کد اجرا: نامشخص

تاریخ آزمون: ۱۴۰۲/۰۵/۱۲

نام و نام خانوادگی:

زمان برگزاری: ۲۰ دقیقه

نام آزمون: آزمون هفتگی پنجشنبه ۱۲ مرداد

دبیرستان دخترانه علوی واحد شرق

۱) مجموعهٔ جواب نامعادلهٔ $\frac{x}{x-۲} > \frac{۷x-۸}{x^۲-x-۲}$، به‌صورت بازه، کدام است؟

۱) $(-۴,۱)\cup(۲,۳)$ ۲) $(۲,۴)$ ۳) $(-۱,۲)\cup(۲,۴)$ ۴) $(-۱,۲)$

۲) نمودار تابع $f(x)=\frac{۱}{۲}x+۲$ در بازه‌ی $[x_۰,+\infty)$ بالاتر از خط به معادله‌ی $y=۳(x-۱)$ قرار **نمی‌گیرد**، کمترین مقدار $f(x_۰)$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۳) مجموعهٔ جواب‌های نامعادلهٔ $|\frac{۲x-۱}{۳}-۲|\leq ۳$ بازهٔ $[a,b]$ است. مقدار $a+b$ کدام است؟

۱) ۶ ۲) ۷ ۳) ۸ ۴) ۹

۴) مجموعهٔ جواب نامعادلهٔ $x-۳\leq ۲x^۲-x-۳\leq ۵x-۱$، شامل چند عدد صحیح است؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) بی‌شمار

۵) اگر جواب نامعادلهٔ $||x-۱|-۲|\leq ۵$ را به‌صورت بازهٔ $[a,b]$ نشان دهیم، حاصل $b-a$ کدام است؟

۱) ۱۰ ۲) ۱۲ ۳) ۱۴ ۴) ۱۶

۶) مجموعهٔ جواب‌های نامعادلهٔ $\frac{(x^۲-۴x+۴)(x^۲-۴x+۳)}{x^۳-x}<۰$ به‌صورت $(-\infty,a)\cup(b,c)$ است. مقدار $a+b+c$ کدام است؟ ($x\neq ۱$)

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۷) مجموعهٔ جواب‌های نامعادلهٔ $\frac{۱-۲x}{x^۳+۱}\leq \frac{۲}{x^۲-x+۱}-\frac{۱}{x+۱}$ شامل چند عدد طبیعی است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) بی‌شمار

۸) کمترین مقدار تابع $f(x)=۳|x+۲|+|۲x-۴|$ کدام است؟

۱) ۸ ۲) ۱۲ ۳) ۱۰ ۴) ۶

۹) سطح بین نمودار تابع $f(x)=|x-۲|+|x-۴|$ و محور $x$ها و دو خط $x=۳$ و $x=۵$ چند واحد سطح است؟

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۳ ۴) ۱۲

۱۰) اگر خط $y=a$ تابع $y=|x-۱|+|x-۲|$ را در دو نقطه قطع کند، یک ذوزنقه به مساحت ۴ تشکیل می‌شود. $a$ کدام است؟

۱) ۵ ۲) ۳ ۳) $\frac{۳}{۲}$ ۴) $\frac{۱}{۲}$

# پاسخنامه تشریحی

**۱** ۴ **۳** ۲ ۱ روش اول:

$$\frac{۷x-۸}{x^۲-x-۲} > \frac{x}{x-۲} \to \frac{۷x-۸}{(x-۲)(x+۱)} - \frac{x}{x-۲} > ۰$$

$$\to \frac{۷x-۸-x^۲-x}{(x-۲)(x+۱)} > ۰ \to \frac{-x^۲+۶x-۸}{(x-۲)(x+۱)} > ۰$$

$$\to \frac{x^۲-۶x+۸}{(x-۲)(x+۱)} < ۰ \to \frac{(x-۴)(x-۲)}{(x-۲)(x+۱)} < ۰$$

$$\to \frac{x-۴}{x+۱} < ۰ \xrightarrow[\text{توجه کنید } x=۲ \text{ مخرج را صفر می‌کند.}]{\text{تعیین علامت}}$$

| $x$ | $-\infty$ | | $-۱$ | | $۲$ | | $۴$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | $+$ | ن | $-$ | ن | $-$ | $۰$ | $+$ | |

$$\to -۱ < x < ۲ \text{ یا } ۲ < x < ۴ \to x \in (-۱,۲) \cup (۲,۴)$$

**روش دوم:**

**به روش عددگذاری حل می‌کنیم.**

$x = ۰ \longrightarrow \frac{-۸}{-۲} > ۰$ : درست $\longrightarrow$ گزینهٔ دوم حذف می‌شود

$x = ۳ \longrightarrow \frac{۱۳}{۴} > ۳$ : درست $\longrightarrow$ گزینه‌های اول و چهارم حذف می‌شوند

**۲** ۴ **۳** ۲ ۱

$$\frac{۱}{۲}x + ۲ \le ۳(x-۱) \Rightarrow \frac{۱}{۲}x + ۲ \le ۳x - ۳$$

$$\Rightarrow ۳x - ۳ - \frac{۱}{۲}x - ۲ \ge ۰ \Rightarrow \frac{۵}{۲}x - ۵ \ge ۰ \Rightarrow x \ge ۲$$

**پس تابع $f$ در بازهٔ $[۲,+\infty)$ و هر زیرمجموعه آن بالاتر از خط $y = ۳x - ۳$ قرار نمی‌گیرد، در نتیجه $x_۰ \ge ۲$ و داریم:**

$$f(x_۰) = \frac{۱}{۲}x_۰ + ۲ \ge \frac{۱}{۲}(۲) + ۲ = ۳ \Rightarrow f(x_۰) \ge ۳$$

**۳** ۴ ۳ **۲** ۱ **اگر $|x| \le k$ و $k \ge ۰$ آن‌گاه $-k \le x \le k$. بنابراین:**

$$\left|\frac{۲x-۱}{۳} - ۲\right| \le ۳ \Rightarrow -۳ \le \frac{۲x-۱}{۳} - ۲ \le ۳$$

$$-۱ \le \frac{۲x-۱}{۳} \le ۵ \Rightarrow -۳ \le ۲x - ۱ \le ۱۵$$

$$-۲ \le ۲x \le ۱۶ \Rightarrow -۱ \le x \le ۸$$

**بنابراین مجموعهٔ جواب‌های نامعادله بازهٔ $[-۱, ۸]$ است و درنتیجه:**

$$a = -۱ \ , \ b = ۸ \Rightarrow a + b = ۷$$

**۴** ۴ ۳ **۲** ۱

$$x - ۳ \le ۲x^۲ - x - ۳ \le ۵x - ۱$$

$$(I): \ x - ۳ \le ۲x^۲ - x - ۳ \Rightarrow ۲x^۲ - x - ۳ - x + ۳ \ge ۰ \Rightarrow ۲x^۲ - ۲x \ge ۰$$

$$\Rightarrow ۲x(x-۱) \ge ۰ \Rightarrow \begin{cases} ۲x = ۰ \Rightarrow x = ۰ \\ x - ۱ = ۰ \Rightarrow x = ۱ \end{cases}$$

| | $0$ | | $1$ | |
|---|---|---|---|---|
| $2x^2-2x$ | $+$ | $-$ | | $+$ |

$$\Rightarrow x \in (-\infty, 0] \cup [1, +\infty) \quad (I)$$

$$(II):\ 2x^2 - x - 3 \leq 5x - 1 \Rightarrow 2x^2 - x - 3 - 5x + 1 \leq 0 \Rightarrow 2x^2 - 6x - 2 \leq 0$$

$$\Rightarrow x^2 - 3x - 1 \leq 0 \Rightarrow \begin{cases} \Delta = 9 - 4(1)(-1) = 9 + 4 = 13 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = 13 \\ x = \dfrac{3 \pm \sqrt{13}}{2} \end{cases}$$

| | | $\frac{3-\sqrt{13}}{2}$ | | $\frac{3+\sqrt{13}}{2}$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| $x^2-3x-1$ | $+$ | | $-$ | | $+$ |

$$\Rightarrow x \in \left[\frac{3 - \sqrt{13}}{2}, \frac{3 + \sqrt{13}}{2}\right] \quad (II)$$

$(I) \wedge (II) : \left[\dfrac{3 - \sqrt{13}}{2}, 0\right] \cup \left[1, \dfrac{3 + \sqrt{13}}{2}\right]$ : ۴ عدد صحیح ۰ و ۱ و ۲ و ۳ در این مجموعه جواب قرار دارد.

**۵** ۴ **۳** ۲ ۱ می‌دانیم اگر $|f(x)| \leq k$ باشد و $k > 0$ باشد، آنگاه $k \leq f(x) \leq k$ است پس:

$$||x-1| - 2| \leq 5 \Rightarrow -5 \leq |x-1| - 2 \leq 5 \xrightarrow{+2} -3 \leq |x-1| \leq 7$$

بدیهی است که نامساوی $-3 \leq |x-1|$ همواره درست است، در نتیجه:

$$|x-1| \leq 7 \Rightarrow -7 \leq x - 1 \leq 7 \xrightarrow{+1} -6 \leq x \leq 8$$

بنابراین، بازهٔ جواب این نامعادله $[-6, 8]$ است که داریم:

$$[-6, 8] = [a, b] \Rightarrow b - a = 8 + 6 = 14$$

**۶** ۴ ۳ **۲** ۱ ابتدا نامعادله را به‌صورت زیر ساده می‌کنیم:

$$\frac{(x^2 - 4x + 4)(x^2 - 4x + 3)}{x^3 - x} < 0 \Rightarrow \frac{(x-2)^2(x-1)(x-3)}{x(x-1)(x+1)} < 0$$

چون $(x-2)^2$ همواره نامنفی است، پس نامعادله به‌صورت زیر درمی‌آید:

$$\frac{x-3}{x(x+1)} < 0$$

با توجه به جدول تعیین علامت مقابل مجموعهٔ جواب‌های نامعادله به‌صورت $(-\infty, -1) \cup (0, 3)$ است. پس $a = -1$، $b = 0$، $c = 3$ و درنتیجه $a + b + c = 2$.

| x | $-\infty$ | $-1$ | $0$ | $3$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $x-3$ | $-$ | $-$ | $-$ | $+$ | |
| $x(x+1)$ | $+$ | $-$ | $+$ | $+$ | |
| $\frac{x-3}{x(x+1)}$ | $-$ | $+$ | $-$ | $+$ | |

**۷** ۴ **۳** ۲ ۱

با استفاده از اتحاد چاق و لاغر می‌دانیم $(x+1)(x^2 - x + 1) = x^3 + 1$ است، پس عبارت داده‌شده را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$\frac{1}{x+1} - \frac{2}{x^2 - x + 1} - \frac{1 - 2x}{x^3 + 1} \leq 0 \Rightarrow \frac{x^2 - x - 2}{(x+1)(x^2 - x + 1)} \leq 0 \Rightarrow \frac{(x+1)(x-2)}{(x+1)(x^2 - x + 1)} \leq 0 \Rightarrow \frac{x-2}{x^2 - x + 1} \leq 0; (x \neq -1)$$

مخرج کسر همواره مثبت است (زیرا $\Delta < 0$ و $a > 0$)، پس $x - 2 \leq 0$ و در نتیجه $x \leq 2$ است.

$$\text{مجموعه جواب} = (-\infty, -1) \cup (-1, 2] = (-\infty, 2] - \{-1\}$$

و اعداد طبیعی این مجموعه ۱ و ۲ هستند.

دقت کنید اگرچه $(x+1)$ از صورت و مخرج ساده شد، اما به عنوان ریشهٔ مخرج باید $x = -1$ از مجموعهٔ جواب حذف شود.

**۸** ۴ ۳ ۲ **۱** نکته: اگر چند قدرمطلق با یکدیگر جمع شوند کمترین مقدار، توسط ریشهٔ یکی از قدرمطلق‌ها ایجاد می‌شود.

ریشه‌های داخل $f(x)$، $x = 2$ و $x = -2$ می‌باشد خواهیم داشت:

$$f(2) = 12$$

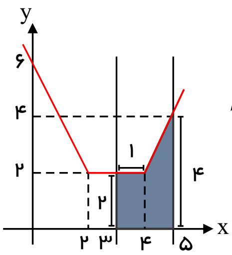
$f(-۲) = ۸$

بنابراین کمترین مقدار $f(x)$ برابر ۸ است.

۹ ۱ ۲ ۳ ۴

نمودار تابع $f(x)$ و دو خط $x = ۳$ و $x = ۵$ به‌صورت زیر می‌باشد:

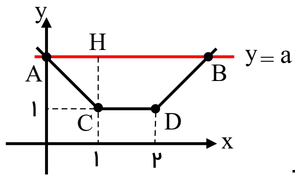
در نتیجه مساحت خواسته‌شده برابر مجموع مساحت ذوزنقه و مستطیل است. لذا داریم:



$$S_{\text{ذوزنقه}} = \frac{(۲+۴)\times ۱}{۲} = ۳\ ,\ S_{\text{مستطیل}} = ۱ \times ۲ = ۲ \xrightarrow{\text{جمع}} ۳ + ۲ = ۵$$ واحد سطح

۱۰ ۱ ۲ ۳ ۴ ابتدا نمودار $y = |x-۱| + |x-۲|$ را رسم می‌کنیم.

$$\begin{cases} ۳ - ۲x & ; \quad x \leq ۱ \\ ۱ & ; \quad ۱ < x < ۲ \\ ۲x - ۳ & ; \quad x \geq ۲ \end{cases}$$



چون $y = a$ نمودار را در دو نقطه قطع می‌کند، پس $a > ۱$ است.

$$\begin{cases} y = a \\ y = ۳ - ۲x \end{cases} \Rightarrow a = ۳ - ۲x \Rightarrow x_A = \frac{۳-a}{۲} \quad \text{و} \quad \begin{cases} y = a \\ y = ۲x - ۳ \end{cases} \Rightarrow a = ۲x - ۳ \Rightarrow x_B = \frac{a+۳}{۲}$$

$$S_{ABDC} = \frac{۱}{۲}(AB + CD)\cdot CH = \frac{۱}{۲}((\frac{a+۳}{۲} - \frac{۳-a}{۲}) + ۱)(a-۱)$$

$$= \frac{۱}{۲}(a+۱)(a-۱) = ۴ \Rightarrow a^۲ - ۱ = ۸ \Rightarrow a^۲ = ۹ \xrightarrow{a>۱} a = ۳$$

# پاسخ‌نامه کلیدی

| | |
|---|---|
| ۱ | ۳ |
| ۲ | ۳ |
| ۳ | ۲ |
| ۴ | ۲ |
| ۵ | ۳ |
| ۶ | ۲ |
| ۷ | ۳ |
| ۸ | ۱ |
| ۹ | ۲ |
| ۱۰ | ۲ |