حد

مفاهیم مقدماتی قضایای حد و محاسبهٔ حد چپ و راست

1- در تابع f با ضابطه‌ی $f(x)=\begin{cases} x^2+a & ; x<-2 \\ 3x+4 & ; x>-2 \end{cases}$ مقدار حد چپ در نقطه‌ی $x=-2$، عکس مقدار حد راست در این نقطه است. a کدام است؟

① 3 ② $3/5$ ③ -4 ④ $-4/5$

پاسخ: گزینه 4

$$\lim_{x\to(-2)^-} f(x)=\lim_{x\to(-2)^+}\frac{1}{f(x)}\to 4+a=\frac{1}{-6+4}\to 4+a=\frac{-1}{2}$$
$$\to 8+2a=-1\to 2a=-9\to a=-\frac{9}{2}=-4/5$$

2- در کدام نقطه با طول صحیح از تابع $f(x)=4[x]+3[-x]$ ، حد چپ دو برابر حد راست تابع است؟ (نماد [ ] جزء صحیح است)

① 1 ② -1 ③ -2 ④ 2

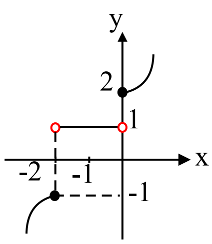
پاسخ: گزینه 4 فرض کنیم k نقطه‌ای با طول صحیح باشد، لذا داریم:

$$x\to k^+ : x>k\Rightarrow \begin{cases}[x]=k\\ -x<-k\Rightarrow[-x]=-k-1\end{cases}\Rightarrow \lim_{x\to k^+}(4[x]+3[-x])=4k+3(-k-1)=k-3$$
$$x\to k^- : x<k\Rightarrow \begin{cases}[x]=k-1\\ -x>-k\Rightarrow[-x]=-k\end{cases}\Rightarrow \lim_{x\to k^-}(4[x]+3[-x])=4(k-1)+3(-k)=k-4$$

حد چپ دو برابر حد راست تابع است، در نتیجه می‌توان نوشت: $k-4=2(k-3)\Rightarrow k=2$

محاسبهٔ حد از روی نمودار

3- با توجه به شکل زیر حاصل $\lim_{x\to 0^+} f(-2-x^2)-\lim_{x\to(-1)^-} f(1-x^2)$ کدام است؟



① -1 ② 0
③ 1 ④ -2

پاسخ: گزینه 4

با توجه به نمودار داریم:

$$x\to 0^+ : x>0\Rightarrow x^2>0\Rightarrow -x^2<0\Rightarrow -2-x^2<-2\Rightarrow \lim_{x\to 0^+} f(-2-x^2)=f((-2)^-)=-1$$
$$x\to(-1)^- : x<-1\Rightarrow x^2>1\Rightarrow -x^2<-1\Rightarrow 1-x^2<0\Rightarrow \lim_{x\to(-1)^-} f(1-x^2)=f((0)^-)=1$$
$$\Rightarrow \lim_{x\to 0^+} f(-2-x^2)-\lim_{x\to(-1)^-} f(1-x^2)=-1-1=-2$$

قضایای حد و محاسبهٔ حد چپ و راست

4- در تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\begin{cases}\sqrt{1-x} & x>0\\ -\sqrt{1+x} & x\le 0\end{cases}$، حاصل $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x^3-x)$ کدام است؟

① -1 ② 0 ③ 1 ④ موجود نیست.

پاسخ: گزینه 3 هرگاه $-1<x<0$ باشد، آن گاه $x^3>x$ خواهد بود. در نتیجه داریم:

$x^3>x \Rightarrow x^3-x>0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0^-} f(x^3-x)=f(0^+) \Rightarrow$ باید از ضابطه ی بالایی استفاده کنیم

$$=\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}\sqrt{1-x}=\sqrt{1-0}=1$$

5- کدامیک از توابع زیر در نقطه $x=1$ حد دارد؟

① $f(x)=\sqrt{2-2x}$ ② $g(x)=\sqrt{x^2-1}$ ③ $h(x)=\sqrt{x+2}$ ④ $k(x)=\sqrt{x-2}$

پاسخ: گزینه 3 دامنه گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم.

$1)\ f(x)=\sqrt{2-2x} \Rightarrow 2-2x\ge 0 \Rightarrow x\le 1 \Rightarrow D_f=(-\infty,1]$

$2) g(x)=\sqrt{x^2-1} \Rightarrow x^2-1\ge 0 \Rightarrow x\le -1$ یا $x\ge 1 \Rightarrow D_g=(-\infty,-1]\cup[1,+\infty)$

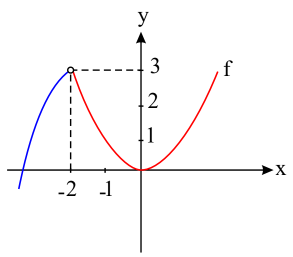
$3) h(x)=\sqrt{x+2} \Rightarrow x+2\ge 0 \Rightarrow x\ge -2 \Rightarrow D_h=[-2,+\infty)$

$4) k(x)=\sqrt{x-2} \Rightarrow x-2\ge 0 \Rightarrow x\ge 2 \Rightarrow D_k=[2,+\infty)$

توابع f و g و k در همسایگی $x=1$ تعریف نشده هستند. پس این توابع در نقطه $x=1$ حد ندارند.

محاسبهٔ حد از روی نمودار

6- نمودار تابع f بصورت مقابل است، حاصل $\lim\limits_{x\to -2}(2xf(x)-x^2)$ کدام است؟



① -8 ② -16

③ 8 ④ 16

پاسخ: گزینه 2

$$\lim_{x\to -2} f(x)=3 \Rightarrow \lim_{x\to -2}(2xf(x)-x^2)=\lim_{x\to -2} 2x\times\lim_{x\to -2} f(x)-\lim_{x\to -2} x^2$$

$$=(-4)\times 3-(-2)^2=-12-4=-16$$

قضایای حد و محاسبهٔ حد چپ و راست

7- حدّ عبارت $\frac{1}{x^2}\left(1-x^2\left[\frac{1}{x^2}\right]\right)$ وقتی $x\to 0$، کدام است؟ (نماد [ ] به مفهوم جزء صحیح است.)

① صفر ② 1 ③ ∞ ④ حدّ ندارد

پاسخ: گزینه 4

می‌دانیم $0\le u-[u]<1$ در نتیجه با ضرب $\frac{1}{x^2}$ در عبارت داخل پرانتز داریم:

$$\frac{1}{x^2} - \left[\frac{1}{x^2}\right]$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} - \left[\frac{1}{x^2}\right] = [0,1)$$ چون بیشمار حد در این بازه وجود دارد، پس یکتا نیست و حد وجود ندارد.

8- حد چپ تابع $f(x) = [5x + |x|]$ در $x = -1$ کدام است؟ (نماد [ ] جزء صحیح است)

① -1 ② صفر ③ -3 ④ -5

پاسخ: گزینه 4

ابتدا جزء صحیح را تعیین عدد و قدر مطلق را تعیین علامت می‌کنیم.

$$\lim_{x\to(-1)^-} f(x) = \lim_{x\to(-1)^-} [5x + |x|] \xrightarrow{x<0} \lim_{x\to(-1)^-} [5x - x] = \lim_{x\to(-1)^-} [4x] = [4(-1)^-] = [-4^-] = -5$$

9- اگر $f(x) = \left[\frac{1}{x}\right] + \left[-\frac{1}{x}\right]$ ، حاصل $\lim_{x\to\frac{1}{7}} f(x) - \lim_{x\to 7} f(x)$ کدام است؟ (نماد [ ] جزء صحیح است)

① -2 ② -1 ③ صفر ④ موجود نمی‌باشد.

پاسخ: گزینه 3

تابع $f(x) = [x] + [-x]$ در هر نقطه‌ي حقيقي داراي حدي برابر -1 مي‌باشد، لذا:

$$\forall a \in \mathbb{R} : \lim_{x\to a} [x] + [-x] = -1$$

$$\forall a \in \mathbb{R} : \lim_{x\to a} f(x) = -1 \Rightarrow \lim_{x\to 7} f(x) = \lim_{x\to \frac{1}{7}} f(x) = -1 \Rightarrow \lim_{x\to 7} f(x) - \lim_{x\to \frac{1}{7}} f(x) = 0$$

نکته: در حالت کلي:
$$[x] + [-x] = \begin{cases} -1 & x \notin \mathbb{Z} \\ 0 & x \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

10- اگر $f(x) = \begin{cases} ax - 1 & x < 1 \\ x^2 + 2a & x \geq 1 \end{cases}$ و $\lim_{x\to 1^+} f(x) - \lim_{x\to 1^-} f(x) = -1$ ، مقدار a کدام است؟

① -4 ② -3 ③ -2 ④ -1

پاسخ: گزینه 2

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} (ax - 1) = a - 1 \quad , \quad \lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} \left(x^2 + 2a\right) = 1 + 2a$$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) - \lim_{x\to 1^-} f(x) = -1 \Rightarrow (1 + 2a) - (a - 1) = -1 \Rightarrow a = -1 - 2 = -3$$

11- حاصل $\lim_{x\to 1^-} (x+1)\left[\frac{1}{x+1}\right]$ کدام است؟ (نماد [ ] جزء صحیح است)

① -1 ② 0 ③ $\frac{1}{2}$ ④ 1

پاسخ: گزینه 2

در عبارت های شامل جزء صحیح ابتدا عبارت درون جزء صحیح را تعیین عدد می‌کنیم.

$$\lim_{x\to 1^-} (x+1)\left[\frac{1}{x+1}\right] = 2\left[\frac{1}{1+1}\right] = 2 \times 0 = 0$$

12- اگر $f(x)=g(x)=[4-x^2]$ باشد، $\lim\limits_{x\to 1^-}(gof)(x)$ کدام است؟ (نماد [ ] جزء صحیح است)

① -1 ② -3 ③ -5 ④ -7

پاسخ: گزینه 3 با توجه به این که برای هر $k\in\mathbb{Z}$ داریم: $[u+k]=[u]+k$ ، لذا داریم:

$$f(x)=g(x)=4+[-x^2]$$

برای بررسی حد چپ تابع gof در $x=1$ ، ضابطه ی تابع را در بازه ی $(0,1)$ بررسی می کنیم:

$$0<x<1\Rightarrow 0<x^2<1\Rightarrow -1<-x^2<0\Rightarrow[-x^2]=-1\Rightarrow f(x)=4+[-x^2]=4-1=3$$

توجه داشته باشید که عدد بدست آمده یک عدد مطلق است چون جواب جزء صحیح همواره یک عدد مطلق است.

$$\Rightarrow(gof)(x)=g(3)=4+[-9]=-5\Rightarrow(gof)(x)=-5\Rightarrow\lim_{x\to 1^-}(gof)(x)=-5$$

13- حاصل $\lim\limits_{x\to 2^-}[x^2-x]$ کدام است؟

① 1 ② 2 ③ 3 ④ -1

پاسخ: گزینه 1

$$\lim_{x\to 2^-}[x^2-x]=[(2-\varepsilon)^2-(2-\varepsilon)]=[4-4\varepsilon+\varepsilon^2-2+\varepsilon]=[2-3\varepsilon]=1$$

14- اگر حاصل $\lim\limits_{x\to 2}[ax^3-3ax^2+4a]$ برابر صفر باشد، حدود a کدام است؟

① $a\le 0$ ② $a\ge 0$ ③ $a\ge -1$ ④ $a\le -1$

پاسخ: گزینه 2 با توجه به این‌که حاصل حد برابر صفر شده است، پس باید عبارت داخل جزء صحیح به 0^+ میل کند.

$$\lim_{x\to 2}[ax^3-3ax^2+4a]=\lim_{x\to 2}[a(x^3-3x^2+4)]=\lim_{x\to 2}[a(x-2)^2(x+1)]=[a\times 0^+\times 3]=0$$

بدیهی است که به ازای $a\ge 0$، حاصل جزء صحیح برابر صفر خواهد شد. توجه شود که برای تجزیه عبارت x^3-3x^2+4 به صورت زیر عمل می‌کنیم:

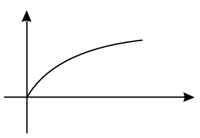
$$x^3-3x^2+4=x^3+1-3x^2+3=(x+1)(x^2-x+1)-3(x^2-1)$$
$$=(x+1)(x^2-x+1)-3(x-1)(x+1)=(x+1)(x^2-x+1-3x+3)=(x+1)(x^2-4x+4)$$
$$=(x+1)(x-2)^2$$

محاسبهٔ حد از روی نمودار

15- اگر تابع $f(x)=\sqrt{x+a}+b$ در نقطهٔ $x=2$ فقط حد راست داشته باشد و داشته باشیم $f(2)=2$ ، حاصل $a-b$ کدام است؟

① 4 ② صفر ③ -4 ④ $\sqrt{2}+2$

پاسخ: گزینه 3 تابع $f(x)=\sqrt{x}$ را در نظر بگیرید:



این تابع در $x=0$ حد راست دارد، ولی حد چپ آن تعریف نمی‌شود. در واقع در تابع $f(x)=\sqrt{x+a}$ در ریشه زیر رادیکال

تابع حد راست دارد، اما حد چپ ندارد؛ پس داریم: $(x+a=0 \Rightarrow x=-a)$

$$-a=2 \Rightarrow a=-2 \ \Rightarrow f(x)=\sqrt{x-2}+b$$

از طرفی $f(2)=2$، پس داریم:

$$f(x)=\sqrt{x-2}+b \xrightarrow{f(2)=2} 2=\sqrt{2-2}+b \Rightarrow b=2$$

حاصل $a-b$ برابر است با:

$$a-b=(-2)-2=-4$$

نکته آموزشی: به حدود زیر دقت کنید!

$\sqrt{x-2} \rightarrow$ در $x=2$ فقط حد راست دارد. $\rightarrow$

$\sqrt{-x+2} \rightarrow$ در $x=2$ فقط حد چپ دارد. $\rightarrow$

$-\sqrt{x-2} \rightarrow$ در $x=2$ فقط حد راست دارد. $\rightarrow$

$\sqrt{(x-2)^2} \rightarrow$ در $x=2$ حد دارد. $\rightarrow$

$\sqrt{-(x-2)^2} \rightarrow$ در $x=2$ نه حد راست دارد و نه حد چپ. $\rightarrow \bullet$

قضایای حد و محاسبهٔ حد چپ و راست

16 - اگر $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{a[x^2]-3|2x-2|+1}{2b+|x+2|}=\dfrac{1}{7}$ باشد، آن گاه a^2+b^2 کدام است؟ (نماد [ ] جزء صحیح است)

① 0 ② $\dfrac{35}{49}$ ③ 4 ④ $\dfrac{26}{36}$

پاسخ: گزینه 3 براکت را تعیین عدد و قدر مطلق را تعیین علامت می‌کنیم تا حد چپ و راست محاسبه شود.

حد چپ و راست تابع را در $x=1$ برابر هم قرار می دهیم:

$$\lim_{x\to 1}\frac{a[x^2]-3|2x-2|+1}{2b+|x+2|}=\lim_{x\to 1}\frac{a[x^2]-6|x-1|+1}{2b+3}=\frac{1}{7}$$

$$x\to 1^+ : x>1 \Rightarrow \begin{cases} x^2>1 \Rightarrow [x^2]=1 \\ |x-1|=x-1 \end{cases} \Rightarrow \lim_{x\to 1^+}\frac{a-6(x-1)+1}{2b+3}=\frac{a+1}{2b+3}=\frac{1}{7}$$

$$x\to 1^- : x<1 \Rightarrow \begin{cases} x^2<1 \Rightarrow [x^2]=0 \\ |x-1|=-(x-1) \end{cases} \Rightarrow \lim_{x\to 1^-}\frac{a(0)+6(x-1)+1}{2b+3}=\frac{1}{2b+3}=\frac{1}{7}$$

$$\Rightarrow 2b+3=7 \Rightarrow b=2$$

$$\Rightarrow \frac{a+1}{7}=\frac{1}{7} \Rightarrow a=0 \Rightarrow a^2+b^2=2^2+0^2=4$$

---

17 - حاصل $\lim\limits_{x\to(\frac{1}{2})^-}\left[\dfrac{1}{x}\right]+\lim\limits_{x\to(\frac{1}{3})^+}\left[\dfrac{-1}{x}\right]$ کدام است؟

① -2 ② 1 ③ -1 ④ 2

پاسخ: گزینه 3

$$x\to(\frac{1}{3})^+ \Rightarrow x>\frac{1}{3} \Rightarrow \frac{1}{x}<3 \Rightarrow \frac{-1}{x}>-3 \Rightarrow \lim_{x\to(\frac{1}{3})^+}\left[\frac{-1}{x}\right]=\left[(-3)^+\right]=-3$$

$$x \to (\frac{1}{2})^- \Rightarrow x < \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{x} > 2 \Rightarrow \lim_{x\to(\frac{1}{2})^-} [\frac{1}{x}] = [2^+] = 2$$

$$\lim_{x\to(\frac{1}{3})^+} \left[\frac{-1}{x}\right] + \lim_{x\to(\frac{1}{2})^-} \left[\frac{1}{x}\right] = -3 + 2 = -1$$

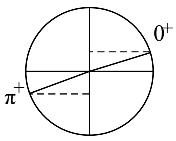
18- حاصل $\lim_{x\to 0^+} [\sin x] + \lim_{x\to\pi^+} [\sin x]$ کدام است؟

① 1 ② -1 ③ صفر ④ -2

پاسخ: گزینه 2

$x \to 0^+ \Rightarrow \sin x \to 0^+$

$x \to \pi^+ \Rightarrow \sin x \to 0^-$



$$\lim_{x\to\pi^+} [\sin x] + \lim_{x\to 0^+} [\sin x] = [0^-] + [0^+] = -1 + 0 = -1$$

19- حاصل $\lim_{x\to 0^+} [\frac{2^{x+1}}{2^x + 1}]$ کدام است؟

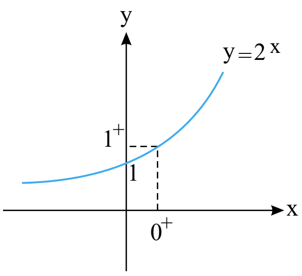
① 1 ② صفر ③ -1 ④ 2

پاسخ: گزینه 1 چون حد عبارت داخل براکت (جزء صحیح) در نقطهٔ $x = 0$ برابر عدد صحیح 1 می‌شود پس باید دقت کنیم که این عبارت با مقادیر کم‌تر از 1 به 1 میل می‌کند یا با مقادیر بیش‌تر از 1 به 1 میل می‌کند (به‌دلیل وجود جزء صحیح این بررسی لازم است) برای این منظور باید کسر را به صورت مناسب تفکیک کنیم:

$$\lim_{x\to 0^+} [\frac{2^{x+1}}{2^x+1}] = \lim_{x\to 0^+} [\frac{2\times 2^x}{2^x+1}] = \lim_{x\to 0^+} [\frac{2\times 2^x + 2 - 2}{2^x+1}] = \lim_{x\to 0^+} [\frac{2(2^x+1)}{2^x+1} - \frac{2}{2^x+1}]$$

$$= \lim_{x\to 0^+} [2 - \frac{2}{2^x+1}] = [2 - \frac{2}{2^+}] = [2 - 1^-] = [1^+] = 1$$

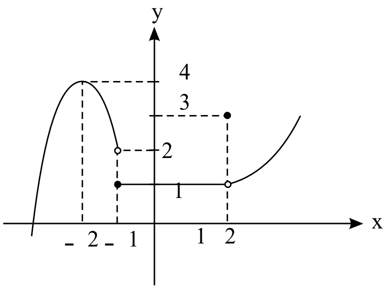
توجه شود که با توجه به نمودار تابع $y = 2^x$، اگر $x \to 0^+$ آن‌گاه $y \to 1^+$ یعنی داریم:



$$x \to 0^+ \Rightarrow x > 0 \Rightarrow 2^x > 1 \Rightarrow 2^x + 1 > 2 \Rightarrow \frac{1}{2^x+1} < \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{2}{2^x+1} < 1$$

محاسبهٔ حد از روی نمودار

20- با توجه به نمودار تابع f، کدام گزینه نادرست است؟



① $\lim\limits_{x\to(-۱)^-} f(x)=۲$　② $\lim\limits_{x\to ۰} f(x)=۱$

③ $\lim\limits_{x\to ۲} f(x)=۳$　④ $\lim\limits_{x\to(-۱)^+} f(x)=۱$

پاسخ: گزینه 3 با توجه به شکل اگر x از راست به ۲ نزدیک شود، تابع به ۱ نزدیک می‌شود و اگر x از چپ به ۲ نزدیک شود، تابع دقیقاً برابر یک است. پس داریم:

$$\lim_{x\to ۲} f(x)=۱$$

قضایای حد و محاسبه حد چپ و راست

21- حاصل حد $\lim\limits_{x\to ۰}[\dfrac{\sin|x|}{|x|}]$ کدام است؟ ([ ] نماد جزء صحیح است.)

① ۰　② ۱　③ -۱　④ موجود نیست

پاسخ: گزینه 1 می‌دانیم که: $\sin|x| \le |\sin x| \le |x|$

$$x\to ۰^+ \Rightarrow |x|=x \Rightarrow ۰<\frac{\sin|x|}{|x|}=\frac{\sin x}{x}<۱ \Rightarrow [\frac{\sin|x|}{|x|}]=۰$$

$$x\to ۰^- \Rightarrow |x|=-x \Rightarrow ۰<\frac{\sin|x|}{|x|}=\frac{-\sin x}{-x}=\frac{\sin x}{x}<۱ \Rightarrow [\frac{\sin|x|}{|x|}]=۰$$

22- حد چپ تابع با ضابطه ی $f(x)=\dfrac{۳-[x]}{x-۳}\sqrt{x^۲-۶x+۹}$ در نقطه ی $x=۳$ کدام است؟ (نماد [ ] جزء صحیح است)

① ۰　② -۱　③ ۱　④ $-\infty$

پاسخ: گزینه 2 با توجه به این که $[x]=۲$: $۲\le x<۳$ لذا داریم:

$$\lim_{x\to ۳^-}\frac{۳-[x]}{x-۳}\sqrt{x^۲-۶x+۹}=\lim_{x\to ۳^-}\frac{۳-۲}{x-۳}\sqrt{(x-۳)^۲}=\lim_{x\to ۳^-}\frac{|x-۳|}{x-۳}=\frac{-(x-۳)}{x-۳}=-۱$$

23- به ازای کدام مجموعه مقادیر a ، تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\begin{cases}(x+a)^۲ & x\ge -۱\\ ۲x+۱ & x<-۱\end{cases}$ در نقطه‌ی $x=-۱$ حد دارد؟

① $\{۱\}$　② $\{-۱,۱\}$　③ $\varnothing$　④ $\mathbb{R}$

پاسخ: گزینه 3 در هر نقطه‌ای که حد چپ و حد راست دو عدد برابر هم باشند تابع در آن نقطه حد دارد.

تابع $f(x)$ زمانی در نقطه $x=-۱$ دارای حد است که داشته باشیم: $\lim\limits_{x\to(-۱)^-} f(x)=\lim\limits_{x\to(-۱)^+} f(x)$ ، لذا داریم:

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to(-۱)^-} f(x)=\lim\limits_{x\to(-۱)^-} ۲x+۱=۲(-۱)+۱=-۱\\ \lim\limits_{x\to(-۱)^+} f(x)=\lim\limits_{x\to(-۱)^+}(x+a)^۲=(-۱+a)^۲\end{cases}\Rightarrow (a-۱)^۲=-۱$$

این معادله جواب ندارد لذا مجموعه ی جواب a ، $\varnothing$ است.

24- در تابع $f(x)=\begin{cases} m & x\in\mathbb{Z} \\ -2 & x\notin\mathbb{Z}\end{cases}$ اگر $2\lim\limits_{x\to -1} f(x)+f(-1)=3$ آنگاه m کدام است؟

(1) $\sqrt{2}$ (2) 1 (3) -1 (4) 7

پاسخ: گزینه 4 نکته: در تابع $f(x)=\begin{cases} a & x\in\mathbb{Z} \\ b & x\notin\mathbb{Z}\end{cases}$ حد تابع در هر نقطه برابر b است.

$$f(x)=\begin{cases} m & x\in\mathbb{Z} \\ -2 & x\notin\mathbb{Z}\end{cases} \quad \lim_{x\to -1} f(x)=-2,\ f(-1)=m$$

$$2\lim_{x\to -1} f(x)+f(-1)=3 \Rightarrow 2(-2)+m=3 \Rightarrow m=7$$

25- اگر تابع $f(x)=m[-x]+[2x]+1$ در نقطه $x=3$ حد داشته باشد، m کدام است؟

(1) 1 (2) -1 (3) -2 (4) 2

پاسخ: گزینه 1

$$L^{-}=\lim_{x\to 3^{-}} m[-x]+[2x]+1=m[-(3-\varepsilon)]+[2(3-\varepsilon)]+1$$

$$=m[-3+\varepsilon]+[6-2\varepsilon]+1=-3m+5+1=-3m+6$$

$$L^{+}=\lim_{x\to 3^{+}} m[-x]+[2x]+1=m[-(3+\varepsilon)]+[2(3+\varepsilon)]+1$$

$$=m[-3-\varepsilon]+[6+2\varepsilon]+1=-4m+6+1=-4m+7$$

$$\Rightarrow -3m+6=-4m+7 \Rightarrow m=1$$

26- در تابع $y=[3x]+2[x]-[x^2]$ اختلاف حد چپ و راست در نقطه $x=2$ چقدر است؟

(1) 4 (2) 6 (3) 2 (4) 10

پاسخ: گزینه 3

$$L^{-}=\lim_{x\to 2^{-}}[3x]+2[x]-[x^2]=[3(2-\varepsilon)]+2[2-\varepsilon]-[(2-\varepsilon)^2]$$

$$=[6-3\varepsilon]+2\times 1-[4-4\varepsilon+\varepsilon^2]=5+2-3=4$$

$$L^{+}=\lim_{x\to 2^{+}}[3x]+2[x]-[x^2]=[3(2+\varepsilon)]+2[2+\varepsilon]-[(2+\varepsilon)^2]$$

$$=[6+3\varepsilon]+2\times 2-[4+4\varepsilon+\varepsilon^2]=6+4-4=6$$

$$6-4=2$$

27- با فرض $f(x)=(x^2-2x)[2x-x^2]$، حاصل $\lim\limits_{x\to 2^{+}}(f(x)-f(\frac{4}{x}))$ کدام است؟

(1) صفر (2) -1 (3) 1 (4) 2

پاسخ: گزینه 1 اگر $x\to 2^{+}$ آنگاه $\frac{4}{x}\to 2^{-}$ و بنابراین خواهیم داشت:

$$\lim_{x\to 2^{+}}(f(x)-f(\frac{4}{x}))=\lim_{x\to 2^{+}} f(x)-\lim_{x\to 2^{+}} f(\frac{4}{x})=\lim_{x\to 2^{+}} f(x)-\lim_{x\to 2^{-}} f(x)$$

توجه شود که در هر دو حالت $x\to 2^{+}$ یا $x\to 2^{-}$، حاصل حد عبارت (x^2-2x) برابر صفر می‌شود و بنابراین داریم:

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+}(x^2-2x)[2x-x^2] = \lim_{x\to 2^+}(x^2-2x)[x(2-x)] = 0\times[2\times 0^-] = 0\times[0^-]$$
$$= 0\times(-1) = 0$$

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) \ \lim_{x\to 2^-}(x^2-2x)[2x-x^2] = \lim_{x\to 2^-}(x^2-2x)[x(2-x)] = 0\times[2\times 0^+] = 0\times[0^+]$$
$$= 0\times 0 = 0$$

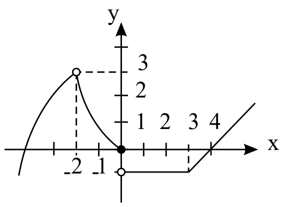
حاصل عبارت مطلوب $= 0 - 0 = 0$

محاسبهٔ حد از روی نمودار

28- نمودار تابع f بصورت مقابل است. حاصل عبارت $2\lim\limits_{x\to -2} f(x) - \lim\limits_{x\to 3} f(x) + f(1)$ کدام است؟

① ۸ ② ۵

③ ۶ ④ ۷



پاسخ: گزینه 3

$$2\lim_{x\to -2} f(x) - \lim_{x\to 3} f(x) + f(1) = 2\times 3 - (-1) + (-1) = 6 + 1 - 1 = 6$$

قضایای حد و محاسبهٔ حد چپ و راست

29- حد چپ تابع $\dfrac{\sqrt{x^2-2x+1}+[x]}{4x^2-3x-1}$ در نقطه‌ی $x_0 = 1$ کدام است؟ (نماد [ ] جزء صحیح است)

① ۰٫۱ ② −۰٫۱ ③ −۰٫۲ ④ ۰٫۲

پاسخ: گزینه 3 می‌دانیم اگر α و β ریشه‌های معادلهٔ $ax^2+bx+c=0$ باشند آنگاه:

$$ax^2+bx+c = a\cdot(x-\alpha)\cdot(x-\beta)$$

از آن‌جاکه $[x] = 0 : 0 \le x < 1$ ، لذا می‌توان نوشت:

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{\sqrt{x^2-2x+1}+[x]}{4x^2-3x-1} = \lim_{x\to 1^-}\frac{|x-1|+0}{(x-1)(4x+1)}$$

$$\xrightarrow{x<1\Rightarrow(x-1)<0} \lim_{x\to 1^-}\frac{-(x-1)}{(x-1)(4x+1)} = \lim_{x\to 1^-}\frac{-1}{4x+1} = -\frac{1}{5} = -0/2$$

30- حاصل حد $\lim\limits_{x\to(-2)^-}(x+2)[\dfrac{1}{x+2}]$ کدام است؟

① ۰ ② −۱ ③ $\frac{1}{2}$ ④ ۱

پاسخ: گزینه 4 هرگاه داخل جزء صحیح بی نهایت شود باید جزء صحیح حذف شود.

$$\lim_{x\to(-۲)^-}(x+۲)\cdot\left[\frac{۱}{x+۲}\right]=\lim_{x\to(-۲)^-}(x+۲)\times\frac{۱}{x+۲}=۱$$

31- حد عبارت $[\frac{x}{\sin x}]+۲[\frac{\sin x}{x}]$، وقتی $x\to ۰$ کدام می‌باشد؟ (نماد [ ] جزء صحیح است)

① ۱ ② ۲ ③ ۳ ④ حد ندارد

پاسخ: گزینه 2 می‌دانیم: $\boxed{\lim\limits_{x\to ۰}|\sin x|<\lim\limits_{x\to ۰}|x|<\lim\limits_{x\to ۰}|\tan x|}$

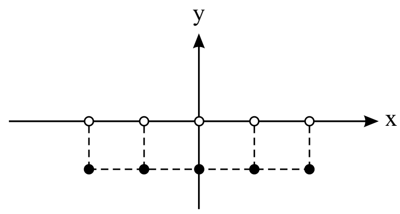
$$\Rightarrow \lim_{x\to ۰}\frac{\sin x}{x}<۱\ ,\ \lim_{x\to ۰}\frac{x}{\sin x}>۱\Rightarrow \lim_{x\to ۰}\left[\frac{\sin x}{x}\right]+\lim_{x\to ۰}۲\left[\frac{x}{\sin x}\right]=[۱^-]+۲[۱^+]=۰+۲=۲$$

32- در تابع $f(x)=\begin{cases}-۲ & x\in\mathbb{Z}\\ ۰ & x\notin\mathbb{Z}\end{cases}$ حاصل $\lim\limits_{x\to(\frac{۱}{۲})^+}f(x)+\lim\limits_{x\to(-۱)^-}f(x)$ کدام است؟

① صفر ② -۴ ③ ۴ ④ ۲

پاسخ: گزینه 1 با رسم نمودار تابع داریم:

$$f(x)=\begin{cases}-۲ & x\in\mathbb{Z}\\ ۰ & x\notin\mathbb{Z}\end{cases}$$



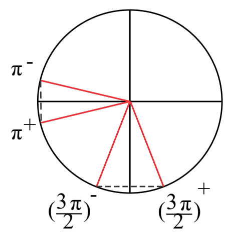
$$\lim_{x\to(-۱)^-}f(x)=۰\ ,\ \lim_{x\to(\frac{۱}{۲})^+}f(x)=۰$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to(-۱)^-}f(x)+\lim_{x\to(\frac{۱}{۲})^+}f(x)=۰+۰=۰$$

33- حاصل $\lim\limits_{x\to\frac{۳\pi}{۲}}\frac{[\cos ۲x]+۳}{۴-[\sin x]}$ کدام است؟

① $\frac{۱}{۶}$ ② $\frac{۲}{۵}$ ③ $\frac{۱}{۵}$ ④ $\frac{۱}{۳}$

پاسخ: گزینه 2



$$x\to\frac{۳\pi}{۲}\Rightarrow ۲x\to ۳\pi\Rightarrow \cos ۲x\to(-۱)^+$$

$$x\to\frac{۳\pi}{۲}\Rightarrow \sin x\to(-۱)^+$$

$$\lim_{x\to\frac{۳\pi}{۲}}\frac{[\cos ۲x]+۳}{۴-[\sin x]}=\frac{[(-۱)^+]+۳}{۴-[(-۱)^+]}=\frac{-۱+۳}{۴-(-۱)}=\frac{۲}{۵}$$

34- حاصل $\lim\limits_{x\to ۰}([\frac{۳\sin x}{x}]-[\frac{۲\tan x}{x}])$ کدام است؟

① ۱ ② -۱ ③ ۲ ④ صفر

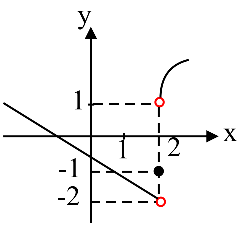
پاسخ: گزینه 4

$$\lim_{x\to ۰}\frac{\sin x}{x}=۱ \qquad \lim_{x\to ۰}\frac{\tan x}{x}=۱$$

در اطراف $x=۰$ رابطهٔ $|\sin x|\leq|x|\leq|\tan x|$ برقرار است.

$$\lim_{x\to ۰}[\frac{۳\sin x}{x}]-[\frac{۲\tan x}{x}]=[۳^-]-[۲^+]=۲-۲=۰$$

محاسبهٔ حد از روی نمودار



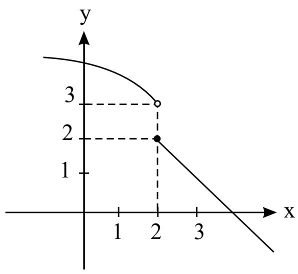
35- در شکل مقابل $\lim_{x\to ۲^+}f(x)+\lim_{x\to ۲^-}f(x)+f(۲)$ چقدر است؟

① ۱ ② ۲

③ -۳ ④ -۲

پاسخ: گزینه 4 با توجه به شکل داریم:

$$\begin{cases}\lim_{x\to ۲^+}f(x)=۱\\ \lim_{x\to ۲^-}f(x)=-۲\\ f(۲)=-۱\end{cases}\Rightarrow \lim_{x\to ۲^+}f(x)+\lim_{x\to ۲^-}f(x)+f(۲)=۱-۲-۱=-۲$$



36- نمودار تابع f بصورت مقابل است، حاصل $\lim_{x\to ۲^-}[f(x)]+\lim_{x\to ۲^+}[f(x)]$ کدام است؟

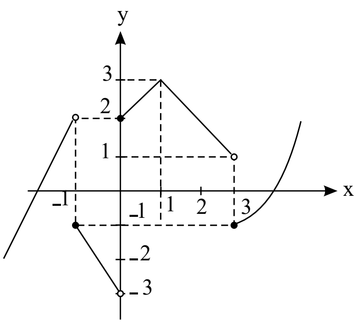
① ۵ ② ۴

③ ۳ ④ ۲

پاسخ: گزینه 2 در $x\to ۲^-$ مقادیر تابع از بالا به ۳ نزدیک می‌شوند یعنی $f(x)\to ۳^+$ و زمانی که $x\to ۲^+$ مقادیر تابع از پایین به ۲ نزدیک می‌شوند یعنی $f(x)\to ۲^-$ پس داریم:

$$\lim_{x\to ۲^+}[f(x)]+\lim_{x\to ۲^-}[f(x)]=\left[۲^-\right]+\left[۳^+\right]=۱+۳=۴$$

37- نمودار تابع f بصورت زیر است، حاصل $\lim_{x\to ۰^+}f([x])+\lim_{x\to ۳^+}[fof(x)]+۲\lim_{x\to(-۱)^-}[f(x)]$ کدام است؟



① -۳

② -۲

③ -۱

④ -۴

پاسخ: گزینه 3

$$\lim_{x\to(-۱)^-}[f(x)]+۲\lim_{x\to ۳^+}[fof(x)]+\lim_{x\to ۰^+}f([x])=\left[۲^-\right]+۲\left[f(f(۳^+))\right]+f(\left[۰^+\right])$$

$$=۱+۲\left[f((-۱)^+)\right]+f(۰)=۱+۲\left[(-۱)^-\right]+۲=۱+۲(-۲)+۲=-۱$$

38- حاصل $\lim\limits_{x\to 2^-}\left(\sqrt{4-x^2}+\left[7-\frac{4}{x}\right]\right)$ کدام است؟ (نماد [ ] جزء صحیح است)

① ۲ ② ۳ ③ ۴ ④ حد وجود ندارد

پاسخ: گزینه 3

$$\lim_{x\to 2^-}\left(\sqrt{4-x^2}+\left[7-\frac{4}{x}\right]\right)=0+\lim_{x\to 2^-}\left[7-\frac{4}{x}\right]$$

از طرفي: $x<2\Rightarrow\frac{1}{x}>\frac{1}{2}\Rightarrow-\frac{4}{x}<-2\Rightarrow 7-\frac{4}{x}<5$ و بنابراین: $\lim\limits_{x\to 2^-}\left[7-\frac{4}{x}\right]=\left[5^-\right]=4$

39- حدّ عبارت $[\sin(x-\frac{\pi}{3})]\cos 3x+[\tan^2 x]$، وقتی $x\to\frac{\pi}{3}$ کدام است؟ ([] به مفهوم جزء صحیح است.)

① ۱ ② ۲ ③ ۳ ④ ۴

پاسخ: گزینه 3

شرط وجود حد برابری حد چپ و حد راست است.

چون $x=\frac{\pi}{3}$ داخل جزء صحیح را صحیح می‌کند باید حد چپ و حد راست را جداگانه محاسبه کنیم.

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{3}^-}[\sin(x-\frac{\pi}{3})]\cos 3x+[\tan^2 x]=[-1](-1)+2=3$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{3}^+}f(x)=[0^+]\times(-1)+[3^+]=3$$

40- حاصل کدام حد زیر در $x=0$ وجود ندارد؟([ ] علامت جزء صحیح است)

① $y=x^2\left[\frac{1}{\sin x}\right]$ ② $y=(\sin x)\left[\frac{1}{x}\right]$ ③ $y=\frac{1}{x}[\sin x]$ ④ $y=\frac{1}{\sin x}[x^2]$

پاسخ: گزینه 3

می‌دانیم: $\boxed{\lim\limits_{u\to 0}\left[\frac{1}{u}\right]\sim\lim\limits_{u\to 0}\frac{1}{u}\ ,\ \lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}=1}$

به بررسی تک تک گزینه‌ها می‌پردازیم:

گزینه‌ی ۱ : $\lim\limits_{x\to 0}x^2\left[\frac{1}{\text{sinx}}\right]=\lim\limits_{x\to 0}x^2\times\frac{1}{\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}x\times\frac{x}{\sin x}=0\times 1=0$

گزینه‌ی ۲ : $\lim\limits_{x\to 0}(\sin x)\left[\frac{1}{x}\right]=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$

گزینه‌ی ۳ : $\lim\limits_{x\to 0}\frac{[\sin x]}{x}$: وجود ندارد

علت عدم وجود این حد، آن است که حاصل صورت 0 یا -1 است (زیرا زمانی که $x\to 0$ آنگاه $-1<\sin x<1$ است) اما مخرج صفر است، پس حاصل حد یا صفر یا بی‌نهایت خواهد شد.

گزینه‌ی ۴: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{\text{sinx}}[x^2]=0$

بنابراین گزینه‌ی ۳ پاسخ است.

41- چه تعداد از توابع زیر در $x = ۳$ حد ندارند؟

الف) $f(x) = \sqrt{x^۲ - ۹}$ ب) $g(x) = \sqrt{۹ - x^۲}$ ج) $h(x) = [x]$ د) $k(x) = \frac{x + ۳}{[x] - ۲}$

(۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

پاسخ: گزینه 4 باید دامنهٔ توابع را بیابیم:

الف) $f(x) = \sqrt{x^۲ - ۹}\ ,\ x^۲ - ۹ \geq ۰ \Rightarrow x \leq -۳$ یا $x \geq ۳ \Rightarrow$ تابع در همسایگی ۳ تعریف نشده

تابع در $x = ۳$ حد ندارد

ب) $g(x) = \sqrt{۹ - x^۲}\ ,\ ۹ - x^۲ \geq ۰ \Rightarrow -۳ \leq x \leq ۳ \Rightarrow$ تابع در همسایگی ۳ تعریف نشده

تابع در $x = ۳$ حد ندارد

ج) $h(x) = [x]$ حد راست $= ۳$, حد چپ $= ۲ \Rightarrow$ حد ندارد

د) $k(x) = \frac{x + ۳}{[x] - ۲}\ ,\ [x] - ۲ = ۰ \Rightarrow [x] = ۲ \Rightarrow ۲ \leq x < ۳$

$\Rightarrow D_k = \mathbb{R} - [۲,۳) \Rightarrow D_k = (-\infty, ۲) \cup [۳, +\infty)$ تابع در همسایگی ۳ تعریف نشده

تابع در $x = ۳$ حد ندارد

هر ۴ تابع در $x = ۳$ حد ندارند.