کد اجرا: ۷۹۴۱۸۶۸ | تاریخ آزمون: ۱۴۰۲/۰۸/۱۰

نام و نام خانوادگی: | زمان برگزاری: ۶۵ دقیقه

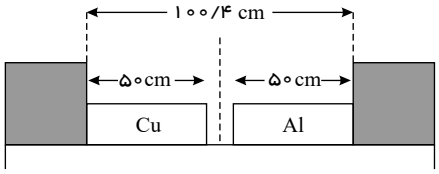
نام آزمون: شرق دخترانه حسابی ۱۰ آبان

دبیرستان دخترانه علوی واحد شرق

۱ درون $2kg$ آب $40^\circ C$ مقداری یخ $-5^\circ C$ می‌اندازیم. اگر این آب $294kJ$ گرما از دست بدهد تا سیستم به دمای تعادل برسد، جرم یخ چند گرم بوده است؟ $(L_F = 336\frac{kJ}{kg}\ ,\ C_{یخ} = 2100\frac{J}{kg\cdot K}\ ,\ C_{آب} = 4200\frac{J}{kg\cdot K})$

۱) ۴۰۰ ۲) ۶۰۰ ۳) ۸۰۰ ۴) ۱۲۰۰

۲ دو میلهٔ مسی و آلومینیمی بین دو دیوارهٔ ثابت قرار دارند. دمای دو میله را چند کلوین بالا بریم تا دو میله به یکدیگر برسند؟ $(\alpha_{Al} = 2/3\times10^{-5}\,1/K$ و $\alpha_{مس} = 1/7\times10^{-5}\,1/K)$



۱) ۴۷۰ ۲) ۳۴۷ ۳) ۲۵۰ ۴) ۲۰۰

۳ در دمای صفر درجهٔ سلسیوس حجم ظرف شیشه‌ای توسط یک لیتر جیوه کاملاً پر شده است. وقتی دمای مجموعه را به ۸۰ درجهٔ سلسیوس می‌رسانیم، $12cm^3$ جیوه از ظرف خارج می‌شود. اگر ضریب انبساط حجمی جیوه $1/8\times10^{-4}K^{-1}$ باشد، ضریب انبساط خطی شیشه در SI چقدر است؟

۱) $1/2\times10^{-4}$ ۲) 10^{-4} ۳) 10^{-5} ۴) 3×10^{-5}

۴ یک گلولهٔ سربی به شعاع $1cm$ و جرم $44g$ در دمای 0° قرار دارد. اگر دمای گلوله به $100^\circ C$ برسد، چگالی آن چند کیلوگرم بر متر مکعب و چگونه تغییر می‌کند؟ $(\pi = 3\ ,\ \alpha_{سرب} = 3\times10^{-5}\frac{1}{k})$

۱) ۳۳، کاهش می‌یابد. ۲) ۳۳، افزایش می‌یابد. ۳) ۹۹، کاهش می‌یابد. ۴) ۹۹، افزایش می‌یابد.

۵ دمای یک میلهٔ مسی را $100^\circ C$ افزایش می‌دهیم، طول آن ۰/۱۷ درصد افزایش می‌یابد. اگر دمای یک ورقهٔ مسی هم‌دما با میله را $100^\circ C$ افزایش دهیم، مساحت آن چند برابر می‌شود؟

۱) ۱/۰۰۱۷ ۲) ۰/۰۰۳۴ ۳) ۰/۳۴۰۰ ۴) ۱/۰۰۳۴

۶ یک گلولهٔ سربی به جرم ۲۰ گرم با سرعت $400\frac{m}{s}$ به یک قطعه چوب برخورد می‌کند و درون آن متوقف می‌شود. اگر ۵۰ درصد انرژی جنبشی گلوله صرف گرم کردن خودش شود و گرمای ویژهٔ سرب $125\frac{J}{kg\cdot K}$ باشد، دمای گلوله چند کلوین افزایش می‌یابد؟

۱) ۳۲۰ ۲) ۵۹۳ ۳) ۶۴۰ ۴) ۹۱۳

۷ چند گرم آب ۵۰ درجهٔ سلسیوس را روی ۴۵۰ گرم یخ صفر درجهٔ سلسیوس بریزیم تا پس از برقراری تعادل، ۵۲۰ گرم آب صفر درجهٔ سلسیوس در ظرف ایجاد شود؟ $(L_F = 336\frac{kJ}{kg}$ و $c = 4200\frac{J}{kg\cdot K}$ و گرما فقط بین آب و یخ مبادله می‌شود.)

۱) ۷۰ ۲) ۲۶۰ ۳) ۳۰۰ ۴) ۳۲۰

۸ طول تیرآهنی در دمای صفر درجهٔ سلسیوس، ۱۲ متر است. اگر دمای آن از صفر درجهٔ سلسیوس به ۵۰ درجهٔ سلسیوس برسد، طول آن چند میلی‌مترافزایش می‌یابد؟

$(\alpha_{آهن} = 1/2\times10^{-5}\frac{1}{^\circ C})$

۱) ۷/۲ ۲) ۷۲ ۳) $7/2\times10^{-1}$ ۴) $7/2\times10^{-2}$

۹ از بین عبارات زیر چند مورد صحیح است؟

۱) تابش گرمایی در دماهای زیر حدود $۵۰۰^\circ C$ عمدتاً به‌صورت تابش فرابنفش است.

۲) تف‌سنج تابشی به‌عنوان دماسنج معیار برای اندازه‌گیری دماهای بالای $۱۱۰۰^\circ C$ انتخاب شده است.

۳) تغییر کمیت دماسنجی، اساس کار دماسنج‌ها است.

۴) در دماسنج جیوه‌ای و الکلی، کمیت دماسنجی، ارتفاع مایع درون لولهٔ دماسنج است.

۵) گسترهٔ دماسنجی دماسنج ترموکوپل به جنس سیم‌های آن بستگی دارد.

۶) دماسنج ترموکوپل جزو دماسنج‌های معیار است.

۷) نیروی بین‌مولکولی کوتاه‌بُرد بوده و این نیرو در مولکول‌های آب به‌صورت هم‌چسبی است.

۱) ۳ مورد ۲) ۴ مورد ۳) ۵ مورد ۴) ۶ مورد

۱۰ یک قطعه یخ با دمای -۲۰ درجهٔ سلسیوس را درون ۲۵۰ گرم آب با دمای ۲۰ درجهٔ سلسیوس می‌اندازیم. اگر بعد از برقراری تعادل گرمایی، ۵۰ گرم یخ ذوب نشده باقی مانده باشد، جرم قطعه یخ اولیه چند گرم بوده است؟

($c_{آب} = ۴٫۲\frac{J}{g\cdot K}$، $c_{یخ} = ۲٫۱\frac{J}{g\cdot K}$، $L_F = ۳۳۶\frac{J}{g}$ و تبادل گرما فقط بین آب و یخ بوده است.)

۱) ۵۰ ۲) ۱۰۰ ۳) ۲۵۰ ۴) ۳۰۰

۱۱ در دمای ثابت، حجم گاز کاملی ۶۰ درصد تغییر می‌کند، درنتیجه فشار آن $۱۵\times ۱۰^۴ Pa$ افزایش می‌یابد. فشار اولیهٔ گاز چند پاسکال بوده است؟

۱) $۱۰^۵$ ۲) ۲×۱۰^۵ ۳) $۳٫۷۵\times ۱۰^۴$ ۴) ۹×۱۰^۴

۱۲ دو گلوله در شرایط خلاء به فاصلهٔ زمانی $۲٫۵s$ از یک نقطه بالای زمین رها می‌شوند، چند ثانیه پس از رها شدن گلولهٔ اول، فاصلهٔ دو گلوله به $۶۸٫۷۵m$ می‌رسد؟ ($g = ۱۰\frac{m}{s^۲}$)

۱) ۲٫۵ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۴٫۵

۱۳ گلوله‌ای از ارتفاع h رها می‌شود. این گلوله با سرعت v از ارتفاع ۹ متری زمین عبور می‌کند و با سرعت $\frac{۳}{۲}v$ به زمین می‌رسد. h چند متر است؟ (از مقاومت هوا صرف‌نظر شود و $g = ۱۰m/s^۲$)

۱) ۱۶٫۲ ۲) ۱۸ ۳) ۳۲٫۴ ۴) ۳۶

۱۴ گلوله‌ای از ارتفاع ۸۰ متری زمین رها می‌شود. در بازهٔ زمانی $t_۱ = ۲٫۵s$ تا $t_۲ = ۳٫۵s$ چند متر جابه‌جا می‌شود؟ (از مقاومت هوا صرف‌نظر شود و $g = ۱۰\frac{m}{s^۲}$ است.)

۱) ۲۵ ۲) ۳۰ ۳) ۳۵ ۴) ۴۰

۱۵ گلوله‌ای درشرایط خلا بدون سرعت اولیه ازارتفاعی رها می‌شود و در ثانیه‌ی اول، مسافتی به اندازه‌ی $\Delta x_۱$ و در ثانیه‌ی دوم مسافت، $\Delta x_۲$ را طی می‌کند. نسبت $\frac{\Delta x_۲}{\Delta x_۱}$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) $\sqrt{۲}$

۱۶ اگر $A = \begin{bmatrix} ۲ & ۱ \\ ۲ & -۳ \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} -۲ & ۱ \\ ۰ & ۳ \end{bmatrix}$ حاصل $A^{-۱}(B^{-۱}+A^{-۱})^{-۱}B^{-۱}$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۲}I$ ۲) $۲I$ ۳) $۴I$ ۴) $\frac{۱}{۴}I$

۱۷ باقی‌ماندهٔ تقسیم چندجمله‌ای $P(x)$ بر $x-۱$ و $۲x+۱$ به‌ترتیب ۸ و ۵ است. باقی‌ماندهٔ تقسیم $P(x)$ بر $۲x^۲ - x - ۱$ کدام است؟

۱) $-x+۴$ ۲) $x+۳$ ۳) $۲x+۶$ ۴) $۲x-۳$

۱۸ نقطهٔ $A(۳, -۶)$ متعلق به تابع $y = f(x)$ است، نقطهٔ متناظر آن در تابع $g(x) = -۲f(۲x - ۴) + ۳$ کدام است؟

۱) $A'(۲, ۱۵)$ ۲) $A'(\frac{۷}{۲}, ۱۵)$ ۳) $A'(\frac{۷}{۲}, -۹)$ ۴) $A'(۲, -۹)$

۱۹ اگر تابع f نزولی و دامنهٔ آن $\mathbb{R}$ باشد، دامنهٔ تابع $y = \sqrt{f(۲) - f(|x - ۱|)}$ کدام است؟

۱) $(-\infty, -۳] \cup [۱, +\infty)$ ۲) $[-۱, ۳]$ ۳) $(-\infty, -۱] \cup [۳, +\infty)$ ۴) $\mathbb{R}$

۲۰ اگر $A = \left[i^۲ - j\right]_{۳\times۳}$ حاصل $|A|$ کدام است؟

۱) ۰ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۴

۲۱ نمودار تابع $y = f(x)$ مفروض است. اگر ابتدا نمودار را نسبت به محور yها قرینه کنیم، سپس آن را ۲ واحد در راستای محور xها به طرف راست منتقل کنیم و در انتها با ضریب ۲ آن را در راستای عمودی انبساط دهیم، کدام تابع به‌دست می‌آید؟

۱) $g(x) = ۲f(-x - ۲)$ ۲) $g(x) = ۲f(-x + ۲)$ ۳) $g(x) = \frac{۱}{۲}f(-x - ۲)$ ۴) $g(x) = \frac{۱}{۲}f(-x + ۲)$

۲۲ اگر چندجمله‌ای $x^۳ + ax^۲ - (b - ۱)x - b$ بر $x + ۳$ و $x - ۲$ بخش‌پذیر باشد، باقی‌ماندهٔ تقسیم آن بر $x + ۴$ کدام است؟

۱) -۱۴ ۲) ۳۴ ۳) ۳۸ ۴) -۱۸

۲۳ اگر A و B به‌ترتیب ماتریس‌های مربعی مرتبه ۲ و ۳ بوده به‌طوری که $|A| = -۲$ و $|B| = -\frac{۱}{۸}$ باشد، حاصل $|||A|A|B|$ کدام است؟

۱) ۶۴ ۲) -۶۴ ۳) ۱۲۸ ۴) -۱۲۸

۲۴ ماتریس مربعی و غیرصفر A از مرتبه ۲ طوری مفروض است که $A^۲ = A$؛ اگر $I - ۵A$ وارون $I + \lambda A$ باشد، آنگاه λ کدام است؟

۱) $-\frac{۵}{۴}$ ۲) $\frac{۵}{۴}$ ۳) $-\frac{۴}{۵}$ ۴) $\frac{۴}{۵}$

۲۵ اگر چند جمله‌ای $x^۴ - ۳x^۳ - ax + b$ بر $x^۲ - x - ۲$ بخش‌پذیر باشد، حاصل $a + ۲b$ کدام است؟

۱) ۴ ۲) -۴ ۳) -۸ ۴) ۸

۲۶ اگر α و β دو عدد گنگ باشند و $\alpha + \beta$ عددی گویا باشد، در اثبات به روش برهان خلف می‌توان ثابت کرد دو عدد $۲\alpha - \beta$ و $\alpha + ۳\beta$ همواره ..... هستند.

۱) گنگ - گویا ۲) گویا - گنگ ۳) گنگ - گنگ ۴) گویا - گویا

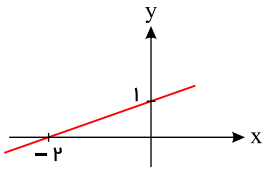
۲۷ اگر تابع f با دامنهٔ $\mathbb{R}$ صعودی اکید و $f(-۳) = ۰$، تابع g نیز با دامنه $\mathbb{R}$ نزولی اکید باشد و $g(۲) = ۰$، دامنه‌ی تابع $y = \sqrt{\frac{f(-x)(x + ۱)}{g(-\frac{۱}{۲}x)(x - ۱)}}$ چند عددصحیح را شامل می‌شود؟

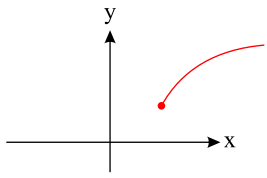
۱) ۷ ۲) ۶ ۳) ۵ ۴) ۴

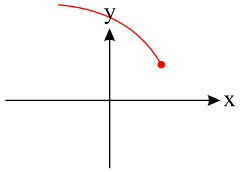
۲۸ اگر دامنهٔ تعریف تابع $y = f(۲ - x)$ بازهٔ $[-۱, ۲]$ باشد، دامنهٔ تعریف تابع $g(x) = f(۳x + ۴)$ کدام است؟

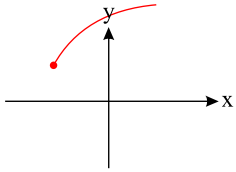
۱) $\left[-\frac{۴}{۳}, -\frac{۱}{۳}\right]$ ۲) $[۰, ۱]$ ۳) $[۰, ۳]$ ۴) $[۱, ۲]$

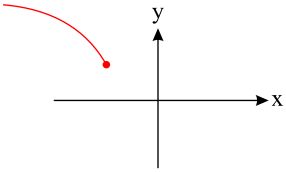
۲۹ نمودار تابع خطی f به صورت مقابل است. نمودار $y = ۱ + \sqrt{۳ - ۲f(x)}$ چگونه است؟



۱) 

۲) 

۳) 

۴) 

۳۰ بزرگ‌ترین بازه برای k که در آن تابع نمایی $y = \left(\frac{۵ - k}{۱ - ۳k}\right)^x$ همواره اکیداً صعودی باشد، کدام است؟

۱) $(-۱, \frac{۱}{۳})$ ۲) $(-۲, \frac{۱}{۳})$ ۳) $(-۳, \frac{۱}{۳})$ ۴) $(-۴, \frac{۱}{۳})$

۳۱ اگر $۲x + ۱ \mid ۵$ آنگاه به‌ازای کدام مقدار k، رابطهٔ $۱۴x^۲ + kx - ۱۹ \mid ۲۵$ برقرار است؟

۱) ۲۱ ۲) ۱۷ ۳) ۱۳ ۴) ۱۹

۳۲ اگر $(۲a + ۵, a^۲ + a) = d$ و d عددی اول باشد. در این صورت بیشترین مقدار برای $d^۲ + d + ۱$ کدام است؟ $(a \in \mathbb{Z})$

۱) ۵۷ ۲) ۱۳ ۳) ۱۵ ۴) ۳۱

۳۳ به‌ازای چند عدد طبیعی مانند a، رابطهٔ $[a\ ,\ ۲۸۰] = ۵۶۰۰$ برقرار است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۳۴ روی نمودار تابع $y = \frac{۳x + ۴}{x + ۲}$، چند نقطه با مختصات طبیعی وجود دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۴ ۴) صفر

۳۵ اگر دستگاه معادلات خطی $\begin{cases} ax + ۳y = ۵ \\ ۲x + y = ۷ \end{cases}$ جواب نداشته باشد، دستگاه $\begin{cases} ۲x - ay = -۲a \\ -x + ۳y = a \end{cases}$ چند جواب دارد؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) بی‌شمار

پاسخ‌نامه تشریحی

۱ ۱ ۲ ۳ ۴ ابتدا دمای نهایی آب را به دست می‌آوریم.

$$Q = mc\Delta\theta \rightarrow -۲۹۴۰۰۰ = ۲ \times ۴۲۰۰\Delta\theta \rightarrow \Delta\theta = -۳۵^\circ C$$

$\theta - ۴۰ = -۳۵ \rightarrow \theta = ۵^\circ C$ یعنی درنهایت آب $۵^\circ C$ خواهیم داشت.

$$-۵^\circ C \text{ یخ} \xrightarrow{m'} ۰^\circ C \text{ یخ} \xrightarrow{m'} ۰^\circ C \text{ آب} \xrightarrow{m'} ۵^\circ C \text{ آب} \xleftarrow{m} ۴۰^\circ C \text{ آب}$$

$$m'c_i\Delta\theta + m'L_F + m'c\Delta\theta + mc\Delta\theta = ۰$$

$$\Rightarrow m' \times ۲۱۰۰(۵) + m'(۳۳۶۰۰۰) + m'(۴۲۰۰)(۵) - ۲۹۴۰۰۰ = ۰ \Rightarrow m' = ۰/۸kg = ۸۰۰g$$

۲ ۱ ۲ ۳ ۴

$$\Delta\ell_۱ + \Delta\ell_۲ = (\ell_۱\alpha\Delta\theta)_{cu} + (\ell_۱\alpha\Delta\theta)_{Al}$$

$$\Delta\ell_۱ + \Delta\ell_۲ = ۱۰۰/۴cm - ۲(۵۰cm) = ۰/۴cm$$

$$\Rightarrow (\ell_۱\alpha\Delta\theta)_{Cu} + (\ell_۱\alpha\Delta\theta)_{Al} = ۰/۴cm$$

$$\Rightarrow (۵۰cm \times ۱/۷ \times ۱۰^{-۵} \times \Delta\theta) + (۵۰cm \times ۲/۳ \times ۱۰^{-۵} \times \Delta\theta) = ۰/۴cm$$

$$\Rightarrow (۸۵ + ۱۱۵)(۱۰^{-۵} \times \Delta\theta) = ۰/۴cm \rightarrow \Delta\theta = \frac{۰/۴cm}{۰/۰۰۲cm} = ۲۰۰^\circ C$$

$$\Delta T = \Delta\theta \rightarrow \boxed{\Delta T = ۲۰۰K}$$

۳ ۱ ۲ ۳ ۴ در اینجا چون ظرف در ابتدا، از مایع پر شده، حجم مایع بیرون ریخته که آن را با $\Delta V_{\text{ظاهری}}$ نشان داده‌ایم، به‌صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\Delta V_{\text{ظاهری}} = \Delta V_{\text{مایع}} - \Delta V_{\text{ظرف}} = [V_۱(\beta)\Delta\theta]_{\text{مایع}} - [V_۱(۳\alpha)\Delta\theta]_{\text{ظرف}} \Rightarrow ۱۲ = V_۱(\beta - ۳\alpha)\cdot\Delta\theta$$

$$\Rightarrow ۱۲ = ۱۰۰۰ \times (\beta - ۳\alpha) \times (۸۰ - ۰) \Rightarrow \beta - ۳\alpha = \frac{۱۲}{۱۰۰۰ \times ۸۰} = \frac{۳}{۲} \times ۱۰^{-۴}K^{-۱} = ۱/۵ \times ۱۰^{-۴}K^{-۱}$$

$$\Rightarrow ۱/۸ \times ۱۰^{-۴} - ۳\alpha = ۱/۵ \times ۱۰^{-۴} \Rightarrow ۳\alpha = ۰/۳ \times ۱۰^{-۴} \Rightarrow \alpha = ۱۰^{-۵}K^{-۱}$$

۴ ۱ ۲ ۳ ۴

$$\rho_۲ = \frac{m}{V_۲} = \frac{m}{V_۱(۱ + \beta\Delta T)} = \frac{\rho_۱}{۱ + \beta\Delta T} \simeq \rho_۱(۱ - \beta\Delta T)$$

$$\rho_۲ = \rho_۱ - \rho_۱\beta\Delta T \rightarrow \Delta\rho = -\rho_۱\beta\Delta T = -\rho_۱(۳\alpha)\Delta T$$

$$\rightarrow \Delta\rho = -\left(\frac{۴۴ \times ۱۰^{-۳}kg}{(\frac{۴}{۳})(۳)(۱۰^{-۲})^۳}\right)(۳ \times ۳ \times ۱۰^{-۵})(۱۰۰) \rightarrow \Delta\rho = -۹۹\frac{kg}{m^۳}$$

($۹۹\frac{kg}{m^۳}$ کاهش می‌یابد.)

۵ ۱ ۲ ۳ ۴ برای حل این سؤال به‌صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$\begin{cases} \Delta L = L_۱\alpha\Delta\theta \\ \frac{\Delta L}{L_۱} = ۰/۱۷\% \Rightarrow \Delta L = \frac{۱۷}{۱۰۰۰۰}L_۱ \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{۱۷}{۱۰۰۰۰}L_۱ = L_۱\alpha \times ۱۰۰ \Rightarrow \alpha = ۱۷ \times ۱۰^{-۶}\frac{۱}{K}$$

$$\Delta A = A_۱ ۲\alpha\,\Delta\theta = A_۱ \times (۲ \times ۱۷ \times ۱۰^{-۶}) \times ۱۰۰ \Rightarrow \Delta A = ۰/۰۰۳۴A_۱$$

$$A_۲ = A_۱ + \Delta A = A_۱ + ۰/۰۰۳۴A_۱ = ۱/۰۰۳۴A_۱$$

توضیح بیشتر: می‌دانیم ضریب انبساط سطحی برای اجسام دو برابر ضریب انبساط خطی است. از این رو می‌توان نتیجه گرفت، در صورتی که در اثر مقدار معینی افزایش دما طول یک جسم x

درصد افزایش یابد، درصد افزایش سطح جسمی از همان ماده تحت همان افزایش دما برابر $2x$ است. در این سوال طول میلهٔ مسی با افزایش دمای $100^\circ C$ ،۰٫۱۷ درصد (۰٫۰۰۱۷ مقدار اولیه) افزایش یافته است.

بنابراین افزایش سطح یک ورقهٔ مسی تحت همان افزایش دما برابر ۰٫۳۴ درصد (۰٫۰۰۳۴ برابر مقدار اولیه) است و می‌توان نوشت:

$$A_2 = A_1 + \Delta A = A_1 + ۰٫۰۰۳۴A_1 = ۱٫۰۰۳۴A_1$$

۶ ۱ ۲ ۳ ۴ نصف انرژی جنبشی گلوله موقع برخورد، صرف گرم کردنِ خودِ گلوله می‌شود. پس:

$$\frac{۱}{۲}K = Q \Rightarrow \frac{۱}{۲} \times \frac{۱}{۲}\cancel{m}v^۲ = \cancel{m}c\Delta\theta \Rightarrow \frac{۱}{۴} \times ۴۰۰^۲ = ۱۲۵ \times \Delta\theta$$
$$\Rightarrow \Delta\theta = ۳۲۰^\circ C = ۳۲۰K$$

۷ ۱ ۲ ۳ ۴ اگر جرم آب، m و جرم مقداری از یخ که ذوب می‌شود را m' فرض کنیم، می‌توان گفت گرمایی که آب $50^\circ C$ از دست می‌دهد تا به آب صفر درجهٔ سلسیوس تبدیل شود، صرف ذوب شدن یخ صفر درجه می‌شود. یعنی:

$$\left.\begin{array}{r} m + m' = ۵۲۰ \Rightarrow m' = ۵۲۰ - m \\ mc\Delta\theta = m'L_F \Rightarrow m \times ۴٫۲ \times ۵۰ = (۵۲۰ - m) \times ۳۳۶ \end{array}\right\} \Rightarrow m = ۳۲۰\ g$$

۸ ۱ ۲ ۳ ۴ با توجه به رابطهٔ $\Delta L = L_۰\alpha\Delta\theta$ داریم:

$$\Delta L = ۱۲ \times ۱٫۲ \times ۱۰^{-۵} \times (۵۰ - ۰) = ۷٫۲ \times ۱۰^{-۳} = ۷٫۲mm$$

۹ ۱ ۲ ۳ ۴ موارد (۱)، (۲) و (۶) نادرست بوده و باقی موارد درست هستند. بنابراین ۴ مورد صحیح است، یعنی گزینهٔ ۲ درست است.

دلیل نادرستی مورد ۱: نوع تابش فروسرخ است نه فرابنفش.

دلیل نادرستی مورد ۲: تف‌سنج نوری به‌عنوان دماسنج معیار انتخاب شده است نه نوع تابشی.

دلیل نادرستی مورد ۶: دماسنج‌های معیار عبارتند از: گازی، مقاومت پلاتینی و تف‌سنج نوری.

۱۰ ۱ ۲ ۳ ۴ وقتی گفته می‌شود که بخشی از یخ آب نمی‌شود بدین معناست که دمای تعادل صفر درجه سانتی‌گراد است.

(m) یخ $۲۰^\circ C \rightarrow$ یخ صفر درجه $(m - ۵۰) \rightarrow$ آب صفر درجه $\leftarrow ۲۰^\circ C$ آب $, m' = ۲۵۰g$

$$\underset{\text{گرمای افزایش}}{Q_۱} + \underset{\text{گرمای ذوب}}{Q_۲} = \underset{\text{گرمای تبدیل}}{|Q_۳|}$$

۰° به -۲۰° دمای یخ از قسمتی از یخ ۰° آب ۲۰° به آب

$$m \times ۲٫۱ \times ۲۰ + (m - ۵۰) \times ۳۳۶ = ۲۵۰ \times ۴٫۲ \times ۲۰$$

توجه شود که ۵۰ گرم یخ ذوب نشده باقی می‌ماند.

$$۴۲ \times m + ۳۳۶m - ۱۶۸۰۰ = ۲۱۰۰۰$$
$$۳۷۸m = ۳۷۸۰۰ \Rightarrow m = ۱۰۰g$$

۱۱ ۱ ۲ ۳ ۴ در دمای ثابت، فشار با حجم رابطهٔ عکس دارد و چون فشار گاز افزایش یافته حتماً حجم گاز ۶۰ درصد کم شده، پس:

$$\frac{P_۱V_۱}{T_۱} = \frac{P_۲V_۲}{T_۲} \xrightarrow{T_۱ = T_۲} P_۱V_۱ = P_۲V_۲$$
$$P_۱V_۱ = P_۲V_۲ \xrightarrow[P_۲ = P_۱ + ۱۵ \times ۱۰^۴]{V_۲ = V_۱ - \frac{۶}{۱۰}V_۱ = ۰٫۴V_۱} P_۱V_۱ = (P_۱ + ۱۵ \times ۱۰^۴) \times ۰٫۴V_۱$$
$$\Rightarrow P_۱ = ۱۰^۵ Pa$$

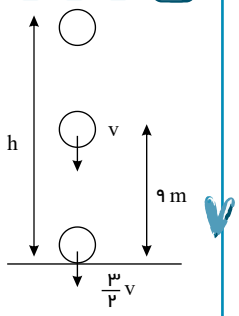
۱۲ ۱ ۲ ۳ ۴ مبدأ را محل رها کردن گلوله‌ها فرض کردیم. زمان حرکت اولی t و دومی $(t - ۲٫۵)$ می‌باشد؛ در این صورت با انتخاب جهت مثبت محور yها رو به پایین داریم:

$$y_۱ - y_۲ = ۶۸٫۷۵ \Rightarrow \frac{۱}{۲}gt^۲ - (\frac{۱}{۲}g(t - ۲٫۵)^۲) = ۶۸٫۷۵ \Rightarrow ۲۵t - ۳۱٫۲۵ = ۶۸٫۷۵ \Rightarrow ۲۵t = ۱۰۰ \Rightarrow t = ۴s$$

۱۳ ۱ ۲ ۳ ۴

معادلهٔ مستقل از زمان : $(\frac{۳v}{۲})^۲ - v^۲ = ۲ \times ۱۰ \times ۹ \Rightarrow v = ۱۲m/s$

معادلهٔ مستقل از زمان بین نقطهٔ اول و آخر : $(\frac{۳v}{۲})^۲ - ۰ = ۲ \times ۱۰ \times h \Rightarrow (\frac{۳ \times ۱۲}{۲})^۲ = ۲۰h \Rightarrow h = ۱۶٫۲\ m$



۱۴ ۱ ۲ ۳ ۴ اگر جهت مثبت را به سمت پایین بگیریم، معادلهٔ سرعت به‌صورت زیر درمی‌آید.

$v = gt \Rightarrow v = ۱۰t$

$$\begin{cases} t_۱ = ۲٫۵ \Rightarrow v_۱ = ۲۵\frac{m}{s} \\ t_۲ = ۳٫۵ \Rightarrow v_۲ = ۳۵\frac{m}{s} \end{cases}$$

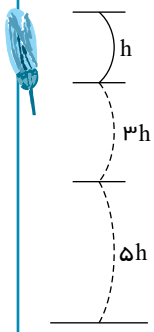
$$\Delta y = \frac{v_۱ + v_۲}{۲}\Delta t = \frac{۲۵ + ۳۵}{۲} \times ۱ = ۳۰\frac{m}{s}$$

۱۵ ۱ ۲ ۳ ۴

در سقوط آزاد یک گلوله، نسبت جابه‌جایی‌های گلولهٔ در بازه‌های زمانی مساوی و متوالی، همانند نسبت اعداد فرد متوالی است، یعنی ۱ به ۳ به ۵ به ۷ و....

$$\Delta y = \frac{۱}{۲}gt^۲ \rightarrow \begin{cases} t = ۱s \Rightarrow \Delta y_۱ = ۵m = \Delta x_۱ \\ t = ۲s \Rightarrow \Delta y_۲ = ۲۰m = \Delta x_۱ + \Delta x_۲ \end{cases}$$

$$\Rightarrow \Delta x_۱ = ۵m\ ,\ \Delta x_۲ = ۱۵m \Rightarrow \frac{\Delta x_۲}{\Delta x_۱} = ۳$$



۱۶ ۱ ۲ ۳ ۴ (نکته) برای سه ماتریس مربعی هم‌مرتبه P, N, M رابطهٔ $M^{-۱}N^{-۱}P^{-۱} = (PNM)^{-۱}$ برقرار است. طبق این نکته داریم:

$$A^{-۱}(B^{-۱} + A^{-۱})^{-۱}B^{-۱} = (B(B^{-۱} + A^{-۱})A)^{-۱}$$

$$= ((I + BA^{-۱})A)^{-۱} = (A + B)^{-۱} = (\begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ -۳ & ۲ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ۱ & -۲ \\ ۳ & ۰ \end{bmatrix})^{-۱}$$

$$= \begin{bmatrix} ۲ & ۰ \\ ۰ & ۲ \end{bmatrix}^{-۱} = (۲I)^{-۱} = \frac{۱}{۲}I$$

۱۷ ۱ ۲ ۳ ۴ باقی‌ماندهٔ تقسیم $P(x)$ بر $x - ۱$ برابر ۸ است، پس $P(۱) = ۸$ و باقی‌ماندهٔ تقسیم بر $۲x + ۱$ برابر ۵ است پس $P(-\frac{۱}{۲}) = ۵$. باقی ماندهٔ تقسیم $P(x)$ بر $۲x^۲ - x - ۱$ یک چندجمله‌ای درجهٔ اول به‌صورت $mx + n$ است.

$$P(x) = (۲x^۲ - x - ۱)Q(x) + mx + n \Rightarrow \begin{cases} P(۱) = m + n = ۸ \\ P(-\frac{۱}{۲}) = -\frac{m}{۲} + n = ۵ \end{cases} \Rightarrow m = ۲\ ,\ n = ۶$$

بنابراین باقی‌ماندهٔ این تقسیم $۲x + ۶$ است.

۱۸ ۱ ۲ ۳ ۴

تابع $f(x)$ چهار واحد به راست برده شده، سپس طول نقاطش نصف شده است و سپس عرض‌ها -۲ برابر شده است و درنهایت شکل سه واحد به بالا برده شده است.

$$A\begin{vmatrix} ۳ \\ -۶ \end{vmatrix} \xrightarrow[\text{چهار واحد راست}]{} \begin{vmatrix} ۷ \\ -۶ \end{vmatrix} \xrightarrow[\text{طول نصف}]{} \begin{vmatrix} \frac{۷}{۲} \\ -۶ \end{vmatrix} \xrightarrow[\text{عرض ۲- برابر}]{} \begin{vmatrix} \frac{۷}{۲} \\ ۱۲ \end{vmatrix} \xrightarrow[\text{سه واحد بالا}]{} \begin{vmatrix} \frac{۷}{۲} \\ ۱۵ \end{vmatrix}$$

۱۹ ۱ ۲ ۳ ۴ در تابع نزولی به‌ازای هر $x_۱$ و $x_۲$ متعلق به دامنه اگر $x_۱ < x_۲$ باشد آن‌گاه $f(x_۱) \geq f(x_۲)$ است. برای تعیین دامنهٔ تعریف توابع رادیکالی با فرجهٔ زوج کافی است زیر رادیکال را بزرگتر مساوی صفر قرار دهیم.

$f(۲) - f(|x-۱|) \geq ۰ \to f(۲) \geq f(|x-۱|) \xrightarrow{f \text{ نزولی است}} ۲ \leq |x-۱|$

$$\to \begin{cases} x-۱ \geq ۲ \to x \geq ۳ \\ \text{یا} \\ x-۱ \leq -۲ \to x \leq -۱ \end{cases} \to x \in (-\infty, -۱] \cup [۳, +\infty)$$

۲۰ ۱ ۲ ۳ ۴ ماتریس A را ساخته و دترمینان آن را به دست می‌آوریم:

$$A = \left[i^۲ - j\right]_{۳\times۳} = \begin{bmatrix} ۱^۲-۱ & ۱^۲-۲ & ۱^۲-۳ \\ ۲^۲-۱ & ۲^۲-۲ & ۲^۲-۳ \\ ۳^۲-۱ & ۳^۲-۲ & ۳^۲-۳ \end{bmatrix}_{۳\times۳} = \begin{bmatrix} ۰ & -۱ & -۲ \\ ۳ & ۲ & ۱ \\ ۸ & ۷ & ۶ \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{بسط نسبت به سطر اول}} |A| = -(-۱)\underbrace{\begin{vmatrix} ۳ & ۱ \\ ۸ & ۶ \end{vmatrix}}_{۱۰} + (-۲)\underbrace{\begin{vmatrix} ۳ & ۲ \\ ۸ & ۷ \end{vmatrix}}_{۵}$$

$|A| = ۱۰ - ۱۰ = ۰$

۲۱ ۱ ۲ ۳ ۴ با توجه به مراحل گفته شده داریم:

$$y = f(x) \xrightarrow[x \to -x]{\text{قرینه نسبت به } y \text{ ها}} f(-x) \xrightarrow[x \to x-۲]{۲ \text{ واحد به راست}} f(-(x-۲)) = f(-x+۲)$$

$$\xrightarrow{\text{انبساط عمودی با ضریب } ۲} g(x) = ۲f(-x+۲)$$

۲۲ ۱ ۲ ۳ ۴ با فرض $f(x) = x^۳ + ax^۲ - (b-۱)x - b$ داریم:

$x + ۳ = ۰ \Rightarrow x = -۳ \Rightarrow f(-۳) = ۰ \Rightarrow -۲۷ + ۹a + ۳b - ۳ - b = ۰ \Rightarrow ۹a + ۲b = ۳۰$

$x - ۲ = ۰ \Rightarrow x = ۲ \Rightarrow f(۲) = ۰ \Rightarrow ۸ + ۴a - ۲b + ۲ - b = ۰ \Rightarrow ۴a - ۳b = -۱۰$

$$\begin{cases} ۹a + ۲b = ۳۰ \\ ۴a - ۳b = -۱۰ \end{cases} \Rightarrow a = ۲ \ , \ b = ۶ \Rightarrow f(x) = x^۳ + ۲x^۲ - ۵x - ۶$$

$x + ۴ = ۰ \Rightarrow x = -۴ \Rightarrow$ باقی‌مانده $= f(-۴) = -۶۴ + ۳۲ + ۲۰ - ۶ = -۱۸$

۲۳ ۱ ۲ ۳ ۴ محاسبهٔ دترمینان حاصل را از دترمینان داخلی شروع می‌کنیم:

$||A|A| = |۲A| = (-۲)^۲|A| = ۴ \times (-۲) = -۸$

$|||A|A|B| = |(-۸)B| = (-۸)^۳ \times |B| = (-۸)^۳ \times (\frac{-۱}{۸}) = ۶۴$

۲۴ ۱ ۲ ۳ ۴ می‌دانیم حاصل‌ضرب دو ماتریس که وارون یکدیگرند برابر ماتریس همانی است، پس طبق فرض داریم:

$(I - ۵A)(I + \lambda A) = I$

$I^۲ + \lambda AI - ۵AI - ۵\lambda A^۲ = I \xrightarrow{A^۲ = A}$

$I + \lambda A - ۵A - ۵\lambda A = I \to -۴\lambda A - ۵A = \overline{O} \to -A(۴\lambda + ۵) = \overline{O} \xrightarrow{A \neq \overline{O}} ۴\lambda + ۵ = ۰ \to \lambda = -\frac{۵}{۴}$

۲۵ ۱ ۲ ۳ ۴ چند جمله‌ای $x^۴ - ۳x^۳ - ax + b$ بر $x^۲ - x - ۲$ بخش‌پذیر است یعنی خارج قسمتی مانند $q(x)$ وجود دارد که داریم:

$x^۴ - ۳x^۳ - ax + b = (x^۲ - x - ۲)q(x) \quad (۱)$

با استفاده از ریشه‌های مقسوم‌علیه در این رابطه داریم:

$x^۲ - x - ۲ = ۰ \Rightarrow (x-۲)(x+۱) = ۰ \Rightarrow x = ۲ \ , \ x = -۱$

$$x = ۲ \xrightarrow{(۱)} ۱۶ - ۲۴ - ۲a + b = ۰ \Rightarrow \begin{cases} -۲a + b = ۸ \xrightarrow{\times(-۱)} \\ a + b = -۴ \end{cases} \begin{cases} ۲a - b = -۸ \\ a + b = -۴ \end{cases}$$

$$x = -۱ \xrightarrow{(۱)} ۱ + ۳ + a + b = ۰ \Rightarrow \qquad ۳a = -۱۲ \Rightarrow \boxed{a = -۴}$$

$a + b = -۴ \Rightarrow -۴ + b = -۴ \Rightarrow \boxed{b = ۰} \Rightarrow a + ۲b = -۴ + ۰ = -۴$

۲۶ ۱ ۲ ۳ ۴ به کمک برهان خلف می‌توان ثابت کرد هر دو عبارت گنگ هستند. به‌طور مثال، ثابت می‌کنیم $۲\alpha - \beta$ گنگ است.

برهان خلف: فرض می‌کنیم $۲\alpha - \beta$ گویا باشد.

$$\text{فرض} : \begin{cases} ۲\alpha - \beta = \overbrace{c}^{\text{گویا}} \\ \alpha + \beta = \underbrace{c'}_{\text{گویا}} \end{cases} \xrightarrow{+} ۳\alpha = c + c' \to \underbrace{\alpha}_{\text{گنگ}} = \underbrace{\frac{c + c'}{۳}}_{\text{گویا}} \quad \text{(متناقض است)}$$

۲۷ ۱ ۲ ۳ ۴

با توجه به داده‌های مسئله، صفر تابع $y = f(x)$، $x = ۳$ و صفر تابع $y = g(-\frac{x}{۲})$، $x = -۴$ است. جدول تعیین علامت عبارت زیر رادیکال نیز به صورت زیر است:

x	$-\infty$		-۴		-۱		۱		۳		$+\infty$
$f(-x)$		$+$		$+$		$+$		$+$	○	$-$	
$g(-\frac{۱}{۲}x)$		$-$	○	$+$		$+$		$+$		$+$	
$\frac{x+۱}{x-۱}$		$+$		$+$	○	$-$	ن	$+$	ت	$+$	
y		$-$	ن	$+$	ت	$-$	ن	$+$	ت	$-$	

$$D_y=(-۴,-۱]\cup(۱,۳]\xrightarrow{x\in\mathbb{Z}}x=-۳,-۲,-۱,۲,۳$$

توجه کنیم اگر تابع f صعودی و $f(\alpha)=۰$ باشد، آنگاه برای $x>\alpha$ ، $f(x)>۰$ و اگر تابع f نزولی و $f(\alpha)=۰$ باشد، آنگاه برای $x>\alpha$ ، $f(x)<۰$ خواهد بود. هم‌چنین توابع $y=f(-x)$ و $y=g(-\frac{۱}{۲}x)$ به ترتیب اکیداً نزولی و اکیداً صعودی هستند.

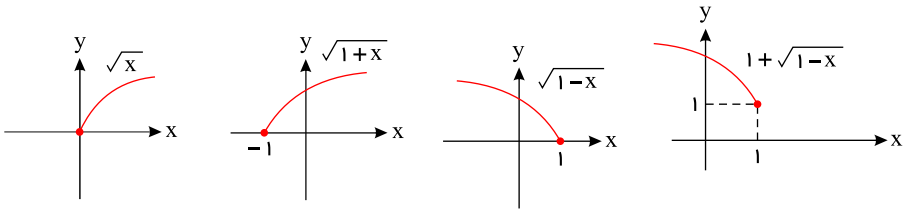
۲۸ ۱ ۲ ۳ ۴

$$y=f(۲-x)\xrightarrow[x\to -x]{\text{قرینه نسبت به محور } y}y_۱=f(x+۲)\xrightarrow[x\to x+۲]{\text{۲ واحد چپ}}y_۲=f(x+۴)\xrightarrow{\text{طول‌ها برابر } \frac{۱}{۳}}g(x)=f(۳x+۴)$$

$$\text{پس: } -۱\le x\le ۲\xrightarrow{\text{قرینه نسبت به محور } y}-۲\le x\le ۱\xrightarrow{\text{۲ واحد چپ}}-۴\le x\le -۱\xrightarrow{\text{طول‌ها برابر } \frac{۱}{۳}}-\frac{۴}{۳}\le x\le -\frac{۱}{۳}$$

۲۹ ۱ ۲ ۳ ۴

$$f(x)=\frac{۱}{۲}x+۱\Rightarrow y=۱\sqrt{۳-۲(\frac{۱}{۲}x+۱)}\Rightarrow y=۱+\sqrt{۱-x}$$



۳۰ ۱ ۲ ۳ ۴ تابع نمایی $f(x)=a^x$ با شرط $a>۱$ تابعی اکیداً صعودی است. پس داریم:

$$y=\left(\frac{۵-k}{۱-۳k}\right)^x\Rightarrow\frac{۵-k}{۱-۳k}>۱\Rightarrow\frac{۵-k}{۱-۳k}-۱>۰\Rightarrow\frac{۵-k-۱+۳k}{۱-۳k}>۰$$

$$\Rightarrow\frac{۲k+۴}{۱-۳k}>۰$$

k	$-\infty$		-۲		$\frac{۱}{۳}$	$+\infty$
$\frac{۲k+۴}{۱-۳k}$		$-$	○	$+$	ن | ت	$-$

$$\Rightarrow -۲<k<\frac{۱}{۳}$$

۳۱ ۱ ۲ ۳ ۴ توجه کنید که:

$$۵\mid ۲x+۱\Rightarrow\begin{cases}۲۵\mid ۴x^۲+۴x+۱\\ ۲۵\mid ۱۰x^۲+۵x\end{cases}\Rightarrow ۲۵\mid ۱۴x^۲+۹x+۱$$

$$\begin{cases}۲۵\mid ۱۰x+۵\\ ۲۵\mid ۱۴x^۲+۹x+۱\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}۲۵\mid ۱۴x^۲+۱۹x+۶\\ ۲۵\mid ۲۵\end{cases}\Rightarrow ۲۵\mid ۱۴x^۲+۱۹x-۱۹$$

۳۲ ۱ ۲ ۳ ۴ فرض می‌کنیم $(۲a+۵,a^۲+a)=d$ باشد.

$$(۲a+۵,a^۲+a)=d\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}d\mid ۲a+۵\xrightarrow{\times a}d\mid ۲a^۲+۵a\\ d\mid a^۲+a\xrightarrow{\times ۲}d\mid ۲a^۲+۲a\end{array}\right\}\xrightarrow{-}d\mid(۲a^۲+۵a)-(۲a^۲+۲a)\Rightarrow d\mid ۳a$$

می‌دانیم : $\left.\begin{matrix} d|۲a+۵ \xrightarrow{\times ۳} d|۶a+۱۵ \\ d|۳a \xrightarrow{\times ۲} d|۶a \end{matrix}\right\} \xrightarrow{-} d|۱۵ \xrightarrow{d \text{ اول است.}} d=۳ \text{ یا } ۵$

$\Rightarrow Max(d^۲+d+۱) \xrightarrow{d=۵} ۵^۲+۵+۱=۳۱$

۳۳ ۱ ۲ ۳ ۴ توجه کنید که $۵۶۰۰=۲^۵\times ۵^۲\times ۷$, $۲۸۰=۲^۳\times ۵\times ۷$ پس اگر $[a\ ,\ ۲۸۰]=۵۶۰۰$ باید دقیقاً ۵ عامل ۲ و ۲ عامل ۵ و حداکثر یک عامل ۷ داشته باشد. به هیچ عدد اول دیگری بخش‌پذیر نباشد، بنابراین رابطهٔ مذکور تنها به‌ازای ۲ عدد $۲^۵\times ۵^۲$, $۲^۵\times ۵^۲\times ۷$ برقرار است.

۳۴ ۱ ۲ ۳ ۴

$\left.\begin{matrix} y=\frac{۳x+۴}{x+۲} \xrightarrow{y\in\mathbb{N}} \frac{۳x+۴}{x+۲}=q\in\mathbb{Z}\Rightarrow x+۲\mid ۳x+۴ \\ \text{می‌دانیم } x+۱\mid x+۲ \xrightarrow{\times ۳} x+۲\mid ۳x+۶ \end{matrix}\right\} \xrightarrow{-} x+۲\mid ۲ \Rightarrow x+۲\in\{\text{شمارهای } ۲\} \Rightarrow x+۲\in\{-۲\text{ و }۱\text{ و }-۱\text{ و }۲\} \xrightarrow{-۲}$

$x\in\{-۴\text{ و }-۳\text{ و }-۱\text{ و }۰\}$

همانطور که مشخص می‌باشد برای x هیچ مقدار طبیعی وجود ندارد، یعنی هیچ نقطه با مختصات طبیعی روی نمودار تابع وجود ندارد.

۳۵ ۱ ۲ ۳ ۴ نکته: دستگاه معادلات $\begin{cases} ax+by=xc \\ a'x+by=c' \end{cases}$ با شرط $\frac{a}{a'}+\frac{b}{b}\neq\frac{c}{c'}$ فاقد جواب و با شرط $\frac{a}{a'}=\frac{b}{b}=\frac{c}{c'}$ بی‌شمار جواب دارد.

$\begin{cases} ax+۳y=۵ \\ ۲x+y=۷ \end{cases} \xrightarrow{\text{دستگاه جواب ندارد.}} \frac{a}{۲}=\frac{۳}{۱}\neq\frac{۵}{۷}\Rightarrow a=۶$

با جایگذاری $a=۶$ در معادله‌های دستگاه دوم:

$\begin{cases} ۲x-۶y=-۱۲ \\ -x+۳y=۶ \end{cases} \Rightarrow \frac{۲}{-۱}=\frac{-۶}{۳}=\frac{-۱۲}{۶}\Rightarrow$ دستگاه بی‌شمار جواب دارد.

پاسخ‌نامه کلیدی

۱	۳	۱۰	۲	۱۹	۳	۲۸	۱
۲	۴	۱۱	۱	۲۰	۱	۲۹	۲
۳	۳	۱۲	۳	۲۱	۲	۳۰	۲
۴	۳	۱۳	۱	۲۲	۴	۳۱	۴
۵	۴	۱۴	۲	۲۳	۱	۳۲	۴
۶	۱	۱۵	۲	۲۴	۱	۳۳	۲
۷	۴	۱۶	۱	۲۵	۲	۳۴	۴
۸	۱	۱۷	۳	۲۶	۳	۳۵	۴
۹	۲	۱۸	۲	۲۷	۳		