پاسخ‌نامه تشریحی

۱ — ۱ **۲** ۳ ۴

$$[x^2+x]=-1 \Rightarrow -1\le x^2+x<0 \begin{cases} x^2+x<0 \Rightarrow x(x+1)<0 \xrightarrow{\text{تعیین علامت}} -1<x<0 \\ -1\le x^2+x \Rightarrow x^2+x+1\ge 0 \xrightarrow[\text{همواره مثبت}]{a>0\ ,\ \Delta<0} x\in R \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{اشتراک}} -1<x<0$$

$$-1<x<0 \xrightarrow{\text{توان}20} 0<x^{20}<1 \Rightarrow [x^{20}]=0$$

۲ — ۱ **۲** ۳ ۴

$$\sqrt{4x+8}+\sqrt{4x-16}=A$$

طرفین معادله را در $(\sqrt{4x+8}-\sqrt{4x-16})$ ضرب می‌کنیم.

$$\to (\sqrt{4x+8}+\sqrt{4x-16})(\sqrt{4x+8}-\sqrt{4x-16})=(\sqrt{4x+8}-\sqrt{4x-16})A$$

$$\to (4x+8)-(4x-16)=3A \Rightarrow 24=3A \to A=8$$

۳ — **۱** ۲ ۳ ۴ اگر $x^2+x<0$ باشد، نتیجه می‌گیریم که $-1<x<0$ است.

$x^2+x<0 \Longrightarrow x(x+1)<0 \Longrightarrow$

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
عبارت <0		+	0	−	0	+	

$\Longrightarrow -1<x<0$

حال برای تعیین حاصل $[x]+[x^2]+[x^3]+[x^4]$ کافی است حدود عبارت‌های داخل جزء صحیح را مشخص کنیم. داریم:

$$\begin{cases} -1<x<0 \Rightarrow [x]=-1 \\ -1<x<0 \xrightarrow{\text{به توان ۲ می‌رسانیم}} 0<x^2<1 \Rightarrow [x^2]=0 \\ -1<x<0 \xrightarrow{\text{به توان ۳ می‌رسانیم}} -1<x^3<0 \Rightarrow [x^3]=-1 \\ -1<x<0 \xrightarrow{\text{به توان ۴ می‌رسانیم}} 0<x^4<1 \Rightarrow [x^4]=0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow [x]+[x^2]+[x^3]+[x^4]=(-1)+0+(-1)+0=-2$$

۴ — ۱ ۲ ۳ **۴**

$$1+\sqrt{1+x^2}=\sqrt{1+x} \xrightarrow{\text{به‌توان ۲}} 1+1+x^2+2\sqrt{1+x^2}=1+x$$

$$\Rightarrow 2\sqrt{1+x^2}=\overbrace{-x^2+x-1}^{a<0,\Delta<0}$$

سمت چپ تساوی فوق همواره مثبت و سمت راست آن همواره منفی است، پس معادله ریشه ندارد. توجه کنید که یک عبارت درجهٔ دوم وقتی همواره منفی است که $a<0$ و $\Delta<0$ باشد.

۵ ۱ **[۲]** ۳ ۴

$$f(x)=\left|3x-[3x+\frac{5}{2}]\right|=\left|(3x+\frac{5}{2})-[3x+\frac{5}{2}]-\frac{5}{2}\right|$$

$$\xrightarrow{0\le a-[a]<1} 0\le (3x+\frac{5}{2})-[3x+\frac{5}{2}]<1\Rightarrow -\frac{5}{2}\le (3x+\frac{5}{2})-[3x+\frac{5}{2}]-\frac{5}{2}<-\frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{3}{2}<\left|(3x+\frac{5}{2})-[3x+\frac{5}{2}]-\frac{5}{2}\right|\le\frac{5}{2}\Rightarrow \frac{3}{2}<f(x)\le\frac{5}{2}$$

$$\Rightarrow R_f=(\frac{3}{2},\frac{5}{2}]$$

۶ ۱ **[۲]** ۳ ۴

$$f(x)=\frac{3^{-[x]}}{3^{[-x]}}=3^{-[x]-[-x]}=3^{-([x]+[-x])}=(\frac{1}{3})^{[x]+[-x]}$$

از طرفی می‌دانیم $[x]+[-x]=\begin{cases}0 & ; \ x\in\mathbb{Z}\\ -1 & ; \ x\notin\mathbb{Z}\end{cases}$، لذا برای مجموعهٔ $\{\sqrt{1},\sqrt{2},\cdots,\sqrt{10}\}$ اعداد $\sqrt{1}$, $\sqrt{4}$, $\sqrt{9}$ اعداد صحیح هستند، پس داریم:

$$x\in\mathbb{Z}\Rightarrow(\frac{1}{3})^{[x]+[-x]}=(\frac{1}{3})^{0}=1$$

و برای بقیهٔ اعداد که صحیح نیستند، داریم:

$$x\notin\mathbb{Z}\Rightarrow(\frac{1}{3})^{[x]+[-x]}=(\frac{1}{3})^{-1}=3$$

$$f(\sqrt{1})+f(\sqrt{2})+\cdots+(\sqrt{10})=(f(\sqrt{1})+f(\sqrt{4})+f(\sqrt{9}))+(f(\sqrt{2})+f(\sqrt{3})+f(\sqrt{5})$$
$$+f(\sqrt{6})+f(\sqrt{7})+f(\sqrt{8})+f(\sqrt{10}))=3\times1+7\times3=24$$

۷ ۱ ۲ ۳ ۴ **[۱]** باید تابع $g(f(x))$ را تشکیل دهیم. ابتدا دامنهٔ gof را می‌یابیم:

$$D_{gof}=\{x\in D_f | f(x)\in D_g\}=\{x\ge -2|\sqrt{x+2}\in\mathbb{R}\}\Rightarrow D_{gof}=[-2,+\infty)$$

حال تابع gof را تشکیل می‌دهیم:

$$g(f(x))=g(\sqrt{2+x})=(\sqrt{2+x})^{2}=2+x$$

بنابراین:

$$g(f(x))=5\Rightarrow 2+x=5\Rightarrow x=3$$

پس معادله فقط یک ریشهٔ مثبت دارد.

۸ ۱ **[۲]** ۳ ۴

$$[x-\frac{2}{3}+1]+[x-\frac{2}{3}]=3\Rightarrow 2[x-\frac{2}{3}]=2\Rightarrow[x-\frac{2}{3}]=1\Rightarrow 1\le x-\frac{2}{3}<2\Rightarrow\frac{5}{3}\le x<\frac{8}{3}$$

۹ ۱ ۲ **[۳]** ۴

$$|3x-1|<13\Rightarrow -13<3x-1<13\Rightarrow -4<x<\frac{14}{3}\Rightarrow -\frac{14}{9}2\frac{-x}{3}<\frac{4}{3}\Rightarrow[-\frac{x}{3}]=-2,-1,0,1$$

۱۰) ۱ ۲ ۳ **۴**

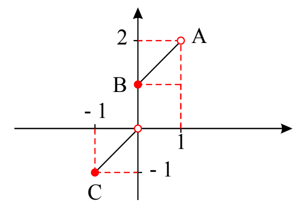
$$[\frac{1-x}{2}]=-1\Rightarrow -1\le\frac{1-x}{2}<0\Rightarrow 1<x\le 3$$

پس $x-1$ مثبت و $x-3$ منفی (یا صفر) است.

$$P=2(x-1)+(x-3)=3x-5$$
$$1<x\le 3\Rightarrow -2<3x-5\le 4$$

پس $-2<P\le 4$ است و نمی‌تواند برابر -4 باشد.

۱۱) ۱ ۲ ۳ **۴**



$$\begin{cases}-1\le x<0\Rightarrow [x]=-1\Rightarrow y=x\\ 0\le x<1\Rightarrow 0\le x<1\Rightarrow [x]=0\Rightarrow y=x+1\end{cases}$$

$$\begin{cases}A(1,2)\\ B(0,1)\\ C(-1,-1)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}AB=\sqrt{2}\\ BC=\sqrt{5}\end{cases}\Rightarrow AB\times BC=\sqrt{10}$$

۱۲) ۱ **۲** ۳ ۴

$$x\in\mathbb{Z}\Rightarrow 3x^2=2-x\Rightarrow 3x^2+x-2=0\Rightarrow x=-1,\frac{2}{3}\Rightarrow x=-1$$

۱۳) ۱ ۲ **۳** ۴

$$\frac{3}{2}x=k\Rightarrow x=\frac{2k}{3}$$

$$[\frac{4k}{3}]=k\Rightarrow k\le\frac{4k}{3}<k+1\rightarrow 0\le k<3\Rightarrow k=0,1,2$$

۱۴) **۱** ۲ ۳ ۴ نکته: در حل معادلات گنگ اولین ایده به توان ۲ رساندن طرفین است و در صورت سخت شدن معادله بعد از توان ۲ رساندن، به سراغ دامنه و برد و استدلال روی جملات معادله می‌رویم.

اولین موضوعی که در حل معادلات گنگ باید به آن توجه کرد این است که طرفین معادله را به توان ۲ برسانیم اما در این معادله، به توان دو رساندن طرفین معادله کار را کمی دشوار می‌کند بنابراین به سراغ موضوع دامنه و برد طرفین معادله می‌رویم. در سمت چپ معادله در زیر رادیکال با عبارت درجه دومی مواجه هستیم که همواره مثبت است ($a>0$ و $\Delta<0$)، و حداقل مقدار آن به‌ازای $x=-\frac{b}{2a}$ یعنی $x=-1$ به دست می‌آید که مقدار آن ۱ خواهد بود؛ به‌عبارت دیگر در سمت چپ معادله به‌ازای هر مقداری از x، مقداری بزرگ‌تر یا مساوی یک ایجاد می‌شود. در سمت چپ معادله هم با توجه به دامنه عبارت زیر رادیکال که $x\le 2$ است، عبارت $-3-\sqrt{2-x}$ همواره اعداد منفی ایجاد می‌کند. بنابراین در سمت چپ معادله با عبارتی همواره مثبت و در سمت راست معادله با عبارتی همواره منفی مواجه هستیم که این دو عبارت هرگز نمی‌توانند با یکدیگر برابر شوند؛ بنابراین معادله ریشه حقیقی ندارد.

۱۵) ۱ ۲ **۳** ۴ ابتدا معادله را به‌صورت $\sqrt{2x+7}+2=\sqrt{12+x}$ می‌نویسیم :

$$\xrightarrow{\text{توان ۲}} 12+x=4+2x+7+4\sqrt{2x+7}\Rightarrow 1-x=4\sqrt{2x+7}$$

$$\xrightarrow{\text{توان ۲}} x^{۲} - ۲x + ۱ = ۳۲x + ۱۱۲ \Rightarrow x^{۲} - ۳۴x - ۱۱۱ = ۰ \xrightarrow{\Delta = ۱۶۰۰} x = \frac{۳۴ \pm ۴۰}{۲} = ۳۷, -۳$$

حال دو جواب به‌دست آمده را در معادلهٔ اصلی جایگذاری می‌کنیم:

$$x = -۳, \sqrt{۱۲ - ۳} - \sqrt{۲(-۳) + ۷} = ۲ \Rightarrow ۳ - ۱ = ۲ \checkmark$$

$$x = ۳۷, \sqrt{۱۲ + ۳۷} - \sqrt{۲(۳۷) + ۷} = ۲ \Rightarrow ۷ - ۹ = ۲ \text{ غ ق ق}$$

پس معادله فقط یک ریشه منفی دارد.