کد اجرا: ۷۶۵۳۱۲۷ | تاریخ آزمون: ۱۴۰۲/۰۵/۲۵

نام و نام خانوادگی: | زمان برگزاری: ۸۸۰ دقیقه

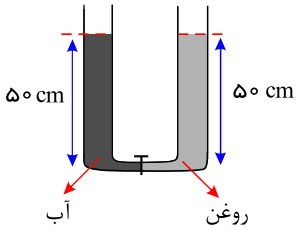
نام آزمون: شرق دخترانه حسابی ۲۵ مرداد

علوی

دبیرستان دخترانه علوی واحد شرق

۱ در شکل روبه‌رو، قطر قاعده دو استوانه برابرند. اگر شیر ارتباط بین دو طرف را باز کنیم، سطح آب چند سانتی‌متر پایین می‌آید؟

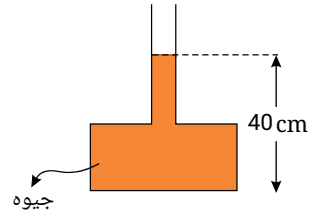
($\frac{kg}{m^3}$ ۸۰۰ = چگالی روغن و $\frac{kg}{m^3}$ ۱۰۰۰ چگالی آب)



۱) ۱۰ ۲) ۵ ۳) ۴ ۴) ۲٫۵

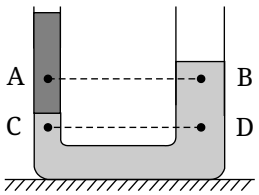
۲ در شکل روبه‌رو، اگر بیشینهٔ نیرویی که کف ظرف می‌تواند از طرف جیوه تحمل کند، ۱۳۵ نیوتون باشد، حداکثر چند سانتی‌متر جیوه می‌توان به ارتفاع جیوه در لوله اضافه کرد، تا ظرف شکسته نشود؟

(cm^2 ۲۰ = سطح کف ظرف، $\frac{kg}{m^3}$ ۱۳۵۰۰ = چگالی جیوه و $\frac{m}{s^2}$ ۱۰ = g است.)



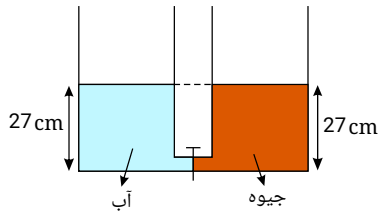
۱) ۵ ۲) ۹۰ ۳) ۲۰ ۴) ۱۰

۳ در شکل روبه‌رو، در درون لوله، دو مایع مخلوط نشدنی قرار دارند. اگر فشار در نقاط نشان داده در درون مایع‌ها را با هم مقایسه کنیم، کدام رابطه درست است؟



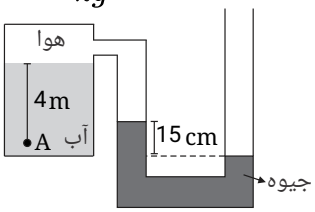
۱) $P_C < P_D$, $P_A = P_B$ ۲) $P_C < P_D$, $P_A < P_B$ ۳) $P_C = P_D$, $P_A = P_B$ ۴) $P_C = P_D$, $P_A > P_B$

۴ دو ظرف استوانه‌ای مشابه به‌وسیلهٔ لولهٔ بسیار باریک با حجم ناچیز به یکدیگر مربوط‌اند و مطابق شکل زیر در یک استوانه آب و در دیگری جیوه قرار دارد. اگر شیر ارتباطی بین دو ظرف را باز کنیم، سطح جیوه در لوله چند سانتی‌متر پایین می‌آید؟ ($\rho_{\text{جیوه}} = ۱۳٫۵\, g/cm^۳$ و $\rho_{\text{آب}} = ۱\, g/cm^۳$)



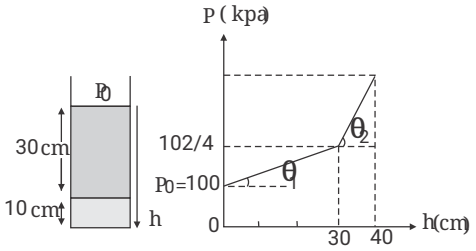
۱) ۲ ۲) ۵ ۳) ۱۲٫۵ ۴) ۲۵

۵ فشار در نقطهٔ A چند کیلوپاسکال است؟ (چگالی آب $۱۰۰۰\, \frac{kg}{m^۳}$، چگالی جیوه $۱۳۶۰۰\, \frac{kg}{m^۳}$، فشار هوای بیرون $۱۰^۵ P_a$ و $g = ۱۰\, \frac{N}{kg}$ است.)



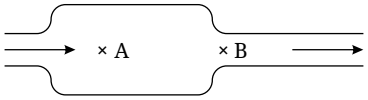
۱) ۷۹٫۶ ۲) ۱۱۹٫۶ ۳) ۶۸٫۴ ۴) ۱۲۰٫۴

۶ در ظرفی مطابق شکل زیر، دو مایع مخلوط نشدنی وجود دارد. اگر نمودار تغییرات فشار برحسب عمق دو مایع مطابق شکل زیر باشد و $\tan\theta_۲ = ۱۷ \tan\theta_۱$ باشد، $\rho_۱$ و $\rho_۲$ در SI کدام‌اند؟



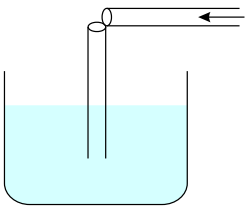
۱) ۶۰۰ و ۱۰۲۰۰ ۲) ۷۵۰ و ۱۲۷۵۰ ۳) ۸۰۰ و ۱۳۵۰۰ ۴) ۸۰۰ و ۱۳۶۰۰

۷ در شکل زیر، آب حجم لوله‌ها را پُر کرده و به‌صورت پیوسته و پایدار در لوله‌هایی افقی با سطح مقطع‌های متفاوت جاری است. اگر تندی آب را با v و فشار آن را با P نشان دهیم، کدام رابطه درست است؟



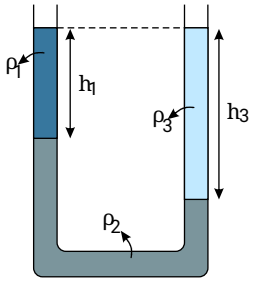
۱) $P_A > P_B$ و $v_A < v_B$ ۲) $P_A > P_B$ و $v_A > v_B$ ۳) $P_A < P_B$ و $v_A < v_B$ ۴) $P_A < P_B$ و $v_A > v_B$

۸ یک نی پلاستیکی را مطابق شکل زیر از وسط می‌بریم و بدون اینکه دو قسمت آن کاملاً از هم جدا شوند، آن را ۹۰ درجه تا کرده و درون آب قرار می‌دهیم. حال اگر از قسمت افقی آن در جهت نشان داده شده بدمیم، فشار هوای داخل نی قائم، چگونه تغییر می‌کند و سطح آب داخل آن چگونه جابه‌جا می‌شود؟



۱) افزایش می‌یابد، پایین می‌رود.
۲) کاهش می‌یابد، پایین می‌رود.
۳) افزایش می‌یابد، بالا می‌آید.
۴) کاهش می‌یابد، بالا می‌آید.

۹ مطابق شکل زیر، سه مایع مخلوط نشدنی به چگالی‌های $\rho_1 = 4g/cm^3$، $\rho_2 = 7g/cm^3$ و $\rho_3 = 5g/cm^3$ در لولهٔ U شکل موجود هستند. اگر $h_3 = 15cm$ باشد، h_1 چند سانتی‌متر است؟ (سیستم در تعادل است.)



۱) ۷٫۵
۲) ۹
۳) ۱۲
۴) ۱۰

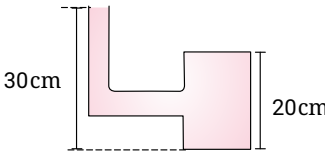
۱۰ قطر داخلی استوانه‌ی بلندی $2cm$ است. اگر آن را به‌طور قائم نگه داشته و $157cm^3$ آب در آن بریزیم، فشار حاصل از آب در ته استوانه چند پاسکال می‌شود؟ ($\pi = 3/14$ ، $P_{آب} = 1000\frac{kg}{m^3}$ ، $g = 10\frac{m}{s^2}$)

۱) ۱۵۰
۲) ۳۰۰
۳) ۲۵۰۰
۴) ۵۰۰۰

۱۱ اگر فشار هوا ۷۵ سانتی‌متر جیوه باشد، فشار در عمق چند متری آب به ۱۰۰ سانتی‌متر جیوه می‌رسد؟ (چگالی جیوه و آب به‌ترتیب $13/6\frac{g}{cm^3}$ و $1\frac{g}{cm^3}$ است و $g = 10\frac{m}{s^2}$)

۱) ۳٫۴
۲) ۶٫۸
۳) ۱۰٫۲
۴) ۱۳٫۶

۱۲ در شکل مقابل، لوله‌ی باریکی به یک مخزن متصل شده است. مساحت کف مخزن $100cm^2$ است. اگر داخل لوله و مخزن مایعی به چگالی $800\frac{kg}{m^3}$ باشد، نیرویی که از طرف مایع به کف مخزن وارد می‌شود، چند نیوتون است؟ $(g = 10\frac{m}{s^2})$



۱) ۲۴۰
۲) ۱۶۰
۳) ۲۴
۴) ۱۶

۱۳ اگر جزء صحیح $(x^2 + x)$ برابر -1 باشد، آن‌گاه $[x^{20}]$ کدام است؟

۱) -1
۲) ۰
۳) ۱
۴) ۲

۱۴) مجموع جواب‌های معادلهٔ $|x+۲|+|۲x-۱|=۳$، کدام است؟

۱) $-\frac{۲}{۳}$ ۲) $\frac{۲}{۳}$ ۳) ۱ ۴) $\frac{۴}{۳}$

۱۵) مجموعه جواب معادله‌ی $\left[\frac{۲x}{۳}\right]-\left[-\frac{۲x}{۳}\right]=۳$ شامل چند عدد صحیح است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) صفر

۱۶) اگر $۳x^۲+۵x+۲<۰$ باشد، حاصل $\frac{۳^{-[x]}}{۳^{[-x]}}+[۳x]$ کدام است؟

۱) $-\frac{۸}{۳}$ ۲) $-\frac{۱}{۳}$ ۳) ۰ ۴) ۱

۱۷) خط $x+y=-۲$ نمودار تابع $f(x)=\frac{x[x]-۳[x]}{[x]}$ را در چه نقطه‌ای قطع می‌کند؟

۱) $(\frac{۱}{۲},-\frac{۵}{۲})$ ۲) $(۱,-۳)$ ۳) $(۰,-۲)$ ۴) فاقد نقطهٔ تلاقی

۱۸) اگر جواب نامعادلهٔ $||x-۱|-۲|\leq ۵$ را به‌صورت بازهٔ $[a,b]$ نشان دهیم، حاصل $b-a$ کدام است؟

۱) ۱۰ ۲) ۱۲ ۳) ۱۴ ۴) ۱۶

۱۹) اگر $[x+۲[x]]=۴$، مقدار x کدام است؟

۱) $\frac{۴}{۳}\leq x\leq\frac{۷}{۳}$ ۲) $۰\leq x<۱$ ۳) $۱\leq x\leq ۲$ ۴) جواب ندارد

۲۰) مساحت ناحیهٔ محدود به نمودار توابع $f(x)=۲|x|-x$ و $g(x)=a-۲x$ برابر ۶ است. مقدار a کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۲۱) مساحت بین تابع $f(x)=۳x+|x|$ و خط $y=۳x+۱$ کدام است؟

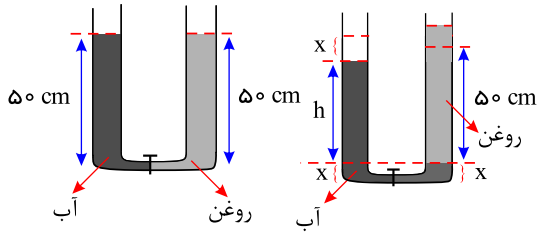
۱) ۲ ۲) $\sqrt{۵}$ ۳) ۱ ۴) $۲\sqrt{۵}$

۲۲) تعداد جواب‌های معادلهٔ $|x^۲-۱|=\sqrt{x}+\frac{۱}{۲}$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ‌نامه تشریحی

۱ ۱ ۲ ۳ ۴ با باز شدن شیر ارتباط به دلیل اینکه چگالی آب بیشتر از چگالی نفت است، سطح آب در لولهٔ سمت چپ پایین‌تر از سطح نفت در لولهٔ سمت راست قرار می‌گیرد. لذا با انتخاب سطح ترازی مناسب و با استفاده از اصل هم‌فشاری نقاط هم‌تراز، ارتفاع h را محاسبه می‌کنیم:



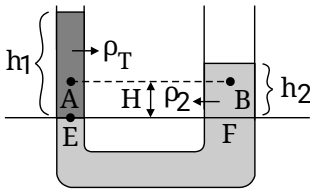
$$P_{\text{آب}} = P_{\text{روغن}}$$
$$\rho_{\text{آب}} g h_{\text{آب}} = \rho_{\text{روغن}} g h_{\text{روغن}} \rightarrow \rho_{\text{آب}} h_{\text{آب}} = \rho_{\text{روغن}} h_{\text{روغن}}$$
$$\rightarrow ۱۰۰۰ \times h_{\text{آب}} = ۸۰۰ \times ۵۰ \rightarrow h_{\text{آب}} = ۴۰cm$$
$$h_{\text{آب}} + ۲x = ۵۰ \rightarrow ۴۰ + ۲x = ۵۰ \rightarrow x = ۵cm$$

بنابراین سطح آب در لولهٔ سمت چپ $۵cm$ پایین می‌آید.

۲ ۱ ۲ ۳ ۴ در ابتدا، با معلوم بودن حداکثر نیروی وارد بر کف از طرف مایع، حداکثر ارتفاع ستون جیوه را محاسبه می‌کنیم. سپس میزان ستونی که مجاز به افزودن است را می‌یابیم:

$$F_{max_{\text{مایع}}} = P_{max_{\text{مایع}}} \times A \Rightarrow F_{max_{\text{مایع}}} = \rho g h_{max} \times A \Rightarrow ۱۳۵ = ۱۳۵۰۰ \times ۱۰ \times h_{max} \times (۲۰ \times ۱۰^{-۴})$$
$$\Rightarrow h_{max} = ۰/۵m = ۵۰cm \Rightarrow \Delta h = ۵۰ - ۴۰ = ۱۰cm$$

۳ ۱ ۲ ۳ ۴



*نکته: فشار در نقاط هم‌تراز درون یک مایع ساکن برابر است؛ بنابراین چون دو نقطهٔ C و D هم‌تراز و در درون یک مایع ساکن‌اند، پس: $P_C = P_D$

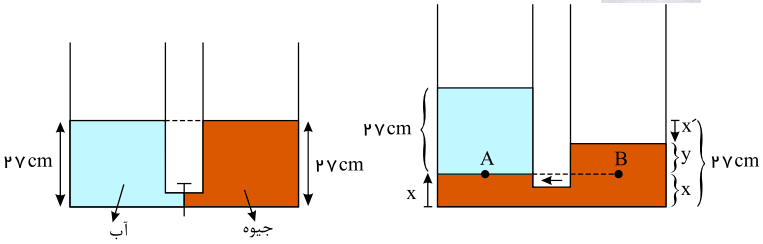
اما دو نقطهٔ A و B هم تراز هستند ولی در داخل دو مایع ساکن قرار دارند. در این حالت فشار دو نقطه در درون مایع‌ها از رابطهٔ $P = \rho gh$ مقایسه می‌شود. با توجه به هم‌فشاری دو نقطهٔ E و F داریم:

$$\begin{cases} P_E = P_A + \rho_۱ gh \\ P_F = P_B + \rho_۲ gh \end{cases} \xrightarrow{P_E = P_F} P_A + \rho_۱ gh = P_B + \rho_۲ gh \Rightarrow P_A = P_B + (\rho_۲ - \rho_۱) gh \xrightarrow{\rho_۲ > \rho_۱} P_A > P_B$$

نکته: به‌طور کلی، در مقایسهٔ فشار دو نقطهٔ هم‌تراز در دو مایع مخلوط نشدنی مرتبط در حال تعادل، نقطه‌ای که در مایع چگالتر قرار دارد، دارای فشار کمتری است. یعنی در اینجا، فشار نقطهٔ B که در مایع چگالتر است، کمتر از فشار نقطهٔ A است. $(P_A > P_B)$

* البته با توجه به گزینه‌ها و بدون حل هم می‌توان فهمید که گزینهٔ ۴ درست است. چون حتماً $P_C = P_D$ ، $P_A \neq P_B$ که این شرط فقط در گزینهٔ ۴ برقرار است.

۴ ۱ ۲ ۳ ۴ هنگامی که شیر رابط را باز کنیم، چون جیوه دارای چگالی بیشتری از آب است، جیوه جابه‌جا شده و مطابق شکل در زیر آب قرار می‌گیرد. حال اگر نقاط هم‌تراز با فشار یکسان A و B را معلوم کنیم، برای تعیین جابه‌جایی سطح جیوه یعنی x' داریم:



$$P_A = P_B \rightarrow (\rho h)_{\text{آب}} = (\rho y)_{\text{جیوه}} \rightarrow ۱ \times ۲۷cm = ۱۳٫۵y \rightarrow y = ۲cm$$

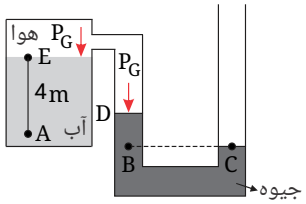
حال می‌دانیم که چون قطر لولهٔ رابط ناچیز فرض شده، مجموع ارتفاع ستون‌های آب و جیوه، باید برابر $۵۴cm$ باشد. بنابراین داریم:

$$۲۷ + x + x + y = ۵۴ \xrightarrow{y=۲cm} x = ۱۲٫۵cm$$

و درنهایت، در لولهٔ شامل ستون جیوه داریم:

$$x' = ۲۷ - (x + y) = ۲۷ - (۱۲٫۵ + ۲) \rightarrow x' = ۱۲٫۵cm$$

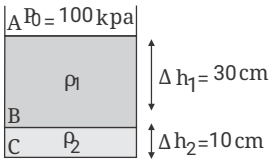
۵ ۱ ۲ ۳ ۴ اگر فشار هوای محبوس در بالای مخزن را P_G بنامیم، باتوجه به برابر بودن فشار در نقاط هم‌سطح از یک مایع، خواهیم داشت: (سعی می‌کنیم که P_G را در معادلات حذف کنیم.)

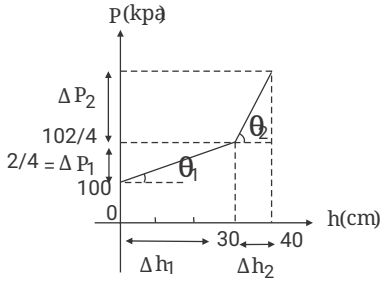


$$P_B = P_C P_G + DB \text{ فشار ستون} = P_\circ$$
$$\rightarrow P_G = P_\circ - \rho_{Hg} g h_{DB}$$
$$P_A = P_G + \rho_{H_۲O} \cdot g \cdot h_{EA} \xrightarrow{(۱)} P_A = P_\circ - \rho_{Hg} g h_{DB} + \rho_{H_۲O} g h_{EA} \rightarrow$$
$$P_A = ۱۰^۵ - ۱۳۶۰۰ \times ۱۰ \times ۰٫۱۵ + ۱۰۰۰ \times ۱۰ \times ۴$$
$$P_A = ۱۱۹۶۰۰ P_a = ۱۱۹٫۶ kP_a$$

۶ ۱ ۲ ۳ ۴

می‌دانیم که در نمودار تغییرات فشار برحسب عمق مایع، شیب نمودار برابر $\rho \cdot g$ است، پس اگر $\tan\theta_۲ = ۱۷\tan\theta_۱$ باشد، یعنی $\rho_۲ = ۱۷\rho_۱$ است. حال در ابتدا $\rho_۱$ را محاسبه می‌کنیم.





در نمودار بالا $(\Delta P_۱)$ اختلاف فشار بین دو نقطهٔ A و B سطح مایع و کف مایع (۱) می‌باشد. با استفاده از $\Delta P_۱$ می‌توانیم $\rho_۱$ را به‌دست آوریم.

$$\Delta P_۱ = \rho_۱ \cdot g \cdot \Delta h_۱ \Rightarrow ۲٫۴ \times ۱۰^۳ = \rho_۱ \times ۱۰ \times ۳۰ \times ۱۰^{-۲} \Rightarrow \rho_۱ = ۸۰۰ \frac{kg}{m^۳}$$

با توجه به آنچه گفتیم $\rho_۲ = ۱۷\rho_۱$ است، بنابراین:

$$\rho_۲ = ۱۷ \times ۸۰۰ \rightarrow \rho_۲ = ۱۳۶۰۰ \frac{kg}{m^۳}$$

۷ ۱ ۲ ۳ ۴ با استفاده از معادلهٔ پیوستگی داریم:

$$\underset{\text{سطح مقطع در محل نقطهٔ } A}{A_A} \overset{\text{سرعت شاره}}{v_A} = \underset{\text{سطح مقطع در محل نقطهٔ } B}{A_B} \overset{\text{سرعت شاره}}{v_B} \xrightarrow{A_A > A_B} v_A < v_B$$

طبق اصل برنولی هرچه سرعت شاره بیشتر باشد، فشار در محل شاره کمتر است.

$$v_A < v_B \rightarrow \boxed{P_A > P_B}$$

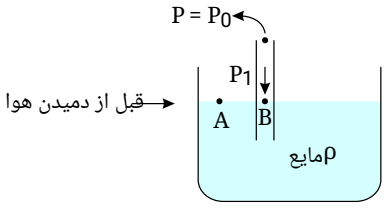
۸ ۱ ۲ ۳ ۴

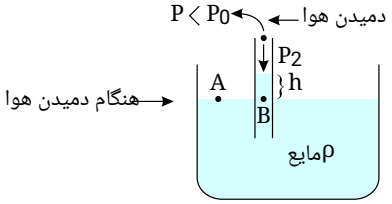
$$\text{قبل از دمیدن هوا} \Rightarrow P_۱ = P_\circ \text{ و } P_A - P_B = P_\circ \quad (۱)$$

هنگام دمیدن هوا $\Rightarrow \begin{cases} P'_A = P_B = P_۲ + \rho gh \\ P'_A = P_A = P_۰ \end{cases} \Rightarrow P_۰ = P_۲ + \rho gh \quad (۲)$

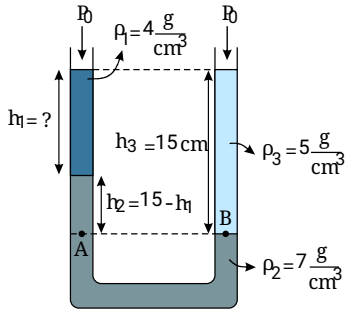
(۱) و (۲) $\Rightarrow P_۲ < P_۰ = P_۱$

فشار هوای داخل نی قائم کاهش می‌یابد.





۹ ۱ ۲ ۳ **۴**



چون فشار در نقطه‌های هم‌تراز درون یک مایع ساکن با هم برابر است، بنابراین فشار نقطه‌های A و B یکسان است. بنابراین می‌توان نوشت:

$$P_A = P_B \Rightarrow P_۰ + \rho_۱ gh_۱ + \rho_۲ gh_۲ = P_۰ + \rho_۳ gh_۳$$
$$\Rightarrow \rho_۱ h_۱ + \rho_۲ h_۲ = \rho_۳ h_۳ \Rightarrow ۴h_۱ + ۷ \times (۱۵ - h_۱) = ۵ \times ۱۵$$
$$\Rightarrow ۴h_۱ + ۱۰۵ - ۷h_۱ = ۷۵ \Rightarrow ۱۰۵ - ۷۵ = ۳h_۱ \Rightarrow h_۱ = ۱۰cm$$

۱۰ ۱ ۲ ۳ **۴**

روش اول: ابتدا ارتفاع مایع را با استفاده از رابطه‌ی $V = A \cdot h$ به‌دست می‌آوریم.

$$A = \pi \frac{D^۲}{۴} = \pi \times \frac{(۲^۲)}{۴} = \pi(cm^۲) = ۳/۱۴cm^۲$$

$$V = Ah \Rightarrow ۱۵۷ = \pi h \Rightarrow h = \frac{۱۵۷}{۳/۱۴} = ۵۰cm$$

$$P = \rho gh = ۱۰۰۰ \times ۱۰ \times ۰/۵ = ۵۰۰۰Pa$$

روش دوم: می‌دانیم که در یک ظرف استوانه‌ای، نیروی وارد بر کف ظرف از طرف مایع، برابر با وزن مایع است، بنابراین برای تعیین فشار وارد بر کف از طرف مایع داریم:

$$P = \frac{F}{A} = \frac{mg}{A} = \frac{۱۵۷ \times ۱۰^{-۳} \times ۱۰}{۳/۱۴ \times ۱۰^{-۴}} \rightarrow P = ۵۰۰۰Pa$$

۱۱ **۱** ۲ ۳ ۴ می‌خواهیم ببینیم فشار چه ارتفاعی از آب برابر $۲۵cm\ Hg$ است. $۱۰۰ - ۷۵ = ۲۵$

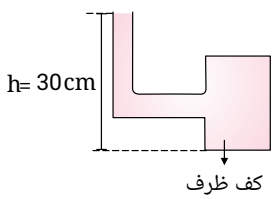
همان‌طور که می‌دانید فشار ۲۵ سانتی‌متر از جیوه برابر فشاری معادل با ستون ۲۵ سانتی‌متر از جیوه است. بنابراین می‌توان نوشت:

$$(\rho h)_{\text{آب}} = (\rho' h')_{\text{جیوه}} \Rightarrow ۱ \times h = ۱۳/۶ \times ۲۵$$

$$\Rightarrow h = ۱۳/۶ \times ۲۵cm = \frac{۱۳/۶ \times ۱۰۰}{۴} cm \Rightarrow h = \frac{۱۳/۶}{۴} m = ۳/۴m$$

۱۲ ۱ ۲ **۳** ۴

فشاری که ازطرف مایع برکف ظرف وارد می‌شود، برابراست با:



$$P = \rho gh = ۸۰۰ \times ۱۰ \times \frac{۳}{۱۰} = ۲۴۰۰Pa$$

برای محاسبه‌ی نیروی ناشی ازمایع، وارد برکف ظرف داریم:

$$P=\frac{F}{A}\Rightarrow F=P\times A\Rightarrow F=۲۴۰۰\times ۱۰۰\times ۱۰^{-۴}m^۲=۲۴N$$

۱۳ ۱ ۲ ۳ ۴

$$[x^۲+x]=-۱\Rightarrow -۱\le x^۲+x<۰\begin{cases}x^۲+x<۰\Rightarrow x(x+۱)<۰\xrightarrow{\text{تعیین علامت}}-۱<x<۰\\ -۱\le x^۲+x\Rightarrow x^۲+x+۱\ge ۰\xrightarrow[\text{همواره مثبت}]{a>۰\ ,\ \Delta<۰}x\in R\end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{اشتراک}}-۱<x<۰$$

$$-۱<x<۰\xrightarrow{\text{توان ۲۰}}۰<x^{۲۰}<۱\Rightarrow [x^{۲۰}]=۰$$

۱۴ ۱ ۲ ۳ ۴

ریشه‌های داخل قدر مطلق‌ها $x=-۲$ و $x=\frac{۱}{۲}$ هستند.

x	$-\infty$		-۲		$\frac{۱}{۲}$		$+\infty$
$۲x-۱$		$-$		$-$	۰	$+$	
$x+۲$		$-$	۰	$+$		$+$	

$$x<-۲\Rightarrow -۲x+۱-x-۲=۳\Rightarrow -۳x=۴\Rightarrow x=-\frac{۴}{۳}$$ غ ق ق

$$-۲\le x\le \frac{۱}{۲}\Rightarrow -۲x+۱+x+۲=۳\Rightarrow -x=۰\Rightarrow x=۰$$ ق ق

$$x>\frac{۱}{۲}\Rightarrow ۲x-۱+x+۲=۳\Rightarrow ۳x=۲\Rightarrow x=\frac{۲}{۳}$$ ق ق

$$\text{مجموع جواب‌ها}=۰+\frac{۲}{۳}=\frac{۲}{۳}$$

۱۵ ۱ ۲ ۳ ۴

با فرض $\frac{۲x}{۳}=t$ داریم:

$$[t]-[-t]=۳$$

$t\in\mathbb{Z}\Rightarrow t-(-t)=۳\Rightarrow ۲t=۳\to t=\frac{۳}{۲}\notin\mathbb{Z}\to$ غیر قابل قبول

$t\notin\mathbb{Z}\Rightarrow [t]-(-۱-[t])=۳\to [t]+۱+[t]=۳$

$\Rightarrow ۲[t]=۲\to [t]=۱\xrightarrow{t\notin\mathbb{Z}}۱<t<۲$ جواب

$۱<\frac{۲x}{۳}<۲\xrightarrow{\times ۳}۳<۲x<۶\Rightarrow \frac{۳}{۲}<x<۳\Rightarrow$ اعداد صحیح $=۲$

۱۶ ۱ ۲ ۳ ۴

$$۳x^۲+۵x+۲<۰\xrightarrow{\text{تعیین علامت}}-۱<x<-\frac{۲}{۳}$$

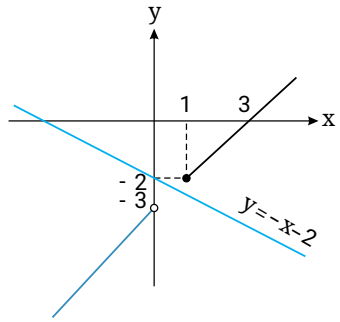
$$\begin{cases}x\notin\mathbb{Z}\to [x]+[-x]=-۱\to [-x]=-[x]-۱\\ -۱<x<-\frac{۲}{۳}\to -۳<۳x<-۲\to [۳x]=-۳\end{cases}$$

پس: $\frac{۳^{-[x]}}{۳^{[-x]}}+[۳x]=\frac{۳^{-[x]}}{۳^{-[x]-۱}}-۳=۳-۳=۰$

۱۷ ۱ ۲ ۳ ۴

$$f(x)=\frac{[x](x-۳)}{[x]}=x-۳$$

دامنهٔ تابع فوق به ازای $[x] \neq 0$ به‌دست می‌آید. یعنی $D_f = \mathbb{R} - [0,1)$ پس نمودار تابع f به‌صورت زیر است:



$$x \not\in [0,1) \Rightarrow (x-3) \not\in [-3,-2) \Rightarrow R_f = \mathbb{R} - [-3,-2)$$

پس خط $x+y=-2$ نمودار تابع f را قطع نمی‌کند.

۱۸ ۱ ۲ ۳ ۴ می‌دانیم اگر $|f(x)| \leq k$ باشد و $k > 0$ باشد، آنگاه $k \leq f(x) \leq k$ است پس:

$$||x-1|-2| \leq 5 \Rightarrow -5 \leq |x-1|-2 \leq 5 \xrightarrow{+2} -3 \leq |x-1| \leq 7$$

بدیهی است که نامساوی $|x-1| \geq -3$ همواره درست است، در نتیجه:

$$|x-1| \leq 7 \Rightarrow -7 \leq x-1 \leq 7 \xrightarrow{+1} -6 \leq x \leq 8$$

بنابراین، بازهٔ جواب این نامعادله $[-6,8]$ است که داریم:

$$[-6,8] = [a,b] \Rightarrow b-a = 8+6 = 14$$

۱۹ ۱ ۲ ۳ ۴

$$\left[x + \underbrace{2[x]}_{\text{عدد صحیح است}}\right] = 4 \Rightarrow [x]+2[x] = 4 \Rightarrow 3[x] = 4$$

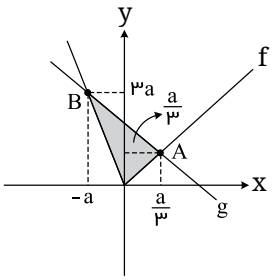
$$\Rightarrow [x] = \frac{4}{3} \notin \mathbb{Z} \Rightarrow \text{جواب ندارد}$$

۲۰ ۱ ۲ ۳ ۴ نمودار هر دو تابع را رسم می‌کنیم، سپس نقاط برخورد آنها را می‌یابیم.

$$f(x) = \begin{cases} -3x & x < 0 \\ x & x \geq 0 \end{cases}$$

$$A: \begin{cases} y = x \\ y = a - 2x \end{cases} \Rightarrow x = a - 2x \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{a}{3} \\ y = \frac{a}{3} \end{cases}$$

$$B: \begin{cases} y = -3x \\ y = a - 2x \end{cases} \Rightarrow -3x = a - 2x \Rightarrow \begin{cases} x = -a \\ y = 3a \end{cases}$$

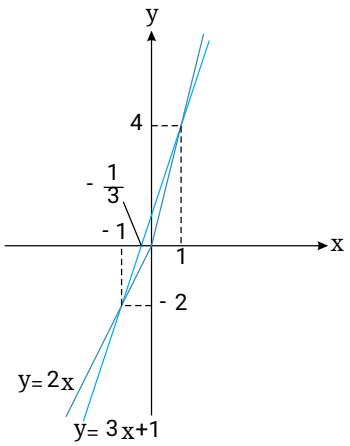


برای محاسبهٔ مساحت مثلث تشکیل‌شده، کافی است مساحت ذوزنقه را پیدا کنیم و دو مثلث کناری را از آن کم کنیم.

$$S = \frac{1}{2} \times \frac{4a}{3}\left(\frac{a}{3} + 3a\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{a}{3}\right)^2 - \frac{1}{2}a \times 3a = \frac{20a^2}{9} - \frac{a^2}{18} - \frac{3a^2}{2} = \frac{2}{3}a^2 = 6 \Rightarrow a = 3$$

۲۱ ۱ ۲ **۳** ۴

برای محاسبهٔ مساحت ناحیهٔ محدود بین تابع $f(x)=۳x+|x|$ و خط $y=۳x+۱$، باید ابتدا با تعیین علامت عبارت داخل قدر مطلق، آن را به تابع دو ضابطه‌ای تبدیل کنیم:



$$f(x)=۳x+|x|=\begin{cases}۴x & x\geq ۰\\ ۲x & x<۰\end{cases}$$

مساحت ناحیهٔ محدود به نمودار تابع f و خط $y=۳x+۱$ از دو مثلث تشکیل شده است که قاعدهٔ هر دو مثلث به طول $\frac{۱}{۳}$ است. ارتفاع مثلث بالایی برابر ۴ و ارتفاع مثلث پایینی برابر ۲ است، پس خواهیم داشت:

مثلث بالایی $S=\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۳}\times ۴=\frac{۲}{۳}$

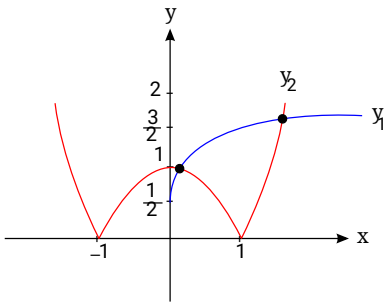
مثلث پایینی $S=\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۳}\times ۲=\frac{۱}{۳}$

کل $S=\frac{۲}{۳}+\frac{۱}{۳}=۱$

۲۲ ۱ **۲** ۳ ۴

برای حل معادله از روش ترسیم استفاده می‌کنیم و کافی است $y_۱=\sqrt{x}+\frac{۱}{۲}$ و $y_۲=|x^۲-۱|$ را در یک نمودار رسم کنیم.

بنابراین معادله دارای ۲ جواب است.



پاسخ‌نامه کلیدی

۱	۲	۳	۴	۱
۲	۴	۳	۲	۱
۳	۴	۳	۲	۱
۴	۳	۲	۱	۴
۵	۲	۳	۴	۱
۶	۴	۳	۲	۱

۷	۱	۲	۳	۴
۸	۴	۳	۲	۱
۹	۴	۳	۲	۱
۱۰	۴	۳	۲	۱
۱۱	۱	۲	۳	۴
۱۲	۳	۲	۱	۴

۱۳	۲	۳	۴	۱
۱۴	۲	۳	۴	۱
۱۵	۱	۲	۳	۴
۱۶	۳	۲	۱	۴
۱۷	۴	۳	۲	۱
۱۸	۳	۲	۱	۴

۱۹	۴	۳	۲	۱
۲۰	۳	۲	۱	۴
۲۱	۳	۲	۱	۴
۲۲	۲	۳	۴	۱