پاسخنامه تشریحی

۱ (۱) (۲) (۳) (۴) **۱** کافی است نمودار تابع درجه‌ی دوم داده شده را با نیمساز ناحیهٔ اول ($y = x$) تلاقی دهیم و معادلهٔ تلاقی باید ریشه‌ی مضاعف داشته باشد.

$$\begin{cases} y = 2x^2 + (m+1)x + m + 6 \\ y = x \end{cases} \xrightarrow{\text{تلاقی}} 2x^2 + (m+1)x + m + 6 = x \Rightarrow \boxed{2x^2 + mx + m + 6 = 0} : \text{معادلهٔ تلاقی}$$

$$\text{شرط ریشه‌ی مضاعف} : \Delta = b^2 - 4ac = m^2 - 4(2)(m+6) = m^2 - 8m - 48 = 0$$

$$\Rightarrow (m-12)(m+4) = 0 \Rightarrow m = 12, -4$$

حال باید بررسی کنیم به ازای کدام مقدار m، طول نقطهٔ تماس مثبت است (در ناحیهٔ اول x مثبت است).

$$m = 12 \ : \ 2x^2 + 12x + 18 = 0 \Rightarrow x^2 + 6x + 9 = 0 \Rightarrow (x+3)^2 = 0 \Rightarrow x = -3 \quad \text{غ ق ق}$$

$$m = -4 \ : \ 2x^2 - 4x + 2 = 0 \Rightarrow x^2 - 2x + 1 = 0 \Rightarrow (x-1)^2 = 0 \Rightarrow x = 1 \quad \text{ق ق}$$

۲ (۱) (۲) (۳) (۴) **۱**

روش اول: اگر t ریشهٔ معادلهٔ جدید و x ریشهٔ معادلهٔ قدیم باشد، داریم:

$$t = \frac{2}{x} \Rightarrow x = \frac{2}{t} \xrightarrow{\text{جایگذاری در معادله قدیم}} \frac{16}{t^2} - \frac{14}{t} + 3 = 0 \xrightarrow{\times t^2} 16 - 14t + 3t^2 = 0 \rightarrow 3t^2 - 14t + 16 = 0$$

$$\xrightarrow{\text{مقایسه با } 3x^2 + ax + 1 \circ = 0} a = -14 \ , \ b = 16$$

روش دوم: ابتدا معادلهٔ درجهٔ دومی مینویسیم که ریشه‌هایش معکوس ریشه‌های معادلهٔ درجه دوم اولیه باشد، سپس معادلهٔ درجه‌ی دومی می‌نویسیم که ریشه هایش دو برابر ریشه‌های معادلهٔ ثانویهٔ باشد پس جای a , c را عوض کرده و سپس b را در ۲ و c را در 2^2 ضرب کنیم:

$$4x^2 - 7x + 3 = 0 \xrightarrow{\text{معکوس کردن ریشه}} 3x^2 - 7x + 4 = 0 \xrightarrow{\text{دو برابر کردن}} 3x^2 - 14x + 16 = 0$$

این معادله را با $3x^2 + ax + b = 0$ مقایسه می‌کنیم و داریم:

$$a = -14 \ , \ b = 16$$

توجه کنید ریشه‌های معادله‌ی $cx^2 + bx + a = 0$ عکس ریشه‌های معادلهٔ $ax^2 + bx + c = 0$ است و ریشه‌های معادلهٔ $ax^2 + bkx + ck^2 = 0$، k برابر ریشه‌های معادله‌ی $ax^2 + bx + c = 0$ می‌باشند.

۳ (۱) (۲) (۳) (۴) **۳** معادلهٔ یک سهمی که مختصات رأس آن $S \begin{vmatrix} \alpha \\ \beta \end{vmatrix}$ است به‌صورت $y = a(x-\alpha)^2 + \beta$ است چون این سهمی از نقطهٔ $\begin{vmatrix} 0 \\ -1 \end{vmatrix}$ می‌گذرد پس داریم:

$$-1 = a(0+1)^2 - 3 \Rightarrow a = 2$$

بنابراین ضابطهٔ سهمی به‌صورت $y = 2(x+1)^2 - 3$ یا به‌صورت ساده‌تر یعنی $y = 2x^2 + 4x - 1$ است. صفرهای این تابع همان جواب‌های معادلهٔ $2x^2 + 4x - 1 = 0$ هستند، پس:

$$S = \alpha + \beta = -\frac{b}{a} = -\frac{4}{2} = -2 \ , \ P = \alpha \cdot \beta = \frac{c}{a} = -\frac{1}{2}$$

درنتیجه:

$$\Rightarrow \alpha^2 + \beta^2 = (\alpha+\beta)^2 - 2\alpha\beta = (-2)^2 - 2(\frac{-1}{2}) = 4 + 1 = 5$$

۴ (۱) (۲) (۳) (۴) **۲** می‌دانیم $\alpha + \beta = -\frac{b}{a} = 4$ و $\alpha \cdot \beta = \frac{c}{a} = -2$ است. α ریشهٔ معادله است، پس در معادله صدق می‌کند.

$$\alpha \xrightarrow{\text{صدق در معادله}} \alpha^2 - 4\alpha - 2 = 0 \Rightarrow \alpha^2 = 4\alpha + 2 \xrightarrow{\times \alpha} \alpha^3 = 4\alpha^2 + 2\alpha$$

$$\Rightarrow \sqrt{\alpha^3 + 4\beta^2 + 2\beta} = \sqrt{4\alpha^2 + 2\alpha + 4\beta^2 + 2\beta} = \sqrt{4(\alpha^2+\beta^2) + 2(\alpha+\beta)} = \sqrt{4((\alpha+\beta)^2 - 2\alpha\beta) + 2(\alpha+\beta)}$$

$$= \sqrt{4(16+4) + 2(4)} = \sqrt{80 + 8} = \sqrt{88} = 2\sqrt{22}$$

۵ (۱) (۲) (۳) (۴) **۲**

می‌دانیم: اگر α و β ریشه‌های معادلهٔ $ax^2 + bx + c = 0$ باشند:

$$S = \alpha + \beta = -\frac{b}{a} \ , \ P = \alpha \cdot \beta = \frac{c}{a}$$

$$(x-2)(x^2 + mx + m + 3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x^2 + mx + m + 3 = 0 \end{cases}$$

یکی از جواب‌ها $x = 2$ است. اگر جواب‌های معادله‌ی $x^2 + mx + m + 3 = 0$ را α و β در نظر بگیریم، با توجه به اینکه مجموع مجذورات جواب‌ها برابر ۱۳ است، بنابراین:

$$2^2 + \alpha^2 + \beta^2 = 13 \Rightarrow \alpha^2 + \beta^2 = 9 \Rightarrow (\alpha+\beta)^2 - 2\alpha\beta = 9 \qquad (*)$$

چون α و β جواب‌های معادله‌ی $x^2 + mx + m + 3 = 0$ هستند، بنابراین:

$$x^2 + mx + m + 3 = 0 \Rightarrow \begin{cases} \alpha + \beta = -m \\ \alpha \cdot \beta = m + 3 \end{cases} \xrightarrow{(*)} m^2 - 2m - 6 = 9 \Rightarrow m^2 - 2m - 15 = 0$$

$$\rightarrow \begin{cases} m=۵ \xrightarrow[\text{درجه دوم}]{\text{در معادله‌ی}} x^{۲}+۵x+۸=۰ \xrightarrow{\Delta<۰} \text{ریشه ندارد.} \\ m=-۳ \xrightarrow[\text{درجه دوم}]{\text{در معادله‌ی}} x^{۲}-۳x=۰ \end{cases}$$

پس تنها $m=-۳$ قابل قبول است.

۶ ۴ **۳** ۲ ۱ طول پایین‌ترین نقطهٔ سهمی به معادلهٔ $y=۲x^{۲}-۴x+b$ برابر است با $x=-\frac{-۴}{۲\times ۲}=۱$ و عرض این نقطه برابر است:

$$y=۲\times ۱^{۲}-۴\times ۱+b=b-۲$$

طول بالاترین نقطهٔ سهمی به معادلهٔ $y=-x^{۲}+ax+۳$ برابر است با:

$$x=-\frac{a}{۲(-۱)}=\frac{a}{۲}$$

پس $\frac{a}{۲}=۱ \Rightarrow a=۲$. عرض این نقطه برابر است با:

$$y=-۱+۲+۳=۴$$

بنابراین $b-۲=۴ \rightarrow b=۶$.

نقطهٔ برخورد سهمی $y=۲x^{۲}-۴x+۶$ با محور عرض‌ها نقطهٔ $(۰,۶)$ و نقطهٔ برخورد سهمی $y=-x^{۲}+۲x+۳$ با محور عرض‌ها نقطهٔ $(۰,۳)$ است. فاصلهٔ این دو نقطه برابر ۳ است.

۷ ۴ ۳ ۲ **۱** چون سهمی، محور طول‌ها را در $x=-۲$ و $x=۶$ قطع می‌کند پس معادلهٔ سهمی را می‌توان به‌صورت $y=a(x+۲)(x-۶)$ نشان داد و چون تابع از نقطهٔ $\begin{vmatrix} ۰ \\ ۳ \end{vmatrix}$ می‌گذرد این نقطه در تابع صدق می‌کند.

$$\begin{vmatrix} ۰ \\ ۳ \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{صدق}} ۳=a(۲)(-۶) \longrightarrow ۳=-۱۲a \longrightarrow a=-\frac{۱}{۴} \longrightarrow y=\frac{-۱}{۴}(x+۲)(x-۶)$$

طول رأس سهمی وسط دو ریشه است پس:

$$x_S=\frac{-۲+۶}{۲}=\frac{۴}{۲}=۲ \xrightarrow{\text{تابع}} y_S=\frac{-۱}{۴}(۴)(-۴)=۴$$

۸ ۴ **۳** ۲ ۱ فرض کنیم $x_۱$ و $x_۲$ ریشه‌های معادلهٔ $۸x^{۲}-mx-۸=۰$ و α و β ریشه‌های معادلهٔ $۲x^{۲}-x-۲=۰$ باشند.

$$x_۱=\alpha^{۳} \quad , \quad x_۲=\beta^{۳} \qquad S=\alpha+\beta=-\frac{b}{a}=\frac{۱}{۲} \quad , \quad P=\alpha\beta=\frac{c}{a}=-۱$$

$$x_۱+x_۲=\alpha^{۳}+\beta^{۳}=(\alpha+\beta)^{۳}-۳\alpha\beta(\alpha+\beta)=S^{۳}-۳PS=\frac{۱}{۸}+\frac{۳}{۲}=\frac{۱۳}{۸}$$

$$x_۱x_۲=\alpha^{۳}\beta^{۳}=(\alpha\beta)^{۳}=-۱$$

$$x^{۲}-\frac{۱۳}{۸}x-۱=۰ \xrightarrow{\times ۸} ۸x^{۲}-۱۳x-۸=۰$$

با مقایسهٔ این معادله و معادلهٔ صورت سؤال، مشخص می‌شود که $m=۱۳$ است.

۹ ۴ **۳** ۲ ۱

چون α و β دو عدد متمایزند که در رابطهٔ $۲\alpha^{۲}=۴\alpha-۱$ و $۲\beta^{۲}=۴\beta-۱$ صدق می‌کنند، بنابراین ریشه‌های معادلهٔ $۲x^{۲}-۴x+۱=۰$ هستند. یعنی داریم:

$$S=\alpha+\beta=-\frac{b}{a}=۲\ ,\ P=\alpha\beta=\frac{c}{a}=\frac{۱}{۲}$$

از طرفی خواهیم داشت:

$$S=\frac{\alpha^{۲}}{\beta}+\frac{\beta^{۲}}{\alpha}=\frac{\alpha^{۳}+\beta^{۳}}{\alpha\beta}=\frac{(\alpha+\beta)^{۳}-۳\alpha\beta(\alpha+\beta)}{\alpha\beta}=\frac{۸-۳\times ۲\times \frac{۱}{۲}}{\frac{۱}{۲}}=\frac{۵}{\frac{۱}{۲}}=۱۰$$

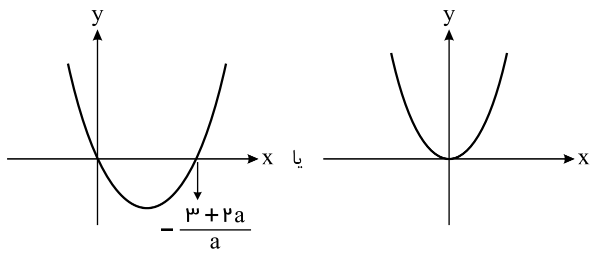
$$P=\frac{\alpha^{۲}}{\beta}\times\frac{\beta^{۲}}{\alpha}=\alpha\beta=\frac{۱}{۲}$$

معادلهٔ مطلوب : $x^{۲}-۱۰x+\frac{۱}{۲}=۰ \Rightarrow ۲x^{۲}-۲۰x+۱=۰$

۱۰ ۴ ۳ ۲ **۱** سهمی $y=ax^{۲}+(۳+۲a)x$ مبدأ گذر است، زیرا:

$$y=۰ \Rightarrow ax^{۲}+(۳+۲a)x=۰ \Rightarrow x(ax+۳+۲a)=۰ \Rightarrow x=۰, ax+۳+۲a=۰ \Rightarrow x=-\frac{۳+۲a}{a}$$

برای آن که سهمی از ناحیهٔ سوم عبور نکند، باید رو به بالا بوده و ریشهٔ معادله $y=۰$ یعنی $x=-\dfrac{۳+۲a}{a}$ بزرگ‌تر یا مساوی صفر باشد.



$$\text{سهمی رو به بالا} \Rightarrow a>۰ \Rightarrow -\frac{۳+۲a}{a}\geq ۰ \Rightarrow \frac{۳+۲a}{a}\leq ۰ \xrightarrow{a>۰} ۳+۲a\leq ۰ \Rightarrow ۲a\leq -۳ \Rightarrow a\leq -\frac{۳}{۲}$$

چون اشتراک $a>۰$ و $a\leq -\dfrac{۳}{۲}$ سهمی است، پس هیچ مقداری برای a وجود ندارد.

۱۱ ۴ ۳ **۲** ۱

$A:$ پیشامد آنکه عدد انتخابی مضارب ۶ باشد $B:$ پیشامد آنکه عدد انتخابی مضارب ۷ باشد

$$\text{جواب}=P(A\cup B)-P(A\cap B)=P(A)+P(B)-۲P(A\cap B)$$

$$=\frac{\left(\left[\frac{۳۰۰}{۶}\right]-\left[\frac{۵۰}{۶}\right]\right)+\left(\left[\frac{۳۰۰}{۷}\right]-\left[\frac{۵۰}{۷}\right]\right)-۲\left(\left[\frac{۳۰۰}{۴۲}\right]-\left[\frac{۵۰}{۴۲}\right]\right)}{۲۵۰}$$

$$=\frac{۵۰-۸+۴۲-۷-۱۴+۲}{۲۵۰}=\frac{۲۶}{۱۰۰}$$

۱۲ ۴ **۳** ۲ ۱ داریم:

$$A=\begin{bmatrix}۱+۱ & ۲-۲ & ۲-۳\\ ۲+۲ & ۲+۲ & ۴-۳\\ ۳+۲ & ۳+۴ & ۳+۳\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۲ & ۰ & -۱\\ ۴ & ۴ & ۱\\ ۵ & ۷ & ۶\end{bmatrix}$$

$\text{مجموع درایه‌ها}=۲۸$

۱۳ ۴ ۳ ۲ **۱**

$$S=\{a,b,c,d,e\}\Rightarrow P(S)=۱ \Rightarrow P(a)+P(b)+P(c)+P(d)+P(e)=۱ \quad (۱)$$

$$P(A)+P(B)+P(C)=\frac{۱}{۳}+\frac{۲}{۵}+\frac{۳}{۵}=\frac{۴}{۳}$$

$$\overbrace{P(a)+P(b)}^{P(A)}+\overbrace{P(a)+P(c)}^{P(B)}+\overbrace{P(a)+P(d)+P(e)}^{P(A)}=\frac{۴}{۳}\Rightarrow ۳P(a)+P(b)+P(c)+P(d)+P(e)=\frac{۴}{۳}$$

$$\Rightarrow \underbrace{P(a)+P(b)+P(c)+P(d)+P(e)}_{۱}+۲P(a)=\frac{۴}{۳}\Rightarrow ۲P(a)=\frac{۴}{۳}-۱\Rightarrow P(a)=\frac{۱}{۶}$$

$$P(\{d,e\})=P(\{a,d,e\})-P(a)=\frac{۳}{۵}-\frac{۱}{۶}=\frac{۱۳}{۳۰}\Rightarrow P(A'\cap B')=P(A\cup B)'=P(\{d,e\})=\frac{۱۳}{۳۰}$$

۱۴ ۴ ۳ **۲** ۱ نکته: اگر A ماتریس مربعی و $A^۲=A$ آنگاه A را ماتریس خود توان نامیم در این هر حالت $A^n=A$ و $n\in\mathbb{N}$, $\forall n\geq ۲$.

نکته: اگر ضرب در ماتریس A و B خاصیت جابه‌جایی داشته باشد اتحادهای جبری در مورد آنها برقرار است.

نکته: اگر A و B دو ماتریس مربعی هم مرتبه و $m,n\in\mathbb{Z}$ و داشته باشیم $mA+nB=I$ آنگاه ضرب دو ماتریس A و B خاصیت جابه‌جایی دارند.

$$A^۲=A \xrightarrow{\text{خود توان است } A} A^n=A \qquad n\in\mathbb{N}\ ,\ n\geq ۲$$

$B=۳A-I\Rightarrow ۳A-B=I\Rightarrow$ ضرب ماتریس‌های A و B خاصیت جابه‌جایی دارند.

$$A^۳+B^۳-(A^۲-I)=A+(۳A-I)^۳-(A-I)=A+(۲۷A^۳-۲۷A^۲I+۹AI^۲-I)-(A-I)$$

$$=A+(۲۷A-۲۷A+۹A-I)-(A-I)=A+(۹A-I)-(A-I)=۹A$$

۱۵ **۴** ۳ ۲ ۱ ماتریس AB را تشکیل می‌دهیم:

$$AB=\begin{bmatrix}-۲ & n & -۱\\ ۲ & ۱ & -m\end{bmatrix}\begin{bmatrix}m & -۲\\ ۱ & m\\ ۲n & ۳\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-۲m-n & ۱+mn\\ ۲m-۲mn+۱ & -۲m-۴\end{bmatrix}\rightarrow\begin{cases}۱+mn=۰\rightarrow mn=-۱\\ ۲m-۲mn+۱=۰\\ \xrightarrow{mn=-۱} ۲m+۲+۱=۰\rightarrow m=-\frac{۳}{۲}\end{cases}\rightarrow n=\frac{۲}{۳}$$

$$\rightarrow m-n=-\frac{۳}{۲}-\frac{۲}{۳}=-\frac{۱۳}{۶}$$

۱۶) ۱ ۲ ۳ **۴** ضرب ماتریسی را از سمت چپ انجام می‌دهیم:

$$[x\ \ ۱\ \ ۰]_{۱\times ۳}\begin{bmatrix}۱ & ۱ & ۰\\ -۱ & ۱ & -۱\\ ۱ & ۲ & ۲\end{bmatrix}=[x-۱\ \ \ x+۱\ \ \ -۱]$$

$$[x-۱\ \ \ x+۱\ \ \ -۱]\begin{bmatrix}-x\\ ۱\\ x\end{bmatrix}=۰\rightarrow -x^۲+x+x+۱-x=۰\Rightarrow -x^۲+x+۱=۰\xrightarrow{\alpha \text{ و } \beta \text{ ریشه‌ها}}\Rightarrow\begin{cases}\alpha+\beta=\frac{-b}{a}=۱\\ \alpha^۲=\alpha+۱,\beta^۲=\beta+۱\end{cases}$$

$$\Rightarrow \alpha^۲+\beta^۲=(\alpha+\beta)+۲=۳$$

۱۷) ۱ ۲ ۳ **۴**

به‌ترتیب تعداد اعضای فضای نمونه‌ای و پیشامد خواسته را محاسبه می‌کنیم:

$$n(S)=\binom{۶}{۵}\times ۵!$$

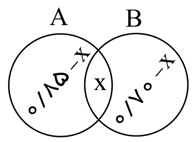
ابتدا ۵ خانه از ۶ خانه را انتخاب می‌کنیم سپس ۵ عدد موردنظر به‌حالت !۵ با هم جابه‌جا می‌شوند.

۶ خانه را در نظر می‌گیریم ۵ رقم به دو حالت می‌توانند به‌صورت متوالی در خانه‌ها قرار بگیرند. (یعنی خانهٔ ۱ تا ۵ یا خانهٔ ۲ تا ۶)

۲, ۴ با هم !۲ جابه‌جا می‌شوند سپس ۲, ۴ را یک رقم گرفته با ۳ رقم دیگر !۴ حالت جابه‌جا می‌شوند. در نتیجه: $n(A)=۲\times ۲!\times ۴!$

$$P(A)=\frac{۲\times ۲!\times ۴!}{\binom{۶}{۵}\times ۵!}=\frac{۲}{۱۵}$$

۱۸) ۱ ۲ **۳** ۴ فرض می‌کنیم A دانش‌آموزانی باشند که در درس ریاضی و B دانش‌آموزانی باشند که در درس فیزیک مردود شده‌اند. توجه نمایید که $P(A\cup B)=۱$ می‌باشد. همچنین فرض می‌کنیم x احتمال آن است که دانش‌آموزی در هردو درس مردود شده باشد.



$$P(A\cup B)=۱$$
$$\Rightarrow ۰٫۸۵-x+x+۰٫۷۰-x=۱\Rightarrow x=۰٫۵۵$$

درصد دانش‌آموزانی که فقط در یک درس مردود شده‌اند$=(۰٫۸۵-x)+(۰٫۷۰-x)$

$$\xlongequal{x=۰٫۵۵}۰٫۳۰+۰٫۱۵=۰٫۴۵$$

۱۹) **۱** ۲ ۳ ۴

از اتحاد مربع دو جمله‌ای استفاده می‌کنیم (البته برای ماتریس):

$$(A-B)^۲=\begin{bmatrix}-۱ & ۱\\ ۱ & ۱\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-۱ & ۱\\ ۱ & ۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۲ & ۰\\ ۰ & ۲\end{bmatrix}$$

داریم: $(A-B)^۲=(A-B)(A-B)=A^۲-AB-BA+B^۲=A^۲+B^۲-(AB+BA)=\begin{bmatrix}۱ & ۴\\ ۲ & ۹\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}۱ & ۲\\ -۲ & ۱\end{bmatrix}-(AB+BA)$

$$\rightarrow\begin{bmatrix}۲ & ۰\\ ۰ & ۲\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۲ & ۶\\ ۰ & ۱۰\end{bmatrix}-(AB+BA)\rightarrow AB+BA=\begin{bmatrix}۲ & ۶\\ ۰ & ۱۰\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}۲ & ۰\\ ۰ & ۲\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۰ & ۶\\ ۰ & ۸\end{bmatrix}$$

۲۰) **۱** ۲ ۳ ۴

$$\left.\begin{array}{l}P(C)=\frac{۳}{۸}\Rightarrow P(a)+P(c)+P(f)=\frac{۳}{۸}\\ P(B)=\frac{۱}{۴}\Rightarrow P(a)+P(c)=\frac{۱}{۴}\end{array}\right\}\Rightarrow P(f)=\frac{۳}{۸}-\frac{۱}{۴}=\frac{۱}{۸}$$

$$P(S)=۱\Rightarrow \underbrace{P(a)+P(b)+P(c)}_{P(A)=\frac{۵}{۱۲}}+P(d)+P(e)+\underbrace{P(f)}_{\frac{۱}{۸}}=۱$$

$$\Rightarrow \frac{۵}{۱۲}+P(d)+P(e)+\frac{۱}{۸}=۱\Rightarrow P(d)+P(e)=۱-\frac{۵}{۱۲}-\frac{۱}{۸}=\frac{۱۱}{۲۴}$$

$$\Rightarrow P(D)=\frac{۱۱}{۲۴}$$

۲۱) ۱ ۲ ۳ **۴** شیب‌خط مماس در لحظه‌های $t=۶s$ و $t=۱۰s$ که سرعت متحرک در این لحظه‌ها است را حساب می‌کنیم.

$$\left.\begin{array}{l}t=۶s\Rightarrow v_۶=\frac{۹}{۶-۳}=۳m/s\\ t=۱۰s\Rightarrow v_{۱۰}=\frac{۱۴-۷}{۱۰}=۰٫۷m/s\end{array}\right\}\Rightarrow \frac{v_۶}{v_{۱۰}}=\frac{۳}{۰٫۷}=\frac{۳۰}{۷}m/s$$

۲۲ ۴ ۳ ۲ **۱**

طبق رابطهٔ تندی متوسط:

$$\text{تندی متوسط} = \frac{\text{مسافت}}{\text{مدت زمان}} = \bar{S} = \frac{d}{\Delta t} \Rightarrow d = \bar{S}\cdot\Delta t$$

$\Delta t = 1 \times 60 = 60$ ثانیه

$d = 4 \times 60 = 240m$

۲۳ ۴ ۳ ۲ **۱** برای تعیین مدت زمان حرکت در هر مرحله از رابطهٔ $\Delta t = \frac{\Delta x}{v}$ استفاده می‌کنیم.

$$v_{av} = \frac{d - \frac{d}{3}}{t_1 + t_2} = \frac{2\frac{d}{3}}{\frac{d}{6} + \frac{\frac{d}{3}}{2}} = \frac{2\frac{d}{3}}{\frac{d}{6} + \frac{d}{6}} = \frac{2\frac{d}{3}}{\frac{d}{3}} = 2m/s$$

۲۴ ۴ ۳ ۲ **۱** چون نمودار به صورت خط راست است، بنابراین حرکت متحرک با سرعت ثابت است. ابتدا سرعت متحرک را از روی شیب نمودار تعیین می‌کنیم:

$$v = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{10 - (-20)}{4 - 0} = \frac{30}{4} = 7.5\, m/s$$

$$x = vt + x_0 \xrightarrow[v=7.5\, m/s, t=10s]{x_0 = -20m} x = 7.5 \times 10 - 20 = 55m$$

$$\vec{d} = x\vec{i} = 55\vec{i}\,(m)$$

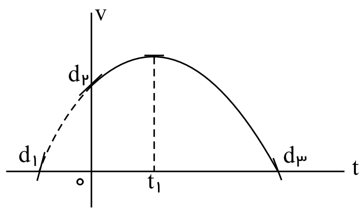
۲۵ **۴** ۳ ۲ ۱ در بازهٔ زمانی $10s < t < 15s$ نمودار سرعت – زمان خط راست است و شیب ثابتی دارد. پس در تمام لحظه‌های این بازهٔ زمانی شتاب ثابت و برابر شیب این خط است که نقاط ابتدا و انتهای آن به ترتیب $(10s\,,\,30m/s)$ و $(15s\,,\,0\,m/s)$ هستند. بنابراین:

$$a(13s) = \frac{0\,m/s - 30\,m/s}{15s - 10s} = \frac{-30\,m/s}{5s} = -6\,m/s^2$$

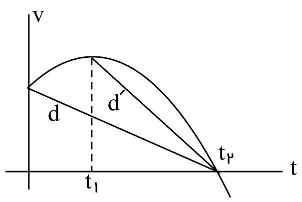
۲۶ **۴** ۳ ۲ ۱ رابطهٔ مکان – زمان یک متحرک باید شرایط یک تابع را دارا باشد و در نتیجه نمودار مکان – زمان آن نیز باید شکل نمودار یک تابع ریاضی باشد، زیرا در غیر این صورت حداقل در یک زمان، متحرک در دو یا چند مکان قرار دارد و در واقعیت این اتفاق هرگز رخ نمی‌دهد.

۲۷ **۴** ۳ ۲ ۱ • در بازهٔ صفر تا : اولاً تندی پیوسته مثبت است یعنی متحرک تغییر جهت نمی‌دهد. پس تندی و سرعت هم‌مفهوم هستند. در بازهٔ صفر تا t_1 چون مقدار v افزایش یافته بنابراین تندی هم افزایش می‌یابد (پس گزینهٔ ۱ نادرست است).

• شیب خط مماس بر نمودار $(v-t)$ برابر شتاب متحرک است، بنابراین شتاب در $t = 0$ و $t = t_2$ چون شیب خطوط مماس برابر نیست، نمی‌تواند برابر باشند: [شیب d_1 با d_3 هم‌اندازه هستند ولی شیب d_3 با d_2 نمی‌تواند برابر باشد.] (پس گزینهٔ ۲ هم نادرست است.)



• مشابه نکتهٔ قبل، کافی است شیب خطوط مماس بر نمودار $(v-t)$ را در نظر بگیریم. از صفر تا t_1، شیب خطوط مماس، مثبت و از t_1 تا t_2، شیب خطوط مماس منفی است. (پس گزینهٔ ۳ هم نادرست است.)



• برای مقایسهٔ شتاب متوسط بین بازه‌های زمانی مختلف کافی است شیب خطوط واصل بین آن‌ها را با هم مقایسه نماییم.

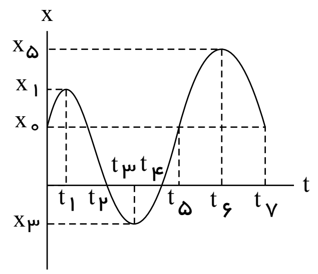
بزرگی شیب خط‌های واصل d و d' را با هم مقایسه کنیم. هرچه خطوط به خط عمود فرضی بر محور t نزدیک و متمایل‌تر باشند، مقدار شیب آن‌ها بیشتر است. یعنی بزرگی شیب d' از بزرگی شیب d بیشتر است. بنابراین گزینهٔ ۴ درست است.

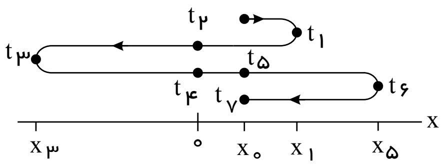
۲۸ ۴ ۳ **۲** ۱ می‌توان با ردّ گزینه به جواب رسید. اولاً مکان اول آخر متحرک یکسان است (ردّ گزینه‌های ۳ و ۴)

و چون متحرک دو بار از مبدأ مکان عبور کرده گزینهٔ ۲ درست است.

اما برای توضیح بیشتر با نام‌گذاری زمان‌ها شکل حرکت را رسم می‌کنیم.

حسابی ۱۳ مرداد





۲۹ ۴ ۳ ۲ ۱ سرعت متحرک در هر لحظه برابر شیب خط مماس بر منحنی $x - t$ در آن لحظه است. در نمودار $x - t$ متحرک، خط مماس بر منحنی در لحظهٔ $t = ۸\,\text{min}$ از نقاط $(۲\,\text{min}\,,\,۰\,m)$ و $(۸\,\text{min}\,,\,۱۲m)$ عبور می‌کند. بنابراین:

$$\text{سرعت در لحظهٔ } ۸\,\text{min} = \text{شیب خط مماس} = \frac{۱۲m - ۰m}{۸\,\text{min} - ۲\,\text{min}} = \frac{۱۲m}{۶\,\text{min}} = \frac{۱۲m}{۳۶۰s} = \frac{۱}{۳۰}\,\frac{m}{s}$$

پس پاسخ گزینهٔ ۱ است.

۳۰ ۴ ۳ ۲ ۱ مسافت طی شده برابر با مجموع اندازهٔ جابه‌جایی‌های متحرک در بازه‌های زمانی است که جهت حرکت متحرک تغییر نمی‌کند.

$$\ell = ۱۶ + (۲۴ - (-۱۶)) + ۲۴ = ۸۰m$$

۳۱ ۴ ۳ ۲ ۱

$$N - Z = ۱۳$$
$$N + Z = ۶۹$$
$$\Rightarrow ۶۹ = Z + Z + ۱۳ \Rightarrow ۶۹ - ۱۳ = ۲Z \Rightarrow Z = e = ۲۸$$
$${}_{۲۸}M = ۱s^۲۲s^۲۲p^۶۳s^۲۳p^۶۳d^۸۴s^۲ \Rightarrow {}_{۲۸}M^{۲+} : [Ar]۳d^۸$$

۳۲ ۴ ۳ ۲ ۱ گسترهٔ رنگی حاصل از تجزیهٔ نور خورشید توسط قطرات باران، شامل بی‌نهایت طول موج از رنگ‌های گوناگون است.

۳۳ ۴ ۳ ۲ ۱ همهٔ عبارت‌های بیان‌شده درست هستند.

۳۴ ۴ ۳ ۲ ۱

	${}^{۸۴}X$	${}^{۸۶}X$	${}^{۸۸}X$
فراوانی	a	b	c
فراوانی	a	$۲a$	$۴a$

$$b = ۲a \qquad c = ۲b$$

$$\overline{M} = \frac{(۸۴a) + (۸۶ \times ۲a) + (۸۸ \times ۴a)}{۷a} = ۸۶{,}۸$$

۳۵ ۴ ۳ ۲ ۱ تعداد اتم‌ها در M گرم گاز اکسیژن، بیشتر از سایر گزینه‌هاست.

$$\text{تعداد مول } n = \frac{\text{جرم}}{\text{جرم مولی}} \begin{cases} S \text{ تعداد مول} = \dfrac{M}{۳۲} \Rightarrow \text{تعداد اتم‌ها} = \dfrac{M}{۳۲}N_A \\ Fe \text{ تعداد مول} = \dfrac{۲M}{۵۶} = \dfrac{M}{۲۸} \Rightarrow \text{تعداد اتم‌ها} = \dfrac{M}{۲۸}N_A \\ O_۲ \text{ تعداد مول} = \dfrac{M}{۳۲} \Rightarrow \text{تعداد اتم‌ها} = \dfrac{M}{۳۲} \times ۲\ N_A = \dfrac{M}{۱۶}N_A \\ Ca \text{ تعداد مول} = \dfrac{۲M}{۴۰} = \dfrac{M}{۲۰} \Rightarrow \text{تعداد اتم‌ها} = \dfrac{M}{۲۰}N_A \end{cases}$$

۳۶ ۴ ۳ ۲ ۱ با توجه به آرایش الکترونی زیر، تعداد الکترون‌ها با $l = ۱$ (زیرلایه‌های P) برابر ۱۵ و شمار الکترون‌های لایهٔ ظرفیت برابر ۵ است، درنتیجه نسبت خواسته شده برابر ۳ خواهد بود.

$${}_{۳۳}As : ۱s^۲۲s^۲۲p^۶۳s^۲۳p^۶۳d^{۱۰}۴s^۲۴p^۳$$

۳۷ ۴ ۳ ۲ ۱ عنصر ${}_{۴۲}A$، دارای آرایش الکترونی $[Kr]۴d^۵۵s^۱$ است که در گروه ۶ و دوره ۵ قرار دارد. از طرفی عنصر X در گروه ۱۱ قرار دارد و هم‌دوره عنصر A است، بنابراین عدد اتمی عنصر X، ۵ واحد بیشتر از A و برابر ۴۷ است.

۳۸ ۴ ۳ ۲ ۱ عبارت‌های اول، دوم و چهارم درست هستند.

بررسی عبارت سوم: انتقال الکترون از حالت پایه به حالت برانگیخته با جذب انرژی همراه است که باعث ناپایداری اتم می‌شود.

۳۹ ۴ ۳ ۲ ۱ بررسی همهٔ گزینه‌ها:

گزینهٔ «۱»: از رادیوایزوتوپ گلوکز نشان‌دار برای تشخیص (نه درمان!) توده‌های سرطانی استفاده می‌شود.

گزینهٔ «۲»: فقط از رادیوایزوتوپ اورانیوم - ۲۳۵، اغلب به‌عنوان سوخت در راکتورهای اتمی استفاده می‌شود.

گزینهٔ «۳»: از آنجا که نیم‌عمر ${}^{۹۹}_{۴۳}Tc$ کم است، نمی‌توان مقادیر زیادی از این عنصر را تهیه و برای مدت طولانی نگهداری کرد و بسته به نیاز، آن را با یک مولد هسته‌ای تولید و سپس مصرف می‌کنند.

گزینهٔ «۴»: اغلب (نه همهٔ!) هسته‌هایی که نسبت شمار نوترون‌ها به پروتون‌های آنها برابر یا بیش از ۱٫۵ باشد، ناپایدارند و با گذشت زمان متلاشی می‌شوند.

۴۰ ۴ ۳ ۲ ۱ با توجه به تطابق زیر، فلزهای F و D در نمونهٔ مخلوط فلزی وجود دارند.