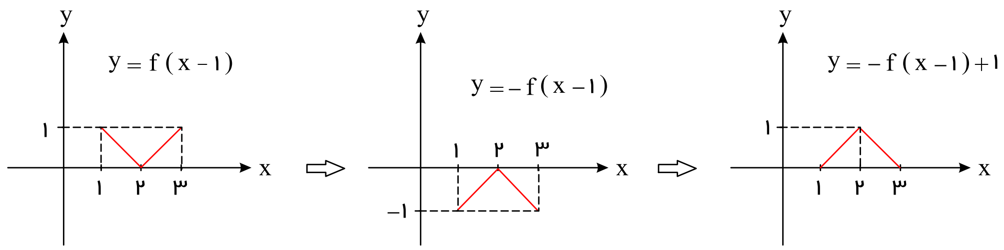
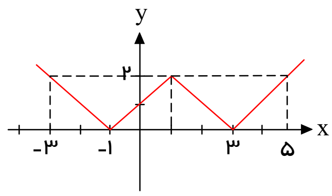
پاسخنامه تشریحی

۱ (۱) (۲) (۳) **(۴)** ابتدا $y = f(x)$ را یک واحد به راست منتقل کرده، سپس نسبت به محور xها قرینه نموده و درنهایت یک واحد به بالا منتقل می‌کنیم.

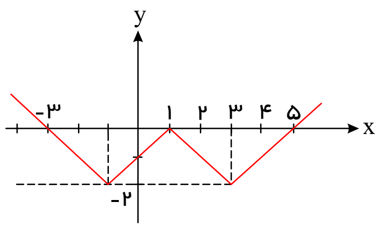


۲ **(۱)** (۲) (۳) (۴)

نمودار تابع f در شکل زیر رسم شده است:



اگر آن را ۲ واحد به پایین انتقال دهیم، خواهیم داشت:



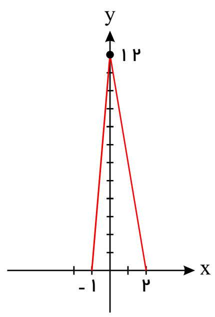
بنابراین مساحت محدود بین $f(x)$ انتقال یافته و محور xها، برابر است با:

$$S = \frac{۴ \times ۲}{۲} + \frac{۴ \times ۲}{۲} = ۸$$

۳ (۱) (۲) **(۳)** (۴) اول مشخص می‌کنیم که چگونه $y = f(۲x + ۵)$ به $y = ۳f(-۴x + ۱)$ تبدیل شده است.

$$y = f(۲x + ۵) \xrightarrow[x \to \frac{۱}{۲}x]{\text{طول‌ها دو برابر}} y_۱ = f(x + ۵) \xrightarrow[x \to x - ۴]{\text{۴ واحد راست}} y_۲ = f(x + ۱) \xrightarrow{\text{طول‌ها } -\frac{۱}{۴} \text{ برابر}} y_۳ = f(-۴x + ۱) \xrightarrow{\text{عرض‌ها ۳ برابر}} y = ۳f(-۴x + ۱)$$

پس نمودار $y = ۳f(-۴x + ۱)$ بدین صورت می‌شود:



$$\longrightarrow S = \frac{۱}{۲} \times ۱۲ \times ۳ = ۱۸$$

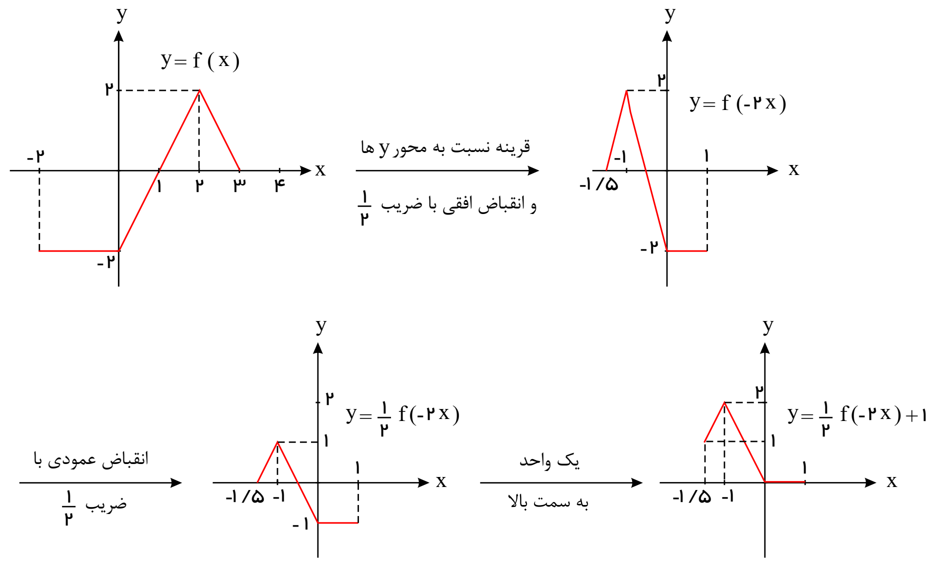
البته می‌توان نقاط متناظر $\Big|_{۰}^{۰}$ و $\Big|_{۴}^{-۲}$ و $\Big|_{۰}^{-۶}$ از تابع $y = f(۲x + ۵)$ را روی تابع $y = ۳f(-۴x + ۱)$ بیابیم.

$$\Big|_{۰}^{۰} \xrightarrow{y=f(۲x+۵)} f(۵) = ۰ \xrightarrow[x=-۱]{y=۳f(-۴x+۱)} y = ۳f(۵) = ۳(۰) = ۰ \to \Big|_{۰}^{-۱}$$

$$\Big|_{۴}^{-۲} \xrightarrow{y=f(۲x+۵)} f(۱) = ۴ \xrightarrow[x=۰]{y=۳f(-۴x+۱)} y = ۳f(۱) = ۳(۴) = ۱۲ \to \Big|_{۰}^{۱۲}$$

$$\Big|_{۰}^{-۶} \xrightarrow{y=f(۲x+۵)} f(-۷) = ۰ \xrightarrow[x=۲]{y=۳f(-۴x+۱)} y = ۳f(-۷) = ۳(۰) = ۰ \to \Big|_{۰}^{۲}$$

۴ — ۱ **۲** ۳ ۴ ابتدا نمودار را یک واحد به سمت چپ منتقل می‌کنیم تا نمودار تابع $y=f(x)$ به دست می‌آید. سپس با انجام انتقال و انقباض، نمودار تابع $y=\frac{۱}{۲}f(-۲x)+۱$ را به دست می‌آوریم:



پس دامنهٔ تابع $y=\frac{۱}{۲}f(-۲x)+۱$ برابر با $[-۱/۵,۱]$ و برد آن $[۰,۲]$ است که اشتراک آن‌ها بازهٔ $[۰,۱]$ می‌شود.

۵ — ۱ ۲ **۳** ۴ نمودار $f(x)$ در راستای افقی با ضریب ۲ منبسط شده و سپس یک واحد به بالا رفته است، پس داریم:

$$f(x)\xrightarrow{x\to\frac{۱}{۲}x} f\left(\frac{۱}{۲}x\right)\xrightarrow{\text{یک واحد به بالا}} f\left(\frac{۱}{۲}x\right)+۱\Rightarrow g(x)=f\left(\frac{x}{۲}\right)+۱$$

۶ — ۱ ۲ ۳ **۴**

$$y=f(x)\xrightarrow[\text{سمت بالا}]{\text{یک واحد به}} y=f(x)+۱\xrightarrow[\text{طول نقاط دو برابر}]{x\to(x/۲)} y=f(\frac{x}{۲})+۱\Rightarrow \text{تابع جدید}: y=\frac{x^۲}{۴}-\frac{x}{۲}+۲$$

$$\xrightarrow[y=۴]{\text{تقاطع با خط}}\frac{x^۲}{۴}-\frac{x}{۲}+۲=۴\Rightarrow x^۲-۲x-۸=۰$$

$$\Rightarrow AB\ \text{طول پاره‌خط}=|x_۲-x_۱|=\frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}=\frac{\sqrt{۴+۳۲}}{۱}=۶$$

۷ — **۱** ۲ ۳ ۴ مراحل ذکرشده را به‌صورت برعکس از آخر روی تابع g انجام می‌دهیم تا به ضابطهٔ f برسیم.

$$g(x)=-|x+۵|+۲\xrightarrow{\text{۲ واحد به بالا}} y=-|x+۵|+۴\xrightarrow{\text{قرینه نسبت به محور } x \text{ ها}} y=-(-|x+۵|+۴)=|x+۵|-۴\Rightarrow y=|x+۵|-۴$$

$$\xrightarrow{\text{۲ واحد به راست}} f(x)=|x+۳|-۴$$

۸ — **۱** ۲ ۳ ۴

$$f(x)=\sqrt{x-۱}\xrightarrow{\text{قرینه نسبت به محور } y \text{ ها}} y=\sqrt{-x-۱}$$

$$\xrightarrow[x\to x-۴]{\text{۴ واحد به سمت راست}} y=\sqrt{-(x-۴)-۱}=\sqrt{۳-x}=g(x)$$

حال g را با محور طول‌ها تقاطع می‌دهیم:

$$g(x)=۰$$

$$\Rightarrow\sqrt{۳-x}=۰\Rightarrow x=۳$$

۹ — ۱ ۲ **۳** ۴

$$y=f(x)\xrightarrow{x\to x+۱} y=f(x+۱)\xrightarrow{y\to y-۲} y=f(x+۱)-۲\xrightarrow{y\to -y} y=-f(x+۱)+۲$$

$$\xrightarrow{x\to -x} y=-f(-x+۱)+۲\xrightarrow{x\to ۲x} y=-f(-۲x+۱)+۲$$

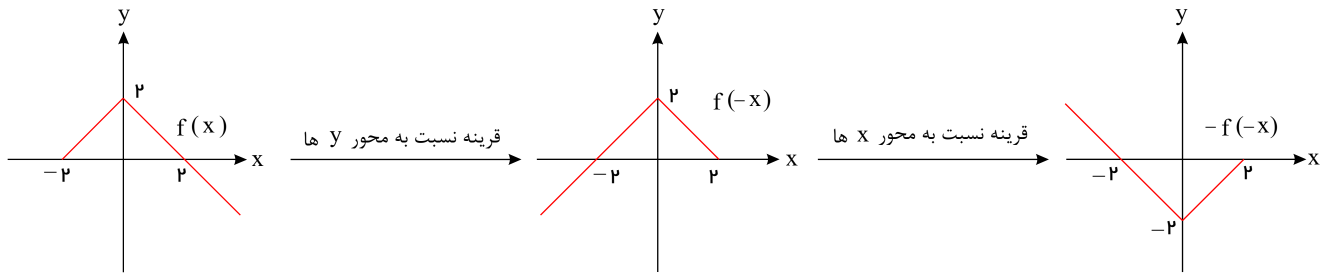
۱۰ — ۱ **۲** ۳ ۴ ابتدا نمودار تابع $g(x)$ را ۴ واحد به سمت چپ انتقال می‌دهیم.

$$g(x)=f(\frac{۱}{۲}x-۲)+۱\xrightarrow{x\to x+۴} g(x+۴)=f(\frac{۱}{۲}(x+۴)-۲)+۱=f(\frac{۱}{۲}x+۲-۲)+۱=f(\frac{۱}{۲}x)+۱$$

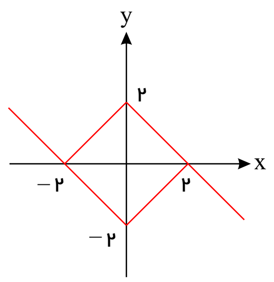
حال نمودار حاصل را ۳ واحد به سمت پایین انتقال می‌دهیم.

$$y=f(\frac{۱}{۲}x)+۱ \xrightarrow{y\to y-۳} h(x)=f(\frac{۱}{۲}x)+۱-۳=f(\frac{۱}{۲}x)-۲$$

۱۱ ۱ ۲ **۳** ۴ نمودار $y=f(-x)$، قرینهٔ f نسبت به محور y و نمودار $-f$ ، قرینهٔ fنسبت به محور xهاست.



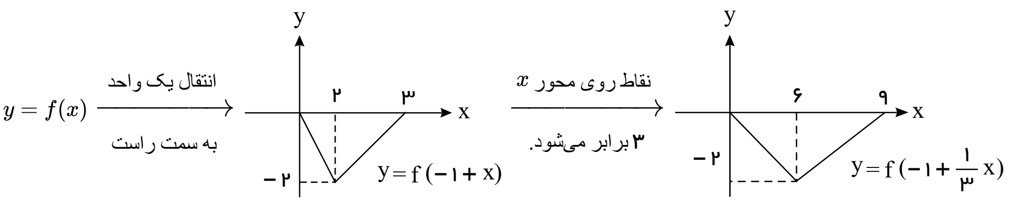
نمودار دو تابع f و $y=-f(-x)$ را در یک دستگاه رسم می‌کنیم:

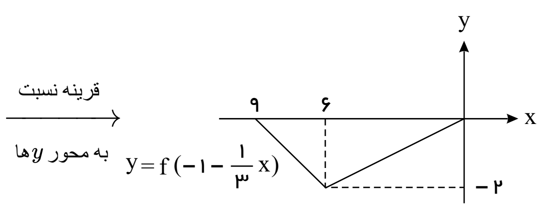


سطح محدود بین این دو نمودار، مربعی با قطر ۴ است و مساحت آن برابر است با:

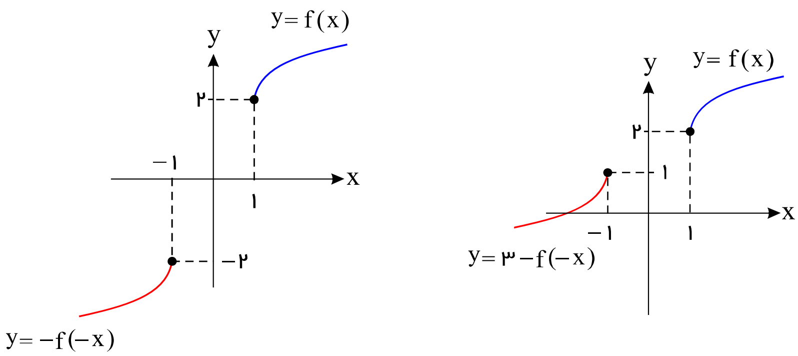
$$S=\frac{۴\times ۴}{۲}=۸$$

۱۲ ۱ ۲ ۳ **۴**



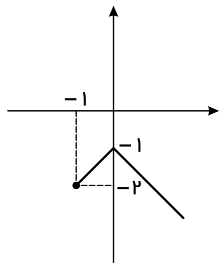


۱۳ ۱ **۲** ۳ ۴ واضح است که تابع $f(x)$ نسبت به مبدأ مختصات قرینه شده و سپس ۳ واحد به بالا منتقل شده است.

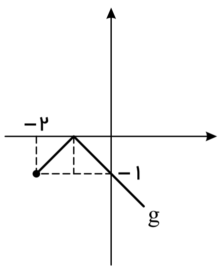


۱۴ ۱ ۲ ۳ **۴** به‌ترتیب زیر، تبدیلات را انجام می‌دهیم.

۱) قرینه نسبت به مبدأ ($-f(-x)$)



۲) یک واحد بالا و یک واحد چپ



$$g(x) = -f(-(x+۱)) + ۱ = ۱ - f(-x-۱)$$

۱۵ ۱ ۲ ۳ ۴ نقطهٔ $A'(۳,۲)$ روی نمودار تابع $y = ۲f(\frac{x}{۳})$ قرار دارد.

$$۲ = ۲f(\frac{۳}{۳}) \Rightarrow f(۱) = ۱$$

نقطهٔ $A''(a,b)$ را نقطهٔ موردنظر می‌گیریم، داریم:

$$b = ۳f(\frac{۱-a}{۲}) \Rightarrow \begin{cases} \frac{۱-a}{۲} = ۱ \Rightarrow a = -۱ \\ \frac{b}{۳} = ۱ \Rightarrow b = ۳ \end{cases}$$