \frac{\pi}{4}) = \sin x \cos \frac{\pi}{4} - \cos x \sin \frac{\pi}{4}$$

$$A = \frac{\sqrt{2}}{2} \sin x - \frac{\sqrt{2}}{2} \cos x \Rightarrow A = \frac{\sqrt{2}}{2} (\sin x - \cos x) \Rightarrow A^2 = \frac{1}{2} (\sin x - \cos x)^2$$

$$A^2 = \frac{1}{2} (\sin^2 x + \cos^2 x - 2 \sin x \cos x) = \frac{1}{2} (1 - \frac{2}{4}) = \frac{1}{6} \quad A = \pm \frac{\sqrt{6}}{6}$$

26- اگر  $\tan(\alpha + 20^\circ) = \frac{3}{4}$  باشد،  $\cot(25^\circ - \alpha)$  کدام است؟

$8$  (۴)                       $7$  (۳)                       $6$  (۲)                       $5$  (۱)

پاسخ: گزینه 3

می‌دانیم:

$$\tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \cdot \tan \beta}$$

$$\tan(25^\circ - \alpha) = \tan(45^\circ - (\alpha + 20^\circ)) = \frac{\tan 45^\circ - \tan(\alpha + 20^\circ)}{1 + \tan 45^\circ \tan(\alpha + 20^\circ)} = \frac{1 - \frac{3}{4}}{1 + \frac{3}{4}} = \frac{1}{7}$$

$$\cot(25^\circ - \alpha) = \frac{1}{\tan(25^\circ - \alpha)} = 7$$

27- اگر  $\sin a + \sin b = \frac{4}{3}$  و  $\cos a - \cos b = \frac{1}{3}$  حاصل  $\cos(a + b)$  کدام است؟

$\frac{1}{12}$  (۴)                       $\frac{1}{6}$  (۳)                       $\frac{1}{9}$  (۲)                       $\frac{1}{18}$  (۱)

پاسخ: گزینه 1

$$\begin{cases} \sin^2 a + \sin^2 b + 2 \sin a \sin b = \frac{16}{9} \\ \cos^2 a + \cos^2 b - 2 \cos a \cos b = \frac{1}{9} \end{cases}$$

$$\text{جمع: } 1 + 1 - 2 \cos(a + b) = \frac{17}{9} \Rightarrow \cos(a + b) = \frac{1}{18}$$



28- اگر  $\alpha$  و  $\beta$  در بازه  $(0, \frac{\pi}{2})$  باشند،  $\tan \alpha = 3$  و  $\tan 2\beta = \frac{4}{3}$ ، حاصل  $\cot(\alpha + \beta)$  کدام است؟

$\frac{1}{3}$  (۴)

$\frac{2}{3}$  (۳)

$-\frac{1}{7}$  (۲)

$\frac{1}{7}$  (۱)

پاسخ: گزینه 2

$$\tan 2\beta = \frac{4}{3} \rightarrow \frac{2 \tan \beta}{1 - \tan^2 \beta} = \frac{4}{3} \rightarrow 4 - 4 \tan^2 \beta = 6 \tan \beta$$

$$\rightarrow 4 \tan^2 \beta + 6 \tan \beta - 4 = 0 \rightarrow 2 \tan^2 \beta + 3 \tan \beta - 2 = 0 \rightarrow \Delta = 9 + 16 = 25$$

$$\rightarrow \tan \beta = \frac{-3 \pm \sqrt{25}}{4} = \frac{-3 \pm 5}{4} \rightarrow \begin{cases} \tan \beta = \frac{1}{2} \text{ ق.ق} \\ \tan \beta = \frac{-8}{4} = -2 \text{ غ.ق.ق} \end{cases} \xrightarrow{0 < \beta < \frac{\pi}{2}}$$

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta} = \frac{3 + \frac{1}{2}}{1 - (3)(\frac{1}{2})} = \frac{\frac{7}{2}}{-\frac{1}{2}} = -7 \Rightarrow \cot(\alpha + \beta) = -\frac{1}{7}$$

29- حاصل  $A = \frac{1 + \sin 2\alpha}{1 - \sin 2\alpha} \tan(\frac{\pi}{4} - \alpha)$  برابر است با:

$\cot(\frac{\pi}{4} + \alpha)$  (۴)

$\tan(\frac{\pi}{4} + \alpha)$  (۳)

$1 + \tan \alpha$  (۲)

$1 - \tan \alpha$  (۱)

پاسخ: گزینه 3

می‌دانیم  $\tan(\frac{\pi}{4} - \alpha) = \frac{1 - \tan \alpha}{1 + \tan \alpha}$ ،  $\sin 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 + \tan^2 \alpha}$

$$A = \frac{1 + \frac{2 \tan \alpha}{1 + \tan^2 \alpha}}{1 - \frac{2 \tan \alpha}{1 + \tan^2 \alpha}} \times \tan(\frac{\pi}{4} - \alpha) = \frac{(\tan \alpha + 1)^2}{(\tan \alpha - 1)^2} \times \frac{1 - \tan \alpha}{1 + \tan \alpha} = \frac{\tan \alpha + 1}{1 - \tan \alpha} = \tan(\frac{\pi}{4} + \alpha)$$

30- اگر  $a + b = \frac{\pi}{2}$ ، حاصل  $\tan a + \tan b$  کدام است؟

$\frac{1}{\cos b}$  (۴)

$\frac{1}{\sin a}$  (۳)

$\cos a$  (۲)

$\sin b$  (۱)

پاسخ: گزینه 4

می‌دانیم:  $\sin(a + b) = \sin a \cdot \cos b + \cos a \cdot \sin b$

$$\tan a + \tan b = \frac{\sin a}{\cos a} + \frac{\sin b}{\cos b} = \frac{\sin a \cdot \cos b + \cos a \cdot \sin b}{\cos a \cdot \cos b} = \frac{\sin(a + b)}{\cos a \cdot \cos b} = \frac{\sin(\frac{\pi}{2} - a)}{\cos a \cdot \cos b} = \frac{\cos a}{\cos a \cdot \cos b} = \frac{1}{\cos b}$$

31- حاصل  $\frac{\sqrt{3}}{\sin 20^\circ} - \frac{1}{\cos 20^\circ}$  کدام است؟

- ۱ (1)      ۲ (2)      ۳ (3)      ۴ (4)

پاسخ: گزینه 4

$$\frac{\sqrt{3} \cos 20^\circ - \sin 20^\circ}{\sin 20^\circ \cos 20^\circ} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} \cos 20^\circ - \frac{1}{2} \sin 20^\circ}{\frac{1}{2} \sin 20^\circ \cos 20^\circ} = \frac{\sin(60^\circ - 20^\circ)}{\frac{1}{2} \sin 40^\circ} = 4$$

32- اگر  $a, b \in Z$  و  $\tan \frac{\pi}{8} = \frac{1}{a + \sqrt{b}}$  باشد، مقدار  $a + b$  کدام است؟

- ۱ (1)      ۲ (2)      ۳ (3)      ۴ (4)

پاسخ: گزینه 3

می‌دانیم:  $\tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha}$

حال مقدار  $\tan \frac{\pi}{8}$  را به دو روش محاسبه می‌کنیم:

نکته:  $\tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha}$

$$\tan \frac{\pi}{4} = \frac{2 \tan \frac{\pi}{8}}{1 - \tan^2 \frac{\pi}{8}} \xrightarrow{\tan \frac{\pi}{8} = x} 1 = \frac{2x}{1 - x^2} \Rightarrow x^2 + 2x - 1 = 0$$

$$\Rightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 4}}{2} \xrightarrow{\tan \frac{\pi}{8} > 0} \tan \frac{\pi}{8} = -1 + \sqrt{2} = \frac{1}{\sqrt{2} + 1} = \frac{1}{a + \sqrt{b}}$$

$$\Rightarrow a = 1, b = 2 \Rightarrow a + b = 1 + 2 = 3$$

33- اگر  $\tan\left(\frac{3\pi}{4} - \alpha\right) = 2$  مقدار  $\sin 2\alpha$  کدام است؟

- ۱ (1)  $\frac{3}{5}$       ۲ (2)  $-\frac{3}{5}$       ۳ (3)  $\frac{4}{5}$       ۴ (4)  $-\frac{4}{5}$

پاسخ: گزینه 1

$$\tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \tan \beta} \Rightarrow \tan\left(\frac{3\pi}{4} - \alpha\right) = \frac{-1 - \tan \alpha}{1 - \tan \alpha} = 2$$

$$\tan \alpha + 1 = 2 \tan \alpha - 2 \Rightarrow \tan \alpha = 3 \quad \sin 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 + \tan^2 \alpha} \quad \sin 2\alpha = \frac{2 \times 3}{1 + 9} = \frac{3}{5}$$

فرمول‌های اصلی و نتایج آن

34- اگر  $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$  و  $\sin \alpha - \frac{6}{\sqrt{4 + 4 \tan^2 \alpha}} = -1$  حاصل  $\sin \alpha + \cos \alpha$  کدام است؟

- ۱ (1)  $\frac{7}{5}$       ۲ (2)  $\frac{1}{5}$       ۳ (3)  $-\frac{1}{5}$       ۴ (4)  $-\frac{7}{5}$

پاسخ: گزینه 2

$$\sin \alpha - \frac{6}{2\sqrt{1+\tan^2 \alpha}} = -1 \Rightarrow \sin \alpha - \frac{3}{\sqrt{1+\tan^2 \alpha}} = -1 \Rightarrow \sin \alpha - \frac{3}{\sqrt{\frac{1}{\cos^2 \alpha}}} = -1$$

$$\Rightarrow \sin \alpha - 3|\cos \alpha| = -1$$

$$\sin \alpha + 3\cos \alpha = -1 \xrightarrow{\text{به توان ۲}} \sin^2 \alpha + 9\cos^2 \alpha + 6\sin \alpha \cos \alpha = 1$$

$$\Rightarrow \underbrace{8\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha}_{1} + 6\sin \alpha \cos \alpha = 1 \Rightarrow 8\cos^2 \alpha = -6\sin \alpha \cos \alpha \Rightarrow \tan \alpha = -\frac{4}{3}$$

$$\frac{1}{\cos^2 \alpha} = 1 + \tan^2 \alpha = 1 + \frac{16}{9} = \frac{25}{9} \xrightarrow{\cos \alpha < 0} \cos \alpha = -\frac{3}{5} \rightarrow \sin \alpha = \frac{4}{5}$$

$$\Rightarrow \sin \alpha + \cos \alpha = \frac{4}{5} - \frac{3}{5} = \frac{1}{5}$$

35- حاصل عبارت  $\frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x \cos^2 x} - (\tan x + \cot x)^2$  کدام است؟

④ صفر

③ -1

② ۲

① -۲

پاسخ: گزینه 1

$$\frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x \cos^2 x} - (\tan x + \cot x)^2 =$$

$$\frac{\sin^2 x}{\sin^2 x \cos^2 x} + \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x \cos^2 x} - \left( \frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x} \right)^2 =$$

$$\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} + \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} - \left( \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} + \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} + 2 \frac{\sin x}{\cos x} \times \frac{\cos x}{\sin x} \right)$$

$$= \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} + \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} - \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} - \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} - 2 = -2$$

36- اگر  $\frac{3\pi}{2} < \alpha < \pi$  باشد، حاصل عبارت  $-\sin \alpha + \cos \alpha$  برابر کدام گزینه است؟

④  $\frac{\tan \alpha - 1}{\sqrt{1 + \tan^2 \alpha}}$

③  $\frac{1 + \tan \alpha}{\sqrt{1 + \tan^2 \alpha}}$

②  $1 - \frac{2 \tan \alpha}{1 + \tan^2 \alpha}$

①  $1 + \frac{2 \tan \alpha}{1 + \tan^2 \alpha}$

پاسخ: گزینه 4 چون  $180^\circ < \alpha < 270^\circ$  است پس داریم:

می‌دانیم که  $1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$  است اکنون به بررسی گزینه چهارم می‌پردازیم:



$$\frac{\tan \alpha - 1}{\sqrt{1 + \tan^2 \alpha}} = \frac{\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} - 1}{\sqrt{\frac{1}{\cos^2 \alpha}}} = \frac{\frac{\sin \alpha - \cos \alpha}{\cos \alpha}}{\frac{1}{|\cos \alpha|}} = \frac{\sin \alpha - \cos \alpha}{\cos \alpha} = -\sin \alpha + \cos \alpha$$

نسبت‌های مثلثاتی مجموع و تفاضل زوایا

37- اگر  $\sin(20^\circ + \alpha) = \frac{12}{13}$  باشد، حاصل  $\cos(80^\circ + \alpha)$  کدام است؟ ( $0 < \alpha < 70^\circ$ )

$$\frac{5 + 12\sqrt{3}}{26} \quad \text{Ⓕ}$$

$$\frac{5 - 12\sqrt{3}}{26} \quad \text{Ⓖ}$$

$$\frac{5\sqrt{3} + 12}{26} \quad \text{Ⓗ}$$

$$\frac{5\sqrt{3} - 12}{26} \quad \text{Ⓓ}$$

پاسخ: گزینه 3

$$\text{فرض کنید: } 20^\circ + \alpha = x \Rightarrow \sin x = \frac{12}{13}$$

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \Rightarrow \frac{144}{169} + \cos^2 x = 1 \Rightarrow \cos^2 x = \frac{25}{169} \Rightarrow \cos x = \pm \frac{5}{13}$$

$x$  در ناحیه اول است، پس  $\cos x = \frac{5}{13}$  می‌باشد.

$$\cos(80^\circ + \alpha) = \cos(60^\circ + \overbrace{20^\circ + \alpha}^x) = \cos(60^\circ + x)$$

$$= \cos 60^\circ \cos x - \sin 60^\circ \sin x = \frac{1}{2} \left( \frac{5}{13} \right) - \frac{\sqrt{3}}{2} \left( \frac{12}{13} \right) = \frac{5 - 12\sqrt{3}}{26}$$

38- اگر  $\sin(x + y) = -\frac{3}{5}$  و  $x - y = \frac{\pi}{3}$  باشد،  $\cos 2y$  کدام است؟ ( $\pi < x + y < \frac{3\pi}{2}$ )

$$\frac{-4 - 3\sqrt{3}}{10} \quad \text{Ⓕ}$$

$$\frac{4 - 3\sqrt{3}}{10} \quad \text{Ⓖ}$$

$$\frac{3\sqrt{3} + 4}{10} \quad \text{Ⓗ}$$

$$\frac{3\sqrt{3} - 4}{10} \quad \text{Ⓓ}$$

پاسخ: گزینه 4 از اتحادهای مثلثاتی داریم:

$$\sin^2(x + y) + \cos^2(x + y) = 1 \Rightarrow \left(-\frac{3}{5}\right)^2 + \cos^2(x + y) = 1$$

$$\Rightarrow \cos^2(x + y) = \frac{16}{25} \xrightarrow{\pi < x + y < \frac{3\pi}{2}} \cos(x + y) = -\frac{4}{5}$$

از طرفی:

$$\cos 2y = \cos((x + y) - (x - y)) = \cos(x + y) \cos(x - y) + \sin(x + y) \sin(x - y)$$

$$= \left(-\frac{4}{5}\right) \left(\frac{1}{2}\right) + \left(-\frac{3}{5}\right) \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{-4 - 3\sqrt{3}}{10}$$

39- حاصل  $(1 - \sqrt{3} \tan 10^\circ) \left(\frac{\sqrt{3}}{3} + \tan 70^\circ\right)$  کدام است؟

$$\frac{4\sqrt{3}}{3} \quad \text{Ⓕ}$$

$$\sqrt{3} \quad \text{Ⓖ}$$

$$\frac{2\sqrt{3}}{3} \quad \text{Ⓗ}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{3} \quad \text{Ⓓ}$$

پاسخ: گزینه 4

$$(1 - \sqrt{3} \tan 10^\circ) \left( \frac{\sqrt{3}}{3} + \tan 70^\circ \right) = \frac{\sqrt{3}}{3} + \tan 70^\circ - \tan 10^\circ - \sqrt{3} \tan 10^\circ \tan 70^\circ$$

از طرفی می‌دانیم  $70^\circ - 10^\circ = 60^\circ$  داریم:

$$\tan(70^\circ - 10^\circ) = \tan 60^\circ \Rightarrow \frac{\tan 70^\circ - \tan 10^\circ}{1 + \tan 70^\circ \tan 10^\circ} = \sqrt{3}$$

$$\Rightarrow \tan 70^\circ - \tan 10^\circ = \sqrt{3} + \sqrt{3} \tan 70^\circ \tan 10^\circ$$

$$\Rightarrow \tan 70^\circ - \tan 10^\circ - \sqrt{3} \tan 70^\circ \tan 10^\circ = \sqrt{3} \quad (1)$$

$$\stackrel{(1)}{\rightarrow} (1 - \sqrt{3} \tan 10^\circ) \left( \frac{\sqrt{3}}{3} + \tan 70^\circ \right) = \frac{\sqrt{3}}{3} + \sqrt{3} = \frac{4\sqrt{3}}{3}$$

40- حاصل  $\frac{\sqrt{3}}{\sin 20^\circ} - \frac{1}{\cos 20^\circ}$  کدام است؟

4 (ف)

3 (ب)

2 (د)

1 (ا)

پاسخ: گزینه 4

می‌دانیم:

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta \quad \text{و} \quad \sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha$$

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{3}}{\sin 20^\circ} - \frac{1}{\cos 20^\circ} &= \frac{\sqrt{3} \cos 20^\circ - \sin 20^\circ}{\sin 20^\circ \cdot \cos 20^\circ} = \frac{2 \left( \frac{\sqrt{3}}{2} \cos 20^\circ - \frac{1}{2} \sin 20^\circ \right)}{\sin 20^\circ \cos 20^\circ} \\ &= \frac{2(\cos 30^\circ \cdot \cos 20^\circ - \sin 30^\circ \sin 20^\circ)}{\sin 20^\circ \cdot \cos 20^\circ} = \frac{2 \cos(30^\circ + 20^\circ)}{\frac{1}{2} \sin 40^\circ} \end{aligned}$$

$$\frac{4 \cos 50^\circ}{\sin 40^\circ} = \frac{4 \sin(90^\circ - 50^\circ)}{\sin 40^\circ} = 4 \frac{\sin 40^\circ}{\sin 40^\circ} = 4$$

41- بیشترین مقدار تابع  $(\sin x - \cos 2x)^2 + (\cos x - \sin 2x)^2$  چیست؟

4 (ف)

3 (ب)

2 (د)

1 (ا)

پاسخ: گزینه 4

$$\sin^2 x + \cos^2 2x - 2 \sin x \cos 2x + \cos^2 x + \sin^2 2x - 2 \cos x \sin 2x$$

$$= \sin^2 x + \cos^2 x + \sin^2 2x + \cos^2 2x - \underbrace{2(\sin x \cos 2x + \cos x \sin 2x)}_{\sin(x+2x)} = 2 - 2 \sin 3x$$

می‌دانیم  $-1 \leq \sin 3x \leq 1$  می‌باشد، بنابراین بیشترین مقدار عبارت داده شده هنگامی رخ می‌دهد که  $\sin 3x = -1$  باشد، بنابراین

$$Max = 2 - 2(-1) = 4$$

42- مقدار عددی عبارت  $\frac{\cos 20^\circ + \sqrt{3} \sin 20^\circ}{\cos 40^\circ}$  کدام است؟

-2 (ف)

2 (ب)

$-\frac{1}{2}$  (د)

$\frac{1}{2}$  (ا)

پاسخ: گزینه 3

$$\frac{\cos 20^\circ + \tan 60^\circ \sin 20^\circ}{\cos 40^\circ} = \frac{\cos 20^\circ + \frac{\sin 60^\circ}{\cos 60^\circ} \sin 20^\circ}{\cos 40^\circ} = \frac{\cos 60^\circ \cos 20^\circ + \sin 60^\circ \sin 20^\circ}{\cos 60^\circ \cos 40^\circ}$$

$$= \frac{\cos(60^\circ - 20^\circ)}{\frac{1}{2} \cos 40^\circ} = \frac{2 \cos 40^\circ}{\cos 40^\circ} = 2$$

43- مقدار  $\tan \frac{\pi}{12}$  برابر چیست؟

۲ -  $\sqrt{2}$  (۴)

۳ -  $\sqrt{8}$  (۳)

۲ -  $\sqrt{3}$  (۷)

۳ -  $\sqrt{5}$  (۱)

پاسخ: گزینه 2

روش اول: می‌دانیم  $\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}$ ، بنابراین:

$$\tan \frac{\pi}{12} = \tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1 - \tan \frac{\pi}{6}}{1 + \tan \frac{\pi}{6}} = \frac{1 - \frac{\sqrt{3}}{3}}{1 + \frac{\sqrt{3}}{3}} = \frac{3 - \sqrt{3}}{3 + \sqrt{3}} = \frac{12 - 6\sqrt{3}}{6} = 2 - \sqrt{3}$$

روش دوم:

می‌دانیم  $\sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}$ ،  $\cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}$  بنابراین:

$$\cos^2 \frac{\pi}{12} = \frac{1 + \cos \frac{\pi}{6}}{2} = \frac{1 + \frac{\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{2 + \sqrt{3}}{4}$$

$$\sin^2 \frac{\pi}{12} = \frac{1 - \cos \frac{\pi}{6}}{2} = \frac{1 - \frac{\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{2 - \sqrt{3}}{4}$$

$$\Rightarrow \tan^2 \frac{\pi}{12} = \frac{\sin^2 \frac{\pi}{12}}{\cos^2 \frac{\pi}{12}} = \frac{2 - \sqrt{3}}{2 + \sqrt{3}} = \frac{(2 - \sqrt{3})^2}{4 - 3} \Rightarrow \tan \frac{\pi}{12} = 2 - \sqrt{3}$$