پاسخنامه تشریحی

۱ - گزینه ۲ دو حالت وجود دارد.

الف) مخرج عبارتی درجه اول باشد یعنی $m = ۱$ **که داریم:**

$$f(x) = \frac{۱ - x}{۳x + ۱} \Rightarrow ۳x + ۱ = ۰ \Rightarrow x = -\frac{۱}{۳} \Rightarrow D_f = \mathbb{R} - \left\{-\frac{۱}{۳}\right\}$$

ب) مخرج ریشه مضاعف داشته باشد یعنی:

$$(m-۱)x^۲ + ۳x + ۱ = ۰ \Rightarrow \Delta = ۰ \Rightarrow ۹ - ۴(m-۱) = ۰ \Rightarrow ۹ - ۴m + ۴ = ۰ \Rightarrow m = \frac{۱۳}{۴}$$

بنابراین برای m **دو مقدار ۱ و** $\frac{۱۳}{۴}$ **وجود دارد.**

۲ - گزینه ۴

$$f = \{(۲, a), (a, a^۲ - ۲), (a, ۳a - ۴), (a^۳ - ۶, b)\}$$

$$\text{شرط تابع بودن} \Rightarrow a^۲ - ۲ = ۳a - ۴ \Rightarrow a^۲ - ۳a + ۲ = ۰ \Rightarrow (a-۱)(a-۲) = ۰ \Rightarrow a = ۱ \ , \ a = ۲$$

$$a = ۱ : f = \{(۲, ۱), (۱, -۱), (-۵, b)\} \Rightarrow b \in \mathbb{R} \Rightarrow b^۲ \geq ۰ \Rightarrow -b^۲ \leq ۰$$

$$a = ۲ : f = \{(۲, ۲), (۲, ۲), (۲, b)\} \Rightarrow b = ۲ \Rightarrow a^۲ - b^۲ = ۴ - ۴ = ۰$$

باتوجه به رابطهٔ (۱) **گزینهٔ ۴ صحیح است.**

۳ - گزینه ۴

می‌دانیم: $\boxed{\log_k^a - \log_k^b = \log_k^{\frac{a}{b}} \ , \ \log_{k^m}^{a^n} = \frac{n}{m}\log_k^a \ , \ \log_b^N = x \Rightarrow N = b^x}$

$$\log_۳^{۲x^۲+۱} - \log_۳^{x+۲} = ۱ \rightarrow \log_۳^{\frac{۲x^۲+۱}{x+۲}} = ۱ \xrightarrow{\text{تعریف}} \frac{۲x^۲+۱}{x+۲} = ۳^۱$$

$$\rightarrow ۲x^۲ + ۱ = ۳x + ۶ \rightarrow ۲x^۲ - ۳x - ۵ = ۰ \xrightarrow{a+c=b} \begin{cases} x = -۱ \\ x = -\frac{c}{a} = \frac{۵}{۲} \end{cases}$$

هر دو جواب به‌دست‌آمده، قابل‌قبول هستند، ولی برای محاسبهٔ $\log_۸^{۲x-۱}$ **فقط به‌جای** x**، می‌توانیم مقدار** $x = \frac{۵}{۲}$ **را جایگزین کنیم، زیرا** $x = -۱$ **عددی که می‌خواهیم از آن لگاریتم بگیریم را منفی می‌کند.**

$$\log_۸^{۲x-۱} \xlongequal{x=\frac{۵}{۲}} \log_۸^{۲(\frac{۵}{۲})-۱} = \log_۸^۴ = \log_{۲^۳}^{۲^۲} = \frac{۲}{۳}$$

۴ - گزینه ۴ باید دو منحنی داده‌شده را با هم تلاقی دهیم و نقطهٔ تلاقی را به دست آوریم.

$$۲^x = (\sqrt{۲})^{x+۱} + ۴ \rightarrow ۲^x = (۲^{\frac{۱}{۲}})^{x+۱} + ۴ \rightarrow ۲^x = (۲^{x+۱})^{\frac{۱}{۲}} + ۴$$

$$\rightarrow ۲^x = (۲^x \times ۲)^{\frac{۱}{۲}} + ۴ \xrightarrow{۲^x = A} A = \sqrt{۲A} + ۴ \rightarrow A - ۴ = \sqrt{۲A}$$

$$\xrightarrow{\text{توان ۲}} A^۲ - ۸A + ۱۶ = ۲A \rightarrow A^۲ - ۱۰A + ۱۶ = ۰ \rightarrow (A-۸)(A-۲) = ۰$$

$$\rightarrow \begin{cases} A = ۸ \rightarrow ۲^x = ۸ \rightarrow x = ۳ \xrightarrow{y=۲^x} y = ۸ \\ A = ۲ \quad \text{غ ق ق} \quad \text{(در معادلهٔ رادیکالی صدق نمی‌کند)} \end{cases}$$

حال باید فاصلهٔ نقطهٔ $A\left|\begin{matrix}۰\\۴\end{matrix}\right.$ **را از** $B\left|\begin{matrix}۳\\۸\end{matrix}\right.$ **حساب کنیم.**

$$AB = \sqrt{(۰-۳)^۲ + (۴-۸)^۲} = \sqrt{۹ + ۱۶} = \sqrt{۲۵} = ۵$$

۵ - گزینه ۳ ابتدا ضابطهٔ تابع f **را تعیین می‌کنیم، برای این کار معادلهٔ خط گذرنده از نقاط** $(۰, ۴)$ **و** $(۲, ۰)$ **و همچنین خط گذرنده از نقاط** $(۰, ۴)$ **و** $(-۴, ۰)$ **را به‌دست می‌آوریم.**

$$(۰, ۴), (۲, ۰) \Rightarrow \frac{y-۴}{x} = \frac{۴}{-۲} = -۲ \rightarrow y = -۲x + ۴$$

$$f(x) = \begin{cases} x + ۴ & x < ۰ \\ -۲x + ۴ & x \geq ۰ \end{cases} \ , \ g(x) = \sqrt{۲ - |f(x)|} \Rightarrow ۲ - |f(x)| \geq ۰ \Rightarrow |f(x)| \leq ۲$$

$$\Rightarrow -۲ \leq f(x) \leq ۲$$

$$(۰, ۴), (-۴, ۰) \Rightarrow \frac{y-۴}{x} = \frac{۴}{۴} = ۱ \rightarrow y = x + ۴$$

$$x < ۰ \Rightarrow -۲ \leq x + ۴ \leq ۲ \Rightarrow -۲ - ۴ \leq x \leq ۲ - ۴ \Rightarrow -۶ \leq x \leq -۲ \xrightarrow{x<۰} -۶ \leq x \leq -۲ \quad (۱)$$

$x \geq ۰ \Rightarrow -۲ \leq -۲x + ۴ \leq ۲ \Rightarrow -۶ \leq -۲x \leq -۲ \xrightarrow{\div(-۲)} ۳ \geq x \geq ۱ \xrightarrow{x \geq ۰} ۱ \leq x \leq ۳ \quad (۲)$

جواب نهایی : $(۱) \cup (۲) \Rightarrow [-۶, -۲] \cup [۱, ۳]$

۶ - گزینه ۳

می‌دانیم: $\boxed{\log_k^a + \log_k^b = \log_k^{ab} \ , \ \log_{k^m}^{a^n} = \frac{n}{m}\log_k^a}$

$\log_۲^x = ۱ + \log_۲^{y+۱} \Rightarrow \log_۲^x = \log_۲^۲ + \log_۲^{y+۱} \Rightarrow \log_۲^x = \log_۲^{۲y+۲} \Rightarrow x = ۲y + ۲$

$x^۲ - y^۲ = ۳۲ \Rightarrow (۲y+۲)^۲ - y^۲ = ۳۲ \Rightarrow (۴y^۲ + ۸y + ۴) - y^۲ = ۳۲ \Rightarrow ۳y^۲ + ۸y - ۲۸ = ۰$

$\Rightarrow y = \frac{-۸ \pm \sqrt{۶۴ + ۳۳۶}}{۶} \Rightarrow \begin{cases} y = ۲ \Rightarrow x = ۶ \\ y = -\frac{۱۴}{۳} \Rightarrow \text{چون جلوی لگاریتم را منفی می کند، غیرقابل‌قبول است} \end{cases}$

$\log_۴^{x+y} \underset{y=۲}{\overset{x=۶}{=\!=}} \log_۴^{۶+۲} = \log_{۲^۲}^{۲^۳} = \frac{۳}{۲}$

۷ - گزینه ۱

$f(x) = \frac{۲x+۱}{\sqrt{x+۴}} \longrightarrow D_f : \ x + ۴ > ۰ \longrightarrow x > -۴$

$g(x) = \frac{x^۲ - ۲۵}{\sqrt{x+۴}} \longrightarrow D_g : \ x + ۴ > ۰ \longrightarrow x > -۴$

$D_{\frac{f}{g}} = D_f \cap D_g - \{x | g(x) = ۰\} = (x > -۴) \cap (x > -۴) - \{x | \frac{x^۲ - ۲۵}{\sqrt{x+۴}} = ۰\}$

$= x > -۴ - \{x = \pm ۵\} = (-۴, +\infty) - \{۵\}$

۸ - گزینه ۱

$۲^x - ۱۲۵ = \frac{۳۸۴}{۲^x} \xrightarrow{\times ۲^x} ۲^{۲x} - ۱۲۵ \times ۲^x = ۳۸۴ \rightarrow (۲^x)^۲ - ۱۲۵(۲^x) - ۳۸۴ = ۰$

$\xrightarrow{۲^x = A} A^۲ - ۱۲۵A - ۳۸۴ = ۰ \rightarrow (A - ۱۲۸)(A + ۳) = ۰$

$\rightarrow \begin{cases} A = ۱۲۸ \rightarrow ۲^x = ۱۲۸ \rightarrow x = ۷ \rightarrow x^۲ + ۲x = ۴۹ + ۱۴ = ۶۳ \\ A = -۳ \rightarrow ۲^x = -۳ \rightarrow \text{ امکان ندارد.} \end{cases}$

۹ - گزینه ۲

می‌دانیم: $\boxed{\log_a^A \geq m \xrightarrow{۰<a<۱} A \leq a^m}$

$\left.\begin{array}{l} \log_{۰/۵}^{\frac{۲x+۳}{۴}} \geq -۱ \ \rightarrow \ \frac{۲x+۳}{۴} \leq (۰/۵)^{-۱} \Rightarrow \frac{۲x+۳}{۴} \leq ۲ \Rightarrow x \leq \frac{۵}{۲} \quad (I) \\ \text{از طرفی :} \ \frac{۲x+۳}{۴} > ۰ \Rightarrow x > \frac{-۳}{۲} \quad (II) \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{اشتراک } II,I} \frac{-۳}{۲} < x \leq \frac{۵}{۲}$

۱۰ - گزینه ۲ دامنهٔ تابع از حل نامعادلهٔ زیر به دست می‌آید:

$(x-b)^۲(x-b-۱)^۲ > ۰ \Rightarrow D_g = \mathbb{R} - \{b, b+۱\}$

پس $D_f = \mathbb{R} - \{b, b+۱\}$ است، این یعنی b و $b+۱$ ریشه‌های مخرج تابع f است. داریم:

$-x^۲ + ۲ax - ۱۲ = ۰ \Rightarrow \begin{cases} x_۱ = b \\ x_۲ = b+۱ \end{cases} \Rightarrow \underbrace{x_۱ x_۲}_{\frac{c}{a}} = \frac{-۱۲}{-۱} = ۱۲ \Rightarrow b(b+۱) = ۱۲ \Rightarrow b^۲ + b - ۱۲ = ۰$

$\rightarrow \begin{cases} b = -۴ \\ b = ۳ \end{cases} \xrightarrow[b>۰]{\text{با توجه به اینکه}} b = ۳ \Rightarrow -۳^۲ + ۲a(۳) - ۱۲ = ۰ \Rightarrow ۶a = ۲۱ \Rightarrow a = \frac{۲۱}{۶} = \frac{۷}{۲}$

$\Rightarrow a + b = ۶/۵$

۱۱ - گزینه ۲ ماتریس $A^۲$ را یافته و در رابطهٔ داده شده قرار می‌دهیم:

روش اول:

$A^۲ = \begin{bmatrix} -۲ & ۱ \\ ۵ & ۴ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -۲ & ۱ \\ ۵ & ۴ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۹ & ۲ \\ ۱۰ & ۲۱ \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} ۹ & ۲ \\ ۱۰ & ۲۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -۲\alpha & \alpha \\ ۵\alpha & ۴\alpha \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \beta & ۰ \\ ۰ & \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -۲\alpha + \beta & \alpha \\ ۵\alpha & ۴\alpha + \beta \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = ۲ \\ \beta = ۱۳ \end{cases}$

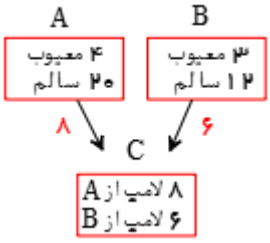
روش دوم: (نکته) هر ماتریس ۲×۲ مانند A در رابطهٔ زیر صدق می‌کند:

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \Rightarrow A^۲ - (a+d)A + |A| I = \overline{O}$$

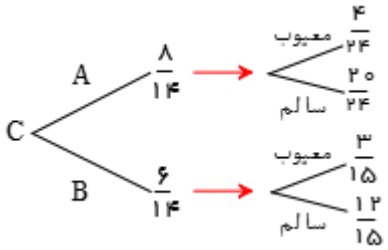
$$A = \begin{bmatrix} -۲ & ۱ \\ ۵ & ۴ \end{bmatrix} \Rightarrow A^۲ - ۲A - ۱۳I = \overline{O} \Rightarrow A^۲ = ۲A + ۱۳I \Rightarrow \alpha = ۲, \beta = ۱۳$$

۱۲ - گزینه ۴

احتمال آنکه لامپی از C برداشته شود و متعلق به A باشد برابر $\frac{۸}{۱۴}$ و متعلق به B باشد $\frac{۶}{۱۴}$ است.



دقت: احتمال معیوب بودن را باید از ظروف A و B محاسبه کنیم.



$$P(\text{معیوب}) = \frac{۸}{۱۴} \times \frac{۴}{۲۴} + \frac{۶}{۱۴} \times \frac{۳}{۱۵}$$

$$P(\text{معیوب}) = \frac{۴}{۷} \times \frac{۱}{۶} + \frac{۳}{۷} \times \frac{۱}{۵} = \frac{۱۹}{۱۰۵}$$

۱۳ - گزینه ۲

پیشامد آنکه عدد انتخابی مضارب ۷ باشد: B پیشامد آنکه عدد انتخابی مضارب ۶ باشد: A

$$\text{جواب} = P(A \cup B) - P(A \cap B) = P(A) + P(B) - ۲P(A \cap B)$$

$$= \frac{\left(\left[\frac{۳۰۰}{۶}\right] - \left[\frac{۵۰}{۶}\right]\right) + \left(\left[\frac{۳۰۰}{۷}\right] - \left[\frac{۵۰}{۷}\right]\right) - ۲\left(\left[\frac{۳۰۰}{۴۲}\right] - \left[\frac{۵۰}{۴۲}\right]\right)}{۲۵۰}$$

$$= \frac{۵۰ - ۸ + ۴۲ - ۷ - ۱۴ + ۲}{۲۵۰} = \frac{۲۶}{۱۰۰}$$

۱۴ - گزینه ۴ نکته: اگر A ماتریس مربعی $n \times n$ و k عدد حقیقی باشد، آنگاه $|kA| = k^n |A|$.

طبق فرض داریم:

$$\left||A|A\right| = |۴A| = ۴^۳|A| = ۴^۳ \times ۴ = ۴^۴ = ۲۵۶$$

۱۵ - گزینه ۴

روش اول: ابتدا ستون ۲ را به ستون ۳ اضافه کرده و در ستون سوم از $(x+y+z)$ فاکتور می‌گیریم. سپس ستون سوم را از ستون اول کم می‌کنیم:

$$\begin{vmatrix} x+۱ & x & y+z \\ ۱ & y & z+x \\ ۱ & z & x+y \end{vmatrix} = \underbrace{(x+y+z)}_{۲y} \begin{vmatrix} ۱+x & x & ۱ \\ ۱ & y & ۱ \\ ۱ & z & ۱ \end{vmatrix}$$

$$= ۲y \begin{vmatrix} x & x & ۱ \\ ۰ & y & ۱ \\ ۰ & z & ۱ \end{vmatrix} = ۲yx\underbrace{(y-z)}_{x} = ۲x^۲y = ۲x^۲(x+z)$$

روش دوم: به‌جای z, y, x مقادیر عددی چنان قرار می‌دهیم که گزینه‌ها غیر یکسان شود:

$$x = ۳\ ,\ y = ۳\ ,\ z = ۰$$

$$\begin{vmatrix} ۱+x & x & y+z \\ ۱ & y & z+x \\ ۱ & z & x+y \end{vmatrix} \xrightarrow[z=۰]{x=۳,y=۳} \begin{vmatrix} ۴ & ۳ & ۳ \\ ۱ & ۳ & ۳ \\ ۱ & ۰ & ۶ \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{ساروس}} (۷۲ + ۹) - (۹ + ۱۸) = ۵۴$$

در بین گزینه‌ها فقط گزینه ۴ به‌ازای z, y, x داده شده برابر ۵۴ می‌شود.

۱۶ - گزینه ۲ ابتدا ماتریس $A^۲$ را یافته و از روی آن ماتریس‌های $A^۶$ و $A^۷$ را به دست می‌آوریم:

$$A^{۲}=\begin{bmatrix}۲ & -۱\\ ۳ & -۲\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۲ & -۱\\ ۳ & -۲\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۱ & ۰\\ ۰ & ۱\end{bmatrix}=I$$

$$\begin{cases}A^{۷}=(A^{۲})^{۳}\cdot A=(I)^{۳}\cdot A=I\cdot A=A\\ A^{۶}=(A^{۲})^{۳}=(I)^{۳}=I\end{cases}$$

$$A^{۷}-A^{۶}=\begin{bmatrix}۲ & -۱\\ ۳ & -۲\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}۱ & ۰\\ ۰ & ۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۱ & -۱\\ ۳ & -۳\end{bmatrix}$$

۱۷ - گزینه ۴ می‌دانیم مجموع احتمال‌ها برابر با ۱ است:

می‌دانیم: $P(۱)+P(۲)+P(۳)+P(۴)+P(۵)+P(۶)=۱$

$$x+۳x+x+۳x+x+۳x=۱\Rightarrow x=\frac{۱}{۱۲}$$

$$P(\text{۳ رقم تاس بزرگ‌تر از})=P(۴)+P(۵)+P(۶)=۳x+x+۳x=۷x=\frac{۷}{۱۲}$$

۱۸ - گزینه ۱

نکته: اگر A و B دو پیشامد دلخواه باشند احتمال وقوع پیشامد B به‌شرط آنکه A اتفاق افتاده باشد از دستور $P(B|A)=\frac{P(B\cap A)}{P(A)}$ حاصل می‌شود.

B: پیشامد شرکت کردن بهروز در مسابقهٔ علمی , A: پیشامد شرکت کردن امیر در مسابقهٔ علمی

طبق فرض $P(A)=۰/۶$، $P(B)=۰/۳$ و $P(A|B)=۰/۵$ است پس:

$$P(A|B)=۰/۵\Rightarrow\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=۰/۵\Rightarrow P(A\cap B)=P(B)\times ۰/۵=۰/۳\times ۰/۵=۰/۱۵$$

$$P(A|B')=\frac{P(A\cap B')}{P(B')}=\frac{P(A-B)}{۱-P(B)}=\frac{P(A)-P(A\cap B)}{۱-P(B)}=\frac{۰/۶-۰/۱۵}{۱-۰/۳}=\frac{۰/۴۵}{۰/۷}=\frac{۴۵}{۷۰}=\frac{۹}{۱۴}$$

۱۹ - گزینه ۲ حالت‌های ممکن برای فضای کاهش‌یافتهٔ S را می‌نویسیم:

$$\begin{matrix}۵\to(۱,۴),(۴,۱),(۲,۳),(۳,۲)\\ ۴\to(۱,۳),(۳,۱),(۲,۲)\\ ۳\to(۱,۲),(۲,۱)\\ ۲\to(۱,۱)\end{matrix}\quad\Rightarrow n(S)=۱۰$$

دقت کنید در سؤال تاکید شده شمارهٔ یکی از تاس‌های روشده ۲ است.

$$A:\{(۲,۳),(۳,۲),(۲,۱),(۱,۲)\}$$

پس $P(A)=\frac{۴}{۱۰}=\frac{۲}{۵}$ است.

۲۰ - گزینه ۱ ضرب ماتریس‌ها را از سمت چپ انجام می‌دهیم:

$$\begin{bmatrix}x & ۲x & -۱\end{bmatrix}_{۱\times ۳}\times\begin{bmatrix}۳ & -۱ & ۱\\ ۴ & ۰ & -۲\\ ۱ & ۲ & ۰\end{bmatrix}_{۳\times ۳}\times\begin{bmatrix}x\\ ۲x\\ -۱\end{bmatrix}_{۳\times ۱}=۰$$

$$\Rightarrow\begin{bmatrix}۱۱x-۱ & -x-۲ & -۳x\end{bmatrix}_{۱\times ۳}\times\begin{bmatrix}x\\ ۲x\\ -۱\end{bmatrix}_{۳\times ۱}=۰$$

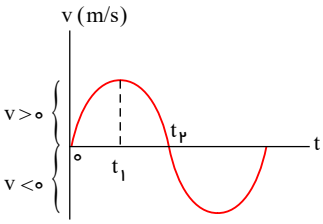
$$\Rightarrow[۱۱x^{۲}-x-۲x^{۲}-۴x+۳x]=۰\Rightarrow ۹x^{۲}-۲x=۰\Rightarrow x(۹x-۲)=۰\Rightarrow\begin{cases}x=۰\\ x=\frac{۲}{۹}\end{cases}$$

۲۱ - گزینه ۴ اگر سرعت اولیه را $v_۰$ و سرعت در نیمه مسیر را $v_۱$ و سرعت در انتهای مسیر را $v_۲$ فرض کنیم، می‌توان نوشت:

$$\left.\begin{cases}v_۱^{۲}-v_۰^{۲}=۲a(\frac{x}{۲})\Rightarrow v_۱^{۲}-۰=ax\\ v_۲^{۲}-v_۱^{۲}=۲a(\frac{x}{۲})\Rightarrow ۱۲^{۲}-v_۱^{۲}=ax\end{cases}\right\}\Rightarrow v_۱^{۲}=۱۲^{۲}-v_۱^{۲}$$

$$\Rightarrow ۲v_۱^{۲}=۱۲^{۲}\Rightarrow\sqrt{۲}v_۱=۱۲\Rightarrow v_۱=\frac{۱۲}{\sqrt{۲}}=۶\sqrt{۲}\frac{m}{s}$$

۲۲ - گزینه ۱



از لحظه‌ی t_1 تا t_2 سرعت مثبت می‌باشد، بنابراین حرکت در جهت مثبت محور xها است و چون شیب خط مماس بر نمودار که نشان‌دهنده شتاب است، منفی می‌باشد بنابراین $aV < 0$ یعنی حرکت کندشونده است. به عبارت دیگر چون قدر مطلق سرعت کم می‌شود بنابراین حرکت کندشونده است.

۲۳ - گزینه ۳ اگر معادله را به‌صورت $x = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t + x_0$ فرض کنیم، ملاحظه می‌شود که $a = -1$ و $v_0 = 1$ است.

۲۴ - گزینه ۲ این سوال را به سه روش حل می‌کنیم. می‌دانیم که در حرکت با شتاب ثابت، سرعت متوسط معادل میانگین سرعتهاست.

روش اول:

$$v = at + v_0 = 4t + 6$$

$$\begin{cases} t = 0s \rightarrow v_0 = 6\frac{m}{s} \\ t = 2s \rightarrow v_2 = 14\frac{m}{s} \end{cases} \Rightarrow v_{av} = \frac{v_0 + v_2}{2} = 10\frac{m}{s}$$

روش دوم: در حرکت با شتاب ثابت، سرعت متوسط بین دو لحظهٔ t_1 و t_2 معادل سرعت در لحظهٔ $t = \frac{t_1 + t_2}{2}$ است.

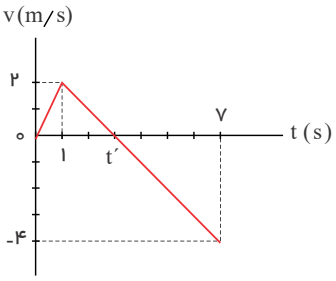
در اینجا سرعت متوسط در دو ثانیهٔ اول معادل با سرعت در لحظهٔ $t = 1s$ است. ($t = \frac{0+2}{2} = 1s$)، بنابراین داریم:

$$v_{av} = v = at + v_0 \xrightarrow[v_0 = 6]{t=1s, a=4\frac{m}{s^2}} v_{av} = 4 \times 1 + 6 = 10\frac{m}{s^2}$$

روش سوم: در حرکت با شتاب ثابت، سرعت متوسط در t' ثانیه اول، از رابطهٔ زیر نیز محاسبه می‌شود.

$$v_{av} = \frac{1}{2}at' + v_0 \xrightarrow[a=4\frac{m}{s^2}, v_0 = 6\frac{m}{s}]{t' = 2 \text{ دو ثانیهٔ اول حرکت}} v_{av} = \frac{1}{2} \times 4 \times 2 + 6 \rightarrow v_{av} = 10\frac{m}{s}$$

۲۵ - گزینه ۱



زمانی که تندی متحرک در حال کاهش است، حرکت متحرک کندشونده است. بنابراین مطابق نمودار از لحظهٔ $t = 1s$ تا t'، حرکت متحرک کندشونده است. برای محاسبهٔ t' با استفاده از تشابه مثلث‌ها داریم:

$$\frac{2}{t' - 1} = \frac{4}{7 - t'} \Rightarrow t' = 3s$$

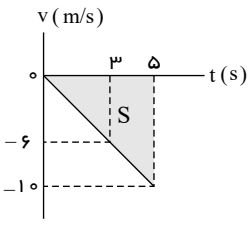
در بازهٔ $t = 1s$ تا $t' = 3s$ یعنی به مدت $2s$ حرکت متحرک کندشونده است.

۲۶ - گزینه ۳ روش اول:

متحرک تغییر جهت نداده است (همواره $v < 0$)، بنابراین مسافت طی شده با جابه‌جایی برابر است:

نمودار خطی است. در مدت $3s$ سرعت $6m/s$ تغییر کرده یعنی در هر ثانیه: $2m/s$. پس در مدت $5s$ سرعت $10m/s$ تغییر کرده است: $v(t = 5s) = -10m/s$ سطح زیر نمودار مسافت را به ما می‌دهد:

$$\text{مسافت } L = |S| = \frac{1}{2} \times 10 \times 5 = 25m$$



روش دوم:

آزمون حسابی ۷مهر

بعد از یافتن $v(t=۵)=-۱۰m/s$ و اینکه حرکت شتابدار با شتاب ثابت روی مسیر مستقیم است:

$$L=|\Delta x|=|\frac{v(۵)+v(۰)}{۲}\times\Delta t|=|\frac{-۱۰+۰}{۲}\times ۵|=۲۵m$$

روش سوم:

شیب نمودار $(v-t)$ برابر a است؛ چون نمودار درجهٔ اول است:

$$a=(a_{av})=\frac{\Delta v}{\Delta t}=\frac{(-۶)-۰}{۳-۰}=-۲m/s^۲$$

$$\Delta x=\frac{۱}{۲}at^۲+v_۰t=\frac{۱}{۲}(-۲)(۵)^۲+(۰)(۵)=-۲۵m$$

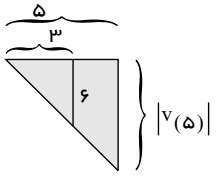
تغییر جهت نداریم : $L=|\Delta x|=۲۵m$

روش چهارم:

ابتدا به کمک تالس:

$$|v(۵)|\rightarrow\frac{۶}{|v(۵)|}=\frac{۳}{۵}\rightarrow|v(۵)|=۱۰m/s$$

ادامهٔ راه مطابق روش‌های قبلی است.

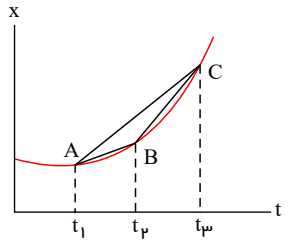


$$L=|S|=\frac{۱}{۲}\times۱۰\times۵=۲۵m$$

لطفاً روش‌های دیگر را خودتان امتحان کنید.

۲۷ - گزینه ۳ می‌دانیم:

$$AB\text{ شیب}=\bar{v}_{t_۲\rightarrow t_۱}$$
$$BC\text{ شیب}=\bar{v}_{t_۳\rightarrow t_۲}$$
$$AC\text{ شیب}=\bar{v}_{t_۳\rightarrow t_۱}$$



شیب پاره خط BC از شیب دو پاره خط دیگر بیشتر است.

۲۸ - گزینه ۱ مجموع مسافت‌های طی شده توسط متحرک‌ها باید ۹۰۰ متر شود.

$$|\Delta x_۱|+|\Delta x_۲|=۹۰۰\Rightarrow ۲۰t+۲۵t=۹۰۰\Rightarrow t=۲۰s$$

۲۹ - گزینه ۴ شیب‌خط مماس در لحظه‌های $t=۶s$ و $t=۱۰s$ که سرعت متحرک در این لحظه‌ها است را حساب می‌کنیم.

$$\left.\begin{array}{l}t=۶s\Rightarrow v_۶=\frac{۹}{۶-۳}=۳m/s\\ t=۱۰s\Rightarrow v_{۱۰}=\frac{۱۴-۷}{۱۰}=۰/۷m/s\end{array}\right\}\Rightarrow\frac{v_۶}{v_{۱۰}}=\frac{۳}{۰/۷}=\frac{۳۰}{۷}m/s$$

۳۰ - گزینه ۳

ابتدا سرعت و جابه‌جایی متحرک را پس از $۲۰s$ به‌دست می‌آوریم:

$$v=at+v_۰\Rightarrow v=۲\times۲۰+۰\Rightarrow v=۴۰\frac{m}{s}$$

$$\Delta x_۱=\frac{v+v_۰}{۲}\Delta t\Rightarrow\Delta x_۱=\frac{۴۰+۰}{۲}\times۲۰=۴۰۰m$$

در مرحله دوم بیان شده سرعت متحرک با آهنگ ثابت $۴m/s^۲$ کاهش می‌یابد یعنی شتاب متحرک در این مرحله $-۴m/s^۲$ است.

$$v^۲-v_۰^۲=۲a\Delta x_۲\Rightarrow۰-(۴۰)^۲=۲(-۴)\Delta x_۲\Rightarrow\Delta x_۲=۲۰۰m$$

$$\Delta x_{\text{کل}}=۴۰۰+۲۰۰=۶۰۰m$$

۳۱ - گزینه ۴ چون سرعت هر سه متحرک ثابت است، شتاب حرکت هر سه صفر می‌باشد.

۳۲ - گزینه ۱ دو ثانیه سوم یعنی از ۴ تا ۶ ثانیه، پس در این دو لحظه، سرعت متحرک را یافته و سپس با استفاده از رابطهٔ مستقل از شتاب، جابه‌جایی‌اش را محاسبه می‌کنیم.

$$t_۱=۴s\Rightarrow v_۱=-۲\times۴+۴=-۴\frac{m}{s}$$
$$t_۲=۶s\Rightarrow v_۲=-۲\times۶+۴=-۸\frac{m}{s}$$

$$\Delta x = v_{av}\Delta t \Rightarrow \Delta x = (\frac{-۴ + (-۸)}{۲}) \times ۲ = -۱۲m \Rightarrow |\Delta x| = ۱۲m$$

۳۳ - گزینه ۲

$$d = vt \Rightarrow d = ۳ \times ۲۰ = ۶۰m$$

دوندهٔ اول در ۲۰ ثانیهٔ اول مسافت ۶۰ متر را طی کرده و بقیهٔ مسیر ۳۰۰ متری را در مدت $۱۰۰s$ طی می‌کند.

$$۳۰۰ = ۳t \Rightarrow t = ۱۰۰(s)$$

دوندهٔ دوم باید ۳۶۰ متر را در ۱۰۰ ثانیه طی کند.

$$d = vt \Rightarrow ۳۶۰ = v \times ۱۰۰ \Rightarrow v = ۳٫۶m/s$$

۳۴ - گزینه ۳ بررسی عبارت‌ها:

آ) نادرست؛ اتیلن گلیکول دارای فرمول شیمیایی $C_۲H_۶O_۲$ است.

ب) درست؛ به جز نمک خوراکی بقیه در هگزان حل می‌شود.چون بنزین، وازلین و روغن زیتون همگی غیرقطبی هستند و در حلال غیرقطبی هگزان حل می شوند.

پ) نادرست؛ در ساختار لوویس باید جفت الکترون‌های ناپیوندی نیز نمایش داده شود.

N یک جفت و O دو جفت الکترون ناپیوندی دارند.

ت) درست؛ تعداد هیدروژن در وازلین ۵۲ و در روغن زیتون ۱۰۴ است.

۳۵ - گزینه ۳ عبارت‌های الف، پ و ت درست هستند.

ترکیب داده‌شده مربوط به یک استر است که به دلیل غلبهٔ بخش ناقطبی بر بخش قطبی در آن، در آب نامحلول است و در حلال‌های ناقطبی مانند بنزین حل می‌شود.

۳۶ - گزینه ۳ بررسی گزینه‌ها:

گزینه های «۱» و «۲»: فرمول عمومی اسیدهای چرب با زنجیر آلکیلی به دو صورت زیر است:

$$C_nH_{۲n}O_۲ \Rightarrow \text{جرم مولی} = (۱۲ \times n) + (۱ \times ۲n) + (۲ \times ۱۶) = \boxed{۱۴n + ۳۲}$$

$$C_{n'}H_{۲n'+۱}COOH \Rightarrow \text{جرم مولی} = (۱۲ \times n') + (۱ \times (۲n' + ۱)) + (۱۲ \times ۱) + (۱۶ \times ۲) + (۱ \times ۱) = \boxed{۱۴n' + ۴۶}$$

گزینهٔ (۳): چون زنجیر هیدروکربنی دارای یک پیوند دوگانه است، شمار اتم‌های H در آن ۲ واحد کمتر از حالتی است که زنجیر هیدروکربنی خطی و سیرشده باشد:

$$C_nH_{۲n-۲}O_۲ \Rightarrow \text{جرم مولی} = ۱۴n + ۳۰$$

$$C_{n'}H_{۲n'-۱}COOH \text{ جرم مولی} = ۱۴n' + ۴۴$$

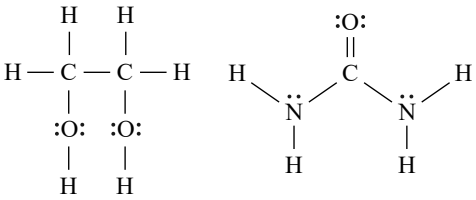
گزینهٔ (۴): فرمول عمومی صابون جامد به‌صورت زیر است:

$$C_nH_{۲n-۱}O_۲Na \text{ جرم مولی} = (۱۲ \times n) + (۱ \times (۲n - ۱)) + (۱۶ \times ۲) + (۲۳ \times ۱) = \boxed{۱۴n + ۵۴}$$

۳۷ - گزینه ۳ اتیلن گلیکول به‌دلیل داشتن پیوند $O - H$ و اوره به‌دلیل داشتن پیوند $N - H$ می‌توانند با مولکول‌های خود و یا با مولکول‌های آب پیوند هیدروژنی برقرار کنند.

بررسی سایر گزینه‌ها:

گزینهٔ «۱»: اتیلن گلیکول دارای دو گروه هیدروکسیل است و اوره چهار جفت الکترون ناپیوندی دارد.



گزینهٔ «۲»: روغن زیتون با فرمول مولکولی $C_{۵۷}H_{۱۰۴}O_۶$ دارای ۳ نوع عنصر است و وازلین با فرمول مولکولی $C_{۲۵}H_{۵۲}$ دارای ۲ نوع عنصر است و وازلین در دستهٔ آلکان‌ها طبقه‌بندی می‌شود.

فرمول عمومی آلکان‌ها $C_nH_{۲n+۲}$ است.

گزینهٔ «۴»: وازلین و بنزین ($C_۸H_{۱۸}$) هر دو هیدروکربن هستند و گشتاور دوقطبی آن‌ها حدود صفر است.

۳۸ - گزینه ۲

فرمول مولکولی اتیلن گلیکول = $C_۲H_۶O_۲$

فرمول مولکولی اوره = $CO(NH_۲)_۲$

$$?molatom = ۱gC_۲H_۶O_۲ \times \frac{۱molC_۲H_۶O_۲}{۶۲gC_۲H_۶O_۲} \times \frac{۱۰molatom}{۱molC_۲H_۶O_۲} = \frac{۱۰}{۶۲} = ۰٫۱۶mol\ atom$$

$$?molatom = ۱gCO(NH_۲)_۲ \times \frac{۱molCO(NH_۲)_۲}{۶۰gCO(NH_۲)_۲} \times \frac{۸molatom}{۱molCO(NH_۲)_۲} = \frac{۸}{۶۰} = ۰٫۱۳mol\ atom$$

تعداد مول اتم‌های موجود در یک گرم اتیلن گلیکول بیشتر از اوره است.

بررسی سایر گزینه‌ها:

گزینهٔ ۱) گرد و غبار هوا و لکه‌های چربی هر دو نمونه‌هایی از آلاینده‌ها هستند.

گزینهٔ ۳) با شستن عسل توسط آب، آب نقش حلال را دارد. هنگامی که عسل وارد آب می‌شود؛ مولکول‌های سازندهٔ آن با مولکول‌های آب پیوند هیدروژنی برقرار می‌کنند و در سرتاسر آن پخش می‌شوند.

گزینهٔ ۴) اسیدهای چرب، کربوکسیلیک اسیدهایی با زنجیر بلند کربنی هستند و چربی‌ها مخلوطی از اسیدهای چرب و استرهای بلند زنجیره هستند.

۳۹ - گزینه ۴ بررسی گزینه‌ها:

گزینهٔ ۱) هر دو مولکول حاوی H متصل به عناصر N یا O هستند.

گزینهٔ ۲) اتیلن گلیکول (ضد یخ) یک الکل دو عاملی $HO-CH_2-CH_2-OH$ است.

گزینهٔ ۳) در اسیدهای چرب ($RCOOH$)، زنجیرهٔ R طولانی بوده و بخش ناقطبی غالب است که باعث می‌شود ماده در آب نامحلول باشد.

گزینهٔ ۴) فرمول روغن زتون به‌صورت $C_{57}H_{104}O_6$ می‌باشد.

۴۰ - گزینه ۳ صابون‌های مایع آمونیوم‌دار با فرمول $RCOONH_4$ ، عنصر فلزی در ساختار خود ندارند.

بررسی سایر گزینه‌ها:

گزینهٔ «۱»: در ساختار عسل همانند متانول (ساده‌ترین الکل) گروه‌های هیدروکسیل وجود دارد و هر دوی آنها می‌توانند با آب پیوند هیدروژنی برقرار کنند.

گزینهٔ «۲»: اسیدهای چرب سیرشده، کربوکسیلیک اسیدهایی با زنجیر بلند کربنی هستند که فرمول عمومی آنها $C_nH_{2n}O_2$ می‌باشد، پس فرمول اسید چرب موردنظر $C_{17}H_{34}O_2$ بوده و جرم مولی آن برابر $270 g \cdot mol^{-1}$ می‌باشد.

گزینهٔ «۴»: شکل نشان‌دهندهٔ استری با جرم مولی زیاد است که در ساختار آن ۶ اتم اکسیژن وجود دارد.

$(RCOO)_3C_3H_5$

۴۱ - گزینه ۴ همهٔ موارد درست‌اند.

بررسی موارد:

مورد اول: اتیلن گلیکول یک الکل دو عاملی است و به دلیل برخورداری از گروه عاملی هیدروکسیل، با آب پیوند هیدروژنی برقرار می‌کند.

مورد دوم: روغن زیتون همانند استرهای بلند زنجیر ناقطبی است و در حلال ناقطبی هگزان حل می‌شود.

مورد سوم: اسیدهای چرب، کربوکسیلیک‌اسیدهایی با زنجیر کربنی بلند هستند که فرمول عمومی آن‌ها (با گروه هیدروکربنی خطی و سیرشده) به‌صورت $C_nH_{2n}O_2$ می‌باشد.

مورد چهارم: صابون ماده‌ای است که هم در آب و هم در چربی حل می‌شود. در حالی که اسیدهای چرب دارای مولکول‌های ناقطبی بوده و در آب حل نمی‌شوند.

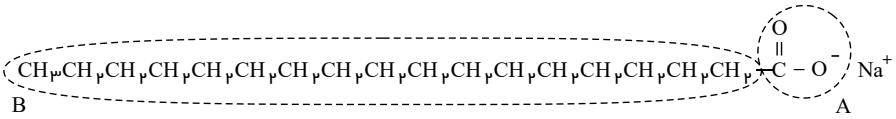
۴۲ - گزینه ۴ عبارت‌های دوم و سوم نادرست هستند.

بررسی عبارت‌های نادرست:

عبارت دوم: با وجود اینکه وبا بارها در جهان همه‌گیر شده و جان میلیون‌ها نفر را گرفته است، این بیماری هنوز هم می‌تواند برای هر جامعه‌ای تهدیدکننده باشد.

عبارت سوم: ساده‌ترین و مؤثرترین راه پیشگیری بیماری وبا، رعایت بهداشت فردی و همگانی است. راه‌های دیگری هم که جنبهٔ عمومی دارد، وجود دارد.

۴۳ - گزینه ۴ به‌عنوان مثال مولکول صابون جامد را درنظر می‌گیریم:



بعد از انحلال صابون در آب، یون سدیم جدا شده و یک سر صابون دارای بار منفی خواهد بود و سمت دیگر صابون، انتهای گروه هیدروکربنی است که بخش ناقطبی آن بوده و به لکهٔ چربی متصل می‌شود.