مشتق تابع مرکب و قاعده زنجیری

1 - اگر $f(x)=\frac{۴}{۵}x-\frac{۱}{۵}|x|$ و $g(x)=۴x+|x|$ باشند، مشتق تابع fog، کدام است؟

① ۲ ② ۳ ③ ۴ ④ مشتق ندارد.

پاسخ: گزینه 2 در ابتدا قدر مطلق‌های توابع f و g را از بین می‌بریم.

$$f(x)=\frac{۴}{۵}x-\frac{۱}{۵}|x| \rightarrow f(x)=\begin{cases}\frac{۴}{۵}x-\frac{۱}{۵}x & x\geq ۰\\ \frac{۴}{۵}x+\frac{۱}{۵}x & x<۰\end{cases} \rightarrow f(x)=\begin{cases}\frac{۳}{۵}x & x\geq ۰\\ x & x<۰\end{cases}$$

$$g(x)=۴x+|x| \rightarrow g(x)=\begin{cases}۴x+x & x\geq ۰\\ ۴x-x & x<۰\end{cases} \rightarrow g(x)=\begin{cases}۵x & x\geq ۰\\ ۳x & x<۰\end{cases}$$

$$x\geq ۰ \ : \ fog(x)=f(g(x))=\frac{۳}{۵}(۵x)=۳x$$

$$x<۰ \ : \ fog(x)=f(g(x))=۳x$$

یعنی $fog(x)=۳x$ است پس مشتق آن برابر **۳** می‌باشد.

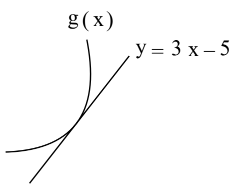
---

2 - خط به معادلهٔ $y=۳x-۵$ در نقطهٔ $x=۲$ بر نمودار تابع $y=g(x)$ مماس است. اگر $\lim\limits_{x\to ۱}\frac{f(x)-f(۱)}{۲x-۲}=\frac{۲}{۳}$ باشد، $(fog)'(۲)$ کدام است؟

① ۱ ② ۲ ③ ۳ ④ ۴

پاسخ: گزینه 4

می‌دانیم که $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'(a)$ و $(fog(x))'=g'(x)\cdot f'(g(x))$ است.



$$\Rightarrow g(۲)=۱\ ,\quad \text{شیب خط مماس}=۳ \Rightarrow g'(۲)=۳$$

$$\lim_{x\to ۱}\frac{f(x)-f(۱)}{۲(x-۱)}=\frac{۲}{۳} \Rightarrow \frac{۱}{۲}\lim_{x\to ۱}\frac{f(x)-f(۱)}{x-۱}=\frac{۲}{۳} \Rightarrow \frac{۱}{۲}f'(۱)=\frac{۲}{۳} \Rightarrow f'(۱)=\frac{۴}{۳}$$

$$(fog)'(۲)=g'(۲)\cdot f'(g(۲))=۳f'(۱)=۳\times\frac{۴}{۳}=۴$$

---

3 - اگر $g(x)=\frac{۲x+۱}{x-۱}$ و $(fog)'(۲)=۶$ باشد، $f'(۵)$ کدام است؟

① -۲ ② -۱ ③ ۲ ④ ۳

پاسخ: گزینه 1 می‌دانیم $(f(g(x)))'=g'(x)\cdot f'(g(x))$ است.

$$(fog)'(۲)=۶ \rightarrow g'(۲)\cdot f'(g(۲))=۶$$

توجه کنید : $\begin{cases} g(x)=\dfrac{۲x+۱}{x-۱}\to g(۲)=\dfrac{۴+۱}{۲-۱}=۵ \\ g(x)=\dfrac{۲x+۱}{x-۱}\to g'(x)=\dfrac{۲(x-۱)-۱(۲x+۱)}{(x-۱)^۲}\to g'(۲)=-۳ \end{cases}$

$g'(۲)\cdot f'(g(۲))=۶\to -۳f'(۵)=۶\to f'(۵)=-۲$

4- اگر $g(x)=x+\sqrt{x}$ و $\lim\limits_{x\to ۲}\dfrac{f(x)-f(۲)}{x-۲}=\dfrac{۴}{۳}$ باشد، $(fog)'(۱)$ کدام است؟

① $\dfrac{۲}{۳}$ ② $\dfrac{۳}{۲}$ ③ ۲ ④ ۳

پاسخ: گزینه 3 می دانیم که $(fog)'(x)=g'(x)\cdot f'(g(x))$, $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'(a)$ است.

$\lim\limits_{x\to ۲}\dfrac{f(x)-f(۲)}{x-۲}=\dfrac{۴}{۳}\Rightarrow f'(۲)=\dfrac{۴}{۳}$

$(fog)'(۱)=g'(۱)\cdot f'(g(۱))\to \begin{cases} g(۱)=۱+۱=۲ \\ g'(x)=۱+\dfrac{۱}{۲\sqrt{x}}\to g'(۱)=۱+\dfrac{۱}{۲}=\dfrac{۳}{۲} \end{cases}$

پس: $g'(۱)\cdot f'(g(۱))=\dfrac{۳}{۲}\times f'(۲)=\dfrac{۳}{۲}\times\dfrac{۴}{۳}=۲$

5- اگر $g(x)=\dfrac{۱}{۴}\sqrt{۵x-۹}$ و $f(x)=\sin^۲\pi x$ مشتق تابع fog به ازای $x=۲$ کدام است؟

① $\dfrac{۳}{۴}$ ② $\dfrac{۵}{۸}$ ③ $\dfrac{۳}{۴}\pi$ ④ $\dfrac{۵}{۸}\pi$

پاسخ: گزینه 4

می‌دانیم: $(\sin^۲u)'=۲u'\cdot\sin u\cdot\cos u=u'\cdot\sin ۲u$

$y=(fog)(x)=f(g(x))\Rightarrow y'=g'(x)f'(g(x))\Rightarrow y'(۲)=g'(۲)f'(g(۲))$

$g(۲)=\dfrac{۱}{۴}\sqrt{۵\times ۲-۹}=\dfrac{۱}{۴}$

$f'(x)=\pi\sin ۲\pi x\Rightarrow f'(g(۲))=f'(\dfrac{۱}{۴})=\pi\sin\dfrac{\pi}{۲}=\pi$

$g'(x)=\dfrac{۱}{۴}\times\dfrac{۵}{۲\sqrt{۵x-۹}}\Rightarrow g'(۲)=\dfrac{۱}{۴}\times\dfrac{۵}{۲}=\dfrac{۵}{۸}$

$y'(۲)=\dfrac{۵}{۸}\times\pi=\dfrac{۵\pi}{۸}$

6- اگر $\lim\limits_{h\to ۰}\dfrac{f(۲+۳h)-f(۲)}{-h}=۲$، مقدار مشتق تابع $f(x^۲+x)$ در $x=۱$ کدام است؟

① ۲ ② $\dfrac{۱}{۲}$ ③ -۲ ④ $\dfrac{۱}{۳}$

پاسخ: گزینه 3 می‌دانیم $(f(u))'=u'\cdot f'(u)$ است.

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(2+3h)-f(2)}{-h}=\frac{0}{0}\xrightarrow{HOP}\lim_{h\to 0}\frac{3f'(2+3h)}{-1}=-3f'(2)=2\to f'(2)=-\frac{2}{3}$$

$$y=f(x^2+x)\to y'=(2x+1)f'(x^2+x)\to y'(1)=3f'(2)=3(\frac{-2}{3})=-2$$

7- اگر $f(x)=\sin x$ مقدار مشتق تابع $\frac{fof}{f^2}$ در $x=\frac{\pi}{2}$ کدام است؟

① 0 ② $\sin 1$ ③ $\cos 1$ ④ 1

پاسخ: گزینه 1

می‌دانیم:

$$y=\frac{u}{v}\to y'=\frac{u'\cdot v-v'\cdot u}{v^2}$$
$$y=\sin(u)\to y'=u'\cdot\cos u$$

$$\begin{cases} fof(x)=\sin(\sin x)\\ f^2(x)=\sin^2 x\end{cases}\Rightarrow y=\frac{\sin(\sin x)}{\sin^2 x}$$

$$y'=\frac{\cos x\ \cos(\sin x)\sin^2 x-2\sin x\ \cos x\ \sin(\sin x)}{\sin^4 x}\Rightarrow y'(\frac{\pi}{2})=0$$

8- اگر $\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=-\frac{1}{3}$ ، مشتق $f\left(\sqrt{|x|+3}\right)$ درنقطه $x=-1$ کدام است؟

① $\frac{1}{6}$ ② $\frac{1}{12}$ ③ $-\frac{1}{6}$ ④ $-\frac{1}{12}$

پاسخ: گزینه 2

می‌دانیم:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'(a)$$

صورت سوال، تعریف مشتق در 2 است یعنی $f'(2)=-\frac{1}{3}$

$$\left(f\left(\sqrt{|x|+3}\right)\right)'\xlongequal{\text{داخل قدر مطلق منفی}}\left(f\left(\sqrt{-x+3}\right)\right)'=\frac{-1}{2\sqrt{-x+3}}f'\left(\sqrt{-x+3}\right)$$

$$\xlongequal{x=-1}-\frac{1}{4}f'(2)=-\frac{1}{4}\times-\frac{1}{3}=\frac{1}{12}$$

9- اگر $\lim_{x\to 3}\frac{f(x)-f(3)}{6-2x}=3$ باشد، مقدار مشتق $f(\frac{2x+1}{x-1})$ به‌ازای $x=4$ کدام است؟

① 1 ② 2 ③ -1 ④ -2

پاسخ: گزینه 2

می‌دانیم $\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'(a)$ و $y=f(u)\to y'=u'f'(u)$ است.

$$\lim_{x\to 3}\frac{f(x)-f(3)}{-2(x-3)}=\frac{1}{-2}\lim_{x\to 3}\frac{f(x)-f(3)}{x-3}=-\frac{1}{2}f'(3)=3\Rightarrow f'(3)=-6$$

$$y=f(\frac{2x+1}{x-1})\Rightarrow y'=(\frac{2x+1}{x-1})'f'(\frac{2x+1}{x-1})=(\frac{2(x-1)-(2x+1)}{(x-1)^2})f'(\frac{2x+1}{x-1})$$

$$y' = \frac{-۳}{(x-۱)^۲} f'(\frac{۲x+۱}{x-۱}) \xrightarrow{x=۴} y'(۴) = \frac{-۳}{۹} f'(\frac{۹}{۳}) = -\frac{۳}{۹} \times (-۶) = ۲$$

10 - اگر $f(x-۱)+۲f(۱-x)=x^۲$ باشد، مقدار عددی $f'(۱)$ کدام است؟

① $\frac{۳}{۴}$ ② $-\frac{۳}{۴}$ ③ $\frac{۴}{۳}$ ④ $-\frac{۴}{۳}$

پاسخ: گزینه 4 با مشتق گیری از تساوی داده شده خواهیم داشت:

$$f(x-۱)+۲f(۱-x)=x^۲ \Rightarrow f'(x-۱)+۲[(-۱)f'(۱-x)]=۲x$$
$$\Rightarrow f'(x-۱)-۲f'(۱-x)=۲x$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=۰: f'(-۱)-۲f'(۱)=۰ \Rightarrow f'(-۱)=۲f'(۱) \\ x=۲: f'(۱)-۲f'(-۱)=۴ \end{cases} \Longrightarrow f'(۱)-۲(۲f'(۱))=۴$$
$$\Rightarrow f'(۱)-۴f'(۱)=۴ \Rightarrow f'(۱)=\frac{-۴}{۳}$$

11 - اگر $f(۲x+۱)=g(x^۲+\sqrt{x})$ و $f'(۳)=۵$ باشد، $g'(۲)$ کدام است؟

① ۱ ② ۲ ③ ۳ ④ ۴

پاسخ: گزینه 4 می‌دانیم اگر $y=f(u)$ باشد، آن‌گاه $y'=u'\cdot f'(u)$ است.

$$f(۲x+۱)=g(x^۲+\sqrt{x}) \xrightarrow{\text{مشتق}} ۲f'(۲x+۱)=(۲x+\frac{۱}{۲\sqrt{x}})g'(x^۲+\sqrt{x})$$

$$x=۱ \Rightarrow ۲f'(۳)=(۲+\frac{۱}{۲})g'(۱+۱) \Rightarrow ۲f'(۳)=\frac{۵}{۲}g'(۲) \Rightarrow g'(۲)=\frac{۴}{۵}f'(۳) \Rightarrow g'(۲)=\frac{۴}{۵}\times ۵=۴$$

12 - اگر $f'(x)=\frac{۱}{x}$، مشتق تابع $f(x+\sqrt{۱+x^۲})$ کدام است؟

① $-x+\sqrt{۱+x^۲}$ ② $x-\sqrt{۱+x^۲}$ ③ $\frac{۱}{\sqrt{۱+x^۲}}$ ④ $\sqrt{۱+x^۲}$

پاسخ: گزینه 3

می‌دانیم: $y=f(g(x)) \to y'=g'(x)f'(g(x))$

$$y=f(x+\sqrt{۱+x^۲}) \Rightarrow y'=(۱+\frac{x}{\sqrt{۱+x^۲}})f'(x+\sqrt{۱+x^۲}) \qquad (*)$$

$$f'(x)=\frac{۱}{x} \Rightarrow f'(x+\sqrt{۱+x^۲})=\frac{۱}{x+\sqrt{۱+x^۲}} \xrightarrow{(*)} y'=(\frac{\sqrt{۱+x^۲}+x}{\sqrt{۱+x^۲}})\times\frac{۱}{x+\sqrt{۱+x^۲}} \Rightarrow y'=\frac{۱}{\sqrt{۱+x^۲}}$$

13 - اگر $f(x)=\frac{۳}{۲}-\sqrt{x+۲}$ ، مشتق تابع $f(xf(x))$ در نقطه $x=۲$ کدام است؟

① -۱ ② $\frac{۱}{۲}$ ③ $-\frac{۱}{۲}$ ④ ۱

پاسخ: گزینه 2

می‌دانیم: $y=f(g(x)) \to y'=g'(x)\cdot f'(g(x))$

$$y=f(xf(x)) \Rightarrow y'=(f(x)+xf'(x))f'(xf(x)) \Rightarrow y'(۲)=(f(۲)+۲f'(۲))[f'(۲f(۲))]$$

$$f(۲)=-\frac{۱}{۲} \quad , \quad f'(x)=-\frac{۱}{۲\sqrt{x+۲}} \Rightarrow f'(۲)=-\frac{۱}{۴} \quad , \quad f'(-۱)=-\frac{۱}{۲}$$

$$\Rightarrow y'(۲)=\underbrace{(-\frac{۱}{۲}-\frac{۱}{۲})}_{-۱}(f'(-۱))=(-۱)(-\frac{۱}{۲})=\frac{۱}{۲}$$

---

14 - دو تابع با ضابطه‌های $f(x)=۳x+|x|$ و $g(x)=\frac{۳}{۴}x+a|x|$ مفروض‌اند. به ازای کدام مقدار a، تابع gof در مبداء مختصات، مشتق‌پذیر است؟

① $-\frac{۱}{۴}$ ② $-\frac{۱}{۲}$ ③ $\frac{۱}{۲}$ ④ هیچ مقدار a

پاسخ: گزینه 1

ابتدا تابع $f(x)$ و $g(x)$ را تعیین علامت می‌کنیم و می‌دانیم:

$$y=gof(x) \to y'=f'(x)\cdot g'(f(x))$$

$$f(x)=۳x+|x|=\begin{cases}۴x & x\geq ۰\\ ۲x & x<۰\end{cases} \quad , \quad g(x)=\frac{۳}{۴}x+a|x|=\begin{cases}(\frac{۳}{۴}+a)x & x\geq ۰\\ (\frac{۳}{۴}-a)x & x<۰\end{cases}$$

از آنجا که ضابطه‌های توابع f و g در $x=۰$ عوض می‌شود و مشتق‌پذیری تابع gof را در مبدأ مختصات خواسته است، به صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$(gof)'(۰) \Rightarrow \begin{cases}(gof)'_+(۰)=f'_+(۰)\times g'(f(۰^+))=(۴)\times(\frac{۳}{۴}+a)\\ (gof)'_-(۰)=f'_-(۰)\times g'(f(۰^-))=(۲)\times(\frac{۳}{۴}-a)\end{cases}$$

باید مشتق چپ و راست در $x=۰$ برابر باشند.

$$(gof)'_-(۰)=(gof)'_+(۰) \Rightarrow ۳+۴a=\frac{۳}{۲}-۲a \Rightarrow ۶a=-\frac{۳}{۲} \Rightarrow a=-\frac{۱}{۴}$$

---

15 - اگر $\frac{x}{\sqrt{۱+x^۳}}=\lim_{h\to ۰}\frac{f(x+h)-f(x)}{h^۲+۳h}$ باشد، مشتق تابع $g(x)=f(\sqrt{۱+x})$ در $x=۳$ کدام است؟

① $\frac{۱}{۲}$ ② $\frac{۱}{۳}$ ③ $\frac{۱}{۴}$ ④ $\frac{۱}{۶}$

پاسخ: گزینه 1

$$\lim_{h\to ۰}\frac{f(x+h)-f(x)}{h(h+۳)}=\lim_{h\to ۰}\frac{۱}{h+۳}\cdot\lim_{h\to ۰}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{x}{\sqrt{۱+x^۳}}$$

$$\Rightarrow \frac{۱}{۳}f'(x)=\frac{x}{\sqrt{۱+x^۳}} \Rightarrow f'(x)=\frac{۳x}{\sqrt{۱+x^۳}}$$

$$g(x)=f(\sqrt{۱+x}) \Rightarrow g'(x)=\frac{۱}{۲\sqrt{۱+x}}\cdot f'(\sqrt{۱+x}) \xrightarrow{x=۳} g'(۳)=\frac{۱}{۴}f'(۲)$$

$$f'(۲)=\frac{۳\times۲}{\sqrt{۱+۸}}=\frac{۶}{۳}=۲\Rightarrow g'(۳)=\frac{۱}{۴}\times۲=\frac{۱}{۲}$$

16 - اگر $\lim\limits_{h\to ۰}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{۱}{\sqrt{۱+x^۲}}$ مشتق تابع $f(\tan x)$ با شرط $|x|<\frac{\pi}{۲}$ کدام است؟

① $\frac{۱}{\sin x}$ ② $\frac{۱}{\cos x}$ ③ $\sin x$ ④ $\cos x$

پاسخ: گزینه 2

$$f'(x)=\lim_{h\to ۰}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{۱}{\sqrt{۱+x^۲}}\Rightarrow f'(\tan x)=\frac{۱}{\sqrt{۱+\tan^۲ x}}$$

$$(f(\tan x))'=(۱+\tan^۲ x)f'(\tan x)=(۱+\tan^۲ x)\frac{۱}{\sqrt{۱+\tan^۲ x}}=\sqrt{۱+\tan^۲ x}$$

$$=\frac{۱}{|\cos x|}=\frac{۱}{\cos x}$$

توجه کنیم که:

$$|x|<\frac{\pi}{۲}\to -\frac{\pi}{۲}<x<\frac{\pi}{۲}\to \cos x>۰\to |\cos x|=\cos x$$

17 - اگر $f(۳x^۲-۴x+۱)=g(\sqrt{۳x+۱})$ باشد، آن گاه $f'(۰)$ چند برابر $g'(۲)$ است؟

① $\frac{۳}{۲}$ ② $\frac{۳}{۴}$ ③ $\frac{۳}{۸}$ ④ $\frac{۳}{۱۶}$

پاسخ: گزینه 3 می‌دانیم: $y=\sqrt{u}\to y'=\frac{u'}{۲\sqrt{u}}$ و $y=f(u)\to y'=u'\cdot f'(u)$

با مشتق گیری از عبارت داده شده خواهیم داشت:

$$f(۳x^۲-۴x+۱)=g(\sqrt{۳x+۱})\Rightarrow(۶x-۴)f'(۳x^۲-۴x+۱)=\frac{۳}{۲\sqrt{۳x+۱}}g'(\sqrt{۳x+۱})$$

حال می‌خواهیم به $f'(۰)$ و $g'(۲)$ برسیم بنابراین باید به جای x عدد ۱ قرار دهیم.

$$\xrightarrow{x=۱}\ ۲f'(۳-۴+۱)=\frac{۳}{۲\sqrt{۴}}g'(\sqrt{۴})\Rightarrow ۲f'(۰)=\frac{۳}{۴}g'(۲)\Rightarrow f'(۰)=\frac{۳}{۸}g'(۲)$$

18 - اگر $\lim\limits_{h\to ۰}\frac{f(۱+h)-f(۱-h)}{h}=-۲$ باشد، مشتق $y=f(\sqrt{۲\sin x})$ در $x=\frac{\pi}{۶}$ کدام است؟

① $-\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ ② $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ ③ $\frac{۱}{۲}$ ④ $-\frac{۱}{۲}$

پاسخ: گزینه 1

می‌دانیم: اگر $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{۰}{۰}$ آنگاه از روش $HOP:\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ برای رفع ابهام استفاده می‌کنیم.

$$\lim_{h\to ۰}\frac{f(۱+h)-f(۱-h)}{h}=\frac{۰}{۰}\xrightarrow{HOP}=\lim_{h\to ۰}\frac{f'(۱+h)+f'(۱-h)}{۱}=۲f'(۱)\to f'(۱)=-۱$$

$$y=f(u)\to y'=u'\times f'(u)$$

$$y=f\left(\sqrt{۲\sin x}\right)\to y'=\frac{\cancel{۲}\cos x}{\cancel{۲}\sqrt{۲\sin x}}f'(\sqrt{۲\sin x})\xrightarrow{x=\frac{\pi}{۶}}$$

$$y'_{(\frac{\pi}{6})} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{2 \times \frac{1}{2}}} \quad f'(1) = \frac{\sqrt{3}}{2} \times (-1) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

---

19 - اگر $f(x) = \frac{x^3 - 2}{1 + x^3}$ و $g(x) = \sqrt[3]{x-1}$ ، حاصل $f'(g(x)) \cdot g'(x)$ ، کدام است؟

① $\frac{3}{x}$ ② $\frac{3}{x^2}$ ③ $\frac{1}{3x}$ ④ $\frac{x-3}{x^2}$

پاسخ: گزینه 2 می‌دانیم که عبارت $f'(g(x)) \cdot g'(x)$ همان مشتق عبارت $fog(x)$ است بنابراین داریم:

$$f'(g(x)) \cdot g'(x) = (f(g(x)))' = (1 - \frac{3}{x})' = \frac{3}{x^2}$$

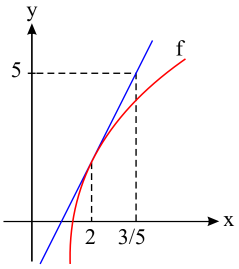
باید توجه داشته باشید که: $fog = f(g(x)) = f(\sqrt[3]{x-1}) = \frac{(\sqrt[3]{x-1})^3 - 2}{1 + (\sqrt[3]{x-1})^3} = \frac{x-3}{x} = 1 - \frac{3}{x}$

---

20 - با توجه به نمودار مقابل، اگر $f'(2) = 2$ باشد، شیب خط مماس بر نمودار تابع fof در نقطه‌ای به طول $x = 2$ کدام است؟

① ۶ ② ۴

③ ۸ ④ ۱۲



پاسخ: گزینه 2

$x = 2$ شیب خط مماس بر نمودار f در $= f'(2) = 2$

$\Rightarrow x = 2$ معادلهٔ خط مماس بر نمودار در : $y - 5 = 2(x - 3/5)$

$\Rightarrow y = 2x - 2 \Rightarrow f(2) = 2$

$y = fof(x) \Rightarrow y'(x) = f'(x) f'(f(x))$

$x = 2 \Rightarrow y'(2) = f'(2) \cdot f'(f(2)) = f'(2) \cdot f'(2) = 2 \times 2 = 4$

---

21 - اگر $f(x) = \sin^2 \pi x - \frac{1}{2} \cos \pi x$ ، مشتق تابع $f(f(x))$ در نقطه $x = \frac{1}{3}$ ، چند برابر $3\sqrt{3}$ است؟

① $\frac{\pi}{8}$ ② $\frac{\pi}{4}$ ③ $\frac{\pi^2}{8}$ ④ $\frac{\pi^2}{4}$

پاسخ: گزینه 3

می‌دانیم: $y = f(g(x)) \to y' = g'(x) \cdot f'(g(x))$

$$y = f(f(x)) \Rightarrow y' = f'(x) \cdot f'(f(x)) \Rightarrow y'(\frac{1}{3}) = f'(\frac{1}{3}) f'(f(\frac{1}{3}))$$

اکنون حاصل $f(\frac{1}{3})$ را به دست می‌آوریم:

$$f(x)=\sin^{۲}\pi x-\frac{۱}{۲}\cos\pi x\Rightarrow f(\frac{۱}{۳})=\frac{۳}{۴}-\frac{۱}{۴}=\frac{۱}{۲}\Rightarrow y'(\frac{۱}{۳})=f'(\frac{۱}{۳})f'(\frac{۱}{۲})$$

$$\left.\begin{array}{l} f(x)=\sin^{۲}\pi x-\frac{۱}{۲}\cos\pi x\Rightarrow f'(x)=۲\pi\sin\pi x\cos\pi x+\frac{\pi}{۲}\sin\pi x \\ f'(\frac{۱}{۳})=۲\pi\sin\frac{\pi}{۳}\cos\frac{\pi}{۳}+\frac{\pi}{۲}\sin\frac{\pi}{۳}=\frac{\pi\sqrt{۳}}{۲}+\frac{\pi\sqrt{۳}}{۴}=\frac{۳\pi\sqrt{۳}}{۴} \\ f'(\frac{۱}{۲})=۲\pi\sin\frac{\pi}{۲}\cos\frac{\pi}{۲}+\frac{\pi}{۲}\sin\frac{\pi}{۲}=۰+\frac{\pi}{۲}=\frac{\pi}{۲} \end{array}\right\}\begin{array}{l}\Rightarrow y'(\frac{۱}{۳})=\frac{۳\pi^{۲}\sqrt{۳}}{۸} \\ =(۳\sqrt{۳})(\frac{\pi^{۲}}{۸})\end{array}$$

بنابراین مشتق تابع y در $x=\frac{۱}{۳}$, $\frac{\pi^{۲}}{۸}$ برابر $۳\sqrt{۳}$ است.

---

22 - اگر $f(x)=\frac{x}{\sqrt{۱-x^{۲}}}$ و $g(x)=\frac{x}{\sqrt{۱+x^{۲}}}$ ، حاصل $f'(x)\cdot g'(f(x))$ کدام می باشد؟

① -۱ ② ۱ ③ x ④ $\frac{۱}{۲}x$

پاسخ: گزینه 2

می‌دانیم که عبارت $f'(x)\cdot g'(f(x))$ همان مشتق عبارت $gof(x)$ است پس:

$$g(f(x))=\frac{f(x)}{\sqrt{۱+f^{۲}(x)}}=\frac{\frac{x}{\sqrt{۱-x^{۲}}}}{\sqrt{۱+\frac{x^{۲}}{۱-x^{۲}}}}=\frac{\frac{x}{\sqrt{۱-x^{۲}}}}{\sqrt{\frac{۱-x^{۲}+x^{۲}}{۱-x^{۲}}}}=x\Rightarrow (g(f(x)))'=۱$$

---

23 - اگر f یک تابع مشتق‌پذیر، $g(x)=f\left(\sqrt{۱+\tan^{۲}x}\right)$ و $g'(\frac{\pi}{۳})=\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ باشد، مقدار $f'(۲)$، کدام است؟

① $-\frac{۱}{۲}$ ② $\frac{۱}{۴}$ ③ $\frac{۱}{۲}$ ④ ۱

پاسخ: گزینه 2 می‌دانیم:

$$\boxed{۱+\tan^{۲}x=\frac{۱}{\cos^{۲}x}}\quad,\quad\boxed{(f(u))'=u'\cdot f'(u)}$$

$$g(x)=f(\sqrt{۱+\tan^{۲}x})=f(\sqrt{\frac{۱}{\cos^{۲}x}})=f(|\frac{۱}{\cos x}|)\xrightarrow{\text{ناحیه اول}}g(x)=f(\frac{۱}{\cos x})\rightarrow g'(x)=(\frac{۱}{\cos x})'\cdot f'(\frac{۱}{\cos x})$$

$$\rightarrow g'(x)=\frac{۰-(-\sin x)}{\cos^{۲}x}\cdot f'(\frac{۱}{\cos x})\rightarrow g'(\frac{\pi}{۳})=\frac{\frac{\sqrt{۳}}{۲}}{\frac{۱}{۴}}\times f'(۲)=\frac{\sqrt{۳}}{۲}\rightarrow ۴f'(۲)=۱\rightarrow f'(۲)=\frac{۱}{۴}$$

---

24 - اگر $\frac{۱}{۱+x^{۲}}=\lim\limits_{h\to ۰}\frac{f(x+h)-f(x)}{۲h}$ باشد، مشتق تابع $y=f(۲\cos x)$ به ازای $x=\frac{\pi}{۶}$ کدام است؟

① $-\sqrt{۳}$ ② $-\frac{۱}{۲}$ ③ $\sqrt{۳}$ ④ $\frac{۱}{۲}$

پاسخ: گزینه 2

نکته: اگر $f(x)$ تابعي مشتق‌پذیر باشد، آن‌گاه:

$$\lim_{h\to ۰}\frac{f(x+mh)-f(x+nh)}{ph}=(\frac{m-n}{p})f'(x)$$

نکته قاعده‌ي زنجیري:

$$(f(u))'=u'f'(u)$$

$$y' = -2\sin x \cdot f'(2\cos x) \xrightarrow{x=\frac{\pi}{6}} y'(\frac{\pi}{6}) = -2(\frac{1}{2})f'(2(\frac{\sqrt{3}}{2})) = -f'(\sqrt{3}) \qquad (*)$$

از طرفي طبق فرض داريم: $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{2h} = \dfrac{1}{1+x^2} \Rightarrow \dfrac{1}{2}f'(x) = \dfrac{1}{1+x^2} \Rightarrow f'(x) = \dfrac{2}{1+x^2} \Rightarrow f'(\sqrt{3}) = \dfrac{1}{2}$

با جايگذاري در (*) نتيجه ميشود: $y'(\dfrac{\pi}{6}) = -\dfrac{1}{2}$

---

25 - اگر $f(x) = \dfrac{2x}{1+x^2}$ و $g(x) = \tan x$ باشند، مشتق تابع $(fog)(\sqrt{x})$ به ازای $x = \dfrac{\pi^2}{144}$ ، کدام است؟

① $\dfrac{3\sqrt{3}}{\pi}$ ② $\dfrac{4}{\pi}$ ③ $\dfrac{-8}{\pi}$ ④ $\dfrac{6\sqrt{3}}{\pi}$

پاسخ: گزینه 4 می‌دانیم: $\boxed{\dfrac{2\tan x}{1+\tan^2 x} = \sin 2x}$

ضابطه تابع fog چنین است.

$$(fog)(x) = \frac{2\tan x}{1+\tan^2 x} = \sin 2x \to fog(\sqrt{x}) = \sin(2\sqrt{x})$$

مشتق تابع $\sin(2\sqrt{x})$ برابر است با $2(\dfrac{1}{2\sqrt{x}})\cos 2\sqrt{x} = \dfrac{1}{\sqrt{x}}\cos 2\sqrt{x}$ به ازای $x = \dfrac{\pi^2}{144}$ خواهیم داشت.

$$\frac{12}{\pi}\cos\frac{\pi}{6} = \frac{12}{\pi} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{6\sqrt{3}}{\pi}$$

---

26 - اگر f تابعی مشتق‌پذیر بوده و $g(x) = x^3 + 8$ و $(fog)(x) = x^2 + 1$، آنگاه $f'(0)$کدام است؟

① $\dfrac{1}{4}$ ② $\dfrac{1}{3}$ ③ $-\dfrac{1}{4}$ ④ $-\dfrac{1}{3}$

پاسخ: گزینه 4

$$g(x) = x^3 + 8 \Rightarrow g'(x) = 3x^2$$

$$(fog)(x) = x^2 + 1 \xrightarrow{\text{مشتق}} (fog)'(x) = 2x$$

$$g'(x) \cdot f'(g(x)) = 2x \Rightarrow 3x^2 \cdot f'(x^3+8) = 2x$$

$$x = -2 \Rightarrow 12f'(0) = -4 \Rightarrow f'(0) = -\frac{1}{3}$$

---

27 - اگر $f(x) = g(2x\sqrt{x}) = \dfrac{x^2}{16} - 1$، آن‌گاه حاصل مشتق $(f \cdot g)(x)$ در نقطه‌ای به طول $x = 16$ کدام است؟

① $\dfrac{3}{4}$ ② $\dfrac{5}{4}$ ③ $\dfrac{4}{5}$ ④ $\dfrac{4}{3}$

پاسخ: گزینه 2

$$f(x) = \frac{x^2}{16} - 1 \to \begin{cases} f(16) = \dfrac{16^2}{16} - 1 = 15 \\ f'(x) = \dfrac{2x}{16} = \dfrac{x}{16} \to f'(16) = \dfrac{16}{8} = 2 \end{cases}$$

$$g(2x\sqrt{x}) = \frac{x^2}{16} - 1 \xrightarrow{x=4} g(16) = \frac{4^2}{16} - 1 = 0$$

$$f(x) = g(2x\sqrt{x}) \to f'(x) = 2(\sqrt{x} + \frac{x}{2\sqrt{x}}) \times g'(2x\sqrt{x}) \xrightarrow{f'(x)=\frac{x}{8}} (2\sqrt{x} + \frac{x}{\sqrt{x}})g'(2x\sqrt{x}) = \frac{x}{8}$$

$$\xrightarrow{x=4} (4 + \frac{4}{2})g'(16) = \frac{1}{2} \to g'(16) = \frac{1}{12}$$

$$y(x) = (f \cdot g)(x) \to y'(x) = f'(x)g(x) + g'(x)f(x)$$

$$y'(16) = f'(16)g(16) + g'(16)f(16) = 2 \times 0 + \frac{1}{12} \times 15 = \frac{15}{12} = \frac{5}{4}$$

28- فرض کنید $f(x) = (x[x^2 + \frac{1}{2}])^2 + 1$ و $g(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2 - 1}}$، مقدار مشتق تابع fog در $x = \frac{3}{\sqrt{8}}$ چند برابر $(-128\sqrt{2})$ است؟

① -4 ② 1 ③ 2 ④ 4

پاسخ: گزینه 4 در واقع $(fog(x))' = f'(g(x)) \times g'(x)$ قدم اول $g(\frac{3}{\sqrt{8}})$ رو به‌دست می‌آوریم.

$$g(\frac{3}{\sqrt{8}}) = \frac{1}{\sqrt[3]{\frac{9}{8} - 1}} = 2 \Rightarrow f'(2) \times g'(\frac{3}{\sqrt{8}}) = ?$$

قدم دوم از تابع $g(x)$ مشتق بگیریم.

$$g(x) = (x^2 - 1)^{-\frac{1}{3}} \Rightarrow g'(x) = -\frac{1}{3}(x^2 - 1)^{-\frac{4}{3}} \times 2x = \frac{-2x}{3\sqrt[3]{(x^2 - 1)^4}}$$

$$g'(\frac{3}{\sqrt{8}}) = \frac{-2 \times \frac{3}{\sqrt{8}}}{3\sqrt[3]{(\frac{1}{8})^4}} = \frac{-16}{\sqrt{2}} = -8\sqrt{2}$$

قدم سوم محاسبهٔ $f'(2)$. چون براکت داریم اول $x = 2$ را در براکت قرار می‌دهیم (البته نباید داخل براکت صحیح شود.)

$$if x = 2 \Rightarrow [x^2 + \frac{1}{2}] = 4 \Rightarrow f(x) = (4x)^2 + 1 \Rightarrow f'(x) = 32x \Rightarrow f'(2) = 64$$

درنهایت : $-8\sqrt{2} \times 64 = -128\sqrt{2} \times 4 \Rightarrow$ ۴برابر

29- اگر $f'(2) = 2f(2) = 10$ و $g'(5) = -3$ باشد، مقدار $(gof)'(2)$ کدام است؟

① -15 ② 15 ③ -30 ④ 30

پاسخ: گزینه 3

$$f'(2) = 2f(2) = 10 \Rightarrow f'(2) = 10\ ,\ f(2) = 5\ ,\ g'(5) = -3$$

$$(gof)'(2) = f'(2) \cdot g'(f(2)) = 10 \times g'(5) = 10 \times (-3) = -30$$

30- اگر $f(x)=\dfrac{۳x+۱}{۲x+۱}$ و $g(x)=\dfrac{x+\sqrt{x}}{(۲x+۱)^۲}$ باشد، مقدار $\dfrac{g'(x)f'(x)-g(x)f''(x)}{(f'(x))^۲}$ به‌ازای $x=۹$ کدام است؟

① $\dfrac{۵}{۶}$ ② $-\dfrac{۵}{۶}$ ③ $\dfrac{۷}{۶}$ ④ $-\dfrac{۷}{۶}$

پاسخ: گزینه 3

با توجه به مشتق کسر داریم:

$$\left(\frac{g(x)}{f'(x)}\right)'=\frac{g'(x)f'(x)-g(x)f''(x)}{(f'(x))^۲}$$

حال $\dfrac{g(x)}{f'(x)}$ را تشکیل می‌دهیم:

$$f(x)=\frac{۳x+۱}{۲x+۱}\Rightarrow f'(x)=\frac{۳(۲x+۱)-۲(۳x+۱)}{(۲x+۱)^۲}=\frac{۱}{(۲x+۱)^۲}$$

$$y=\frac{g(x)}{f'(x)}=\frac{\frac{x+\sqrt{x}}{(۲x+۱)^۲}}{\frac{۱}{(۲x+۱)^۲}}=x+\sqrt{x}\Rightarrow y'=۱+\frac{۱}{۲\sqrt{x}}\Rightarrow y'(۹)=۱+\frac{۱}{۶}=\frac{۷}{۶}$$

31- اگر $f(x)=\dfrac{۲x-۱}{x+۱}$ و $f'(a)=f''(a)$ باشد، مقدار a کدام است؟

① -۱ ② -۲ ③ -۳ ④ -۴

پاسخ: گزینه 3

$$f(x)=\frac{۲x-۱}{x+۱}\Rightarrow f'(x)=\frac{۲(x+۱)-(۲x-۱)}{(x+۱)^۲}=\frac{۳}{(x+۱)^۲}=۳(x+۱)^{-۲}$$

$$f''(x)=-۶(x+۱)^{-۳}=\frac{-۶}{(x+۱)^۳}$$

$$\Rightarrow f'(a)=f''(a)\Rightarrow\frac{۳}{(a+۱)^۲}=\frac{-۶}{(a+۱)^۳}\Rightarrow\frac{-۲}{a+۱}=۱\Rightarrow a+۱=-۲\Rightarrow a=-۳$$

32- مشتق مرتبه سوم تابع $y=\sqrt[۳]{۲x-۱}$ به ازای $x=۱$ کدام است؟

① $-\dfrac{۴۰}{۹}$ ② $\dfrac{۴۰}{۹}$ ③ $\dfrac{۴۰}{۲۷}$ ④ $\dfrac{۸۰}{۲۷}$

پاسخ: گزینه 4

در توابع رادیکالی برای محاسبهٔ مشتق مراتب بالاتر، بهتر است رادیکال را توان کسری بنویسیم:

$$y=(۲x-۱)^{\frac{۱}{۳}}\Rightarrow y'=\frac{۲}{۳}(۲x-۱)^{\frac{-۲}{۳}}\Rightarrow y''=-\frac{۸}{۹}(۲x-۱)^{-\frac{۵}{۳}}$$

$$\Rightarrow y^{(۳)}=\frac{۸۰}{۲۷}(۲x-۱)^{-\frac{۸}{۳}}\Rightarrow y^{(۳)}(۱)=\frac{۸۰}{۲۷}$$

33 - در تابع درجهٔ دوم f داریم: $f'(1)=2$ و $f''(3)=4$. مقدار $f'(2)$ کدام است؟

(۱) ۴ (۲) ۶ (۳) ۸ (۴) ۲

پاسخ: گزینه 2 با فرض $f(x)=ax^2+bx+c$ داریم:

$$f'(x)=2ax+b \Rightarrow f''(x)=2a \Rightarrow f''(3)=2a \Rightarrow 2a=4 \Rightarrow a=2$$

$$f'(1)=2a+b=2 \Rightarrow 4+b=2 \Rightarrow b=-2 \Rightarrow f'(x)=4x-2$$

$$f'(2)=4\times 2-2=6$$

---

34 - مشتق دوم تابع $f(x)=\dfrac{x^3-3x^2+3x+4}{(x-1)}$ در $x=0$ چقدر است؟

(۱) ۲ (۲) -10 (۳) -12 (۴) -8

پاسخ: گزینه 4

در توابع کسری، برای محاسبهٔ مشتق مراتب بالاتر بهتر است ابتدا کسر را تفکیک کنیم:

$$y=\frac{(x-1)^3+5}{(x-1)}=(x-1)^2+\frac{5}{(x-1)} \Rightarrow y'=2(x-1)-\frac{5}{(x-1)^2}$$

$$y''=2+\frac{10}{(x-1)^3} \Rightarrow y''(0)=-8$$

---

35 - اگر $f(x)=\dfrac{x^3+x}{x+1}$، حاصل $f''(1)$ کدام است؟

(۱) $\frac{1}{2}$ (۲) $\frac{3}{2}$ (۳) $-\frac{1}{2}$ (۴) ۱

پاسخ: گزینه 2 ابتدا ضابطهٔ $f(x)$ را ساده می‌کنیم.

$$\begin{array}{l|l} x^3+x & x+1 \\ \cline{2-2} & x^2-x+2 \\ \underline{-x^3-x^2} & \\ -x^2+x & \\ \underline{x^2+x} & \\ 2x & \\ \underline{-2x-2} & \\ -2 & \end{array}$$

$$\rightarrow f(x)=x^2-x+2-\frac{2}{x+1}=x^2-x+2-2(x+1)^{-1}$$

مشتق اول تابع به‌صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\Rightarrow f'(x)=2x-1-2(-1)(x+1)^{-2}=2x-1+2(x+1)^{-2}$$

مشتق دوم تابع، با مشتق‌گیری از f' به‌دست می‌آید.

$$\Rightarrow f''(x)=2+2(-2)(x+1)^{-3}=2-4(x+1)^{-3}=2-\frac{4}{(x+1)^3}$$

با جایگذاری $x=1$ در عبارت بالا، داریم:

$$f''(1)=2-\frac{4}{8}=2-\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$$

36 - مشتق مرتبه ی هشتادم $f(x)=\dfrac{(x^۲+x+۱)^{۲۱}(x+۲)^{۲۹}(x-۱)^{۱۱}}{x^۲+x-۲}$ کدام است؟

(۱) $۲۱!\times ۲۸!\times ۱۰!$ (۲) $۲۱!\times ۲۹!\times ۱۱!$ (۳) $۸۰!$ (۴) $۶۰!$

پاسخ: گزینه 3 ابتدا ضابطه‌ی تابع $f(x)$ را ساده کرده و سپس مشتق‌گیری می‌کنیم. لذا داریم:

$$f(x)=\frac{(x^۲+x+۱)^{۲۱}(x+۲)^{۲۹}(x-۱)^{۱۱}}{x^۲+x-۲}=\frac{(x^۲+x+۱)^{۲۱}(x+۲)^{۲۹}(x-۱)^{۱۱}}{(x-۱)(x+۲)}$$

$$=(x^۲+x+۱)^{۲۱}(x+۲)^{۲۸}(x-۱)^{۱۰}\Rightarrow f(x)\ \text{حداکثر درجه}\ =(x^۲)^{۲۱}\cdot x^{۲۸}\cdot x^{۱۰}=x^{۸۰}$$

در نتیجه تابع $f(x)$ از درجه‌ی ۸۰ می‌باشد. از آن جا که در اثر مشتق‌گیری مرتبه‌ی هشتادم درجه‌ی جملات کوچک‌تر از ۸۰، صفر می‌شود، لذا خواهیم داشت:

$$f(x)=x^{۸۰}+\cdots\Rightarrow f^{(۸۰)}(x)=۸۰\times ۷۹\times\cdots\times ۱=۸۰!$$

---

37 - اگر $f(x)=\dfrac{\sqrt{۱+x^۲}}{x}$ و $f(x)f''(x)+(f'(x))^۲=\dfrac{k}{x^۴}$ باشند، آن‌گاه مقدار k کدام است؟

(۱) -۱ (۲) -۳ (۳) ۲ (۴) ۳

پاسخ: گزینه 4 می‌دانیم: $(f^n(x))'=n\cdot f'(x)\cdot f^{(n-۱)}(x)$

با کمی دقت متوجه می‌شویم که عبارت $f''(x)\cdot f(x)+(f'(x))^۲$ باز شده‌ی مشتق عبارت $f(x)'\cdot f(x)$ می‌باشد بنابراین ابتدا باید $f(x)'\cdot f(x)$ را محاسبه کنیم.

$$f(x)=\frac{\sqrt{۱+x^۲}}{x}\Rightarrow f^۲(x)=\frac{۱+x^۲}{x^۲}=\frac{۱}{x^۲}+۱$$

$$\xrightarrow{\text{مشتق}}۲f'(x)f(x)=\frac{-۲x}{x^۴}=\frac{-۲}{x^۳}$$

$$\xrightarrow{\text{طرفین وسطین می‌کنیم}}f'(x)f(x)=\frac{-۱}{x^۳}\xrightarrow{\text{مشتق}}f''(x)f(x)+(f'(x))^۲=\frac{۳}{x^۴}$$

بنابراین مقدار k برابر ۳ است.

---

38 - تابع $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ در $\mathbb{R}$ مشتق‌پذیر از مرتبهٔ دوم است. به ازای هر عدد حقیقی x تابع $g(x)=f(۴-x^۲)$ است. اگر $f'(۱)=-۵$ و $f''(۱)=-۱$ باشد، مقدار $g''(\sqrt{۳})$، کدام است؟

(۱) -۳ (۲) -۲ (۳) ۲ (۴) ۳

پاسخ: گزینه 2 می‌دانیم: $y=f(u)\to y'=u'\cdot f'(u)$

$$g'(x)=-۲x\cdot f'(۴-x^۲)$$

$$g''(x)=-۲f'(۴-x^۲)+۴x^۲\cdot f''(۴-x^۲)$$

$$\xrightarrow{x=\sqrt{۳}}g''(\sqrt{۳})=-۲f'(۱)+۱۲f''(۱)=-۲(-۵)+۱۲(-۱)=۱۰-۱۲=-۲$$

---

39 - اگر $۲۰f(x)=x^۵+۵x^۴+۱۰x(x+۱)^۲+۱۰x+۴$ باشد، نمودار تابع f'' از کدام ناحیهٔ دستگاه مختصات نمی‌گذرد؟

(۱) اول (۲) دوم (۳) سوم (۴) چهارم

پاسخ: گزینه 4

$$20f(x) = x^5 + 5x^4 + 10x(x^2 + 2x + 1) + 10x + 4$$

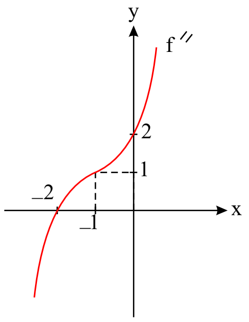
$$20f(x) = x^5 + 5x^4 + 10x^3 + 20x^2 + 20x + 4$$

$$\xrightarrow{\text{مشتق}} 20f'(x) = 5x^4 + 20x^3 + 30x^2 + 40x + 20$$

$$\xrightarrow{\text{مشتق دوم}} 20f''(x) = 20x^3 + 60x^2 + 60x + 40 \Rightarrow f''(x) = x^3 + 3x^2 + 3x + 2$$

$$\Rightarrow f''(x) = x^3 + 3x^2 + 3x + 1 + 1 = (x+1)^3 + 1$$

با توجه به نمودار f'' در شکل مقابل، مشخص است که این نمودار از ناحیهٔ چهارم عبور نمی‌کند.



40- مشتق سوم تابع $y = (3x-1)^3\sqrt[3]{6x-1}$ به‌ازای $x = \frac{1}{3}$ کدام است؟

(1) ۱۶۲ (2) صفر (3) ۲۷ (4) ۸۱

پاسخ: گزینه 1 می‌دانیم:

$$y = (ax+b)^n \to y^{(n)} = a^n \times n!$$

نکته: در تابع $y = f(x)\cdot g(x)$ اگر $f(a) = 0$ باشد آنگاه:

$$y'(a) = f'(a)\cdot g(a)$$

یعنی فقط از عامل صفر شونده مشتق می‌گیریم و در بقیه عددگذاری می‌کنیم.

$$y = (3x-1)^3 \cdot \sqrt[3]{6x-1} \to y^{(3)}_{(x)} = 3^3 \times 3! \times \sqrt[3]{6(\frac{1}{3}) - 1} = 162$$

41- برای تابع $y = x^2\left|x^5\right|$ در $x = 0$ کدام گزینه درست است؟

(1) مشتق ششم و هفتم دارد.
(2) مشتق ششم و هفتم ندارد.
(3) مشتق ششم ندارد مشتق هفتم دارد.
(4) مشتق ششم دارد مشتق هفتم ندارد.

پاسخ: گزینه 4

راه اول:

$$f(x) = \begin{cases} x^7 & x \geq 0 \\ -x^7 & x < 0 \end{cases} \Rightarrow f'(x) = \begin{cases} 7x^6 & x \geq 0 \\ -7x^6 & x < 0 \end{cases}, \dots$$

$$f^{(6)}(x) = \begin{cases} 7!x & x \geq 0 \\ -7!x & x < 0 \end{cases} \Rightarrow f^{(7)}(x) = \begin{cases} 7! & x > 0 \\ -7! & x < 0 \end{cases}$$

پس مشتق ششم موجود است ولی مشتق هفتم وجود ندارد.

راه دوم: تابع $y = (x-a)^n \cdot |x-a|$ در نقطه $x = a$ دارای مشتق مرتبه nاُم است اما مشتق مرتبه‌ی $(n+1)$اُم ندارد به شرط آنکه توان

جمله‌ی صفرشونده‌ی داخل قدرمطلق عدد یک باشد.

$$y=x^{۲}\cdot|x^{۵}|=x^{۲}\cdot|x^{۴}|\cdot|x|=x^{۶}\cdot|x|$$

در $x=۰$ مشتق مرتبه ششم دارد اما مشتق مرتبه‌ی هفتم ندارد.

---

42 - مشتق دوم تابع $y=\dfrac{x^{۳}-۳x^{۲}+۳x-۱+\sqrt[۳]{x^{۱۶}}}{x\sqrt{x}}$ در نقطه $x=۱$ کدام است.

① $\dfrac{۳۹۱}{۳۶}$ ② $\dfrac{۲۳}{۶}$ ③ $\dfrac{۳۹۱}{۶}$ ④ $\dfrac{۲۳}{۳۶}$

پاسخ: گزینه 1

$$y=\frac{(x-۱)^{۳}+x^{\frac{۱۶}{۳}}}{x^{\frac{۳}{۲}}}=\frac{(x-۱)^{۳}}{x^{\frac{۳}{۲}}}+x^{\frac{۱۶}{۳}-\frac{۳}{۲}}\Rightarrow y=\underbrace{\frac{(x-۱)^{۳}}{x^{\frac{۳}{۲}}}}_{f}+x^{\frac{۲۳}{۶}}$$

مشتق دوم تابع f در $x=۱$ صفر است زیرا سه عامل صفرکننده دارد. بنابراین کافي است از $x^{\frac{۲۳}{۶}}$ دوبار مشتق بگیریم.

$$y'=\frac{۲۳}{۶}x^{\frac{۱۷}{۶}}\Rightarrow y''=\frac{۳۹۱}{۳۶}x^{\frac{۱۱}{۶}}\Rightarrow y''(۱)=\frac{۳۹۱}{۳۶}$$

---

43 - مشتق دوم تابع $f(x)=(۲x-۱)^{۲}\sqrt{x+\dfrac{۱}{۲}}$ در $x=\dfrac{۱}{۲}$ کدام است؟

① ۲ ② ۴ ③ ۸ ④ ۱۶

پاسخ: گزینه 3 فقط از عامل صفرشونده دوبار مشتق می‌گیریم و در بقیه عددگذاری می‌کنیم، بنابراین داریم:

$$f(x)=\underbrace{(۲x-۱)^{۲}}_{\text{عامل صفرشونده}}\sqrt{x+\frac{۱}{۲}}\Rightarrow f'(\frac{۱}{۲})=۲(۲)\cdot(۲x-۱)\cdot\sqrt{\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۲}}=\underbrace{۴(۲x-۱)}_{\text{عامل صفرشونده}}\sqrt{۱}$$

$$f''(\frac{۱}{۲})=۴\times۲=۸$$

---

44 - اگر $f(۲x)=g(x^{۲})$ و $g'(x)=\dfrac{۳x}{x-۱}$ باشد، مقدار $f''(۴)$ کدام است؟

① $\dfrac{۱}{۳}$ ② $\dfrac{۲}{۳}$ ③ $\dfrac{۴}{۳}$ ④ $\dfrac{۵}{۳}$

پاسخ: گزینه 2

$$f(۲x)=g(x^{۲})\Rightarrow ۲f'(۲x)=۲xg'(x^{۲})\Rightarrow f'(۲x)=xg'(x^{۲})$$

$$\Rightarrow ۲f''(۲x)=g'(x^{۲})+۲x^{۲}g''(x^{۲})\quad(۱)$$

بنابراین به‌ازای $x=۲$ داریم:

$$۲f''(۴)=g'(۴)+۸g''(۴)$$

از طرف دیگر داریم:

$$\begin{cases} g'(x)=\dfrac{۳x}{x-۱} \Rightarrow g'(۴)=\dfrac{۱۲}{۳}=۴ \\ g''(x)=\dfrac{-۳}{(x-۱)^۲} \Rightarrow g''(۴)=\dfrac{-۳}{۹}=-\dfrac{۱}{۳} \end{cases}$$

در نتیجه با جایگذاری $g'(۴)=۴$, $g''(۴)=-\dfrac{۱}{۳}$ در عبارت (۱) داریم:

$$\Rightarrow ۲f''(۴)=۴+۸(-\frac{۱}{۳}) \Rightarrow f''(۴)=\frac{۲}{۳}$$

45- مشتق نهم تابع $f(x)=\cos^۴ x-\sin^۴ x$ در $x=\dfrac{\pi}{۴}$ کدام است؟

① $۲^۹$ ② $-۲^۹$ ③ -۱ ④ صفر

پاسخ: گزینه 2 می‌دانیم: $\boxed{\cos^۴ x-\sin^۴ x=\cos ۲x}$

$f(x)=k\cdot\cos ax \rightarrow f^{(n)}_{(x)}=k\cdot a^n\cdot\cos ax$ (۴ مضرب n)

$$f(x)=\cos ۲x \rightarrow f^{(۸)}_{(x)}=۲^۸\cos ۲x \rightarrow f^{(۹)}_{(x)}=-۲^۹\sin ۲x$$
$$f^{(۹)}_{(\frac{\pi}{۴})}=-۲^۹\times ۱=-۲^۹$$

46- در تابع با ضابطه‌ی $f(x)=x+\dfrac{۱}{x}$، آهنگ متوسط تغییر تابع وقتی متغیر از عدد ۲ به عدد $۲+h$ تغییر کند برابر $\dfrac{۸}{۹}$ است، h کدام است؟

① ۱٫۵ ② ۲ ③ ۲٫۵ ④ ۳

پاسخ: گزینه 3

$$\frac{f(۲+h)-f(۲)}{۲+h-۲}=\frac{۸}{۹} \Rightarrow \frac{۲+h+\dfrac{۱}{۲+h}-۲-\dfrac{۱}{۲}}{h}=\frac{۸}{۹} \Rightarrow ۸h=۹h+\frac{۹}{۲+h}-\frac{۹}{۲}$$

$$h=\frac{۹}{۲}-\frac{۹}{۲+h} \Rightarrow h=\frac{۱۸+۹h-۱۸}{۲(۲+h)} \Rightarrow ۱=\frac{۹}{۲(۲+h)} \Rightarrow ۴+۲h=۹ \Rightarrow h=\frac{۵}{۲}=۲٫۵$$

47- نقطهٔ $M(x,y)$ روی نمودار تابع $y=\sqrt{۷x+۴}$ در حال حرکت است. اگر d فاصلهٔ نقطهٔ M از مبدأ مختصات باشد، آهنگ لحظه‌ای تغییر d نسبت به x در نقطهٔ $x=۵$ کدام است؟

① $\dfrac{۱۵}{۱۶}$ ② $\dfrac{۱۷}{۱۶}$ ③ $\dfrac{۱۹}{۱۶}$ ④ $\dfrac{۲۱}{۱۶}$

پاسخ: گزینه 2

$$M(x,y) \Rightarrow y=\sqrt{۷x+۴}$$

فاصلهٔ نقطهٔ M تا مبدأ $d=|OM|=\sqrt{x^۲+y^۲}=\sqrt{x^۲+(\sqrt{۷x+۴})^۲}=\sqrt{x^۲+۷x+۴}$

آهنگ لحظه‌ای تغییر d $=d'=\dfrac{۲x+۷}{۲\sqrt{x^۲+۷x+۴}} \xrightarrow{x=۵} d'(۵)=\dfrac{۱۰+۷}{۲\sqrt{۲۵+۳۵+۴}}$

$$\Rightarrow d'(۵) = \frac{۱۷}{۲\sqrt{۶۴}} = \frac{۱۷}{۱۶}$$

---

48 - در تابع با ضابطه‌ی $f(x)=(۲x+۱)^{-\frac{۱}{۲}}$ ، آهنگ متوسط تغییر تابع، از $x_۱=۴$ تا $x_۲=۱۲$ ، از آهنگ لحظه‌ای آن در $x=۴$ ، چقدر بیشتر است؟

① $\frac{۷}{۵۴۰}$ ② $\frac{۱۱}{۵۴۰}$ ③ $\frac{۷}{۲۷۰}$ ④ $\frac{۱۱}{۲۷۰}$

پاسخ: گزینه 2

$$f(x)=(۲x+۱)^{-\frac{۱}{۲}}=\frac{۱}{\sqrt{۲x+۱}}$$

$$\left.\begin{array}{l} \text{آهنگ متوسط از ۴ تا ۱۲} = \frac{f(۱۲)-f(۴)}{۱۲-۴} = \frac{\frac{۱}{۵}-\frac{۱}{۳}}{۸} = \frac{\frac{-۲}{۱۵}}{\frac{۸}{۱}} = -\frac{۱}{۶۰} \\ \text{آهنگ لحظه‌ای=مشتق} = \frac{\frac{-۲}{۲\sqrt{۲x+۱}}}{۲x+۱} \overset{x=۴}{=\!=} \frac{-\frac{۲}{۶}}{۹} = -\frac{۱}{۲۷} \end{array}\right\} \Rightarrow -\frac{۱}{۶۰}-(-\frac{۱}{۲۷})=\frac{۱۱}{۵۴۰}$$

---

49 - در تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\sqrt{x}$ ، آهنگ متوسط تغییر تابع نسبت به تغییر متغیر x، در نقطه‌ی $x=۱$ با نمو متغیر ۰٫۲۱، از آهنگ لحظه‌ای تابع در این نقطه، چقدر کمتر است؟

① $\frac{۱}{۴۲}$ ② $\frac{۱}{۲۱}$ ③ $\frac{۳}{۴۲}$ ④ $\frac{۲}{۲۱}$

پاسخ: گزینه 1 وقتی x اولیه ، یک می‌باشد و نمو متغیر ۰٫۲۱ است پس x ثانویه ۱٫۲۱ است.

$$\text{آهنگ متوسط } [۱,۱{,}۲۱] = \frac{f(۱{,}۲۱)-f(۱)}{۱{,}۲۱-۱} = \frac{\sqrt{۱{,}۲۱}-\sqrt{۱}}{۰{,}۲۱} = \frac{۱{,}۱-۱}{۰{,}۲۱} = \frac{\frac{۱}{۱۰}}{\frac{۲۱}{۱۰۰}} = \frac{۱۰}{۲۱}$$

$$\text{آهنگ لحظه‌ای در } x=۱ = f'(۱) = \frac{۱}{۲\sqrt{x}} = \frac{۱}{۲}$$

بنابراین تفاضل آنها $\frac{۱}{۴۲} = \frac{۱}{۲} - \frac{۱۰}{۲۱}$ است.

---

50 - در تابع با ضابطهٔ $f(x)=\frac{۱}{۲}x^۲-\frac{۱}{x}$، اختلاف آهنگ تغییر لحظه‌ای در $x=۲$، از آهنگ تغییر متوسط در بازهٔ $[۱,۴]$، کدام است؟

① ۰٫۲۵ ② ۰٫۵ ③ ۰٫۴۵ ④ ۰٫۷۵

پاسخ: گزینه 2 تابع داده شده $f(x)=\frac{۱}{۲}x^۲-\frac{۱}{x}$ است.

$$\text{آهنگ تغییر متوسط در } [۱,۴] = \frac{f(۴)-f(۱)}{۴-۱} = \frac{(۸-\frac{۱}{۴})-(\frac{۱}{۲}-۱)}{۳} = \frac{\frac{۳۱}{۴}+\frac{۱}{۲}}{۳} = \frac{۱۱}{۴}$$

$$\text{آهنگ تغییر لحظه‌ای در } x=۲ = f'(۲) \to f'(x)=x+\frac{۱}{x^۲} \to f'(۲)=۲+\frac{۱}{۴}=\frac{۹}{۴}$$

اختلاف این دو $۰{,}۵ = \frac{۲}{۴} = \frac{۱۱}{۴} - \frac{۹}{۴}$ است.

51 - در تابع با ضابطهٔ $f(x)=\frac{x-۱}{\sqrt{x}}$ ، آهنگ متوسط تغییر تابع نسبت به تغییر متغیر x، در $x=۱$ با نمو $۰٫۴۴$، از آهنگ لحظه‌ای تابع در این نقطه، چقدر کمتر است؟

① $\frac{۱}{۳۰}$ ② $\frac{۱}{۲۴}$ ③ $\frac{۱}{۱۲}$ ④ $\frac{۱}{۶}$

پاسخ: گزینه 4 وقتی x اولیه، یک می‌شود و نمو متغیر $۰٫۴۴$ است، پس x ثانویه $۱٫۴۴$ است.

$$\text{آهنگ متوسط در } [۱,۱٫۴۴] = \frac{f(۱٫۴۴)-f(۱)}{۱٫۴۴-۱} = \frac{\frac{۱٫۴۴-۱}{\sqrt{۱٫۴۴}}-۰}{۰٫۴۴} = \frac{\frac{۰٫۴۴}{۱٫۲}}{۰٫۴۴} = \frac{۰٫۴۴}{۰٫۵۲۸} = \frac{۴۴۰}{۵۲۸} = \frac{۵}{۶}$$

$$\text{آهنگ لحظه‌ای} = f'(x) = \frac{۱(\sqrt{x})-\frac{۱}{۲\sqrt{x}}(x-۱)}{x} \to f'(۱)=۱$$

بنابراین تفاضل آن‌دو $\frac{۱}{۶}=۱-\frac{۵}{۶}$ می‌شود.

---

52 - در تابع با ضابطهٔ $f(x)=(x+۲)\sqrt{۴x+۱}$، آهنگ تغییر متوسط تابع در بازهٔ $[۰,۲]$ از آهنگ تغییر لحظه‌ای آن در $x=\frac{۳}{۴}$ چقدر بیشتر است؟

① $۰٫۱۰$ ② $۰٫۱۵$ ③ $۰٫۲۰$ ④ $۰٫۲۵$

پاسخ: گزینه 4

$$\text{آهنگ تغییر متوسط} = \frac{f(۲)-f(۰)}{۲-۰} = \frac{۱۲-۲}{۲} = \frac{۱۰}{۲} = ۵$$

$$\text{آهنگ تغییر لحظه‌ای} = f'(x) = \sqrt{۴x+۱} + \frac{۴}{۲\sqrt{۴x+۱}}(x+۲) \to f'(\frac{۳}{۴}) = ۲+\frac{۱۱}{۴} = \frac{۱۹}{۴} = ۴٫۷۵$$

پس $۰٫۲۵ = ۵-۴٫۷۵$ است.

---

53 - معادلهٔ حرکت اتومبیلی در بازهٔ زمانی $[۲,۱۰]$ به‌صورت $f(t)=۲t^۲-۳t+۱۰$ است. در کدام لحظه سرعت لحظه‌ای با سرعت متوسط در این بازه برابر است؟

① ۵ ② ۶ ③ ۷ ④ ۸

پاسخ: گزینه 2 سرعت متوسط در بازهٔ زمانی $[۲,۱۰]$:

$$\frac{f(۱۰)-f(۲)}{۱۰-۲} = \frac{(۲\times۱۰۰-۳\times۱۰+۱۰)-(۲\times۴-۳\times۲+۱۰)}{۸} = \frac{۱۸۰-۱۲}{۸} = ۲۱$$

سرعت لحظه‌ای:

$$f'(t)=۴t-۳$$

$$۴t-۳=۲۱ \Rightarrow ۴t=۲۴ \Rightarrow t=۶$$

---

54 - اگر آهنگ لحظه‌ای تغییر f در واحد تغییر x در $x=۲$ برابر $-\frac{۳}{۲}$ باشد، آنگاه حد عبارت $\frac{f(۲)-f(۲+h)}{h}$ وقتی $h\to۰$ برابر کدام است؟

① -۳ ② $-\frac{۳}{۲}$ ③ $\frac{۳}{۲}$ ④ ۳

پاسخ: گزینه 3 با توجه به این که آهنگ لحظه‌ای تغییر f در $x=۲$ برابر $-\frac{۳}{۲}$ است، در نتیجه $f'(۲)=-\frac{۳}{۲}$ می‌باشد.

پس : $\lim\limits_{h\to ۰}\frac{f(۲+h)-f(۲)}{h}=-\frac{۳}{۲}\Rightarrow \lim\limits_{h\to ۰}\frac{f(۲)-f(۲+h)}{h}$

$=-\lim\limits_{h\to ۰}\frac{f(۲+h)-f(۲)}{h}=-f'(۲)=-(-\frac{۳}{۲})=\frac{۳}{۲}$

---

55 - آهنگ متوسط تغییر تابع $f(t)=۷\sqrt{t}+۵۰$ در بازهٔ $[۴,۱۶]$، برابر آهنگ لحظه‌ای تغییر آن در $t=a$ است. a کدام است؟

① ۲۷ ② ۹ ③ ۴۹ ④ ۱۲

پاسخ: گزینه 2 آهنگ متوسط تغییر تابع در بازهٔ $[۴,۱۶]$ برابر است با:

$$\frac{f(۱۶)-f(۴)}{۱۶-۴}=\frac{۷\sqrt{۱۶}+۵۰-(۷\sqrt{۴}+۵۰)}{۱۲}=\frac{۱۴}{۱۲}=\frac{۷}{۶}$$

$$f(t)=۷\sqrt{t}+۵۰\Rightarrow f'(t)=\frac{۷}{۲\sqrt{t}}\Rightarrow f'(a)=\frac{۷}{۲\sqrt{a}}$$

فرض سوال: $\Rightarrow \frac{۷}{۲\sqrt{a}}=\frac{۷}{۶}\Rightarrow \sqrt{a}=۳\Rightarrow a=۹$

---

56 - در تابع با ضابطهٔ $f(x)=\sqrt{۲x+۱}+\frac{۱}{x+۱}$، آهنگ تغییر متوسط تابع در بازهٔ $[۰,۴]$ از آهنگ تغییر لحظه‌ای آن در $x=\frac{۳}{۲}$، چقدر کمتر است؟

① ۰٫۰۳ ② ۰٫۰۴ ③ ۰٫۰۵ ④ ۰٫۰۶

پاسخ: گزینه 2

$$f(x)=\sqrt{۲x+۱}+\frac{۱}{x+۱}\rightarrow \begin{cases} f(۰)=۱+۱=۲\\ f(۴)=۳+\frac{۱}{۵}=۳٫۲\end{cases}$$

آهنگ تغییر متوسط تابع در $[۰,۴]$ $=\frac{f(۴)-f(۰)}{۴-۰}=\frac{۳٫۲-۲}{۴}=\frac{۱٫۲}{۴}=۰٫۳$

آهنگ تغییر لحظه‌ای $=$ مشتق $\rightarrow f'(x)=\frac{۱(۲)}{۲\sqrt{۲x+۱}}-\frac{۱}{(x+۱)^۲}$

$$\rightarrow f'(\frac{۳}{۲})=\frac{۱}{\sqrt{۳+۱}}-\frac{۱}{(\frac{۳}{۲}+۱)^۲}=\frac{۱}{۲}-\frac{۱}{\frac{۲۵}{۴}}=\frac{۱}{۲}-\frac{۴}{۲۵}=\frac{۲۵-۸}{۵۰}=\frac{۱۷}{۵۰}=۰٫۳۴$$

بنابراین تفاضل آن‌ها برابر $۰٫۰۴=۰٫۳-۰٫۳۴$ است.

---

57 - آهنگ متوسط تغییر تابع $y=\sqrt{۲۱-x^۲+۴x}$ در بازهٔ $[۵,۶]$، برابر آهنگ تغییر لحظه‌ای این تابع، با کدام مقدار x است؟

① $۴+\sqrt{۲}$ ② $۳+۲\sqrt{۲}$ ③ $۲+\frac{۳}{۲}\sqrt{۲}$ ④ $۲+\frac{۵}{۲}\sqrt{۲}$

پاسخ: گزینه 4

$$\text{آهنگ تغییر متوسط در } [۵,۶] = \frac{f(۶)-f(۵)}{۶-۵} = \frac{\sqrt{۲۱-۳۶+۲۴}-\sqrt{۲۱-۲۵+۲۰}}{۱} = ۳-۴ = -۱$$

$$\text{آهنگ تغییر لحظه‌ای} = y' = \frac{۱(-۲x+۴)}{۲\sqrt{۲۱-x^۲+۴x}} = \frac{-x+۲}{\sqrt{۲۱-x^۲+۴x}}$$

$$\to \frac{-x+۲}{\sqrt{۲۱-x^۲+۴x}} = -۱ \to -x+۲ = -\sqrt{۲۱-x^۲+۴x} \xrightarrow{\text{توان ۲}} x^۲+۴-۴x = ۲۱-x^۲+۴x$$

$$\to ۲x^۲-۸x-۱۷=۰ \to \Delta = ۶۴+۱۳۶ = ۲۰۰$$

$$\to \begin{cases} x = \frac{۸+\sqrt{۲۰۰}}{۴} = \frac{۸+۱۰\sqrt{۲}}{۴} = ۲+\frac{۵}{۲}\sqrt{۲} \\ x = \frac{۸-\sqrt{۲۰۰}}{۴} = \frac{۸-۱۰\sqrt{۲}}{۴} = ۲-\frac{۵}{۲}\sqrt{۲} \ \text{(در معادله صدق نمی‌کند) غ ق ق} \end{cases}$$

---

58 - آهنگ تغییر متوسط تابع $f(x)=x+\tan x$ در بازهٔ $[۰\ ,\ \frac{\pi}{۴}]$ با آهنگ تغییر لحظه‌اي در $x=a$ در این بازه برابر است. مقدار $\cos a$ کدام است؟

① $\frac{\sqrt{\pi}}{۲}$ ② $\frac{\pi}{۴}$ ③ $\frac{\sqrt{\pi}}{۳}$ ④ $\frac{\pi}{۳}$

پاسخ: گزینه 1 آهنگ متوسط برابر است با:

$$\frac{f(\frac{\pi}{۴})-f(۰)}{\frac{\pi}{۴}-۰} = \frac{(\frac{\pi}{۴}+۱)-۰}{\frac{\pi}{۴}} = \frac{\pi+۴}{\pi}$$

آهنگ لحظه‌اي برابر $f'(a)$، است؛ پس:

$$f'(x) = ۱+\frac{۱}{\cos^۲ x} \Rightarrow f'(a) = ۱+\frac{۱}{\cos^۲ a}$$

بنابراین:

$$۱+\frac{۱}{\cos^۲ a} = ۱+\frac{۴}{\pi} \Rightarrow \cos^۲ a = \frac{\pi}{۴} \Rightarrow \cos a = \frac{\sqrt{\pi}}{۲}$$

---

59 - معادلهٔ حرکت متحرکی به‌صورت $f(t)=t^۳-۲t^۲+۳t+۱$ برحسب متر است. اگر سرعت لحظه‌ای آن در لحظهٔ $t=a$ برابر سرعت متوسط در بازهٔ $[۰,a]$ باشد، مقدار a کدام است؟

① ۲ ② $\frac{۳}{۲}$ ③ ۱ ④ $\frac{۱}{۲}$

پاسخ: گزینه 3 سرعت لحظه‌ای متحرک در $t=a$ برابر با $f'(a)$ است:

$$f'(t) = ۳t^۲-۴t+۳ \Rightarrow f'(a) = ۳a^۲-۴a+۳$$

سرعت متوسط متحرک در بازهٔ $[۰,a]$ برابر است با: $\frac{f(a)-f(۰)}{a-۰}$

پس: $\frac{f(a)-f(۰)}{a-۰} = \frac{a^۳-۲a^۲+۳a+۱-۱}{a} = a^۲-۲a+۳$

حال داریم:

$$۳a^۲-۴a+۳ = a^۲-۲a+۳ \Rightarrow ۲a^۲-۲a=۰ \Rightarrow \begin{cases} a_۱ = ۱ \ \text{ق ق} \\ a_۲ = ۰ \ \text{غ‌ق‌ق} \end{cases}$$

60 - آهنگ متوسط تغییر تابع $f(x)=x^{۳}+bx+۳$ در بازه‌ی $[۳\,,\,۵]$ ، ۳ برابر آهنگ لحظه‌ای تغییر این تابع در $x=۳$ است. مقدار b کدام است؟

① -۱۶ ② ۱۶ ③ -۶۴ ④ -۶۲

پاسخ: گزینه 1

$$f(x)=x^{۳}+bx+۳ \Rightarrow f'(x)=۳x^{۲}+b$$

$$\Rightarrow \text{آهنگ متوسط} = ۳(\text{آهنگ لحظه‌ای}) \Rightarrow \frac{f(۵)-f(۳)}{۵-۳}=۳f'(۳)$$

$$\Rightarrow \frac{(۵b+۱۲۸)-(۳b+۳۰)}{۲}=۳(۲۷+b) \Rightarrow ۲b+۹۸=۱۶۲+۶b \Rightarrow b=-۱۶$$