نام آزمون: صفر صفرم

علی رضا رضایی

مفاهیم مقدماتی

قضایای حد

۱-در تابع f با ضابطه‌ی $f(x)=\begin{cases} x^2+a & ; x<-2 \\ 3x+4 & ; x>-2 \end{cases}$ مقدار حد چپ در نقطه‌ی $x=-2$، عکس مقدار حد راست در این نقطه است. a کدام است؟

① ۳ ② ۳٫۵ ③ −۴ ④ −۴٫۵

پاسخ: **گزینه ۴**

$$\lim_{x\to(-2)^-} f(x)=\lim_{x\to(-2)^+}\frac{1}{f(x)} \to 4+a=\frac{1}{-6+4} \to 4+a=\frac{-1}{2}$$

$$\to 8+2a=-1 \to 2a=-9 \to a=-\frac{9}{2}=-4/5$$

۲-به ازای کدام مجموعه مقادیر a ، تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\begin{cases} (x+a)^2 & x\geq -1 \\ 2x+1 & x<-1 \end{cases}$ در نقطه‌ی $x=-1$ حد دارد؟

① $\{1\}$ ② $\{-1,1\}$ ③ $\varnothing$ ④ $\mathbb{R}$

پاسخ: **گزینه ۳ در هر نقطه‌ای که حد چپ و حد راست دو عدد برابر هم باشند تابع در آن نقطه حد دارد.**

تابع $f(x)$ زمانی در نقطه $x=-1$ دارای حد است که داشته باشیم: $\lim_{x\to(-1)^-} f(x)=\lim_{x\to(-1)^+} f(x)$ ، لذا داریم:

$$\begin{cases} \lim_{x\to(-1)^-} f(x)=\lim_{x\to(-1)^-} 2x+1=2(-1)+1=-1 \\ \lim_{x\to(-1)^+} f(x)=\lim_{x\to(-1)^+} (x+a)^2=(-1+a)^2 \end{cases} \Rightarrow (a-1)^2=-1$$

این معادله جواب ندارد لذا مجموعه ی جواب a ، $\varnothing$ است.

۳-در تابع $f(x)=\begin{cases} x+[x] & |x|<1 \\ 2x^2+3 & |x|\geq 1 \end{cases}$، حاصل $A=\lim_{x\to(-1)^-} f(x)-2\lim_{x\to 1^-} f(x)$ کدام است؟ ($[\ ]$، نماد جزء صحیح است.)

① ۱ ② ۲ ③ ۳ ④ ۴

پاسخ: گزینه ۳

$$f(x)=\begin{cases} x+[x] & , |x|<۱ \Rightarrow -۱<x<۱ \\ ۲x^۲+۳ & , |x|\geq ۱ \Rightarrow x\leq -۱ \text{ یا } x\geq ۱ \end{cases}$$

$$A=\lim_{x\to(-۱)^-} f(x)-۲\lim_{x\to ۱^-} f(x) = \lim_{x\to(-۱)^-}(۲x^۲+۳)-۲\lim_{x\to ۱^-}(x+[x])$$
$$=۲+۳-۲(۱+۰) \ =۳$$

۴-تابع با ضابطهٔ $f(x)=\begin{cases} ۱+x^۲ & , x>۰ \\ m & , x=۰ \\ ۱-x^۲ & , x<۰ \end{cases}$، به‌ازای کدام مقدار m در نقطهٔ $x=۰$ حد دارد؟

① فقط $m=۰$ ② فقط $m=۱$ ③ هر مقدار m ④ هیچ مقدار m

پاسخ: گزینه ۳

$$\lim_{x\to ۰^+} f(x)=۱+۰=۱ \quad , \quad \lim_{x\to ۰^-} f(x)=۱-۰=۱$$

این تابع در $x=۰$ حد دارد و حد تابع در $x=۰$ هیچ ربطی به مقدار تابع در $x=۰$ یعنی $f(۰)=m$ ندارد و درنتیجه m هر مقدار دلخواهی را می‌تواند اختیار کند.

۵-اگر $f(x)=\begin{cases} \tan\frac{\pi x}{۸}+۱ & ; \ |x|\leq ۲ \\ ۱-\frac{x^۲}{۲} & ; \ |x|>۲ \end{cases}$ باشد، حاصل $\lim_{x\to(-۲)^-} f(x)-\lim_{x\to ۲^-} f(x)$ کدام است؟

① -۱ ② ۱ ③ -۳ ④ -۲

پاسخ: گزینه ۳

$$f(x)=\begin{cases} \tan\frac{\pi x}{۸}+۱ & ; \ -۲\leq x\leq ۲ \\ ۱-\frac{x^۲}{۲} & ; \ x>۲ \text{ یا } x<-۲ \end{cases}$$

برای پیدا کردن حاصل $\lim_{x\to(-۲)^-} f(x)$ باید از ضابطهٔ پایینی استفاده کنیم:

$$\lim_{x\to(-۲)^-} f(x)=\lim_{x\to(-۲)^-}(۱-\frac{x^۲}{۲})=۱-\frac{(-۲)^۲}{۲}=۱-۲=-۱$$

برای پیدا کردن حاصل $\lim_{x\to ۲^-} f(x)$ باید از ضابطهٔ بالایی استفاده کنیم:

$$\lim_{x\to ۲^-} f(x)=\lim_{x\to ۲^-}(\tan\frac{\pi x}{۸}+۱)=\tan\frac{۲\pi}{۸}+۱$$
$$=\tan\frac{\pi}{۴}+۱=۱+۱=۲$$

$$\lim_{x\to(-۲)^-} f(x)-\lim_{x\to ۲^-} f(x)=-۱-۲=-۳$$

صفر صفرم

۶- حدّ عبارت $\left(1 - x^2\left[\frac{1}{x^2}\right]\right)\frac{1}{x^2}$ وقتی $x \to 0$، کدام است؟ (نماد [ ] به مفهوم جزء صحیح است.)

① صفر ② ۱ ③ ∞ ④ حدّ ندارد

پاسخ: **گزینه ۴**

می‌دانیم $0 \le u - [u] < 1$ در نتیجه با ضرب $\frac{1}{x^2}$ در عبارت داخل پرانتز داریم:

$$\frac{1}{x^2} - \left[\frac{1}{x^2}\right]$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} - \left[\frac{1}{x^2}\right] = [0, 1)$$ چون بیشمار حد در این بازه وجود دارد، پس یکتا نیست و حد وجود ندارد.

۷- حدّ عبارت $\sin\frac{x}{2}[\cos\frac{x}{2}] - \cos x[\sin 2x]$، وقتی $x \to \pi$، کدام است؟ (نماد [ ] به مفهوم جزء صحیح است.)

① -1 ② صفر ③ ۱ ④ حدّ ندارد.

پاسخ: **گزینه ۱**

شرط وجود حد برابری حد چپ و حد راست است.

$$x \to \pi^- : \ \sin\frac{\pi}{2}[0^+] - \cos\pi[0^-] = 0 - (-1)\cdot(-1) = -1$$

$$x \to \pi^+ : \ \sin\frac{\pi}{2}[0^-] - \cos\pi[0^+] = (1)\times(-1) - 0 = -1$$

۸- حد عبارت $[\frac{\sin x}{x}] + 2[\frac{x}{\sin x}]$، وقتی $x \to 0$ کدام می‌باشد؟ (نماد [ ] جزء صحیح است)

① ۱ ② ۲ ③ ۳ ④ حد ندارد

پاسخ: **گزینه ۲** می‌دانیم: $\boxed{\lim_{x\to 0}|\sin x| < \lim_{x\to 0}|x| < \lim_{x\to 0}|\tan x|}$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} < 1 \ , \ \lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x} > 1 \Rightarrow \lim_{x\to 0}\left[\frac{\sin x}{x}\right] + \lim_{x\to 0} 2\left[\frac{x}{\sin x}\right] = [1^-] + 2[1^+] = 0 + 2 = 2$$

۹- در تابع $f(x) = \begin{cases} 3 & ; x \in \mathbb{Z} \\ -2 & ; x \notin \mathbb{Z} \end{cases}$، حاصل $\lim_{x\to \frac{1}{2}} f(x) + \lim_{x\to 2} f(x) + \lim_{x\to\sqrt{2}} f(x) + f(2)$ کدام است؟

① -6 ② ۳ ③ ۹ ④ -3

پاسخ: **گزینه ۴** وقتی $x \to a$، می‌توان نتیجه گرفت که x در یک همسایگی از عدد a قرار می‌گیرد که حتماً غیرصحیح است پس: وقتی x به هر سه عدد نزدیک می‌شود مقدار حد -2 می‌شود و $f(2) = 3$ خواهد بود.

$\Rightarrow$ حاصل عبارت $= -2 + (-2) + (-2) + 3 = -3$

۱۰- با فرض $f(x) = -x^2 + 4x$، حاصل عبارت‌های $\lim_{x\to 2}[f(x)]$ و $[\lim_{x\to 2} f(x)]$ به ترتیب از راست به چپ کدام است؟ ([ ]، نماد جزء صحیح است.)

① ۴ و ۳ ② ۳ و ۳ ③ ۳ و ۴ ④ ۴ و ۴

صفر صفرم

پاسخ: گزینه ۳

$$f(x)=-x^{۲}+۴x=-(x-۲)^{۲}+۴ \;\rightarrow \begin{cases} \lim\limits_{x\to ۲^{+}}[f(x)]=[۰^{-}+۴]=[۴^{-}]=۳ \\ \lim\limits_{x\to ۲^{-}}[f(x)]=[۰^{-}+۴]=[۴^{-}]=۳ \end{cases}$$

$$\rightarrow \lim_{x\to ۲}[f(x)]=۳$$

درضمن : $\lim\limits_{x\to ۲} f(x)=۴ \rightarrow [\lim\limits_{x\to ۲} f(x)]=[۴]=۴$

۱۱-حاصل $\lim\limits_{x\to(-۱)^{-}} \dfrac{۱-x^{۲}}{[-x]-|x|}$ کدام است؟ ([ ]، نماد جزء صحیح است.)

① ۲ ② ۲- ③ ۱ ④ ۱-

پاسخ: گزینه ۱

$$x\to(-۱)^{-} :\; x<-۱ \rightarrow -x>۱ \rightarrow [-x]=۱$$

وقتی $x\to(-۱)^{-}$ داخل قدرمطلق، منفی است و قرینهٔ آن از داخل قدرمطلق بیرون می‌آید.

$$\lim_{x\to(-۱)^{-}} \frac{۱-x^{۲}}{۱-(-x)}=\lim_{x\to(-۱)^{-}} \frac{(۱-x)(۱+x)}{۱+x}=۱-(-۱)=۲$$

۱۲-حاصل حدهای $\lim\limits_{x\to ۰}\left[\dfrac{۳}{\cos x}\right]$ و $\lim\limits_{x\to ۰}[۳\sin x]$ به‌ترتیب از راست به چپ کدام است؟ ([ ]، نماد جزء صحیح است.)

① ۳ و صفر ② ۲ و صفر ③ ۳ و حد ندارد. ④ هیچ‌کدام حد ندارد.

پاسخ: گزینه ۳ هرگاه در مسائل حدی، کسینوس برابر یک شد حتما ۱^{-} است.

$$\lim_{x\to ۰}\left[\frac{۳}{\cos x}\right]=\left[\frac{۳}{۱^{-}}\right]=[۳^{+}]=۳$$

$$\left.\begin{array}{l} \text{حد راست}=\underset{\text{ناحیهٔ اول}}{\lim\limits_{x\to ۰^{+}}}[۳\sin x]=[۳\times ۰^{+}]=[۰^{+}]=۰ \\ \text{حد چپ}=\underset{\text{ناحیهٔ چهارم}}{\lim\limits_{x\to ۰^{-}}}[۳\sin x]=[۳\times ۰^{-}]=[۰^{-}]=-۱ \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to ۰}[۳\sin x] : \text{حد ندارد.}$$

۱۳-حاصل $\lim\limits_{x\to ۰}(۱-\cos x)\left[\dfrac{۱}{\sin^{۲}x}\right]$ کدام است؟ ([ ]، نماد جزء صحیح است.)

① صفر ② $\frac{۱}{۲}$ ③ ۱ ④ حد وجود ندارد.

صفر صفرم

پاسخ: گزینه ۲

می‌دانیم:

$$\boxed{\lim_{u\to 0} u\left[\frac{1}{u}\right]=1}$$

$$x\to 0 \Rightarrow \sin^2 x\to 0^+$$

حال عبارت را در $1+\cos x$ ضرب و تقسیم می‌کنیم،

$$\lim_{x\to 0}(1-\cos^2 x)\left[\frac{1}{\sin^2 x}\right]\left(\frac{1}{1+\cos x}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\sin^2 x\left[\frac{1}{\sin^2 x}\right]\right)\left(\frac{1}{1+1}\right)=1\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

۱۴-اگر تابع $f(x)=[4x]+2a[-x]$ در $x=2$ حد داشته باشد، آن‌گاه مقدار این حد کدام است؟ ([ ]، نماد جزء صحیح است.)

① $\frac{1}{2}$ ② ۵ ③ $-\frac{1}{2}$ ④ ۱۰

پاسخ: گزینه ۲ باید حد چپ و حد راست در $x=2$ برابر باشند، پس داریم:

$$\lim_{x\to 2^+}[4x]+2a[-x]=[4(2+\varepsilon)]+2a[-(2+\varepsilon)]=[8+4\varepsilon]+2a[-2-\varepsilon]$$

$$=8+2a(-3)=8-6a$$

$$\lim_{x\to 2^-}[4x]+2a[-x]=[4(2-\varepsilon)]+2a[-(2-\varepsilon)]=[8-4\varepsilon]+2a[-2+\varepsilon]$$

$$=7+2a(-2)=7-4a\Rightarrow 7-4a=8-6a\Rightarrow 2a=1\Rightarrow a=\frac{1}{2}$$

$$\text{مقدار حد}=8-6a=8-6\times\frac{1}{2}=8-3=5$$

۱۵-اگر در تابع $f(x)=\begin{cases}\frac{k\sin(x-1)}{x^2-1} & ;[x]=0\\ [-x]+[x] & ;[x]=1\end{cases}$، مجموع حد چپ و راست در نقطهٔ $x=1$ برابر با مقدار تابع در آن نقطه باشد، آن‌گاه مقدار k کدام است؟ ([ ]، نماد جزء صحیح است.)

① ۴ ② ۱ ③ ۲ ④ -2

پاسخ: گزینه ۳ در توابع چند ضابطه‌ای باید ابتدا دامنه تابع را از حالت براکتی و قدر مطلقی خارج کنیم یعنی:

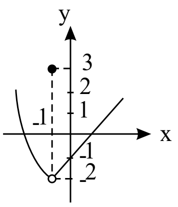
$$[x]=0\Rightarrow \quad 0\le x<1$$
$$[x]=1\Rightarrow \quad 1\le x<2$$

$$f(x)=\begin{cases}\frac{k\sin(x-1)}{x^2-1} & ;0\le x<1\\ [x]+[-x] & ;1\le x<2\end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{k\sin(x-1)}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{k(x-1)}{(x-1)(x+1)}=\dfrac{k}{2}\\ \lim\limits_{x\to 1^+}[x]+[-x]=\left[1^+\right]+\left[-(1^+)\right]=1-2=-1\\ f(1)=[1]+[-1]=0\end{array}\right\}\Rightarrow \dfrac{k}{2}+(-1)=0\Rightarrow k=2$$

حد از روی نمودار

۱۶- نمودار تابع f بصورت مقابل است. حاصل $2\lim\limits_{x\to -1} f(x)-3f(-1)$ کدام است؟



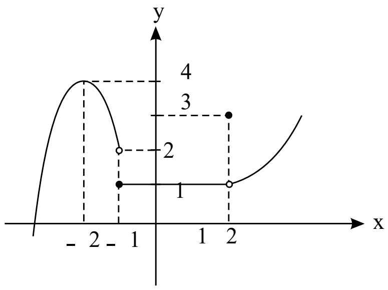
① ۱۳ ② ۵

③ ۵- ④ ۱۳-

پاسخ: گزینه ۴

$$2\lim_{x\to -1} f(x)-3f(-1)=2\times(-2)-3\times 3=-4-9=-13$$

۱۷- با توجه به نمودار تابع f، کدام گزینه نادرست است؟



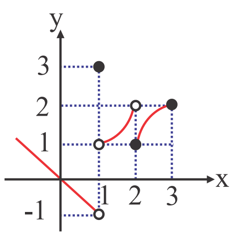
① $\lim\limits_{x\to(-1)^-} f(x)=2$ ② $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=1$

③ $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=3$ ④ $\lim\limits_{x\to(-1)^+} f(x)=1$

پاسخ: گزینه ۳ با توجه به شکل اگر x از راست به ۲ نزدیک شود تابع به ۱ نزدیک می‌شود و اگر x از چپ به ۲ نزدیک شود تابع دقیقاً برابر یک است. پس داریم:

$$\lim_{x\to 2} f(x)=1$$

۱۸- نمودار f به‌صورت مقابل است. حاصل $\lim\limits_{x\to 2^+}[fofof(x)]$ کدام است؟ ([] نماد جزء صحیح است.)



① ۱ ② ۱-

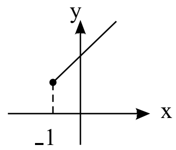
③ ۲ ④ ۳

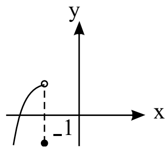
پاسخ: گزینه ۱

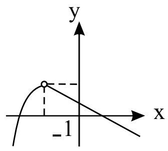
در توابع ترکیبی برای محاسبه حد بهتر است ابتدا حد عبارت داخلی را با مشخص نمودن جهت آن (مثبت یا منفی) محاسبه کنیم و سپس با عدد بدست آمده حد عبارت بیرونی را محاسبه کنیم.

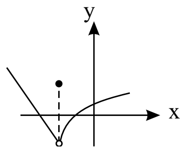
$$\lim_{x\to 2^+}[fofof(x)]=[fof(f(2^+))]=[fof(1^+)]=[f(1^+)]=[1^+]=1$$

۱۹-در کدام گزینه تابع در همسایگی نقطه $x = -۱$ تعریف شده است، در این نقطه حد دارد و حد تابع غیر از مقدار تابع است.

① 

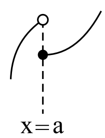
② 

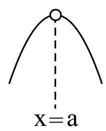
③ 

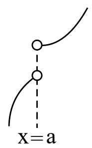
④ 

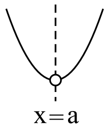
پاسخ: گزینه ۴ در گزینه‌های ۱ و ۲ تابع در همسایگی $x = -۱$ تعریف نشده است. در گزینه ۳ تابع در نقطهٔ $x = -۱$ تعریف نشده است هر چند در این نقطه حد دارد. در گزینهٔ ۴ حد و مقدار تابع در $x = -۱$ وجود دارند ولی برابر نیستند.

۲۰-تابع مربوط به کدام نمودار، در $x = a$ تعریف‌شده نیست و حد ندارد؟

① 

② 

③ 

④ 

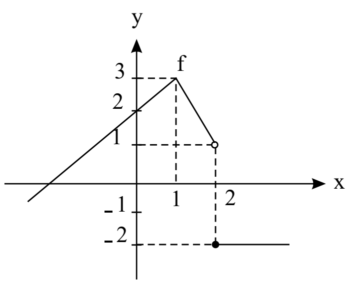
پاسخ: گزینه ۳ گزینهٔ ۱) تابع در $x = a$ تعریف‌شده است ولی حد ندارد، زیرا حد چپ و راست در این نقطه، دو عدد متفاوت هستند.

گزینهٔ ۲) تابع در $x = a$ تعریف نشده ولی در این نقطه حد دارد.

گزینهٔ ۳) تابع در $x = a$ تعریف نشده و حد هم ندارد، زیرا حد چپ و راست در این نقطه، دو عدد متفاوت هستند.

گزینهٔ ۴) تابع در $x = a$ تعریف نشده ولی در این نقطه حد دارد.

۲۱-نمودار تابع f بصورت مقابل است. حاصل $\lim\limits_{x\to ۱}[f(x)] + \left[\lim\limits_{x\to ۱} f(x)\right] + \lim\limits_{x\to ۲^+}[f(x)]$ کدام است؟



① ۳

② -۲

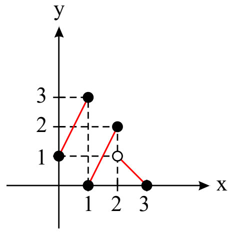
③ ۲

④ صفر

پاسخ: گزینه ۱ زمانی که $x \to ۲^+$ مقدار تابع دقیقاً برابر -۲ است و زمانی که $x \to ۱$ و حد تابع برابر ۳ است (چون عبارت $\lim$ داخل براکت آمده است پس مهم نیست $f(x)$ از بالا به ۳ نزدیک می‌شود یا از پایین. بلکه مقدار حد برابر ۳ است و براکت آن یعنی $[۳]$ برابر ۳ می‌شود.) پس داریم:

$$\lim_{x\to ۲^+}[f(x)] + \left[\lim_{x\to ۱} f(x)\right] + \lim_{x\to ۱}[f(x)] = [-۲] + [۳] + \left[۳^-\right] = -۲ + ۳ + ۲ = ۳$$

۲۲–نمودار تابع f در شکل زیر رسم شده است. حاصل $\lim\limits_{x\to ۰}[f(۲-x^۲)]$ کدام است؟ ([ ]، نماد جزء صحیح است.)



① صفر
② ۳
③ ۱
④ ۲

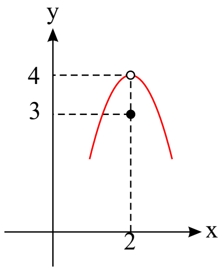
پاسخ: گزینه ۳ در همسایگی $x=۰$ ، مقدار تابع $y=۲-x^۲$ کمتر از ۲ است و داریم:

$$\lim_{x\to ۰}[f(۲-x^۲)]=\lim_{x\to ۲^-}[f(x)]$$

حال از روی نمودار واضح است که مقدار تابع f در همسایگی چپ $x=۲$ ، کم‌تر از ۲ است و در نتیجه $[f(x)]=۱$ است.

$$\Rightarrow \lim_{x\to ۰}[f(۲-x^۲)]=۱$$

۲۳–نمودار تابع f به‌صورت مقابل است. حاصل $۲\lim\limits_{x\to ۲}[f(x)]-\left[\lim\limits_{x\to ۲}f(x)\right]$ کدام است؟ ([ ]، نماد جزء صحیح است.)

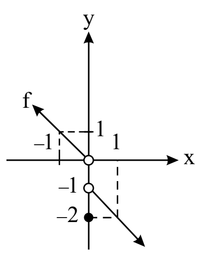


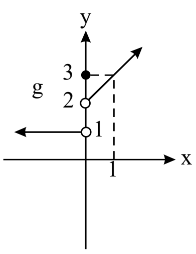
① ۱
② ۲
③ ۳
④ ۴

پاسخ: گزینه ۲ در $x\to ۲$ مقادیر تابع از پایین به ۴ نزدیک می‌شوند.

$$۲\lim_{x\to ۲}[f(x)]-\left[\lim_{x\to ۲}f(x)\right]=۲[۴^-]-[۴]=۲\times ۳-۴=۲$$

۲۴–نمودار f و g به صورت مقابل رسم شده‌اند. حاصل $\lim\limits_{x\to ۰}(f(x)+g(x))$ کدام است؟





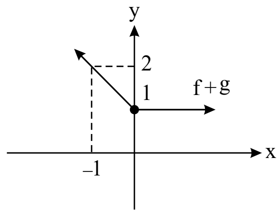
① ۱
② -۱
③ صفر
④ وجود ندارد.

پاسخ: گزینه ۱

$$g(x)=\begin{cases} x+۲ & ,\ x>۰ \\ ۳ & ,\ x=۰ \\ ۱ & ,\ x<۰ \end{cases} \quad , \quad f(x)=\begin{cases} -x-۱ & ,\ x>۰ \\ -۲ & ,\ x=۰ \\ -x & ,\ x<۰ \end{cases}$$

تابع $f(x)+g(x)$ را می‌یابیم.

$$f(x)+g(x)=\begin{cases} ۱ & , x>۰ \\ ۱ & , x=۰ \\ ۱-x & , x<۰ \end{cases} \Rightarrow$$



$$\Rightarrow \lim_{x\to ۰}(f(x)+g(x))=۱$$

رفع ابهام ۰/۰

چند جمله‌ای‌ها

۲۵- حاصل $\lim_{x\to ۳^-} \dfrac{x^۲[x]-۱۸}{x[x]-۶}$ کدام است؟ ($[\ ]$، نماد جزء صحیح است.)

① ۴ ② ۸ ③ ۶ ④ ۱۸

پاسخ: گزینه ۳ ابتدا باید براکت را تعیین عدد کنیم.

همسایگی چپ ۳ را می‌توان به صورت $۲<x<۳$ نشان داد، آن‌گاه $[x]=۲$ بنابراین:

$$\lim_{x\to ۳^-} \frac{x^۲[x]-۱۸}{x[x]-۶}=\lim_{x\to ۳^-} \frac{x^۲[۳^-]-۱۸}{x[۳^-]-۶}=\lim_{x\to ۲^-} \frac{۲x^۲-۱۸}{۲x-۶}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to ۳^-} \frac{۲(x^۲-۹)}{۲(x-۳)}=\lim_{x\to ۳^-} \frac{\cancel{۲}\ \cancel{(x-۳)}\ (x+۳)}{\cancel{۲}\ \cancel{(x-۳)}}=۶$$

۲۶- حاصل $\lim_{x\to ۱} \dfrac{x^۵-۱}{x^۷-۱}$ کدام است؟

① $\frac{۵}{۷}$ ② $\frac{۷}{۵}$ ③ $-\frac{۵}{۷}$ ④ $-\frac{۷}{۵}$

پاسخ: گزینه ۱ نکته:

$$x^n-۱=(x-۱)(x^{n-۱}+x^{n-۲}+\cdots+x+۱)$$

$$\lim_{x\to ۱} \frac{x^۵-۱}{x^۷-۱}=lim_{x\to ۱} \frac{(x-۱)(x^۴+x^۳+x^۲+x+۱)}{(x-۱)(x^۶+x^۵+\cdots+x+۱)}=\lim_{x\to ۱} \frac{x^۴+x^۳+x^۲+x+۱}{x^۶+x^۵+\cdots+x+۱}=\frac{۵}{۷}$$

۲۷- حاصل $\lim_{x\to ۲} \dfrac{۲x^۳-۴x^۲+۳x-۶}{۳x^۲-x-۱۰}$ کدام است؟

① صفر ② ۱ ③ ۲ ④ ۳

پاسخ: گزینه ۲

روش اول:

$$\lim_{x\to ۲} \frac{۲x^۳-۴x^۲+۳x-۶}{۳x^۲-x-۱۰}=\frac{۰}{۰}\to \lim_{x\to ۲} \frac{۲x^۲(x-۲)+۳(x-۲)}{(x-۲)(۳x+۵)}=\lim_{x\to ۲} \frac{(x-۲)(۲x^۲+۳)}{(x-۲)(۳x+۵)}$$

$$= \lim_{x\to ۲} \frac{۲x^۲+۳}{۳x+۵} = \frac{۸+۳}{۶+۵} = \frac{۱۱}{۱۱} = ۱$$

روش دوم: از روش هوپیتال استفاده می‌کنیم:

$$\lim_{x\to ۲} \frac{۲x^۳-۴x^۲+۳x-۶}{۳x^۲-x-۱۰} = \frac{۰}{۰} \xrightarrow{Hop} \lim_{x\to ۲} \frac{۶x^۲-۸x+۳}{۶x-۱} = \frac{۱۱}{۱۱} = ۱$$

۲۸-اگر $\lim_{x\to ۰} \frac{\sqrt{ax+b}-۲}{x} = \frac{۱}{۲}$ **باشد. در این صورت نقطه میانی بازه‌ی** (a,b) **کدام است؟**

① ۱ ② ۲ ③ ۳ ④ ۴

پاسخ: گزینه ۳ با توجه به اینکه مخرج کسر برابر صفر بوده و حاصل حد برابر عدد است، پس می‌بایست $x=۰$ **صورت کسر را نیز صفر کند و در نهایت پس از رفع ابهام** $\frac{۰}{۰}$ **حاصل حد برابر** $\frac{۱}{۲}$ **شود.**

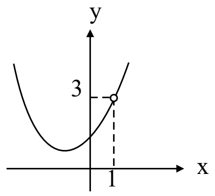
$$\sqrt{ax+b}-۲ \overset{x=۰}{\to} \sqrt{a(۰)+b}-۲ = ۰ \to \sqrt{b} = ۲ \to b = ۴$$

$$\lim_{x\to ۰} \frac{\sqrt{ax+۴}-۲}{x} = \frac{۰}{۰} \to Hop = \lim_{x\to ۰} \frac{\frac{a}{۲\sqrt{ax+۴}}}{۱} = \frac{۱}{۲}$$

$$\frac{a}{۴} = \frac{۱}{۲} \to a = ۲$$

بازه‌ی باز (a,b) **به صورت** $(۲,۴)$ **است و نقطه‌ی میانی آن** $\frac{۲+۴}{۲} = ۳$

۲۹-نمودار تابع $f(x) = \frac{bx^۳-۱}{x+a}$ **به شکل مقابل است. مقدار** $a-b$ **کدام است؟**



① ۲ ② ۱

③ ۲- ④ صفر

پاسخ: گزینه ۳ اگر در یک منحنی نقطهٔ خالی وجود داشته باشد آن نقطه هم ریشهٔ صورت و هم ریشهٔ مخرج است.

واضح است که تابع در $x=۱$ **تعریف نشده است. پس داریم:** $a=-۱$

همچنین حد تابع در $x=۱$ **وجود دارد و برابر ۳ است یعنی:** $\lim_{x\to ۱} \frac{bx^۳-۱}{x-۱} = ۳$

بنابراین صورت کسر باید عامل $x-۱$ **داشته باشد تا با مخرج حذف شود و سپس مقدار حد محاسبه شود. پس داریم:**

$$b(۱)^۳-۱ = ۰ \Rightarrow b = ۱ \Rightarrow a-b = -۱-۱ = -۲$$

۳۰-اگر $L = \lim_{x\to ۲} \frac{۲^x+۲^{a-x}-۶}{۲^{۲-x}+۲^x-۵}$ **باشد، مقدار** $L \in \mathbb{R}$ **کدام است؟**

① $\frac{۳}{۲}$ ② $\frac{۲}{۳}$ ③ $\frac{۴}{۳}$ ④ $\frac{۳}{۴}$

پاسخ: گزینه ۲ باتوجه به این که مخرج کسر وقتی $x\to ۲$ **، به صفر میل می‌کند، باید صورت کسر هم دارای حد صفر**

باشد در غیر این صورت L متناهی نمی‌شود:

$$2^2+2^{a-2}-6=0 \Rightarrow 2^{a-2}=2 \Rightarrow a-2=1 \Rightarrow a=3$$

به ازای $a=3$ خواهیم داشت:

$$L=\lim_{x\to 2}\frac{2^x+2^3\times 2^{-x}-6}{2^2\times 2^{-x}+2^x-5}=\lim_{x\to 2}\frac{2^x+\dfrac{8}{2^x}-6}{\dfrac{4}{2^x}+2^x-5}=\lim_{x\to 2}\frac{(2^x)^2-6(2^x)+8}{(2^x)^2-5(2^x)+4}$$

به کمک تغییر متغیر $t=2^x$ ، حاصل حد را به صورت ساده‌تر می‌نویسیم: (چون $x\to 2$ میل می کند باید t به ۴ میل کند.)

$$L=\lim_{t\to 4}\frac{t^2-6t+8}{t^2-5t+4}=\lim_{t\to 4}\frac{(t-4)(t-2)}{(t-4)(t-1)}=\frac{4-2}{4-1}=\frac{2}{3}$$

۳۱-حاصل حد $\dfrac{\log_2^x-\log_x^2}{\log_2^{(\frac{x}{2})^2}}$ وقتی $x\to 2$ کدام است؟

① ۱ ② $\frac{1}{2}$ ③ ۲ ④ ۴

پاسخ: گزینه ۱ می‌دانیم $\log_x^2=\dfrac{1}{\log_2^x}$ پس:

$$\log_2^x-\frac{1}{\log_2^x}=\frac{(\log_2^x)^2-1}{\log_2^x}=\frac{(\log_2^x-1)(\log_2^x+1)}{\log_2^x}$$

از طرفی:

$$\log_2^{(\frac{x}{2})^2}=2\log_2^{\frac{|x|}{2}}\overset{x>0}{=\!=}2(\log_2^x-\log_2^2)=2(\log_2^x-1)$$

داریم:

$$\lim_{x\to 2}\frac{\log_2^x-\log_x^2}{\log_2(\frac{x}{2})^2}=\lim_{x\to 2}\frac{(\log_2^x-1)(\log_2^x+1)}{2(\log_2^x-1)\times\log_2^x}$$

$$\lim_{x\to 2}\frac{\log_2^x+1}{2\log_2^x}=\frac{1+1}{2\times 1}=1$$

۳۲-اگر $b\in\mathbb{R}$ و $\lim_{x\to 1}\dfrac{2-\sqrt{x^2+ax}}{x^2-3x+2}=b$ باشد، حاصل $a-b$ کدام است؟

① $\frac{5}{4}$ ② $\frac{7}{4}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ $\frac{9}{4}$

پاسخ: گزینه ۲ حد مخرج در نقطهٔ $x=1$ برابر صفر است، پس برای اینکه حاصل حد عبارت کسری عدد حقیقی شود، لازم است حد صورت نیز در نقطهٔ $x=1$ برابر صفر شود.

$$\Rightarrow ۲-\sqrt{۱^۲+a}=۰\Rightarrow a=۳$$

حال حد موردنظر به‌صورت زیر خواهد بود:

$$\lim_{x\to ۱}\frac{۲-\sqrt{x^۲+۳x}}{x^۲-۳x+۲}=\frac{۰}{۰}\ \text{ابهام}$$

روش اول: با ضرب صورت و مخرج کسر در مزدوج عبارت صورت داریم:

$$=\lim_{x\to ۱}\frac{-(۲-\sqrt{x^۲+۳x})(۲+\sqrt{x^۲+۳x})}{(x^۲-۳x+۲)\underbrace{(۲+\sqrt{x^۲+۳x})}_{۴}}=\lim_{x\to ۱}\frac{-(x^۲+۳x-۴)}{۴(x^۲-۳x+۲)}$$

$$=\lim_{x\to ۱}\frac{-(x+۴)(x-۱)}{۴(x-۲)(x-۱)}=\lim_{x\to ۱}\frac{-(x+۴)}{۴(x-۲)}=\frac{-۵}{-۴}=\frac{۵}{۴}\Rightarrow b=\frac{۵}{۴}\Rightarrow a-b=۳-\frac{۵}{۴}=\frac{۷}{۴}$$

روش دوم:

با استفاده از قاعدهٔ هوپیتال داریم:

$$\lim_{x\to ۱}\frac{۲-\sqrt{x^۲+۳x}}{x^۲-۳x+۲}=\lim_{x\to ۱}\frac{-\frac{۲x+۳}{۲\sqrt{x^۲+۳x}}}{۲x-۳}=\frac{-\frac{۵}{۴}}{-۱}=\frac{۵}{۴}\Rightarrow b=\frac{۵}{۴}\Rightarrow a-b=۳-\frac{۵}{۳}=\frac{۷}{۴}$$

رادیکالی

۳۳-حاصل $\lim_{x\to -۱}\frac{۲x^۲+۵x+۳}{۲-\sqrt{۲+\sqrt{۳-x}}}$ ، کدام است؟

① ۸ ② ۱۲ ③ ۱۶ ④ ۲۴

پاسخ: گزینه ۳

روش اول: مخرج کسر را گویا می‌کنیم:

$$\lim_{x\to -۱}\frac{۲x^۲+۵x+۳}{۲-\sqrt{۲+\sqrt{۳-x}}}=\lim_{x\to -۱}\frac{(x+۱)(۲x+۳)(۲+\sqrt{۲+\sqrt{۳-x}})}{(۴-۲-\sqrt{۳-x})}$$

$$=\lim_{x\to -۱}\frac{(x+۱)(۱)(۴)(۲+\sqrt{۳-x})}{(۲-\sqrt{۳-x})(۲+\sqrt{۳-x})}=\lim_{x\to -۱}\frac{(x+۱)(۱)(۴)(۴)}{(۴-۳+x)}=۱۶$$

روش دوم: با استفاده از هوپیتال:

$$\lim_{x\to -۱}\frac{۲x^۲+۵x+۳}{۲-\sqrt{۲+\sqrt{۳-x}}}=\frac{۰}{۰}\xrightarrow{HOP}\lim_{x\to -۱}\frac{۴x+۵}{-\frac{\frac{-۱}{۲\sqrt{۳-x}}}{۲\sqrt{۲+\sqrt{۳-x}}}}=\frac{۱}{\frac{\frac{۱}{۴}}{۴}}=\frac{۱}{\frac{۱}{۱۶}}=۱۶$$

۳۴-حد عبارت $\dfrac{x^2+10x+16}{12+6\sqrt[3]{x}}$، وقتی $x\to -8$، کدام است؟

① -24 ② -18 ③ -12 ④ -6

پاسخ: گزینه ۳ روش اول:

با ابهام $\frac{0}{0}$ مواجه هستیم که برای رفع ابهام از اتحاد چاق‌ولاغر کمک می‌گیریم $\Big((a+b)(a^2+b^2-ab)=a^3+b^3\Big)$

$$\lim_{x\to -8}\frac{x^2+10x+16}{6(2+\sqrt[3]{x})}\times\frac{4+\sqrt[3]{x^2}-2\sqrt[3]{x}}{4+\sqrt[3]{x^2}-2\sqrt[3]{x}}=\lim_{x\to -8}\frac{(x+8)(x+2)(4+\sqrt[3]{x^2}-2\sqrt[3]{x})}{6(8+x)}$$

$$=\lim_{x\to -8}\frac{(x+2)(4+\sqrt[3]{x^2}-2\sqrt[3]{x})}{6}=\frac{-6(12)}{6}=-12$$

روش دوم:

از قاعدهٔ هوپیتال استفاده می‌کنیم.

$$\lim_{x\to -8}\frac{x^2+10x+16}{12+6\sqrt[3]{x}}=\frac{0}{0}\xrightarrow{HOP}\lim_{x\to -8}\frac{2x+10}{6\left(\dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}\right)}=\frac{-6}{6\left(\dfrac{1}{12}\right)}=-12$$

۳۵-حاصل $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{2x}-2}{x^2-3x+2}$ کدام است؟

① ۱ ② $\frac{1}{2}$ ③ ۲ ④ $\frac{1}{4}$

پاسخ: گزینه ۲ روش اول: حد داده‌شده دارای ابهام $\frac{0}{0}$ است و برای رفع ابهام، عبارت را در مزدوج صورت، ضرب و تقسیم می‌کنیم.

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{2x}-2}{x^2-3x+2}\times\frac{\sqrt{2x}+2}{\sqrt{2x}+2}=\lim_{x\to 2}\frac{2x-4}{(x-2)(x-1)(\sqrt{2x}+2)}$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{2(x-2)}{(x-2)(x-1)(\sqrt{2x}+2)}=\lim_{x\to 2}\frac{2}{(x-1)(\sqrt{2x}+2)}=\frac{2}{1\times 4}=\frac{1}{2}$$

روش دوم: برای رفع ابهام از قاعدهٔ هوپیتال استفاده می‌کنیم.

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{2x}-2}{x^2-3x+2}=\frac{0}{0}\xrightarrow{Hop}\lim_{x\to 2}\frac{\frac{1(2)}{2\sqrt{2x}}}{2x-3}=\frac{\frac{1}{2}}{1}=\frac{1}{2}$$

۳۶-حاصل $\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{2-\sqrt[3]{x+6}}{\sqrt{x^2-4x+4}}$ کدام است؟

① $-\frac{1}{6}$ ② $-\frac{1}{12}$ ③ $\frac{1}{12}$ ④ $\frac{1}{6}$

پاسخ: **گزینه ۲**

$$\lim_{x\to 2^+}\frac{2-\sqrt[3]{x+6}}{\sqrt{x^2-4x+4}}=\lim_{x\to 2^+}\frac{2-\sqrt[3]{x+6}}{\sqrt{(x-2)^2}}=\lim_{x\to 2^+}\frac{2-\sqrt[3]{x+6}}{\underbrace{|x-2|}_{+}}$$

$$=\lim_{x\to 2^+}\frac{2-\sqrt[3]{x+6}}{x-2}=\frac{0}{0}\xrightarrow{HOP}\lim_{x\to 2^+}\frac{-\frac{1}{3\sqrt[3]{(x+6)^2}}}{1}=-\frac{1}{12}$$

۳۷-حاصل $\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{x^2-[x+1]}{2x-\sqrt{x}-1}$ برابر کدام است؟

① 2 ② $\frac{2}{3}$ ③ $\frac{4}{3}$ ④ 4

پاسخ: **گزینه ۳**

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{x^2-[x+1]}{2x-\sqrt{x}-1}=\lim_{x\to 1^-}\frac{x^2-[x]-1}{2x-\sqrt{x}-1}=\lim_{x\to 1^-}\frac{x^2-1}{2x-1-\sqrt{x}}=\frac{0}{0}$$

$$\to\lim_{x\to 1^-}\frac{x^2-1}{2x-1-\sqrt{x}}\times\frac{2x-1+\sqrt{x}}{2x-1+\sqrt{x}}$$

$$=\lim_{x\to 1^-}\frac{(x^2-1)(2x-1+\sqrt{x})}{(2x-1)^2-(\sqrt{x})^2}=\lim_{x\to 1^-}\frac{(x^2-1)(2x-1+\sqrt{x})}{4x^2-5x+1}$$

$$=\lim_{x\to 1^-}\frac{(x+1)(x-1)(2x-1+\sqrt{x})}{(x-1)(4x-1)}=\frac{(2)(2)}{3}=\frac{4}{3}$$

البته توجه کنید که حد داده شده را به راحتی به روش هوپیتال می‌توان حل کرد.

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{x^2-1}{2x-1-\sqrt{x}}=\frac{0}{0}\xrightarrow{HOP}\lim_{x\to 1^-}\frac{2x}{2-\frac{1}{2\sqrt{x}}}=\frac{2}{2-\frac{1}{2}}=\frac{2}{\frac{3}{2}}=\frac{4}{3}$$

۳۸-حاصل $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x+\sqrt{2x+8}}{x+2}$ برابر کدام است؟

① $\frac{3}{2}$ ② $\frac{5}{2}$ ③ $\frac{-3}{2}$ ④ $\frac{-5}{2}$

پاسخ: گزینه ۱ روش اول: عبارت را در مزدوج صورت، ضرب و تقسیم می‌کنیم.

$$\lim_{x\to -۲}\frac{x+\sqrt{۲x+۸}}{x+۲}=\lim_{x\to -۲}\frac{(x+\sqrt{۲x+۸})(x-\sqrt{۲x+۸})}{(x+۲)(x-\sqrt{۲x+۸})}$$

$$=\lim_{x\to -۲}\frac{x^۲-۲x-۸}{(x+۲)(x-\sqrt{۲x+۸})}=\lim_{x\to -۲}\frac{(x+۲)(x-۴)}{(x+۲)(x-\sqrt{۲x+۸})}=\frac{-۶}{-۴}=\frac{۳}{۲}$$

روش دوم:

$$\lim_{x\to -۲}\frac{x+\sqrt{۲x+۸}}{x+۲}=\frac{۰}{۰}\xrightarrow{HOP}\lim_{x\to -۲}\frac{۱+\dfrac{۲}{۲\sqrt{۲x+۸}}}{۱}=\frac{۱+\dfrac{۱}{۲}}{۱}=\frac{۳}{۲}$$

۳۹-حاصل $\lim\limits_{x\to ۳}\dfrac{\sqrt{x+۱}-x+۱}{۹-x^۲}$ کدام است؟

① $\frac{۱}{۸}$ ② $-\frac{۱}{۸}$ ③ $\frac{۱}{۲۴}$ ④ $-\frac{۱}{۲۴}$

پاسخ: گزینه ۱ روش اول: حد داده‌شده دارای ابهام $\frac{۰}{۰}$ است و برای رفع ابهام، عبارت را در مزدوج صورت، ضرب و تقسیم می‌کنیم.

$$\lim_{x\to ۳}\frac{\sqrt{x+۱}-(x-۱)}{۹-x^۲}\times\frac{\sqrt{x+۱}+(x-۱)}{\sqrt{x+۱}+(x-۱)}=\lim_{x\to ۳}\frac{x+۱-(x-۱)^۲}{(۹-x^۲)(\sqrt{x+۱}+x-۱)}$$

$$=\lim_{x\to ۳}\frac{x+۱-x^۲+۲x-۱}{(۹-x^۲)(\sqrt{x+۱}+x-۱)}=\lim_{x\to ۳}\frac{۳x-x^۲}{(۹-x^۲)(\sqrt{x+۱}+x-۱)}$$

$$=\lim_{x\to ۳}\frac{x(۳-x)}{(۳-x)(۳+x)(\sqrt{x+۱}+x-۱)}=\lim_{x\to ۳}\frac{x}{(۳+x)(\sqrt{x+۱}+x-۱)}=\frac{۳}{۶\times ۴}=\frac{۱}{۸}$$

روش دوم: برای رفع ابهام از قاعدهٔ هوپیتال استفاده می‌کنیم.

$$\lim_{x\to ۳}\frac{\sqrt{x+۱}-x+۱}{۹-x^۲}=\frac{۰}{۰}\xrightarrow{Hop}\lim_{x\to ۳}\frac{\dfrac{۱}{۲\sqrt{x+۱}}-۱}{-۲x}=\frac{\dfrac{۱}{۴}-۱}{-۶}=\frac{-\dfrac{۳}{۴}}{-۶}=\frac{۱}{۸}$$

صفر صفرم

۴۰-اگر $\lim\limits_{x\to ۴} \dfrac{x^۲+ax-۴}{۳-\sqrt{۲x+۱}} = L$ باشد، حاصل $a-L$ کدام است؟ ($L\in R$)

① -۱۲ ② ۱۲ ③ -۱۸ ④ ۱۸

پاسخ: گزینه ۲ زمانی که $x\to ۴$ حد مخرج کسر صفر می‌شود، بنابراین باید حد صورت کسر هم صفر شود تا مبهم صفر صفرم ایجاد شده و پس از رفع ابهام حاصل حد برابر عددی مانند L شود.

$$\lim_{x\to ۴}(x^۲+ax-۴)=۰ \Rightarrow ۱۶+۴a-۴=۰ \Rightarrow ۴a=-۱۲ \Rightarrow a=-۳$$

حال مقدار a را قرار داده و حاصل حد را می‌یابیم.

$$\lim_{x\to ۴}\frac{x^۲-۳x-۴}{۳-\sqrt{۲x+۱}}\times\frac{۳+\sqrt{۲x+۱}}{۳+\sqrt{۲x+۱}}=\lim_{x\to ۴}\frac{(x-۴)(x+۱)(۳+\sqrt{۲x+۱})}{۹-۲x-۱}$$

$$=\lim_{x\to ۴}\frac{(x-۴)(x+۱)(۳+\sqrt{۲x+۱})}{-۲(x-۴)}=\lim_{x\to ۴}\frac{(x+۱)(۳+\sqrt{۲x+۱})}{-۲}=\frac{۵\times ۶}{-۲}=-۱۵$$

$$L=-۱۵\Rightarrow a-L=-۳-(-۱۵)=۱۲$$

۴۱-حاصل $\lim\limits_{x\to ۱}\dfrac{۲x-۷\sqrt{x}+۵}{۲x-\sqrt{۳x+۱}}$، کدام است؟

① $-۱/۵$ ② $-۱/۲$ ③ $-۰/۸$ ④ $-۰/۶$

پاسخ: گزینه ۲ روش اول: از اتحاد مزدوج برای رفع ابهام، استفاده می‌کنیم.

$$\lim_{x\to ۱}\frac{۲x-۷\sqrt{x}+۵}{۲x-\sqrt{۳x+۱}}=\lim_{x\to ۱}\frac{(۲x+۵)-۷\sqrt{x}}{۲x-\sqrt{۳x+۱}}\times\frac{(۲x+۵)+۷\sqrt{x}}{(۲x+۵)+۷\sqrt{x}}\times\frac{۲x+\sqrt{۳x+۱}}{۲x+\sqrt{۳x+۱}}$$

$$=\lim_{x\to ۱}\frac{(۲x-۵)^۲-۴۹x}{۴x^۲-(۳x+۱)}\times\frac{۲x+\sqrt{۳x+۱}}{(۲x+۵)+۷\sqrt{x}}=\lim_{x\to ۱}\frac{۴x^۲-۲۹x+۲۵}{۴x^۲-۳x-۱}\times\frac{۲x+\sqrt{۳x+۱}}{(۲x+۵)+۷\sqrt{x}}$$

$$=\lim_{x\to ۱}\frac{(x-۱)(۴x-۲۵)}{(x-۱)(۴x+۱)}\times\frac{۲x+\sqrt{۳x+۱}}{(۲x+۵)+۷\sqrt{x}}=\frac{-۲۱}{۵}\times\frac{۴}{۱۴}=-۱/۲$$

روش دوم: از قاعدهٔ هوپیتال کمک می‌گیریم.

$$\lim_{x\to ۱}\frac{۲x-۷\sqrt{x}+۵}{۲x-\sqrt{۳x+۱}}=\frac{۰}{۰}\xrightarrow{HOP}\lim_{x\to ۱}\frac{۲-۷(\frac{۱}{۲\sqrt{x}})}{۲-\frac{۱(۳)}{۲\sqrt{۳x+۱}}}=\frac{۲-\frac{۷}{۲}}{۲-\frac{۳}{۴}}=\frac{\frac{-۳}{۲}}{\frac{۵}{۴}}=-۱/۲$$

مثلثاتی

۴۲-حاصل $\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{\sin^2 \pi x}{[x]+\cos \pi x}$ **، کدام است؟**

① ۱　② ۲　③ π　④ 2π

پاسخ: **گزینه ۲**

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{\sin^2 \pi x}{[x]+\cos \pi x} = \lim_{x\to 1^+} \frac{1-\cos^2 \pi x}{1+\cos \pi x} = \lim_{x\to 1^+} \frac{(1-\cos \pi x)(1+\cos \pi x)}{1+\cos \pi x}$$

$$\lim_{x\to 1^+} (1-\cos \pi x) = 1-\cos \pi = 1-(-1) = 2$$

۴۳-حاصل $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos^4 x - \cos^2 x}{\sin^2 x}$ **کدام است؟**

① -1　② ۱　③ صفر　④ ۲

پاسخ: **گزینه ۱**

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos^4 x - \cos^2 x}{\sin^2 x} = \frac{0}{0} \to \lim_{x\to 0} \frac{\cos^2 x(\cos^2 x - 1)}{1-\cos^2 x}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{-\cos^2 x(1-\cos^2 x)}{1-\cos^2 x} = \lim_{x\to 0}(-\cos^2 x) = -1$$

۴۴-حاصل $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\sqrt{\cos x}}{\sin^2 x}$ **کدام است؟**

① ∞　② ۳　③ $\frac{1}{2}$　④ $\frac{1}{4}$

پاسخ: **گزینه ۴**

$$\frac{\text{os}\,x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{(1-\sqrt{\cos x})}{(1-\cos x)(1+\cos x)} = \lim_{x\to 0} \frac{(1-\sqrt{\cos x})}{(1-\sqrt{\cos x})(1+\sqrt{\cos x})(1+\cos x)} = \frac{1}{2\times 2} = \frac{1}{4}$$

۴۵-حد عبارت $\dfrac{|x^2-x-2|}{2x-\sqrt{x^2+12}}$ **وقتی** $x\to 2^-$ **کدام است؟**

① -3　② -2　③ ۲　④ ۳

پاسخ: **گزینه ۲ می‌دانیم: اگر** $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$ **و هردو در** $x=a$ **مشتق‌پذیر باشند آن‌گاه روش هوپیتال برای رفع ابهام** $\frac{0}{0}$ **به قرار زیر است:**

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(a)}{g(a)} = \frac{0}{0} \qquad H: \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{f'(a)}{g'(a)}$$

$$(x^2-x-2)' = (2x-1) \xrightarrow{x=2} = 3 > 0 \Rightarrow$$

صفر صفرم

تابع صعودی است پس وقتی $x \to ۲^-$ آنگاه $x^۲ - x - ۲ < ۰$ یعنی $|x^۲ - x - ۲| = -(x^۲ - x - ۲)$

ابتدا باید قدرمطلق را تعیین علامت کنیم و سپس هوپیتال بگیریم:

$$\lim_{x\to ۲^-} \frac{|(x+۱)\cdot(x-۲)|}{۲x - \sqrt{x^۲+۱۲}} = \lim_{x\to ۲^-} \frac{-(x+۱)\cdot(x-۲)}{۲x-\sqrt{x^۲+۱۲}}$$

$$\lim_{x\to ۲^-} \frac{-x^۲+x+۲}{۲x-\sqrt{x^۲+۱۲}} = \frac{۰}{۰} \xrightarrow{HOP} \lim_{x\to ۲^-} \frac{-۲x+۱}{۲-\dfrac{x}{\sqrt{x^۲+۱۲}}} = \frac{-۳}{۲-\dfrac{۱}{۲}} = \frac{-۳}{\dfrac{۳}{۲}} = -۲$$

۴۶- حاصل $\lim_{x\to ۰} ([۲x]+[-۲x])\dfrac{۱-\cos^۳ x}{۱-\sqrt{۱+x^۲}}$ ، کدام است؟ (نماد [ ] جزء صحیح است.)

① -۳ ② ۳ ③ صفر ④ حد ندارد.

پاسخ: گزینه ۲

می‌دانیم:

$$\lim_{x\to ۰} [f(x)]+[-f(x)] = -۱$$ و $$\lim_{u\to ۰}(۱-\cos^n u) \simeq \frac{u^۲}{۲}\times n$$ و

$$\lim_{u\to ۰} \sqrt[n]{۱+u} \simeq ۱+\frac{u}{n}$$

$$\lim_{x\to ۰} ([۲x]+[-۲x])\frac{۱-\cos^۳ x}{۱-\sqrt{۱+x^۲}} = \lim_{x\to ۰} \frac{-(۱-\cos^۳ x)}{۱-\sqrt{۱+x^۲}} = \frac{۰}{۰}$$ مبهم

صورت کسر از هم ارزی کسینوسها و مخرج کسر را از هم ارزی برنولی استفاده می‌کنیم.

$$\lim_{x\to ۰} \frac{-(\dfrac{x^۲}{۲})\times ۳}{۱-۱-\frac{۱}{۲}x^۲} = \lim \frac{\dfrac{۳}{۲}x^۲}{\dfrac{۱}{۲}x^۲} = ۳$$

۴۷- حاصل $\lim_{x\to \frac{۳\pi}{۴}^-} \dfrac{۱-\tan^۲ x}{\sqrt{۱+\sin ۲x}}$ ، کدام است؟

① $-۲\sqrt{۲}$ ② $-\sqrt{۲}$ ③ $\sqrt{۲}$ ④ $۲\sqrt{۲}$

پاسخ: گزینه ۱ با عددگذاری به ابهام $\frac{۰}{۰}$ می‌رسیم و به کمک فرمول‌های مثلثاتی تابع را ساده تر می‌کنیم.

می‌دانیم: $\boxed{۱+\sin ۲x = (\sin x+\cos x)^۲}$

صفر صفرم

$$\lim_{x\to \frac{3\pi}{4}^-}\frac{1-\tan^2 x}{\sqrt{1+\sin 2x}}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to \frac{3\pi}{4}^-}\frac{1-\dfrac{\sin^2 x}{\cos^2 x}}{\sqrt{(\sin x+\cos x)^2}}=\lim_{x\to \frac{3\pi}{4}^-}\frac{\frac{\cos^2 x-\sin^2 x}{\cos^2 x}}{|\sin x+\cos x|}$$

توجه: به ازای $\frac{3\pi^-}{4}$ حاصل عبارت $\sin x+\cos x$ همواره مثبت است چون در ناحیهٔ دوم هرچه قدر زاویه کوچکتر می شود اندازهٔ سینوس و کسینوس مثبت‌تر و بزرگ‌تر می‌شود.

$$\lim_{x\to \frac{3\pi}{4}}\frac{(\cos x-\sin x)\cdot\cancel{(\cos x+\sin x)}}{\cos^2 x\cdot\cancel{(\sin x+\cos x)}}=\frac{-\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}}{(-\frac{\sqrt{2}}{2})^2}=\frac{-\sqrt{2}}{\frac{1}{2}}=-2\sqrt{2}$$

۴۸- اگر $\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{\sqrt{\cos x}-\sqrt{\sin x}}{\cos(x+\frac{\pi}{4})}=2^a$ باشد، آنگاه a کدام است؟

① $-\frac{1}{2}$ ② $-\frac{1}{4}$ ③ $\frac{1}{4}$ ④ $\frac{1}{2}$

پاسخ: **گزینه ۲**

راه اول: می دانیم: $\cos(a+b)=\cos a\cdot\cos b-\sin a\cdot\sin b$

عبارت را در مزدوج صورت ضرب و تقسیم می‌کنیم.

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{(\sqrt{\cos x}-\sqrt{\sin x})\cdot(\sqrt{\cos x}+\sqrt{\sin x})}{(\cos x\times\frac{\sqrt{2}}{2}-\sin x\times\frac{\sqrt{2}}{2})\times(\sqrt{\cos x}+\sqrt{\sin x})}$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{(\cos x-\sin x)}{\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot(\cos x-\sin x)\cdot(\sqrt{\cos x}+\sqrt{\sin x})}=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2}(\sqrt{\cos x}+\sqrt{\sin x})}$$

$$=\frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2}(\sqrt{\frac{\sqrt{2}}{2}}+\sqrt{\frac{\sqrt{2}}{2}})}=\frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2}(2\sqrt{\frac{\sqrt{2}}{2}})}=\frac{1}{\sqrt{\frac{2\times\sqrt{2}}{2}}}=\frac{1}{\sqrt{\sqrt{2}}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt[4]{2}}=2^{-\frac{1}{4}}\Rightarrow 2^{-\frac{1}{4}}=2^a\Rightarrow a=-\frac{1}{4}$$

راه دوم: می‌دانیم: اگر $\lim_{x\to a}f(x)=\lim_{x\to a}g(x)=0$ و هردو در $x=a$ مشتق‌پذیر باشند آن‌گاه روش هوپیتال برای رفع ابهام $\frac{0}{0}$ به قرار زیر است:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f(a)}{g(a)}=\frac{0}{0}\qquad H:\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\frac{f'(a)}{g'(a)}$$

صفر صفرم

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt{\cos x}-\sqrt{\sin x}}{\cos(x+\frac{\pi}{4})} = \frac{0}{0} \xrightarrow{HOP} \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\frac{-\sin x}{2\sqrt{\cos x}} - \frac{\cos x}{2\sqrt{\sin x}}}{-\sin(x+\frac{\pi}{4})} = \lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\left(\frac{\sin x}{2\sqrt{\cos x}}+\frac{\cos x}{2\sqrt{\sin x}}\right)$$

$$= \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{2\sqrt{\frac{\sqrt{2}}{2}}} + \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{2\sqrt{\frac{\sqrt{2}}{2}}} = \frac{(\frac{\sqrt{2}}{2})^{1}}{(\frac{\sqrt{2}}{2})^{\frac{1}{2}}} = (\frac{\sqrt{2}}{2})^{\frac{1}{2}} = (2^{-\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}} = 2^{-\frac{1}{4}} = 2^{a} \to a = -\frac{1}{4}$$

۴۹-حاصل $\lim_{x\to\frac{\pi}{6}} \frac{2\cos 2x - 1}{2\sin^2 x + \sin x - 1}$ کدام است؟

① $-\frac{2}{3}$ ② $\frac{2}{3}$ ③ $\frac{4}{3}$ ④ $-\frac{4}{3}$

پاسخ: گزینه ۴

می‌دانیم که $\cos 2a = 1 - 2\sin^2 a$ است.

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{6}} \frac{2\cos 2x - 1}{2\sin^2 x + \sin x - 1} = \lim_{x\to\frac{\pi}{6}} \frac{2(1-2\sin^2 x) - 1}{2\sin^2 x + 2\sin x - \sin x - 1}$$

$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{6}} \frac{1 - 4\sin^2 x}{2\sin x(\sin x + 1) - (\sin x + 1)} = \lim_{x\to\frac{\pi}{6}} \frac{-(2\sin x - 1)(2\sin x + 1)}{(\sin x + 1)(2\sin x - 1)}$$

$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{6}} \frac{-(2\sin x + 1)}{\sin x + 1} = \frac{-(2\times\frac{1}{2}+1)}{\frac{1}{2}+1} = \frac{-2}{\frac{3}{2}} = -\frac{4}{3}$$

۵۰-حاصل $\lim_{x\to-\frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt{2}\sin(x+\frac{\pi}{4})}{\cos^2 x - \sin^2 x}$ چند برابر $\sqrt{2}$ است؟

① 2 ② -2 ③ $\frac{1}{2}$ ④ $-\frac{1}{2}$

پاسخ: **گزینه ۳**

$$\lim_{x\to -\frac{\pi}{۴}} \frac{\sqrt{۲}\sin(x+\frac{\pi}{۴})}{\cos^۲ x-\sin^۲ x} = \lim_{x\to -\frac{\pi}{۴}} \frac{\sqrt{۲}(\sin x\cos\frac{\pi}{۴}+\cos x\sin\frac{\pi}{۴})}{(\cos x-\sin x)(\cos x+\sin x)}$$

$$= \lim_{x\to -\frac{\pi}{۴}} \frac{\sqrt{۲}(\frac{\sqrt{۲}}{۲}\sin x+\frac{\sqrt{۲}}{۲}\cos x)}{(\cos x-\sin x)(\cos x+\sin x)}$$

$$= \lim_{x\to -\frac{\pi}{۴}} \frac{\sin x+\cos x}{(\cos x-\sin x)(\cos x+\sin x)} = \lim_{x\to -\frac{\pi}{۴}} \frac{۱}{\cos x-\sin x} = \frac{۱}{\cos(-\frac{\pi}{۴})-\sin(-\frac{\pi}{۴})}$$

$$= \frac{۱}{\frac{\sqrt{۲}}{۲}+\frac{\sqrt{۲}}{۲}} = \frac{۱}{\sqrt{۲}} = \frac{\sqrt{۲}}{۲} = \frac{۱}{۲}\times\sqrt{۲}$$

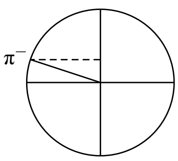
۵۱-حاصل $\lim_{x\to ۲\pi^-} \dfrac{\sqrt{۲-۲\cos x}}{\sin ۲x}$ کدام است؟

① ۱ ② -۱ ③ $\frac{۱}{۲}$ ④ $-\frac{۱}{۲}$

پاسخ: **گزینه ۴**

$$\lim_{x\to ۲\pi^-} \frac{\sqrt{۲(۱-\cos x)}}{\sin ۲x} = \lim_{x\to ۲\pi^-} \frac{\sqrt{۲\times ۲\sin^۲(\frac{x}{۲})}}{۲\sin x\cos x} = \lim_{x\to ۲\pi^-} \frac{۲\left|\sin\frac{x}{۲}\right|}{۲\sin x\cos x}$$

با توجه به دایرهٔ مثلثاتی اگر $x\to ۲\pi^-$ آنگاه $\frac{x}{۲}$ از چپ به π میل می‌کند و داریم:



$$x\to ۲\pi^- \Rightarrow \frac{x}{۲}\to\pi^- \Rightarrow \sin\frac{x}{۲}>۰$$

$$\lim_{x\to ۲\pi^-} \frac{\sin\frac{x}{۲}}{\sin x\cos x} = \lim_{x\to ۲\pi^-} \frac{\sin\frac{x}{۲}}{۲\sin\frac{x}{۲}\cos\frac{x}{۲}\cos x} = \lim_{x\to ۲\pi^-} \frac{۱}{۲\cos\frac{x}{۲}\cos x} = \frac{۱}{۲\cos\pi\cos ۲\pi}$$

$$=\frac{1}{2(-1)\times 1}=-\frac{1}{2}$$

۵۲- حد تابع مقابل کدام است؟ ($[\ ]$ نماد جزء صحیح است.)

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{x([x]+2x[\frac{1}{x}])}{\cos 2x-1}$$

① حد ندارد ② $+\infty$ ③ 2 ④ $-\infty$

پاسخ: گزینه ۱ می‌دانیم: $\boxed{0\le f(x)-[f(x)]<1}$, $\boxed{\lim_{u\to 0} 1-\cos u\simeq\frac{u^2}{2}}$

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{x\left(2\left[0^-\right]+2x\left[\frac{1}{x}\right]\right)}{\cos 2x-1}=\lim_{x\to 0^-}\frac{x\left(-2+2x\left[\frac{1}{x}\right]\right)}{-2\sin^2 x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{x\left(-2+2x\left[\frac{1}{x}\right]\right)}{-2x^2}$$

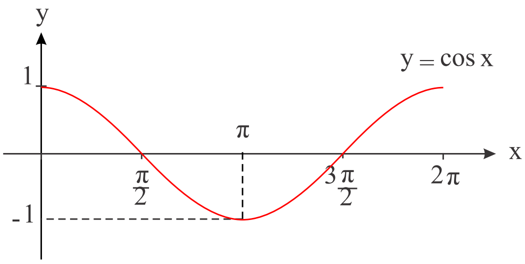
$$=\lim_{x\to 0^-}\frac{-2+2x\left[\frac{1}{x}\right]}{-2x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{-2}{-2x}+\frac{2x\left[\frac{1}{x}\right]}{-2x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{1}{x}-\left[\frac{1}{x}\right]\Rightarrow$$ حد ندارد

توابع متناوب $u-[u]$ وقتی u به سمت بی‌نهایت میل می‌کند، حد ندارند، چون $0\le u-[u]<1$.

۵۳- حاصل $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^+}\frac{\sin x+[\cos x]}{\cos^2 x}$ کدام است؟ ($[\ ]$، نماد جزء صحیح است.)

① $-\frac{1}{2}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ -1 ④ حد وجود ندارد.

پاسخ: گزینه ۱ باتوجه به شکل وقتی $x\to\frac{\pi}{2}^+$ میل می‌کند، مقادیر تابع $y=\cos x$ از مقادیر کم‌تر از صفر به عدد صفر نزدیک می‌شود.



$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^+}\frac{\sin x+[\cos x]}{\cos^2 x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^+}\frac{\sin x+[0^-]}{\cos^2 x}$$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^+}\frac{\sin x-1}{\cos^2 x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^+}\frac{\sin x-1}{1-\sin^2 x}$$

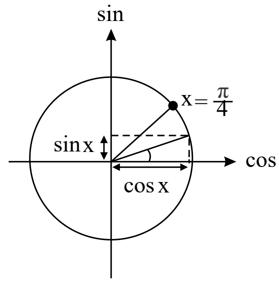
$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^+}\frac{\sin x-1}{(1-\sin x)(1+\sin x)}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^+}\frac{-1}{1+\sin x}=\frac{-1}{1+1}=-\frac{1}{2}$$

۵۴- حاصل $\lim_{x\to\frac{\pi}{4}^-}\frac{|\sin x-\cos x|}{\tan x-1}$ کدام است؟

① $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ ② $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ③ $\sqrt{2}$ ④ $-\sqrt{2}$

صفر صفر

پاسخ: گزینه ۱



$$\lim_{x\to \frac{\pi}{۴}^-} \frac{|\sin x - \cos x|}{\tan x - ۱} = \frac{\left|\frac{\sqrt{۲}}{۲} - \frac{\sqrt{۲}}{۲}\right|}{۱ - ۱} = \frac{۰}{۰}$$

به دایرهٔ مثلثاتی توجه کنید:

$$x = \frac{\pi}{۴} \Rightarrow \sin x = \cos x$$

$$۰ < x < \frac{\pi}{۴} \Rightarrow \sin x < \cos x$$

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{۴}^-} \frac{|\sin x - \cos x|}{\frac{\sin x}{\cos x} - ۱} = \lim_{x\to \frac{\pi}{۴}^-} -\frac{(\sin x - \cos x)}{\frac{\sin x - \cos x}{\cos x}}$$

$$= \lim_{x\to \frac{\pi}{۴}^-} -\frac{\cos x(\sin x - \cos x)}{\sin x - \cos x} = -\cos\frac{\pi}{۴} = -\frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

۵۵- حد کسر $\frac{\sqrt{\sin x} + \sqrt{\tan x}}{x\sqrt{x} + \sqrt{x}}$ وقتی $x \to ۰^+$ کدام است؟

① ۲ ② صفر ③ ∞ ④ ۱

پاسخ: گزینه ۱ صورت و مخرج را بر $\sqrt{x}$ تقسیم می‌کنیم:

$$\text{حد} = \lim_{x\to ۰^+} \frac{\sqrt{\frac{\sin x}{x}} + \sqrt{\frac{\tan x}{x}}}{x + ۱} = \frac{۱ + ۱}{۱} = ۲$$

راه دوم:

$$\text{حد} = \lim_{x\to ۰^+} \frac{\sqrt{x} + \sqrt{x}}{x\sqrt{x} + \sqrt{x}} = \lim_{x\to ۰^+} \frac{۲\sqrt{x}}{(x + ۱)\sqrt{x}} = \lim_{x\to ۰^+} \frac{۲}{x + ۱} = ۲$$