



علی رضا رضایی

۱- جواب کلی معادله‌ی مثلثاتی $\tan x \tan 3x = 1$ ، کدام است؟

$$x = \frac{k\pi}{4} + \frac{\pi}{8} \quad \text{Ⓕ}$$

$$x = \frac{k\pi}{2} + \frac{3\pi}{8} \quad \text{Ⓖ}$$

$$x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{8} \quad \text{Ⓗ}$$

$$x = \frac{k\pi}{4} \quad \text{Ⓘ}$$

پاسخ: گزینه ۴

$$\tan 3x \cdot \tan x = 1 \rightarrow \tan 3x = \frac{1}{\tan x} \rightarrow \tan 3x = \cot x \rightarrow \tan 3x = \tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

$$\tan x = \tan \alpha \rightarrow x = k\pi + \alpha$$

$$\rightarrow 3x = k\pi + \frac{\pi}{2} - x \rightarrow 4x = k\pi + \frac{\pi}{2} \rightarrow x = \frac{k\pi}{4} + \frac{\pi}{8}$$

۲- جواب کلی معادله‌ی مثلثاتی $\cos 2x + 2\cos^2 x = 0$ ، کدام است؟

$$x = k\pi \pm \frac{\pi}{6} \quad \text{Ⓕ}$$

$$x = k\pi \pm \frac{\pi}{3} \quad \text{Ⓖ}$$

$$x = 2k\pi \pm \frac{2\pi}{3} \quad \text{Ⓗ}$$

$$x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3} \quad \text{Ⓘ}$$

پاسخ: گزینه ۳ می‌دانیم: $1 + \cos 2a = 2\cos^2 a$

$$\cos 2x + 2\cos^2 x = 0 \rightarrow \cos 2x + 1 + \cos 2x = 0 \rightarrow 2\cos 2x = -1 \rightarrow \cos 2x = -\frac{1}{2}$$

$$\rightarrow \cos 2x = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = \cos \frac{2\pi}{3} \xrightarrow{x=2k\pi \pm \alpha} 2x = 2k\pi \pm \frac{2\pi}{3} \rightarrow x = k\pi \pm \frac{\pi}{3}$$

۳- جواب کلی معادله‌ی مثلثاتی $\frac{\sin 3x + \sin 2x}{1 + \cos x} = 0$ ، کدام است؟

$$x = \frac{(2k+1)\pi}{5} \quad \text{Ⓕ}$$

$$x = k\pi + \frac{\pi}{5} \quad \text{Ⓖ}$$

$$x = \frac{2k\pi}{5} \quad \text{Ⓗ}$$

$$x = \frac{k\pi}{5} \quad \text{Ⓘ}$$

پاسخ: گزینه ۲ کسری برابر صفر است که صورتش صفر باشد.

$$\sin 3x + \sin 2x = 0 \rightarrow \sin 3x = -\sin 2x \rightarrow \sin 3x = \sin(-2x)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x=2k\pi+\alpha \\ \xrightarrow{\quad} 3x = 2k\pi - 2x \rightarrow 5x = 2k\pi \rightarrow x = \frac{2k\pi}{5} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x=2k\pi+\pi-\alpha \\ \xrightarrow{\quad} 3x = 2k\pi + \pi + 2x \rightarrow x = 2k\pi + \pi \end{array} \right. \text{ غُفَق (مخرج را صفر می‌کند)}$$

۴- جواب کلی معادله‌ی مثلثاتی $\sin^2 x - \cos^2 x = \sin^2 \frac{5\pi}{4}$ ، به کدام صورت است؟

$$x = k\pi \pm \frac{\pi}{3} \quad \text{Ⓕ}$$

$$x = k\pi \pm \frac{\pi}{6} \quad \text{Ⓖ}$$

$$x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3} \quad \text{Ⓗ}$$

$$x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{6} \quad \text{Ⓘ}$$

پاسخ: گزینه ۴

می‌دانیم $\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a$



$$\sin^2 x - \cos^2 x = \sin^2 \frac{5\pi}{4} \Rightarrow (\sin^2 x - \cos^2 x) \underbrace{(\sin^2 x + \cos^2 x)}_1 = \left(\frac{-\sqrt{2}}{2}\right)^2 \Rightarrow -\cos 2x = \frac{1}{2}$$

$$\cos 2x = -\frac{1}{2} = \cos \frac{2\pi}{3} \xrightarrow{x=2k\pi \pm \alpha} 2x = 2k\pi \pm \frac{2\pi}{3} \Rightarrow x = k\pi \pm \frac{\pi}{3}$$

توجه کنید که $\sin \frac{5\pi}{4} = \sin(\pi + \frac{\pi}{4}) = -\sin \frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ است.

۵- مجموع جواب‌های معادله‌ی مثلثاتی $\sin 2x + \cos(\frac{\pi}{2} - x) = 0$ در بازه‌ی $[0, 2\pi]$ کدام است؟

۵π (۴)

$\frac{9\pi}{2}$ (۳)

۴π (۲)

$\frac{14\pi}{3}$ (۱)

پاسخ: گزینه ۴ می‌دانیم: $\sin 2a = 2 \sin a \cos a$, $\cos(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \sin \alpha$

$$\sin 2x + \cos(\frac{\pi}{2} - x) = 0 \rightarrow 2 \sin x \cos x + \sin x = 0 \rightarrow \sin x(2 \cos x + 1) = 0$$

$$\rightarrow \begin{cases} \sin x = 0 \xrightarrow{\text{حال خاص}} x = k\pi \xrightarrow{k=0,1,2} x = 0, \pi, 2\pi \\ 2 \cos x + 1 = 0 \rightarrow \cos x = -\frac{1}{2} = \cos \frac{2\pi}{3} \xrightarrow{x=2k\pi \pm \alpha} \begin{cases} x = 2k\pi + \frac{2\pi}{3} \xrightarrow{k=0} x = \frac{2\pi}{3} \\ x = 2k\pi - \frac{2\pi}{3} \xrightarrow{k=1} x = \frac{4\pi}{3} \end{cases} \end{cases}$$

بنابراین مجموع جواب‌ها برابر $5\pi = 0 + \pi + 2\pi + \frac{2\pi}{3} + \frac{4\pi}{3}$ است.

۶- جواب کلی معادله‌ی مثلثاتی $2 \cos^2 x + 2 \sin x \cos x = 1$ به کدام صورت است؟

$x = k\pi + \frac{\pi}{8}$ (۴)

$x = k\pi - \frac{\pi}{8}$ (۳)

$x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{8}$ (۲)

$x = \frac{k\pi}{2} - \frac{\pi}{8}$ (۱)

پاسخ: گزینه ۱

می‌دانیم: $2 \sin a \cos a = \sin 2a$, $\cos 2a = 2 \cos^2 a - 1$

$$2 \cos^2 x + 2 \sin x \cos x = 1 \rightarrow 2 \sin x \cos x = 1 - 2 \cos^2 x$$

$$\rightarrow 2 \sin x \cos x = -(2 \cos^2 x - 1) \rightarrow \sin 2x = -\cos 2x$$

طرفین را بر $\cos 2x$ تقسیم می‌کنیم:

$$\rightarrow \tan 2x = -1 = \tan(-\frac{\pi}{4}) \xrightarrow{x=k\pi+\alpha} 2x = k\pi - \frac{\pi}{4} \rightarrow x = \frac{k\pi}{2} - \frac{\pi}{8}$$

۷- مجموع تمام جواب‌های معادله‌ی مثلثاتی $\sin 5x + \sin 4x = 1 + \cos \pi$ در بازه‌ی $[0, 2\pi]$ کدام است؟

11π (۴)

10π (۳)

9π (۲)

8π (۱)

پاسخ: گزینه ۴

$$\sin 5x + \sin 4x = 1 + \underbrace{\cos \pi}_{-1} \rightarrow \sin 5x = -\sin 4x \rightarrow \sin 5x = \sin(-4x)$$



$$\rightarrow \begin{cases} x=2k\pi+\alpha \\ \hline \rightarrow \Delta x = 2k\pi - 4x \rightarrow 9x = 2k\pi \rightarrow x = \frac{2k\pi}{9} \\ x=2k\pi+\pi-\alpha \\ \hline \rightarrow \Delta x = 2k\pi + \pi + 4x \rightarrow x = 2k\pi + \pi \end{cases}$$

$$x = \frac{2k\pi}{9} \rightarrow \begin{array}{c|cccccc} k & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & 9 \\ \hline x & 0 & \frac{2\pi}{9} & \frac{4\pi}{9} & \frac{6\pi}{9} & \frac{8\pi}{9} & \dots & 2\pi \end{array}$$

$$x = 2k\pi + \pi \rightarrow \begin{array}{c|cc} k & 0 & 1 \\ \hline x & \pi & 2\pi \end{array}$$

$$\text{مجموع جوابها} = \frac{2\pi + 4\pi + 6\pi + \dots + 18\pi}{9} + \underbrace{\pi}_{\text{جدول پایین}}$$

$$= \frac{(2 + 4 + 6 + \dots + 18)\pi}{9} + \pi = \frac{9 \cdot 10\pi}{9} + \pi = 10\pi + \pi = 11\pi$$

دقت کنید که $2 + 4 + 6 + \dots + 2n = n(n+1)$ است روی همین اصل داریم:

$$2 + 4 + 6 + \dots + 18 = 9(9+1) = 90$$

۸- جواب کلی معادله‌ی مثلثاتی $2 \sin(\pi - x) \cos\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) + 3 \cot x \sin(\pi + x) = 0$ کدام است؟

$$x = 2k\pi \pm \frac{2\pi}{3} \quad \text{Ⓐ}$$

$$x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3} \quad \text{Ⓑ}$$

$$x = 2k\pi + \frac{2\pi}{3} \quad \text{Ⓒ}$$

$$x = 2k\pi + \frac{\pi}{3} \quad \text{Ⓓ}$$

پاسخ: گزینه ۳

$$2 \sin(\pi - x) \cos\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) + 3 \cot x \sin(\pi + x) = 0 \Rightarrow 2 \sin x \cdot \sin x + 3 \frac{\cos x}{\sin x} (-\sin x) = 0$$

$$\Rightarrow 2 \sin^2 x - 3 \cos x = 0 \Rightarrow 2(1 - \cos^2 x) - 3 \cos x = 0 \Rightarrow 2 \cos^2 x + 3 \cos x - 2 = 0$$

$$\xrightarrow{\cos x=A} 2A^2 + 3A - 2 = 0 \Rightarrow \Delta = b^2 - 4ac = 9 + 16 = 25 \rightarrow \begin{cases} A = \frac{-3+5}{4} = \frac{1}{2} \\ A = \frac{-3-5}{4} = -2 \end{cases}$$

$$A = \frac{1}{2} \Rightarrow \cos x = \frac{1}{2} = \cos \frac{\pi}{3} \Rightarrow x = 2k\pi \pm \alpha \Rightarrow x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3}$$

$$A = -2 \Rightarrow \cos x = -2 \text{ امکان ندارد } (-1 \leq \cos x \leq 1)$$

۹- جواب کلی معادله‌ی مثلثاتی $(1 + \tan^2 x) \cos(\pi + 2x) = 2$ به کدام صورت است؟

$$x = k\pi \pm \frac{\pi}{3} \quad \text{Ⓐ}$$

$$x = k\pi \pm \frac{\pi}{6} \quad \text{Ⓑ}$$

$$x = k\pi + \frac{\pi}{3} \quad \text{Ⓒ}$$

$$x = k\pi + \frac{\pi}{6} \quad \text{Ⓓ}$$



پاسخ: گزینه ۴

$$\boxed{1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}, \quad 2 \cos^2 x = 1 + \cos 2x} \quad \text{می دانیم:}$$

$$(1 + \tan^2 x) \cdot \cos(\pi + 2x) = 2 \Rightarrow \left(\frac{1}{\cos^2 x}\right)(-\cos 2x) = 2 \Rightarrow 2 \cos^2 x = -\cos 2x$$

$$\Rightarrow 1 + \cos 2x = -\cos 2x \Rightarrow 2 \cos 2x = -1 \Rightarrow \cos 2x = -\frac{1}{2} = \cos \frac{2\pi}{3}$$

$$\xrightarrow{x=2k\pi \pm \alpha} 2x = 2k\pi \pm \frac{2\pi}{3} \Rightarrow x = k\pi \pm \frac{\pi}{3}$$

۱۰- جواب کلی معادله‌ی مثلثاتی $(\sin x - \tan x) \tan\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) = \cos \frac{4\pi}{3}$ کدام است؟

$$x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{6} \quad \text{Ⓐ}$$

$$x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3} \quad \text{Ⓑ}$$

$$x = k\pi + \frac{\pi}{3} \quad \text{Ⓒ}$$

$$x = k\pi - \frac{\pi}{6} \quad \text{Ⓓ}$$

پاسخ: گزینه ۳

$$(\sin x - \tan x) \tan\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) = \cos \frac{4\pi}{3} \Rightarrow (\sin x - \tan x) \cot x = \cos\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right)$$

$$\Rightarrow \sin x \cot x - \tan x \cot x = -\cos \frac{\pi}{3} \Rightarrow \sin x \cdot \frac{\cos x}{\sin x} - 1 = -\cos \frac{\pi}{3} \Rightarrow \cos x - 1 = -\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \cos x = \frac{1}{2} = \cos \frac{\pi}{3} \Rightarrow x = 2k\pi \pm \alpha \Rightarrow x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3}$$

۱۱- جواب کلی معادله‌ی مثلثاتی $2 \tan x \cos^2 x = 1$ به کدام صورت است؟

$$x = 2k\pi + \frac{\pi}{4} \quad \text{Ⓐ}$$

$$x = 2k\pi - \frac{\pi}{4} \quad \text{Ⓑ}$$

$$x = k\pi + \frac{\pi}{4} \quad \text{Ⓒ}$$

$$x = k\pi - \frac{\pi}{4} \quad \text{Ⓓ}$$

پاسخ: گزینه ۲ می دانیم: $\sin 2a = 2 \sin a \cos a$

$$2 \tan x \cos^2 x = 1 \rightarrow 2 \frac{\sin x}{\cos x} \cdot \cos^2 x = 1 \rightarrow 2 \sin x \cos x = 1$$

$$\rightarrow \sin 2x = 1 \xrightarrow[\text{حالت خاص}]{x=2k\pi + \frac{\pi}{2}} 2x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{4}$$

۱۲- مجموع جواب‌های معادله‌ی مثلثاتی $\sin^4 x + \cos^4 x = \frac{1}{2}$ در بازه $[0, 2\pi]$ ، کدام است؟

$$4\pi \quad \text{Ⓐ}$$

$$\frac{5\pi}{2} \quad \text{Ⓑ}$$

$$3\pi \quad \text{Ⓒ}$$

$$\frac{5\pi}{4} \quad \text{Ⓓ}$$

پاسخ: گزینه ۴ می دانیم $\sin^4 a + \cos^4 a = 1 - \frac{1}{2} \sin^2 2a$ است.

$$1 - \frac{1}{2} \sin^2 2x = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{2} \sin^2 2x = \frac{1}{2} \Rightarrow \sin^2 2x = 1$$



$$\Rightarrow \begin{cases} \text{حالت خاص} \\ \sin 2x = 1 \longrightarrow 2x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{4} \Rightarrow x = \frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4} \\ \text{حالت خاص} \\ \sin 2x = -1 \longrightarrow 2x = 2k\pi - \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = k\pi - \frac{\pi}{4} \Rightarrow x = \frac{3\pi}{4}, \frac{7\pi}{4} \end{cases}$$

$$\text{مجموع جوابها} = \frac{\pi}{4} + \frac{5\pi}{4} + \frac{3\pi}{4} + \frac{7\pi}{4} = \frac{16\pi}{4} = 4\pi$$

۱۳- جواب کلی معادله مثلثاتی $\sin 4x \cos 2x = \cos^2 \left(x - \frac{\pi}{4}\right)$ کدام است؟

$\frac{k\pi}{3} + \frac{\pi}{12}$ (۴)

$\frac{k\pi}{3} - \frac{\pi}{12}$ (۳)

$\frac{k\pi}{4} + \frac{\pi}{12}$ (۲)

$\frac{k\pi}{4} - \frac{\pi}{12}$ (۱)

پاسخ: گزینه ۴ نکته: $\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}(\cos x + \sin x)$ و $\sin 3\alpha = 3\sin \alpha - 4\sin^3 \alpha$

طبق صورت سؤال داریم:

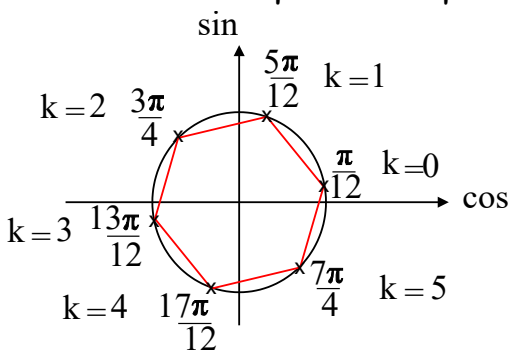
$$\sin 4x \cos 2x = \cos^2 \left(x - \frac{\pi}{4}\right) \Rightarrow (2 \sin 2x \cos 2x)(\cos 2x) = \frac{1}{2}(\sin x + \cos x)^2$$

$$\Rightarrow 2 \sin 2x \cos^2 2x = \frac{1}{2}(\underbrace{\sin^2 x + \cos^2 x}_1 + \underbrace{2 \sin x \cos x}_{\sin 2x})$$

$$\Rightarrow 4 \sin 2x(1 - \sin^2 2x) = 1 + \sin 2x \Rightarrow 4 \sin 2x - 4 \sin^3 2x = 1 + \sin 2x$$

$$\Rightarrow 3 \sin 2x - 4 \sin^3 2x = 1 \Rightarrow \sin 3(2x) = 1 \Rightarrow \sin 6x = 1 = \sin \frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow 6x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = \frac{k\pi}{3} + \frac{\pi}{12}$$



جوابهای به دست آمده در یک دوره تناوب $[0, 2\pi]$ در دایره مثلثاتی

روبه رو رسم شده‌اند، مطابق شکل، جوابهای به دست آمده، رئوس یک

شش ضلعی منتظم هستند.

۱۴- مجموع جوابهای معادله‌ی مثلثاتی $\sin\left(x + \frac{\pi}{8}\right) + \cos\left(x - \frac{3\pi}{8}\right) = 1$ در بازه‌ی $[0, 2\pi]$ برابر کدام

ست؟

$\frac{7\pi}{4}$ (۴)

$\frac{3\pi}{2}$ (۳)

$\frac{5\pi}{4}$ (۲)

$\frac{3\pi}{4}$ (۱)



پاسخ: گزینه ۱

می دانیم:

$$\text{اگر: } \alpha + \beta = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \begin{cases} \sin \alpha = \cos \beta \\ \tan \alpha = \cot \beta \end{cases}$$

$$\left(x + \frac{\pi}{8}\right) + \left(\frac{3\pi}{8} - x\right) = \frac{\pi}{2} \rightarrow \sin\left(x + \frac{\pi}{8}\right) = \cos\left(\frac{3\pi}{8} - x\right)$$

$$\Rightarrow 2 \sin\left(x + \frac{\pi}{8}\right) = 1 \Rightarrow \sin\left(x + \frac{\pi}{8}\right) = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x + \frac{\pi}{8} = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \\ x + \frac{\pi}{8} = 2k\pi + \frac{5\pi}{6} \end{cases} \xrightarrow{[0, 2\pi]} \begin{cases} x_1 = \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{8} = \frac{\pi}{24} \\ x_2 = \frac{5\pi}{6} - \frac{\pi}{8} = \frac{17\pi}{24} \end{cases} \Rightarrow x_1 + x_2 = \frac{3\pi}{4}$$

۱۵- جواب های کلی معادله مثلثاتی $\cos 2x = \sin x$ به صورت $x = 2k\pi + \frac{i\pi}{6}$ بیان شده است، مجموعه مقادیر i

کدام است؟

{1, 5, 9} (۴)

{1, 4, 7} (۳)

{1, 3, 5} (۲)

{7, 9} (۱)

پاسخ: گزینه ۴

$$\cos 2x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \rightarrow 2x = 2k\pi \pm \left(\frac{\pi}{2} - x\right) \Rightarrow \begin{cases} 3x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = \frac{2k\pi}{3} + \frac{\pi}{6} \\ x = 2k\pi - \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

k	x
0	$\frac{\pi}{6}$ $\frac{5\pi}{6}$
1	$\frac{5\pi}{6}$ $\frac{3\pi}{2}$
2	$\frac{9\pi}{6}$ $\frac{7\pi}{2}$

{1, 5, 9}

۱۶- نقاط پایانی کمان جواب های معادله $\frac{\sin x \cos x}{1 - \cos x} = 1 + \cos x$ بر روی دایره ی مثلثاتی رأس های کدام چند

نعلی است؟

مثلث متساوی الساقین (۴)

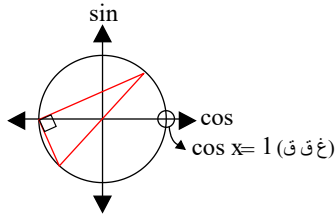
مثلث قائم الزاویه (۳)

مستطیل (۲)

مربع (۱)

پاسخ: گزینه ۳ با توجه به این که $\cos x \neq 1$ (ریشه ی مخرج)، معادله ی مثلثاتی را ساده می کنیم:

$$\frac{\sin x \cos x}{1 - \cos x} = 1 + \cos x \Rightarrow \sin x \cos x = 1 - \cos^2 x \Rightarrow \sin^2 x - \sin x \cos x = 0$$



$$\Rightarrow \begin{cases} \sin x = 0 \Rightarrow x = \pi \\ \text{یا} \\ \sin x \neq 0 \Rightarrow \cos x = \sin x \Rightarrow x = \frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4} \end{cases}$$

همان طور که در دایره‌ی مثلثاتی مشاهده می‌کنید، نقاط پایانی کمان جواب‌های معادله‌ی مفروض، رئوس یک مثلث قائم الزویه هستند زیرا زاویه‌ی محاطی مقابل به قطر دارد.

۱۷- مجموع جواب‌های معادله‌ی مثلثاتی $\tan(3x) \tan(x) = 1$ ، در بازه $[\pi, 2\pi]$ ، کدام است؟

- ① 5π ② 6π ③ $\frac{9\pi}{2}$ ④ $\frac{11\pi}{2}$

پاسخ: گزینه ۲

$$\tan 3x \cdot \tan x = 1 \rightarrow \tan 3x = \frac{1}{\tan x} \rightarrow \tan 3x = \cot x \rightarrow \tan 3x = \tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

$$\frac{\tan x = \tan \alpha \rightarrow x = k\pi + \alpha}{\rightarrow 3x = k\pi + \frac{\pi}{2} - x \rightarrow 4x = k\pi + \frac{\pi}{2} \rightarrow x = \frac{k\pi}{4} + \frac{\pi}{8}}$$

k	۴	۵	۶	۷
x	$\frac{9\pi}{8}$	$\frac{11\pi}{8}$	$\frac{13\pi}{8}$	$\frac{15\pi}{8}$

→ مجموع جواب‌ها = $\frac{48\pi}{8} = 6\pi$

۱۸- معادله $2 \tan 2x \times \tan\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = -1$ در بازه $(0, 2\pi)$ چند جواب دارد؟

- ① هیچ ② یک ③ دو ④ سه

پاسخ: گزینه ۱

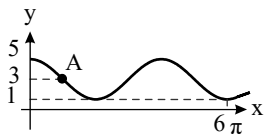
$$2 \times \frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x} \times \frac{\tan x - 1}{\tan x + 1} = -1 \Rightarrow \frac{4 \tan x}{(\tan x + 1)^2} = 1$$

$$\Rightarrow 4 \tan x = \tan^2 x + 2 \tan x + 1 \Rightarrow \tan^2 x - 2 \tan x + 1 = 0$$

$$\Rightarrow (\tan x - 1)^2 = 0 \Rightarrow \tan x = 1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}$$

تابع $\tan 2x$ به ازای جواب‌های به دست آمده تعریف نشده است؛ پس هیچ کدام قابل قبول نیستند.

۱۹- قسمتی از نمودار تابع $f(x) = a \cos bx + c$ به صورت مقابل است. طول نقطه A کدام است؟



① π

② $\frac{3\pi}{4}$

③ $\frac{\pi}{2}$

④ $\frac{2\pi}{3}$

پاسخ: گزینه ۲ نمودار از نقطه (0, 5) می‌گذرد؛ پس:

$$y(0) = 5 \Rightarrow a + c = 5 (*)$$

با توجه به نمودار ماکزیمم و مینیمم تابع برابر ۵ و ۱ است. با توجه به ضابطه این مقادیر برابر $|a| + c$ و $-|a| + c$



هستند؛ پس $|a| + c = 5$ و $-|a| + c = 1$. با مقایسه این روابط و (*) معلوم است که $a > 0$ است؛ پس:

$$\begin{cases} a + c = 5 \\ -a + c = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ c = 3 \end{cases}$$

با توجه به شکل اگر دوره تناوب تابع T باشد، آنگاه $\frac{3}{2}T = 6\pi$ می‌دانیم $T = \frac{2\pi}{|b|}$ ؛ پس:

$$\frac{3}{2} \times \frac{2\pi}{|b|} = 6\pi \Rightarrow \frac{3}{|b|} = 6 \Rightarrow |b| = \frac{1}{2}$$

با فرض $b = \frac{1}{2}$ ضابطه تابع به صورت $f(x) = 2 \cos \frac{1}{2}x + 3$ است.

A اولین نقطه با طول مثبت است که عرض آن برابر 3 است؛ پس برای به دست آوردن طول آن باید معادله $f(x) = 3$ را حل کنیم:

$$3 = 2 \cos \frac{1}{2}x + 3 \Rightarrow 2 \cos \frac{1}{2}x = 0 \Rightarrow \frac{1}{2}x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow x_A = \pi$$