

# پاسخنامه تشریحی

اگر بهروز بتواند به تنهایی این کار را در  $k$  ساعت انجام دهد، فرهاد همان کار را به تنهایی در  $k+9$  ساعت انجام می‌دهد؛ آنگاه داریم: (1) (2) (3) (4) (5)

$$\frac{1}{k} + \frac{1}{k+9} = \frac{1}{20} \Rightarrow \frac{2k+9}{k \cdot (k+9)} = \frac{1}{20}$$

$$\Rightarrow k^2 + 9k = 40k + 180 \Rightarrow k^2 - 31k - 180 = (k-36)(k+5) = 0 \Rightarrow \begin{cases} k=36 \\ k=-5 \end{cases} \text{ غ ق ق}$$

(1) (2) (3) (4) (5)

روش اول:

$$2x+1 - |x-2| > \underbrace{|x^2+1|}_{+} \rightarrow 2x+1 - |x-2| > x^2+1$$

$$x \geq 2: 2x+1 - (x-2) > x^2+1 \rightarrow 2x+1-x+2 > x^2+1 \rightarrow x^2-x-2 < 0 \rightarrow (x-2)(x+1) < 0 \xrightarrow{\text{تعیین علامت}} -1 < x < 2 \xrightarrow{\text{اشتراک با شرط}} \emptyset (I)$$

$$x < 2: 2x+1 - (-x+2) > x^2+1 \rightarrow 2x+1+x-2 > x^2+1 \rightarrow x^2-3x+2 < 0 \rightarrow (x-1)(x-2) < 0 \xrightarrow{\text{تعیین علامت}} 1 < x < 2$$

$$\xrightarrow{\text{اشتراک با شرط}} 1 < x < 2 \quad (II)$$

از اجتماع جواب‌های  $I$  و  $II$  به جواب  $1 < x < 2$  یا  $x \in (1, 2)$  می‌رسیم.

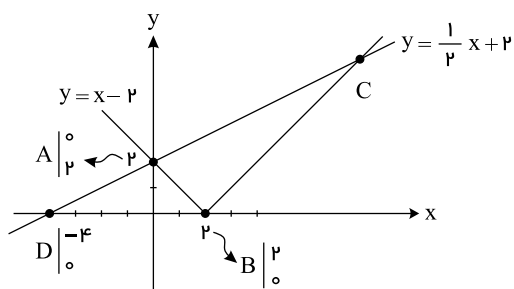
روش دوم:

در نامعادله داده شده به جای  $x$ ، عدد صفر قرار می‌دهیم.

$$x=0 \rightarrow 0+1-2 > 1 \rightarrow -1 > 1$$

به نتیجه غلطی رسیدیم، پس گزینه‌های ۱ و ۲ و ۳ که همگی شامل صفر هستند حذف می‌شوند و گزینه چهارم، جواب صحیح است.

دو تابع  $y = \frac{1}{2}x + 2$  و  $y = \sqrt{x^2 - 4x + 4} = \sqrt{(x-2)^2} = |x-2|$  را رسم می‌کنیم. (1) (2) (3) (4) (5)



نقطه  $C$  محل برخورد شاخه  $y = x - 2$  با خط  $y = \frac{1}{2}x + 2$  است:

$$\frac{1}{2}x + 2 = x - 2 \Rightarrow x = 8, \quad y = 6 \Rightarrow C \begin{vmatrix} 8 \\ 6 \end{vmatrix}$$

پس مساحت مثلث  $ABC$  (سطح محصور بین دو نمودار) برابر است با:

$$\begin{aligned} S_{\triangle ABC} &= S_{\triangle BDC} - S_{\triangle ABD} \\ &= \left(\frac{1}{2}BD \times y_C\right) - \left(\frac{1}{2}BD \times y_A\right) = \frac{1}{2}BD(y_C - y_A) \\ &= \frac{1}{2}(2-4)(6-2) = 12 \end{aligned}$$

(1) (2) (3) (4) (5)

$$\frac{3x+k}{2x^2-6x} - \frac{4}{x-3} = \frac{2x+1}{x} \Rightarrow \frac{3x+k}{2x(x-3)} - \frac{4}{x-3} = \frac{2x+1}{x} \Rightarrow \frac{3x+k-8x}{2x(x-3)} = \frac{2(2x+1)(x-3)}{2x(x-3)}$$

$$\Rightarrow -5x+k = 4x^2 - 10x - 6 \Rightarrow 4x^2 - 5x - 6 - k = 0$$

شرط اینکه معادله فوق فقط دارای یک ریشه باشد این است که یا  $\Delta = 0$  و یا یکی از ریشه‌های معادله با ریشه‌های مخرج کسر برابر باشد؛ بنابراین خواهیم داشت:

$$\begin{cases} \Delta = 0 \Rightarrow 25 - 4(4)(-6 - k) = 0 \Rightarrow 25 + 96 + 16k = 0 \Rightarrow k = -\frac{121}{16} \\ x = 0 \xrightarrow{\text{جایگذاری}} 0 - 6 - k = 0 \Rightarrow k = -6 \\ x = 3 \xrightarrow{\text{جایگذاری}} 36 - 15 - 6 - k = 0 \Rightarrow k = 15 \end{cases} \quad 2$$

بنابراین به ازای سه مقدار برای  $k$ ، معادله داده شده دارای فقط یک جواب برای  $x$  خواهد بود.

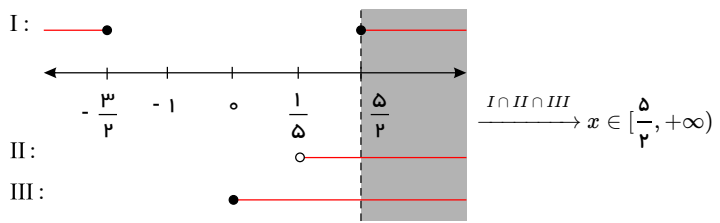
نامعادله داده شده را به 2 نامعادله تبدیل می کنیم: 1 2 3 4 5

$$4 \leq |2x - 1| < 3x \rightarrow \begin{cases} |2x - 1| < 3x \rightarrow \begin{cases} 2x - 1 < 3x \\ 2x - 1 > -3x \end{cases} \\ \cap \\ 4 \leq |2x - 1| \rightarrow \begin{cases} 2x - 1 \geq 4 \\ 2x - 1 \leq -4 \end{cases} \end{cases}$$

$$I \begin{cases} 2x - 1 \geq 4 \Rightarrow 2x \geq 5 \Rightarrow x \geq \frac{5}{2} \\ 2x - 1 \leq -4 \Rightarrow 2x \leq -3 \Rightarrow x \leq \frac{-3}{2} \end{cases}$$

$$II \begin{cases} 2x - 1 < 3x \Rightarrow x > -1 \\ 2x - 1 > -3x \Rightarrow 5x > 1 \rightarrow x > \frac{1}{5} \end{cases} \rightarrow x > \frac{1}{5}$$

$$III: |2x - 1| < 3x \rightarrow 3x \geq 0 \rightarrow x \geq 0$$



داخل قدر مطلق را تعیین علامت می کنیم. 1 2 3 4 6

$$x \geq 0 \rightarrow x + x \leq \frac{1}{2}x + 3 \rightarrow 2x \leq \frac{1}{2}x + 3 \rightarrow 4x \leq x + 6$$

اشتراک با شرط

$$\rightarrow 3x \leq 6 \rightarrow x \leq 2 \rightarrow 0 \leq x \leq 2(I)$$

$$x < 0 \rightarrow x - x \leq \frac{1}{2}x + 3 \rightarrow 0 \leq \frac{1}{2}x + 3 \rightarrow 0 \leq x + 6$$

اشتراک با شرط

$$\rightarrow x \geq -6 \rightarrow -6 \leq x < 0 \quad (II)$$

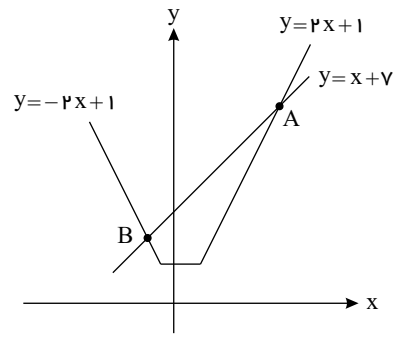
از اجتماع جواب های  $I$  و  $II$  به جواب  $-6 \leq x \leq 2$  یا  $x \in [-6, 2]$  می رسمیم.

تابع  $y = |x - 2| + |x + 1|$  تابع 1 2 3 4 7

$$x < -1: y = -x + 2 - x - 1 \rightarrow y = -2x + 1$$

$$-1 \leq x \leq 2: y = -x + 2 + x + 1 \rightarrow y = 3$$

$$x > 2: y = x - 2 + x + 1 \rightarrow y = 2x - 1$$



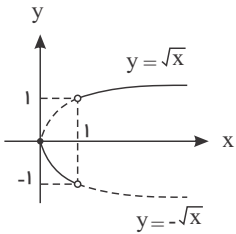
$$\begin{cases} y = 2x - 1 \rightarrow x = 8, y = 15 \rightarrow A \begin{pmatrix} 8 \\ 15 \end{pmatrix} \\ y = -2x + 1 \rightarrow x = -2, y = 5 \rightarrow B \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix} \end{cases}$$

$$\text{پس: } AB = \sqrt{(8 + 2)^2 + (15 - 5)^2} = \sqrt{100 + 100} = \sqrt{200} = 10\sqrt{2}$$

علوی دخترانه مرکز

$$f(x) = \begin{cases} \frac{(x-1)\sqrt{x}}{x-1} & x > 1 \\ \frac{-(x-1)\sqrt{x}}{x-1} & 0 \leq x < 1 \end{cases} \Rightarrow f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & x > 1 \\ -\sqrt{x} & 0 \leq x < 1 \end{cases} \quad ۳$$

بنابراین، نمودار تابع به شکل زیر است:



چون  $x = 2$  جواب معادله است و در آن صدق می‌کند، پس داریم:  ۱  ۲  ۳  ۴  ۱۰

$$|2| + a|2 - 1| = 4 \Rightarrow 2 + a = 4 \Rightarrow a = 2$$

پس معادله به صورت  $|x| + 2|x - 1| = 4$  خواهد شد؛ بازه‌بندی متغیر  $x$  معادله را در ۳ حالت زیر بررسی می‌کنیم:

$$x > 1: x + 2x - 2 = 4 \Rightarrow 3x = 6 \Rightarrow x = 2$$

$$0 \leq x \leq 1: x - 2x + 2 = 4 \Rightarrow -x = 2 \Rightarrow x = -2 \quad (\text{غُوق})$$

$$x < 0: -x - 2x + 2 = 4 \Rightarrow -3x = 2 \Rightarrow x = -\frac{2}{3}$$

پس جواب دیگر معادله  $x = -\frac{2}{3}$  است.

۱  ۲  ۳  ۴  ۱۱

در معادله‌ی درجه دو:  $ax^2 + bx + c = 0$  مجموع ریشه‌ها برابر است با:  $-\frac{b}{a}$ .

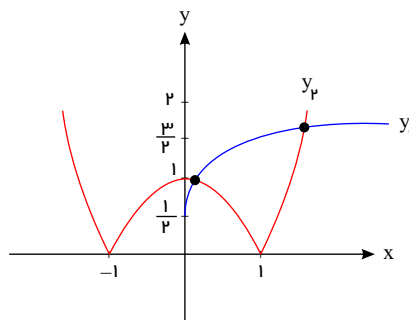
$$\frac{2x - 4}{x + 1} = \frac{x + 1}{2x - 4} \xrightarrow{\text{طرفین وسطین}} (2x - 4)^2 = (x + 1)^2 \Rightarrow 4x^2 + 16 - 16x = x^2 + 1 + 2x$$

$$3x^2 + 15 - 18x = 0 \xrightarrow{\div 3} x^2 + 5 - 6x = 0$$

$$\text{مجموع ریشه‌ها: } \frac{-b}{a} = -\frac{-6}{1} = 6$$

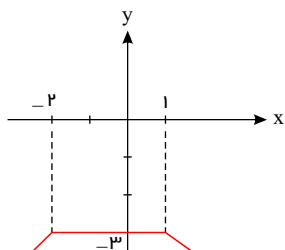
برای حل معادله از روش ترسیم استفاده می‌کنیم و کافی است  $y_1 = \sqrt{x} + \frac{1}{x}$  و  $y_2 = |x^2 - 1|$  را در یک نمودار رسم کنیم.  ۱  ۲  ۳  ۴  ۱۲

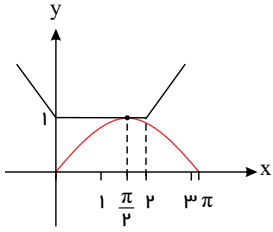
بنابراین معادله دارای ۲ جواب است.



۱  ۲  ۳  ۴  ۱۳

تابع  $f(x)$  قرینه‌ی یک تابع گلدانی است و داریم:

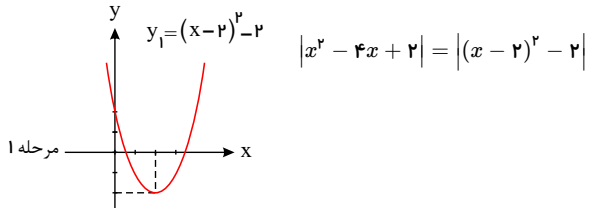




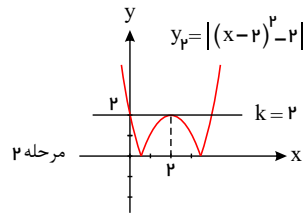
۴

۱ ۲ ۳ ۴ ۱۵

برای رسم نمودار ابتدا می‌بایست تا حد امکان آن را تجزیه کرد و خواهیم داشت:



سپس آن را طی ۲ مرحله رسم می‌کنیم:



بنابراین تنها زمانی که  $k = 2$  باشد معادله ۳ جواب دارد.