

# پاسخنامه تشریحی

1 2 3 4 1

می‌دانیم:  $\log_k a^n = n \log_k a$  ,  $\log_k \frac{a}{b} = \log_k a - \log_k b$  ,  $\log 5 = 1 - \log 2$

$$\begin{aligned} \log \sqrt[3]{1,6} &= \log(1,6)^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3} \log 1,6 = \frac{1}{3} \log \frac{16}{10} \\ &= \frac{1}{3} (\log 16 - \log 10) = \frac{1}{3} (4 \log 2 - 1) = \frac{1}{3} (4(1 - \log 5) - 1) = \frac{1}{3} (3 - 4 \log 5) \\ &= \frac{1}{3} (3 - 4k) = \frac{1}{3} (3(1 - 4k)) = 1 - 4k \end{aligned}$$

1 2 3 4 2

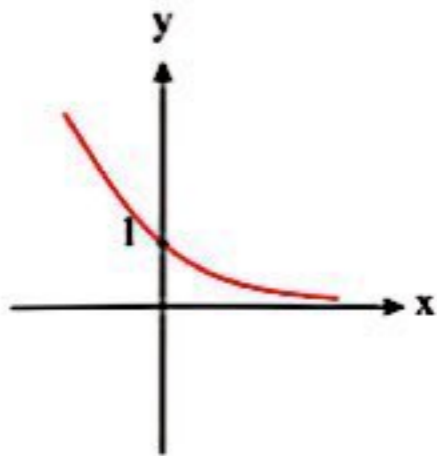
$$y = \log(2^x - 3) \text{ لگاریتم معنی‌دار بودن لگاریتم : } 2^x - 3 > 0 \Rightarrow 2^x > 3$$

از طرفین نامساوی فوق در مبنای ۲ لگاریتم می‌گیریم. چون  $2 > 1$  پس جهت نامعادله عوض نمی‌شود.

$$\log_2 2^x > \log_2 3 \Rightarrow x \log_2 2 > \log_2 3 \Rightarrow x > \log_2 3 \Rightarrow D_f = (\log_2 3, +\infty)$$

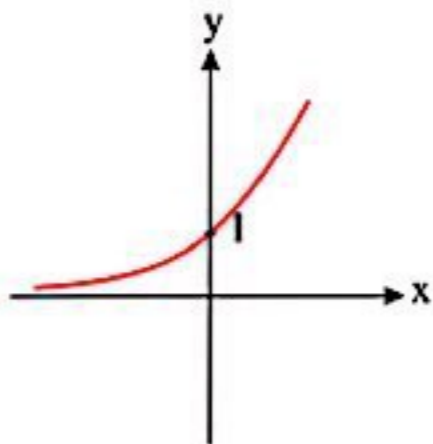
1 2 3 4 3

اگر  $0 < a < 1$  باشد، نمودار تابع نمایی  $y = a^x$  به صورت مقابل است:



طبق نمودار، با افزایش  $x$  کاهش می‌یابد و برای  $x$ های منفی نسبت به  $x$ های مثبت با افزایش  $x$  سرعت کاهش  $y$  بیش‌تر است. پس گزینه‌های ۱، ۲ و ۳، درست می‌باشند.

هم‌چنین نمودار تابع نمایی  $y = a^x$  و  $a > 1$  به صورت مقابل است:



طبق نمودار، با افزایش

۳.  $y$  نیز افزایش می‌یابد و برای  $x$ ‌های مثبت نسبت به  $x$ ‌های منفی با افزایش  $x$ ، سرعت افزایش  $y$ ، بیش‌تر است. در واقع برای  $x$ ‌های منفی نسبت به  $x$ ‌های مثبت، سرعت افزایش  $y$  کم‌تر است. بنابراین گزینه ۲، نیز درست است اما گزینه ۴، نادرست می‌باشد.

1 2 3 4 4

$$3^a = 10, 10^b = 27\sqrt{3} \Rightarrow (3^a)^b = 3^r \times 3^{\frac{1}{2}} \Rightarrow 3^{ab} = 3^{\frac{r}{2}} \Rightarrow ab = \frac{r}{2}$$

$$\log_{\frac{r}{2}}^{ab} = \log_{\left(\frac{r}{2}\right)^r}^{\frac{r}{2}} = \log_{\left(\frac{r}{2}\right)^{-r}}^{\frac{r}{2}} = \frac{1}{-r} \log_{\frac{r}{2}}^{\frac{r}{2}} = -\frac{1}{r}$$

1 2 3 4 5

$$\log_{\frac{1}{r}}^{a\sqrt[r]{r}} = \log_{r^{-r}}^{a\sqrt[r]{r}} = \frac{1}{-r} \log_r^{a\sqrt[r]{r}} = -\frac{1}{r} (\log_r^a + \log_r^{\sqrt[r]{r}})$$

$$= -\frac{1}{r} \left( \frac{r}{r} + \log_r^{\sqrt[r]{r}} \right) = -\frac{1}{r} \left( \frac{r}{r} + \frac{r}{r} \log_r^r \right) = -\frac{1}{r} \left( \frac{r}{r} + \frac{r}{r} \right) = -\frac{r}{r}$$

می‌دانیم که  $\log_b^a = c \rightarrow a = b^c$  و  $\log_k^a - \log_k^b = \log_k^{\frac{a}{b}}$  است. 1 2 3 4 6

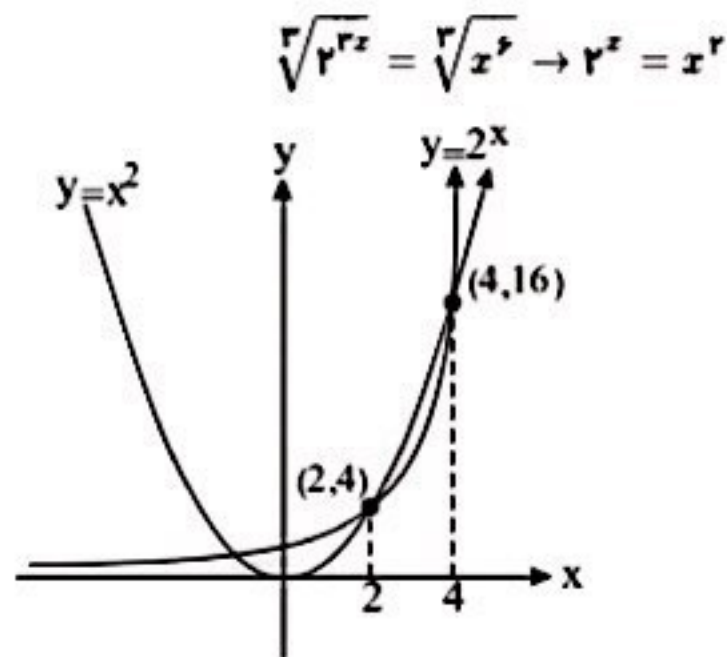
$$2^b = 0.4 \rightarrow b = \log_2^{0.4} = \log_2^{\frac{2}{5}} = \log_2^{\frac{r}{5}} = \log_2^r - \log_2^5 \rightarrow b = 1 - a \rightarrow a + b = 1$$

پس:  $\log_5^{a+b} = \log_5^1 = 0$

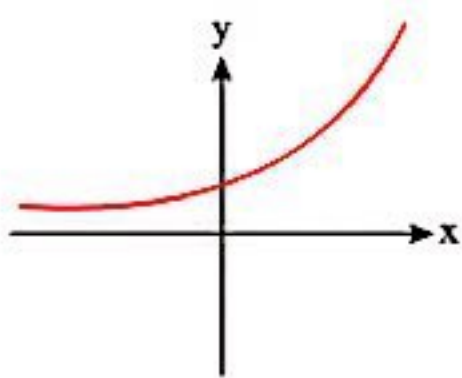
1 2 3 4 7

از دو طرف ریشه سوم می‌گیریم:

با توجه به شکل مقابل، این معادله دو ریشه مثبت دارد:



نمودار تابع  $y = 2^x$  به صورت زیر است: 1 2 3 4 8



نمودار تابع  $f$ ، صرفاً از انتقال  $y = 2^x$  حاصل می‌شود. بنابراین با توجه به محل تلاقی نمودار تابع  $f$ ، با محورهای مختصات، نمودار گزینه ۱، صحیح



است.

۱ ۲ ۳ ۴ ۹

$$\sqrt{a^{x-2}} > \frac{1}{6a} \Rightarrow a^{\frac{x-2}{2}} > a^{-2} \xrightarrow{a>1} \frac{x-2}{2} > -2 \Rightarrow x-2 > -4 \Rightarrow x > -2$$

اعداد صحیح کوچک‌تر یا مساوی صفر که در مجموعه جواب قرار دارند عبارتند از: ۰ و ۱

برای یافتن نقطه برخورد دو تابع  $f$  و  $g$  باید معادله  $f(x) = g(x)$  را حل کنیم. ۱ ۲ ۳ ۴ ۱۰

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{x-2} = 2^x \Rightarrow 2^{-(x-2)} = (2^2)^x \Rightarrow 2^{-x+2} = 2^{2x} \Rightarrow 2x = -x+2$$

$$\Rightarrow 2x = 2 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow g(1) = 4 \Rightarrow \text{نقطه برخورد } A(1, 4) \Rightarrow \text{ناحیه اول}$$

دو ضابطه را با هم برابر قرار می‌دهیم: ۱ ۲ ۳ ۴ ۱۱

$$f(x) = g(x)$$

به جای ۱،  $\log_2^2$  و به جای  $\log_2(x+3)$ ،  $\log_2(x+3)^2$  را قرار می‌دهیم. داریم:

$$\log_2(x+3)^2 = \log_2(2x+1) + \log_2^2$$

$$\Rightarrow (x+3)^2 = 2x+1 \Rightarrow x^2 - 6x + 8 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=5 \end{cases}$$

با جای گذاری  $x$  های بدست آمده در یکی از ضابطه‌ها، مختصات  $A$  و  $B$  به صورت  $A(1, 2)$  و  $B(5, 3)$  بدست می‌آید.

$$\Rightarrow \text{شیب خط گذرنده از } A \text{ و } B : m_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{3-2}{5-1} = \frac{1}{4}$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۱۲

$$2^{2x-1} = \frac{1}{2^{11}} = 2^{-11} \Rightarrow (2^2)^{x-1} = 2^{-11} \Rightarrow 2^{2x-2} = 2^{-11}$$

$$\Rightarrow 2x-2 = -11 \Rightarrow 2x = -9 \Rightarrow \frac{-9}{2} = -4,5 \Rightarrow [x] = -3$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۱۳

$$f(x) = \begin{cases} 2^{2x} & , x \geq 0 \\ 2^{-2x} & , x < 0 \end{cases} , f(2) = 2 \Rightarrow 2^{2a} = 2 \Rightarrow 2^a = 2$$

$$f(-2) + f(-6) = 2^{2^a} + 2^{6^a} = (2^a)^2 + (2^a)^6 \\ = 2^2 + 2^6 = 2^2(1 + 2^4) = 4 \times 10 = 40$$

برای یافتن نقطه تقاطع دو تابع، آن‌ها را مساوی هم قرار می‌دهیم: (1) (2) (3) (4) (14)

$$\begin{cases} y = 5\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{2x} \Rightarrow 5\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{2x} = 2^{x+1} + 9 \Rightarrow 5\left(\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2\right)^x = 2^x \times 2 + 9 \\ y = 2^{x+1} + 9 \end{cases}$$

$$5\left(\frac{1}{2}\right)^x = 2^x \times 2 + 9 \Rightarrow \frac{5}{2^x} = 2 \times 2^x + 9 \xrightarrow{2^x=A} \frac{5}{A} = 2A + 9$$

$$\xrightarrow{\times A} 5 = 2A^2 + 9A \Rightarrow 2A^2 + 9A - 5 = 0 \Rightarrow (2A - 1)(A + 5) = 0 \Rightarrow \begin{cases} A = \frac{1}{2} \\ A = -5 \text{ غلط} \end{cases}$$

$$A = \frac{1}{2} \Rightarrow 2^x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = -1 \Rightarrow y = 2^{-1+1} + 9 = 10 \Rightarrow A(-1, 10)$$

فاصله نقطه A تا محور xها برابر 10 می‌باشد.

برای یافتن محل تلاقی دو تابع، ضابطه آن‌ها را برابر باهم قرار می‌دهیم. (1) (2) (3) (4) (15)

$$y = 9\left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^{2x} + 1, y = 12\left(\frac{2}{3}\right)^x - 3 \Rightarrow 9\left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^{2x} + 1 = 12\left(\frac{2}{3}\right)^x - 3$$

$$\Rightarrow 9\left(\left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^2\right)^x + 4 = 12\left(\frac{2}{3}\right)^x \Rightarrow 9\left(\frac{6}{4}\right)^x + 4 = 12\left(\frac{2}{3}\right)^x$$

$$9\left(\left(\frac{3}{2}\right)^2\right)^x + 4 = 12\left(\frac{2}{3}\right)^x, \left(\frac{3}{2}\right)^x = A \Rightarrow 9A^2 + 4 = 12A$$

$$\Rightarrow 9A^2 - 12A + 4 = 0 \Rightarrow (3A - 2)^2 = 0 \Rightarrow 3A - 2 = 0 \Rightarrow A = \frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^x = \frac{2}{3} = \left(\frac{3}{2}\right)^{-1} \Rightarrow x = -1 \Rightarrow y = 12\left(\frac{2}{3}\right)^{-1} - 3 = 12\left(\frac{3}{2}\right) - 3 = 15$$

$$\text{نقطه تلاقی} = (-1, 15) \Rightarrow a = -1, b = 15 \Rightarrow a + b = -1 + 15 = 14$$