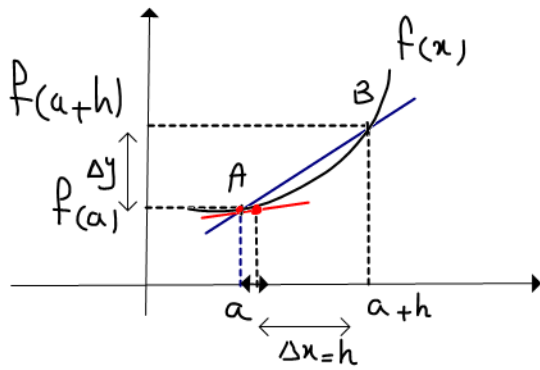


تعریف مشتق: شیب خط مماس بر منحنی در نقطه a است



$$m_{AB} = \frac{f(a+h) - f(a)}{(a+h) - a} = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

$$\begin{cases} a+h = X \\ h = X - a \end{cases}$$

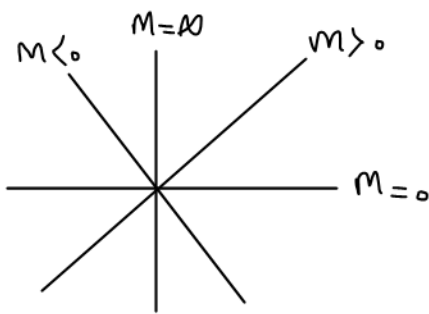
$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{X - a}$$

مثال: با استفاده از تعریف مشتق، مشتق تابع $y = \sqrt{x+1}$ را در $x=3$ بدست آورید (تشریح)

مثال: با استفاده از تعریف مشتق، شیب خط مماس بر منحنی $f(x) = x^3 + x$ را در $x=1$ بیابید.

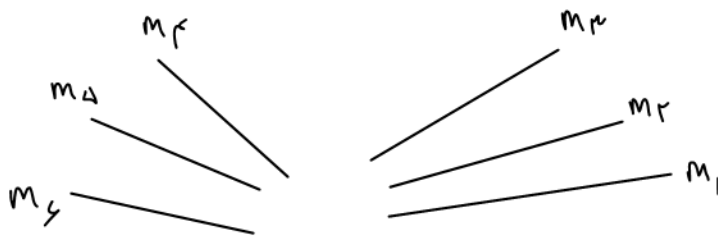
مثال: ضریب زایی (شیب) خط گذرنده از دو نقطه $\frac{\pi}{3}$ و $\frac{\pi}{3} + h$ تابع $y = \sin x$ را تعیین کنید و وقتی $h \rightarrow 0$ چه راستی؟

معادله شیب خطوط:



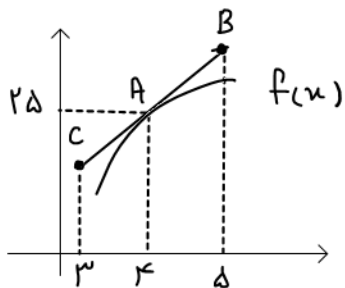
α زاویه خط با محور x

$$\tan \alpha = \text{شیب}$$



نست: در تابع $y = f(x)$ داریم: $f'(x) = 2$, $f(x) = 2x$, طول پاره خط BC کدام است؟

$\sqrt{2}$ (۴) $\sqrt{5}$ (۳) $2\sqrt{5}$ (۲) $5\sqrt{2}$ (۱)



تعاریف دیگری از مشتق:

$$f'(a) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + m\Delta x) - f(x)}{\Delta x}, \quad f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + mh) - f(x + nh)}{(m-n)h}$$

* روابط مشتق حدهایی از نوع $\frac{0}{0}$ هستند و برای بدست آوردن حاصل آنها می توان از

قاعده ل'Hospital استفاده کرد.

مثال: $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x^2+1+h)^2 - (x^2+1)^2}{h}$

مثال: $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x+3\Delta x) - \sin 2x}{5\Delta x}$

مثال: اگر $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x+3\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = x^2$ ، حاصل $f'(x)$ چقدر است؟

$f(x) \xrightarrow{\text{مشتق}} f'(x)$ $f(u) \xrightarrow{\text{مشتق}} u' f'(u)$
--

مثال: اگر $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x-h)}{h} = \sqrt{x}$ ، $f'(x)$ چقدر است؟

مثال: اگر $f'(2) = -2$ ، حاصل $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2) - f(2+4h)}{2h}$ چقدر است؟

مثال: اگر $f(x) = x^2 + x$ باشد، حاصل $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f^3(1+h) - f^3(1)}{h}$ چقدر است؟

نست: خط گذرنده از دو نقطه $A(1, 2)$ و $B(-1, 3)$ بر خوداری می‌یست $y=f(x)$ در $x=3$
 میانس است. حاصل $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f^2(x) + 4f(x) - 5}{3-x}$ کدام است؟
 ۱) ۵ ۲) ۴ ۳) ۳ ۴) ۲

قواعد مشتق:

۱/ $y = c \rightarrow y' = 0$

۲/ $(f \pm g)' = f' \pm g'$

مثال: $y = \sqrt{x} \rightarrow$

۳/ $y = x^n \rightarrow y' = n x^{n-1}$
 $y = u^n \rightarrow y' = n x u' x u^{n-1}$

* توان می‌یشتش در مشتقش در خودش به توان یکی کمتر

مثال: $y = 2x^4 - 3x^2 - 5x + 1 \rightarrow$

مثال: $y = x^{\frac{1}{3}} \rightarrow$

مثال: $y = (x^3 - x + 1)^4 \rightarrow$

۴/ $(f \times g)' = f'g + g'f$

۵/ $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - g'f}{g^2}$

مثال : $y = (x^2 + x)(2x^{\frac{3}{2}} - 2x)^4 \rightarrow y' = ?$

مثال : $f(x) = \frac{2x+1}{3x^2+4x+5} \rightarrow$

مثال : $g(x) = \left(\frac{2x-1}{3x+4} \right)^4 \rightarrow$

$$y = \frac{ax+b}{cx+d} \rightarrow y' = \frac{ad-bc}{(cx+d)^2}$$

$$y = \frac{au+b}{cu+d} \rightarrow y' = \frac{ad-bc}{(cu+d)^2} \times u'$$

مشتق تابع هموگرافیک :

مثال : $y = \frac{2(x^2+x)+1}{2(x^2+x)-4} \rightarrow$

$$\begin{aligned} \gamma / \quad y = \sqrt{x} &\rightarrow y' = \frac{1}{2\sqrt{x}} \\ y = \sqrt{u} &\rightarrow y' = \frac{u'}{2\sqrt{u}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y = \sqrt[3]{x} &\rightarrow y' = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} \\ y = \sqrt[3]{u} &\rightarrow y' = \frac{u'}{3\sqrt[3]{u^2}} \end{aligned}$$

مثال : $y = \sqrt{2x^2+x-3} \rightarrow$

مثال : $f(x) = \sqrt[3]{x^3+4x} \rightarrow f'(-1) = ?$

$$\wedge / \left| \begin{array}{l} y = \sin u \rightarrow y' = \cos u \\ y = \cos u \rightarrow y' = -\sin u \\ y = \tan u \rightarrow y' = 1 + \tan^2 u \\ y = \cot u \rightarrow y' = -(1 + \cot^2 u) \end{array} \right.$$

$$\left| \begin{array}{l} y = \sin v \rightarrow y' = v' \cos v \\ y = \cos v \rightarrow y' = -v' \sin v \\ y = \tan v \rightarrow y' = v' (1 + \tan^2 v) \\ y = \cot v \rightarrow y' = -v' (1 + \cot^2 v) \end{array} \right.$$

مثال: $y = \sin u^2 \rightarrow$

مثال: $y = \sin^2 x \rightarrow$

مثال: $y = \cos^2 \sqrt{x} \rightarrow$

مثال: $y = \tan^3 (x^2 + \sqrt{x}) \rightarrow$

مثال: $f(x) = \cot x^2 \rightarrow f'(\frac{\sqrt{\pi}}{2}) = ?$

مثال: $f(x) = \sin(f(x) - f(x)), f(0) = 0 \rightarrow f'(0) = ?$

نکته: اگر مشتق در نقطه‌ای خواسته شود که شرایط هم‌ارزی برای آن برقرار باشد، می‌توان ابتدا هم‌ارز آن را نوشت، پس مشتق گرفت.

$$u \rightarrow 0 \left| \begin{array}{l} \sin u \sim u \\ 1 - \cos^m u \sim m \times \frac{u^2}{2} \\ \tan u \sim u \end{array} \right.$$

مثال: شیب خط مماس بر منحنی $y = 4 - 4 \cos^3(\sin x)$ در $x=0$ چقدر است؟

مثال: $y = (x^{50} + x^{19} - x^7 + 2x - 1)^{103} \rightarrow y'(0) = ?$

* اگر درجه عامل ضرب شده از مرتبه مشتق باشد، مشتق در آن نقطه برابر صفر است.

مثال: $y = \frac{x^3 + x\sqrt{x} - 1}{\sin x + \cos x + 1} \rightarrow y'(0) = ?$

مثال: اگر $f(1) = -f'(1) = 1$ باشد، مشتق $f(x) + \frac{1}{\sqrt{f(x)}}$ به ازای $x=1$ چقدر است؟

مثال: $f(x) = \sin x \cos^3 x \rightarrow f'(\frac{\pi}{4}) = ?$

مثال: $f(x) = \tan(\cos x) \rightarrow f'(\frac{\pi}{4}) = ?$

سؤال : $y = \sqrt[3]{x^2} \rightarrow y' = ?$

سؤال : $g(x) = \left(\frac{16}{x} - \sqrt[3]{x^2} \right)^2 \rightarrow g'(-8) = ?$

سؤال : $f(x) = \sqrt{1 + \tan^2\left(\frac{1}{x}\right)} \rightarrow f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = ?$

سؤال : (مراجعة) $f(x) = \left(\sqrt{\frac{x+2}{2x-3}} \right)^3$ ، حاصل $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2}$ ؟

١٥ (٢) ١٢ (٣) -١٨ (٢) -٢١ (١)

نست: اگر $f(x) = \sqrt{2x}$ ، $g(x) = x^2 - x$ ، حاصل $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h}$ ؟

$\frac{1}{3}$ (1) $\frac{1}{2}$ (2) $\frac{1}{4}$ (3) $\frac{1}{5}$ (4)

مثال: $f(x) = \left(\frac{\sqrt[3]{x^2 + 2x}}{x^2 - x} \right)^3 \longrightarrow f'(1) = ?$

نست: اگر $f(x) = x^6 - 2x^4 - x + 1$ باشد، حاصل $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(1+h) - f'(1)}{h}$ ؟

$\frac{1}{4}$ (1) $\frac{1}{2}$ (2) $\frac{1}{3}$ (3) $\frac{1}{5}$ (4)

مثق تابع مرکب:

$$y = f(u) \longrightarrow y' = u' f'(u)$$

$$y = f \circ g(x) = f(g(x)) \longrightarrow y' = g'(x) f'(g(x))$$

مثال: اگر $f'(x) = x^2$ ، مشتق $f(x^2)$ کدام است؟

مثال: اگر $f(ax+a) - g(a-ax) = x^2$ و $g'(0) = a$ ، $f'(2a) = ?$

مثال: اگر $f(x) > 0$ و $f(x) + f(x^2) = 2x$ ، حاصل $f'(1)$ کدام است؟

مثال: اگر $f(x) = \sin x$ باشد، مشتق $\frac{f \circ f}{f^2}$ به ازای $x = \frac{\pi}{2}$ چند است؟

تست: اگر $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{g(x) - g(2)}{x - 2} = \frac{3}{2}$ و $f(x) = \sqrt{5 - x^2}$ باشد، آنگاه $(g \circ f)'(1)$ کدام است؟

$$\frac{3}{2} (1)$$

$$\frac{1}{2} (3)$$

$$\frac{-1}{2} (2)$$

$$\frac{-3}{4} (4)$$

تست: اگر $h(u) = f(g(u))$ ، $g(u) = u^2 - 4u + 5$ و $f'(2) = \frac{-1}{2}$ ، حاصل $h'(3)$ کدام است؟

۲ (۴)

۱ (۳)

-۱ (۲)

-۲ (۱)

تست: اگر $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ باشد، مشتق $f(\tan x)$ باشد، $|x| < \frac{\pi}{2}$ ، کدام است؟

 $\cos x$ (۴) $\sin x$ (۳) $\frac{1}{\cos x}$ (۲) $\frac{1}{\sin x}$ (۱)

* برای مشتق‌گیری از رادیکال‌های تو در تو بهتر است آنها را به یک رادیکال تبدیل کرده، سپس مشتق بگیریم.

مثال: $y = \sqrt{x^2 \sqrt{x \sqrt{x \sqrt{x}}}} \rightarrow y' = ?$

* اگر مشتق در نقطه‌ای خوانده شود که حاصل صفر عبارت مورد نظر باشد، از حاصل صفر مشتق گرفته و در نتیجه عبارت مقدار آن را قرار می‌دهیم.

مثال: $y = x(x-1)(x-2) \dots (x-10) \rightarrow y'(0) = ?$

مثال: $y = \frac{(x^3+1)h(2x+1)}{(x^2+1)h(x)}$, $h(-1) \neq 0 \rightarrow y'(-1) = ?$

مثال: $y = (x-a)(2x-a)(3x-a) \dots (nx-a) \rightarrow y'(a) = ?$

مثال: $y = (x^3-1)(x^3-2) \dots (x^3-2n) \rightarrow y'(3) = ?$

مثال: $y = (x-1)^2 \sqrt{3x+1} \rightarrow y''(1) = ?$

مثال: $y = \frac{(x-1)^3}{\sqrt{x^2+x+1}} \rightarrow y''(1) = ?$

* اگر درجه عامل صفر نشد از مرتبه مشتق باشد، مشتق در آن نقطه برابر صفر است.

نست: اگر $f(x) = (x^2-x-2)\sqrt[3]{x^2-7x}$ باشد، حاصل $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-1+h)-f(-1)}{h}$ کدام است؟

$-\frac{3}{4}(1)$	$-\frac{3}{4}(2)$	$-\frac{3}{4}(3)$	$-\frac{3}{4}(4)$
-------------------	-------------------	-------------------	-------------------

* کچھ اوقات عجز است ابتدا سارہ لیں ، پس مشتق لیں

مثال : $y = (x-1)(x+1)(x^2+1)(x^4+1) \rightarrow y'(2) = ?$

مثال : $y = \frac{x + \sqrt{x-x^2}}{\sqrt{x} + \sqrt{1-x}} \rightarrow y' = ?$

مثال : $y = \frac{x\sqrt{x+4} + \sqrt{x}(x+4)}{\sqrt{x^2+4x}} \rightarrow y'(4) = ?$

* $\left| \begin{array}{l} \sin(a \pm b) = \sin a \cos b \pm \cos a \sin b \\ \cos(a \pm b) = \cos a \cos b \mp \sin a \sin b \end{array} \right.$

مثال : $y = \sin\left(2x + \frac{3\pi}{4}\right) \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(2x + \frac{3\pi}{4}\right) \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \rightarrow y' = ?$

$$\begin{array}{l|l}
 * & \sin^r x = r \sin x \cos x \\
 & \sin x = r \sin \frac{x}{r} \cos \frac{x}{r} \\
 & \sin x \cdot \cos x = \frac{1}{r} \sin^r x \\
 \hline
 & \cos^r x = \cos^r x - \sin^r x \\
 & \cos^r x = 1 - r \sin^r x \\
 & \cos^r x = r \cos^r x - 1
 \end{array}$$

$$\text{Jwb: } y = \cos^r x \sin x - \sin^r x \cos x \longrightarrow y'(\frac{\pi}{r}) = ?$$

$$* (\sin x \pm \cos x)^r = 1 \pm \sin^r x$$

$$\text{Jwb: } y = \frac{\sin^r x + \cos^r x}{r - \sin^r x} \longrightarrow y' = ?$$

$$a^r + b^r = (a+b)(a^{r-1} - ab + b^{r-1})$$

$$\begin{array}{l|l}
 * & 1 + \tan^r x = \frac{1}{\cos^r x} \\
 & 1 + \cot^r x = \frac{1}{\sin^r x}
 \end{array}$$

$$\text{Jwb: } y = \frac{\sin x}{1 + \tan^r x} \longrightarrow y''(\frac{\pi}{r}) = ?$$

* اگر f و g را داشته باشیم و روابط بین f' و g' را خواسته باشند، به طور معمول با جمع یا تفریق f و g و یا استفاده از روابط مشتق به جواب خواهیم رسید.

نست: اگر $f(x) = \frac{x^3 + \sin^2 x}{x^3 + x^2 + 1}$ ، $g(x) = \frac{x^2 + \cos^2 x}{x^3 + x^2 + 1}$ باشند، کدام گزینه درست است؟

$$f' - g' = 1 \quad (۴)$$

$$f' - g' = 0 \quad (۳)$$

$$f' + g' = 1 \quad (۲)$$

$$f' + g' = 0 \quad (۱)$$

مثال: اگر $U = (x - \sqrt{x^2 - 1})^V$ و $Z = \frac{1}{(x + \sqrt{x^2 - 1})^V}$ باشند، حاصل $U'Z - UZ'$ کدام است؟

مثال: اگر $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{x + \sin x}$ ، $g(x) = \frac{x^2 + \sin^2 x + 2x \sin x}{x + 1}$ ، آنگاه $2f'fg + g'f^2$ به ازای $x=1$ کدام است؟

مثال: اگر $f(x) = \frac{x^3 - 2}{1 + x^3}$ و $g(x) = \sqrt[3]{x-1}$ باشند، حاصل $f'(g(x)) \times g'(x)$ کدام است؟

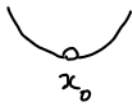
نست: اگر f تابع مشتق پذیر و $g(x) = f(\sqrt{1+\tan^2 x})$ و $g'(\frac{\pi}{3}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ باشد، $f'(2)$ کدام است؟

(۴)

(۳) $\frac{1}{2}$ (۲) $\frac{1}{4}$ (۱) $-\frac{1}{2}$

مشتق پذیری در یک نقطه:

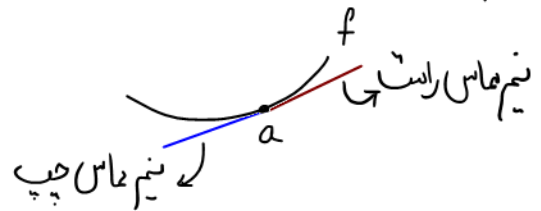
۱- پیوستگی شرط لازم برای مشتق پذیری است.



مشتق چپ: $f'_-(a) = \lim_{x \rightarrow a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$

۲- $f'_-(a) = f'_+(a)$

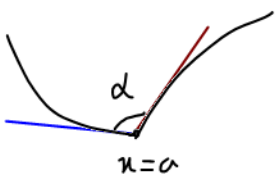
مشتق راست: $f'_+(a) = \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$



مشتق چپ = شیب مماس چپ

مشتق راست = شیب مماس راست

اگر $f'_-(a) \neq f'_+(a)$ ، آنگاه f در $x=a$ مشتق پذیر نیست.



یا همان مشتق چپ و راست است. m, m' شیب مماس چپ و راست
زاویه بین مماس ها: $\tan \alpha = \left| \frac{m - m'}{1 + mm'} \right|$

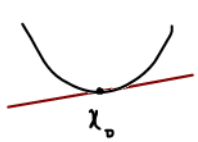
۳. مشتق ∞ وجود ندارد. (مماس قائم)

مثال: $y = \sqrt[3]{x} \rightarrow y' = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} \rightarrow y'(0) = \infty$

مثال: $y = \sqrt[3]{x^4} = x^{\frac{4}{3}}$

نکته: توابع رادیکالی در ریشه داخل رادیکال به شری که توان کمتر از فرض باشد، مماس دارد و مشتق ندارد. و اگر توان بیشتر از فرض باشد، در آن نقطه مشتق پذیر و مشتق آن برابر صفر است.

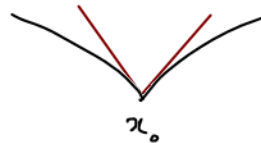
نقاط مشتق ناپذیر در شکل:



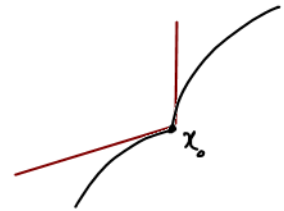
مشتق پذیر



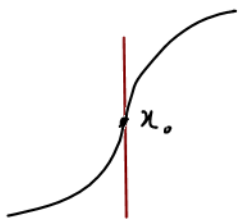
مماس چپ و راست ندارد
مشتق ناپذیر



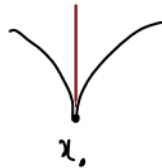
مماس چپ و راست دارد
مشتق چپ و راست دارد
مشتق ناپذیر



مماس چپ و راست دارد
مشتق چپ دارد
مشتق راست ندارد



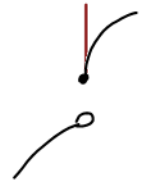
مماس چپ و راست دارد
مشتق چپ و راست ندارد



مماس چپ و راست دارد
مشتق چپ و راست ندارد



فقط مماس راست و
مشتق راست دارد



مماس راست دارد
مشتق چپ و راست ندارد

مثال: a, b را طوری بنامید که تابع $f(x) = \begin{cases} ax+b & x \leq 1 \\ \sin \pi x & x > 1 \end{cases}$ در $x=1$ مشتق پذیر باشد.

* اگر نقطه‌ای داده نشود، آن را ردی نقطه مرز بررسی می‌کنیم

تست: تابع $f(x) = \begin{cases} \frac{x^3}{x} - 5 & x \geq 1 \\ x^2 + ax + b & x < 1 \end{cases}$ در همه نقاط مشتق پذیر است. a و b کدوم است؟

$\begin{matrix} 1(1) & 2(2) & 3(3) & 4(4) \end{matrix}$

مشتق توابع قدرمطلق:

ابتدا مشخص می‌کنیم وقتی x به سمت عدد مورد نظر میل می‌کند، عبارت داخل قدرمطلق با چه علامتی از داخل قدرمطلق بیرون می‌آید، سپس مشتق می‌گیریم.

مثال: $y = |x^3| + |x^2 - 2x| \rightarrow y'(-1) = ?$

مثال: $y = \frac{\sqrt{(x+1)^2(-3x+1)}}{-2x + \sqrt{-x+3}} \rightarrow y'(-1) = ?$

مثال: $y = (x-1) |x-1| + \sqrt[3]{(x-1)(x-2)} \rightarrow y'(1) = ?$

نست: اگر $f(x) = \frac{4}{5}x - \frac{1}{5}|x|$ و $g(x) = 4x + |x|$ باشد، مشتق $f \circ g(x)$ کدام است؟

۱۴ مشتق ندارد

۴، ۳

۳، ۲

۲ (۱)

مثال: $y = |x - 1| \rightarrow y'(1) = ?$

مثال: $y = |(x - 1)^3| \rightarrow y'(1) = ?$

نکته: تابع $y = |(x - a)^m|$ در $x = a$:

(۲) مشتق پذیر است اگر $m > 1$

(۱) مشتق ناپذیر است اگر $m = 1$

مثال: تعداد نقاط مشتق ناپذیر تابع زیر را تعیین کنید.

۱/ $y = |x| + |x - 1| + |x - 2|$

۲/ $y = |x^3| + |x + 1|$

$$3/ \quad y = ||x| - 1|$$

$$4/ \quad y = |x-2| \sin \pi x \quad * \text{ اگر پشت عبارت قدر مطلق عامل صفر نشدنی وجود داشته باشد}$$

مشق در آن نقطه موجود و برابر صفر است.

مثال: به ازای چه مقدار a تابع $y = x|x+2| + a|x+2|$ در همه نقاط مشتق پذیر است.

مثال: حدور a را طوری تعیین کنید که تابع $y = |ax^2 + 2x + a|$ در همه نقاط مشتق پذیر باشد.

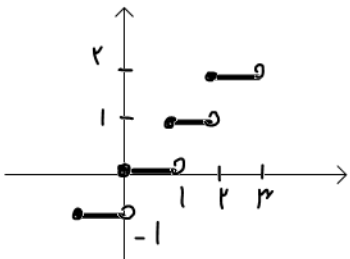
مثال: $f(x) = x\sqrt{x} + |x-1| \rightarrow f'_+(1) + {}^3f'_-(1) = ?$

مثال: $y = x\sqrt{x} + (x-1)|x-1| \rightarrow y'(1) = ?$

نست: اگر $f(x) = \frac{1+|x-2|}{|x|+2}$ ، حاصل $\lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{f(2-\Delta x) - f(2)}{\Delta x}$ کدام است؟

(۱) $-\frac{5}{8}$ (۲) $-\frac{5}{14}$ (۳) $\frac{5}{8}$ (۴) $-\frac{5}{14}$

مشتق توابع جزء صحیح:

$y = [x]$  $([x])' = \begin{cases} 0 & x \notin \mathbb{Z} \\ \text{وجود ندارد} & x \in \mathbb{Z} \end{cases}$

اگر داخل جزء صحیح عددی صحیح شود، یونگی را بررسی می‌کنیم، از هر طرف پیوسته بود، مشخص نمی‌کنیم و تنها x به سمت عدد مورد نظر میل می‌کند، به عددی از داخل جزء صحیح تبدیل می‌شود، پس مشتق می‌گیریم.

مثال: مشتق پذیری $y = x[x]$ را در $x=0$ بررسی کنید

مثال: مشتق پذیری $y = x^2[x]$ را در $x=0$ بررسی کنید.

نکته: تابع $y = (x-a)^m[x]$ در $x=a \in \mathbb{Z}$:

(۲) مشتق پذیر است اگر $m > 1$

(۱) مشتق ناپذیر است اگر $m=1$

مثال: تابع $y = (x^2 + ax + b)[x]$ در $x = -1$ مشتق پذیر است. $a+b$ کدام است؟

مثال: تابع $y = (x^3 + ax + b)[x]$ در $x = -1$ مشتق پذیر است. حاصل $a+b$ کدام است؟

مثال: $y = x[x^2] \rightarrow y'_{-}(3) = ?$ و $y'_{+}(3) = ?$

مثال: $y = (x^2 - 4)[x^2] \rightarrow y'_{-}(2) = ?$, $y'_{+}(2) = ?$

مثال: $y = |x^2 - 4|[-x] \rightarrow y'_{-}(-2) + y'_{+}(-2) = ?$

تست: مشتق راست تابع $y = ([x] - |x|) \sqrt[3]{4x}$ در $x = -3$ کدام است؟

$\frac{-16}{3}$ (۱) -5 (۲) -4 (۳) $\frac{7}{3}$ (۴)

مشتق توابع ضد ضابطه ای:

مثال: اگر $f(x) = \begin{cases} x+1 & x \geq 1 \\ 2x & x < 1 \end{cases}$ باشد، حاصل ددغای زیر را بدست آورید.

۱/ $\lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \frac{f(1-\Delta x) - f(1)}{\Delta x}$

۲/ $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h^2) - f(1)}{h^2}$

۳/ $\lim_{n \rightarrow +\infty} n \left(f\left(1 + \frac{1}{n}\right) - f(1) \right)$

تست : فرض کنید $g(x) = ax^2 + bx + c$ و $(a \neq 0)$ ، $f(x) = \begin{cases} g(x) & x \geq K \\ g'(x) & x < K \end{cases}$ باشد. اگر f یک

تابع مشتق پذیر باشد. حداقل مقدار K به شرط $a + b + c = 0$ کدام است ؟

۴ (۴)

۳ (۳)

۱ (۲)

۳ (۱)

تست : فرض کنید $f(x) = \begin{cases} -1 & x < -1 \\ x & -1 \leq x \leq 1 \\ 1 & x > 1 \end{cases}$ و $g(x) = 1 - x^2$ ، تعداد عناصر مجموعه نقاطی که

$g \circ f$ یا $f \circ g$ در آن مشتق پذیر نیست کدام است ؟

۵ (۴)

۴ (۳)

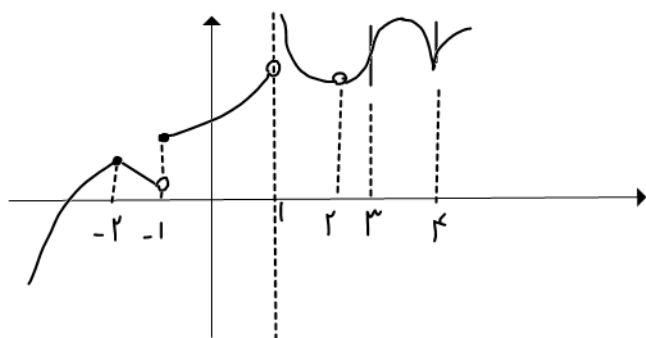
۳ (۲)

۲ (۱)

۱- تابع f را در بازه $[a, b]$ مشتق پذیر گوئیم هرگاه تابع در بازه (a, b) مشتق پذیر و در $x=a$ مشتق راست و در $x=b$ مشتق چپ داشته باشد.

۲- تابع f را در بازه (a, b) مشتق پذیر گوئیم هرگاه در بازه (a, b) مشتق پذیر و در $x=a$ مشتق راست داشته باشد.

^۳- " [ط، ا] " " " " " " "
مثال : با توجه به نمودار زیر، مشتق پذیر یا تابع را در بازه ها ما داده شده بررسی کنید:
 $a=b$ " " " "


$$\begin{array}{ccc} (-\infty, -2] & [-1, 1) & (-\infty, -1) \\ (-2, 1) & (1, 2) & (2, 4) \\ (2, +\infty) & (4, +\infty) & \end{array}$$

شخص خود را از روی f و بالعکس:

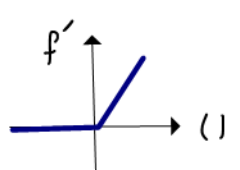
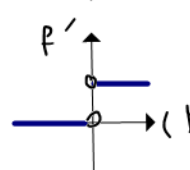
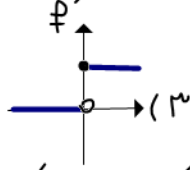
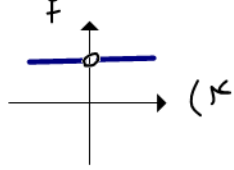
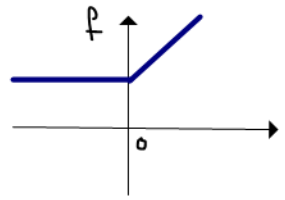
۱- اگر تابع f همواره صعودی باشد، $\rho \geq 1$ و نمودار مشتق در بالای محور x یا مماس بر آن است.

۲- اگر تابع f همواره نزولی باشد، $f' \leq 0$ و خودارزشی در پائین محور x یا بهاس برآین است.

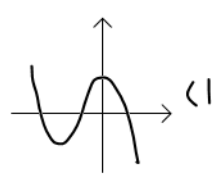
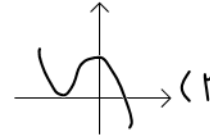
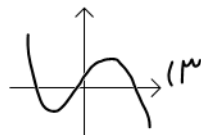
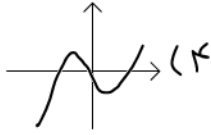
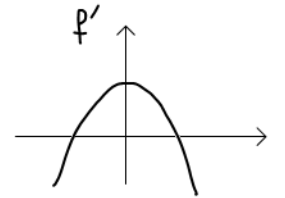
۳- اگر تابع f در نقطه‌ای مشتق پذیر باشد، نمودار مشتق در این نقطه ناپیوسته است.

مثال: نمودار $y = |x^2 - 4|$ را رسم و سپس ضابطه f' ، D_f ، نمودار f' را مشخص کنید

تست: اگر نمودار f به صورت مقابل باشد، نمودار f' به کدام صورت است؟



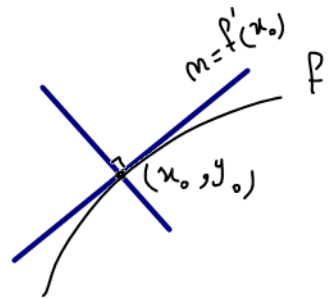
تست: راجع $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ، اگر نمودار f به صورت زیر باشد، نمودار f' کدام گزینه است؟



معادله خط مماس و قائم بر منحنی از نقطه‌ای واقع بر آن:

خط مماس: $y - y_0 = m(x - x_0)$

قائم: $y - y_0 = -\frac{1}{m}(x - x_0)$



مثال: عرض از مبدا خط مماس بر منحنی $y = \frac{\sqrt{4x+1}}{x^2 - 2x + 3}$ در نقطه‌ای به طول ۱ واقع بر آن چقدر است؟

تست: اگر f تابع پیوسته و $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x)+1}{x+1} = 3$ ، معادله خط مماس بر f در نقطه‌ای به طول ۱ - روی منحنی کدام است؟

(۴) $y = 3x + 4$

(۳) $y = -x + 2$

(۲) $y = 3x + 2$

(۱) $y = 2x + 3$

مثال: مماس بر منحنی $y = x^2 + 1$ در $x = 2$ بر مماس بر منحنی در $x = x_0$ عمود است. طول نقطه x_0 کدام است؟

نست: خط مماس بر منحنی $y = x^3 + 3x^2 + 1$ بر خط $y = 2 - 3x$ عمود است. این مماس از کدام یک از نقاط زیر میگذرد؟

$$(2, -4) \quad (4)$$

$$(2, -6) \quad (3)$$

$$(1, 4) \quad (2)$$

$$(1, 3) \quad (1)$$

نست: خطوط مماس بر منحنی $f(x) = |\sin 2x| + 1$ را در $x = 0$ رسم می‌کنیم. اگر A و B به ترتیب نقاط برخورد مماس با نیمای ربع دوم و چهارم باشند، طول پاره خط AB کدام است؟

$$2\sqrt{2} \quad (4)$$

$$\frac{4\sqrt{2}}{3} \quad (3)$$

$$\frac{2\sqrt{2}}{3} \quad (2)$$

$$(1) \text{ صفر}$$

آهنگ تغییر:

$$\text{میانگین} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

در بازه $[x_1, x_2]$

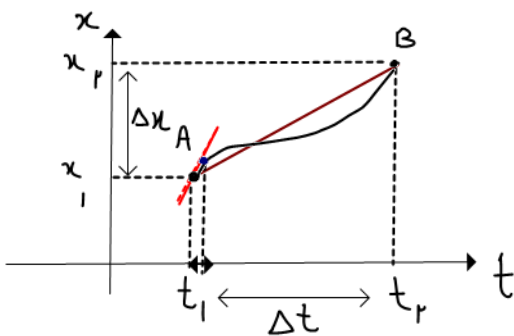
آهنگ متوسط

$$\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \leftarrow [x_0, x_0 + \Delta x]$$

از نقطه x_0 به اندازه Δx محو کنیم

آهنگ لحظه‌ای (آنی): $x_0 \leftarrow f'(x_0)$

$$\text{سرعت متوسط} \quad \bar{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{f(t_2) - f(t_1)}{t_2 - t_1}$$



$$\text{سرعت لحظه‌ای} \quad v = \frac{\Delta x}{\Delta t} = x'_t$$

$\Delta t \rightarrow 0$

مثال: در تابع $f(t) = \sqrt{t}$ ، آهنگ تغییر متوسط از نقطه $t_1 = 4$ تا $t_2 = 6.25$ ، چه اندازه است؟
آهنگ آنی در $t = 4$ است؟

مثال: در تابع $f(x) = \frac{x}{x-1}$ ، آهنگ متوسط در بازه $[2, 5]$ ، برابر آهنگ لحظه‌ای در $x = \alpha$ است. α کدام است؟ ($\alpha > 0$)

مثال: در تابع $f(x) = x^3$ ، اگر $x_0 = 3$ و $\Delta x = 0.1$ ، آنگاه متوسط چقدر است؟

نست: معادله حرکت متحرک به صورت $f(t) = t^3 - t^2 + 1$ بر حسب متر در بازه $[0, 5]$ داده شده است
در کدام لحظه، سرعت لحظه‌ای در متوسط با لعم برابر است؟

$$\frac{2 + \sqrt{61}}{3} \quad (14)$$

$$\frac{\sqrt{61}}{3} \quad (13)$$

$$\frac{\sqrt{61} - 1}{3} \quad (12)$$

$$\frac{1 + \sqrt{61}}{3} \quad (11)$$

مثال: درستی یا نادرستی عبارات زیر را مشخص کنید.
الف) آنگاه متوسط تابعی مانند f در بازه $[a, b]$ همیشه کمتر از بیش‌ترین مقدار متوسطی در نقطه است.

ب) اگر تابع صعودی باشد، آنگاه تغییر همواره صعودی است.

پ) تابع وجود ندارد که برای آن $f'(a) = 0$ و $f(a) = 0$.

مثال: گنجایش گرمی ۴ لیتر است. در لحظه $t=0$ سوراخی در ظرف ایجاد می شود. اگر حجم باقی مانده در ظرف پس از t ثانیه از رابطه $V=40\left(1-\frac{t}{100}\right)^2$ بدست آید:

الف) آهنگ تغییر متوسط در بازه [۱۰۰] چقدر است؟

ب) در چه زمانی آهنگ تغییر لحظه ای با آهنگ تغییر متوسط آن در بازه [۱۰۰] برابر می شود؟

نکته: در توابع درجه ۲، آهنگ متوسط در بازه $[a, b]$ ، با آهنگ لحظه ای در وسط بازه $\frac{a+b}{2}$ برابر است.

تست: در تابع $f(x) = 3x^2 + 4x - 2$ ، تفاضل آهنگ تغییر لحظه ای در لحظه $a + \frac{h}{2}$ از آهنگ متوسط تابع وقتی x از a به $(a+h)$ تغییر می کند، که نام است؟

۴) صفر

۳) h

۲) $2h$

۱) h

تست: در تابع $f(x) = x + \frac{1}{x}$ افق مماس وقتی x از $\frac{1}{2}$ به $(\frac{1}{2}+h)$ تغییر کند برابر $\frac{1}{9}$ است. h کدام است؟

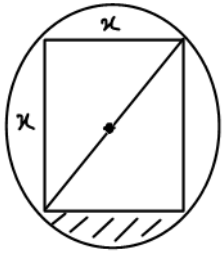
(۴) ۳

(۳) $\frac{2}{5}$

(۲) ۲

(۱) $\frac{1}{5}$

تست: طبق شکل مربع را درون دایره‌ای خاکی کرده‌ایم. افق مماسی سطح هاشور زده در کف‌ای که ضلع مربع $\frac{1}{2}$ باشد، چیست؟

(۴) $\frac{\pi}{4} - 1$ (۳) $\pi - 1$ (۲) $\frac{1}{2}$ (۱) π

مقدار تقریبی مشتق:

$$f'(a) \sim \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

هر چه x به a نزدیکتر باشد، به مقدار واقعی نزدیکتر است.

x	x_1	a	x_2
$f(x)$	$f(x_1)$	$f(a)$	$f(x_2)$

بین x_1 و x_2 هر کدام به a نزدیکتر باشد، از آن استفاده می‌کنیم.

اگر فاصله x_1 و x_2 تا a با هم برابر باشند، از میانگین آنها استفاده می‌کنیم:

$$f'(a) \sim \frac{\frac{f(x_1) - f(a)}{x_1 - a} + \frac{f(x_2) - f(a)}{x_2 - a}}{2} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

نست: توپی از یک پل به ارتفاع ۱۱ متر به هوا پرتاب می‌شود. $f(t)$ نشان دهنده فاصله توپ از سطح زمین در زمان t است. بر اساس جدول کدام یک از مقادیر زیری توان سرعت توپ را هنگامی که در ارتفاع تقریباً

زمان ۴ ثانیه است، نشان می‌دهد؟

t	۰	۰/۱	۰/۲	۰/۳	۰/۴	۰/۵
$f(t)$	۱۱	۱۲/۴	۱۳/۸	۱۵/۱	۱۶/۳	۱۷/۴

۱۴/۹۱ (۲)

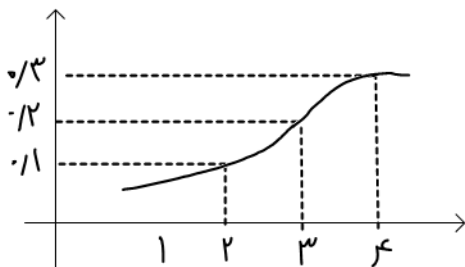
۱/۲۳ (۱)

۱۶/۰۳ (۴)

۱۱/۵ (۳)

نست: نمودار مقابل، گری از جمعیت یک شهر که به ویروس کرونا آلوده شده اند را بر حسب زمان (هفته)

نمایش می‌دهد. گرایش آلودگی در کدام زمان یا بازه زمانی بیشتر است؟



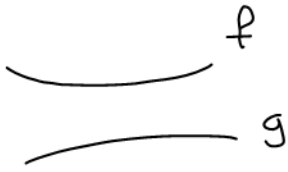
$t=3$ (۲)

$t=2$ (۱)

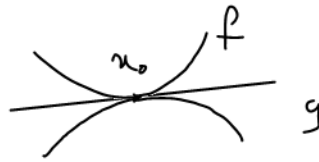
$[3, 4]$ (۴)

$[2, 3]$ (۳)

و ضعیف (در منحنی لبت به هم) :

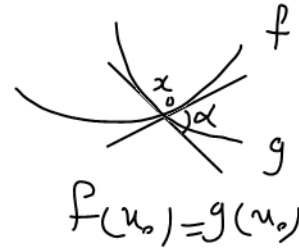


معادله $f=g$ ریشه ندارد
و f یکدیگر را قطع نمی کنند



$$\begin{cases} f(x_0) = g(x_0) \\ f'(x_0) = g'(x_0) \end{cases}$$

معادله $f=g$ ریشه مضاعف دارد



معادله $f=g$ ریشه ساده دارد

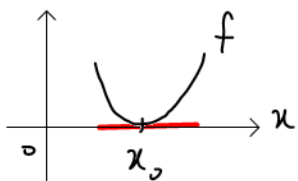
زاویه بین مماس ها : $\tan \alpha = \frac{|m - m'|}{1 + m m'}$

$m = f'(x_0)$, $m' = g'(x_0)$

مثال : خط $f(x) = mx + 1$ بر $g(x) = x^2 + 5$ مماس است. مقدار m را بیابید.

مثال : a, b را طوری بیابید که $f(x) = ax + b$, $g(x) = x^3 + x$ (بر $x = -1$ مماس شوند).

نکته : اگر بخواهیم معادله $f(x) = 0$ ریشه مضاعف داشته باشد ، باید ریشه مشترک در خود معادله صدق کند.



$$\begin{cases} f(x_0) = 0 \\ f'(x_0) = 0 \end{cases}$$

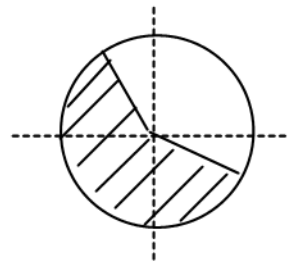
مثال : K را طوری بیابید که معادله $x^3 + 6x + K - 3 = 0$ ریشه مضاعف داشته باشد.

مثال: برای چه مقدار K منحنی $y = \frac{K}{x}$ و $y = 4x^2 - 3$ در ربع چهارم برهم می‌خورند؟

مثال: برای چه مقدار M ، منحنی $y = \frac{M \sin x + 1}{x^2 + x + 1}$ بر محور x مماس است؟

$\sin \square = \pm 1$ ریشه مضاعف دارد $\cos \square = \pm 1$

مثال: برای چه مقدار a تابع $f(x) = \frac{a \sin x + 1}{1 \sin x + 3}$ در بازه $(\frac{2\pi}{3}, \frac{5\pi}{3})$ بر خط $y = -1$ مماس است؟



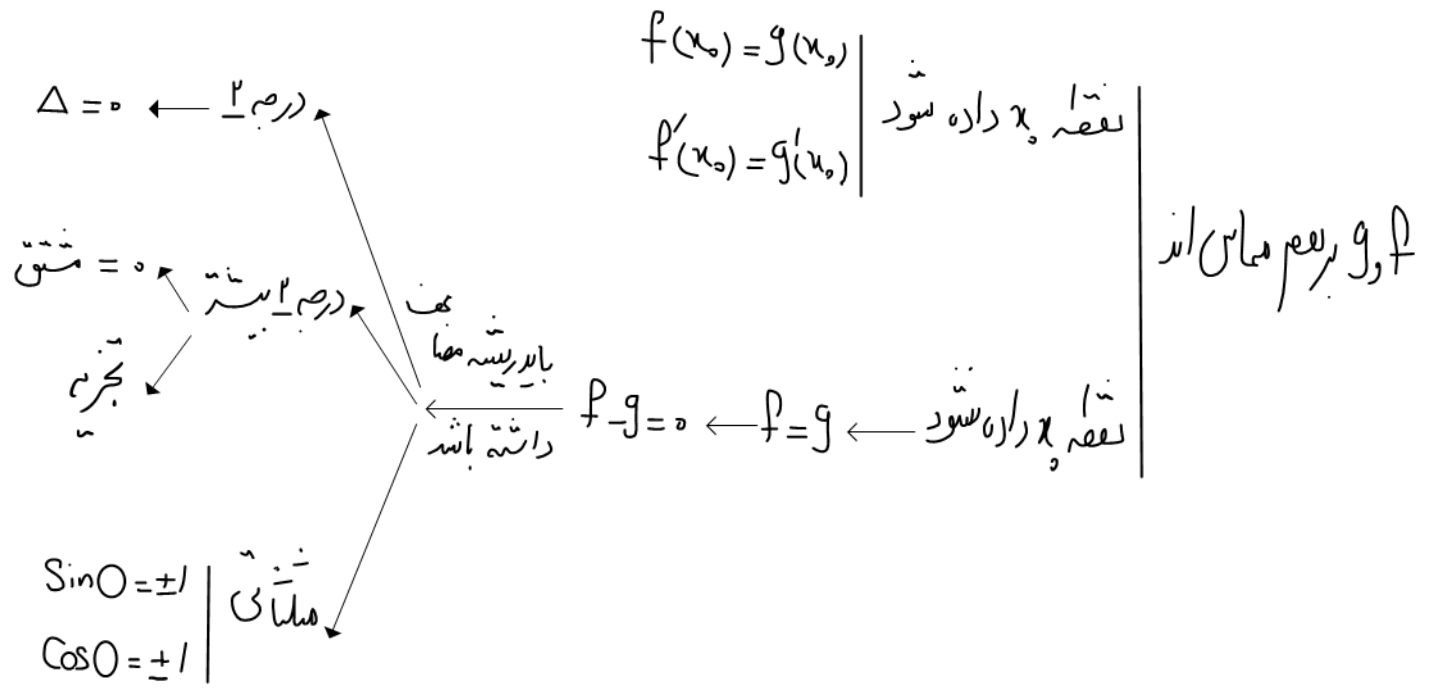
نست: خطی که دو نقطه به طول های a و 1 از منحنی به معادله $y = x^3 + ax^2 + 2x$ را به هم وصل کند، برای منحنی مماس است. a که ام است؟

$$-2, 1$$

$$1, 2$$

$$-1, 2$$

$$1, -1$$



« کاربرد متقن »

فصل ۵ کتاب دوازدهم

Max نسبی :

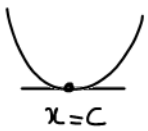
به نقطه یا نقاطی از نمودار گفته می شود که عرض این نقاط، از نقاط همسایه اش، بزرگتر یا مساوی باشد.

اکثر نسبی (موضعی)

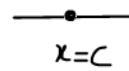
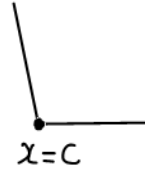
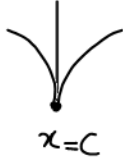
Min نسبی :

به نقطه یا نقاطی از نمودار گفته می شود که عرض این نقاط، از نقاط همسایه اش، کوچکتر یا مساوی باشد.

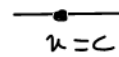
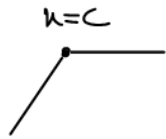
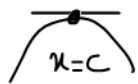
نمودارهای زیر در $x=C$ دارای Min نسبی هستند :



$$f'(C) = 0$$



نمودارهای زیر در $x=C$ دارای Max نسبی هستند :



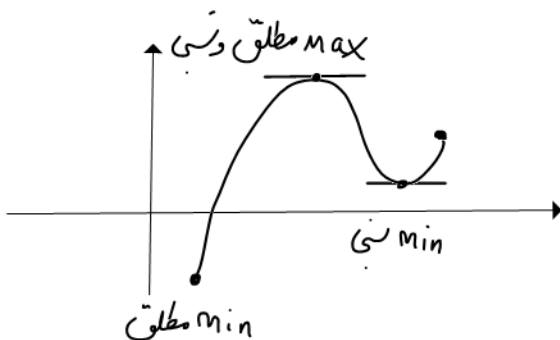
Max مطلق :

به نقطه یا نقاطی از نمودار گفته می شود که عرض این نقاط از همه نقاط تابع در بازه مورد نظر بزرگتر یا مساوی باشد.

اکثر مطلق

min مطلق :

به نقطه یا نقاطی از نمودار گفته می شود که عرض این نقاط از همه نقاط تابع در بازه مورد نظر کوچکتر یا مساوی باشد.



نکات:

۱- نزدیکی ندارد تابع در نقاط اکстрیم پیوسته یا مشتق پذیر باشد و اگر مشتق پذیر باشد، مشتق آن برابر صفر است.

۲- ممکن است اکتریم نباشد و مطلق برهم منطبق شوند. (اگر همبستگی اکتریم مطلق تعریف شده باشد، نباشد نیز محسوب می شود)

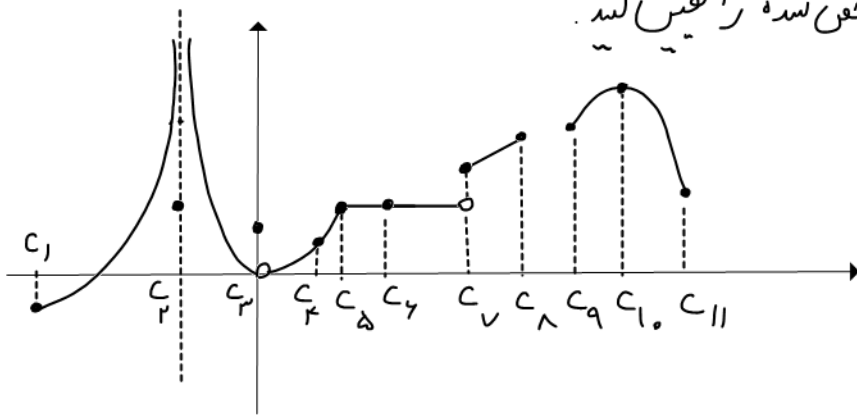
۳- نقاط ابتدایی و انتهایی بازه اکتریم نمی محسوب می شوند.

۴- هرگاه گفته شود، مقدار $\max$ یا $\min$ عبارتی عدد « a » است، منظور عرض آن می باشد.

۵- هر نقطه روی خط موازی محور x ، هم $\max$ و هم $\min$ نباشد.

۶- وجود محابب مانع با افعال ساده، شرط وجود اکتریم مطلق را از بین می برد.

مثال: با توجه به نمودار زیر، نوع نقاط مشخص شده را تعیین کنید.



c_1 :

c_2 :

c_3 :

c_4 :

c_5 :

c_6 :

c_7 :

c_8 :

c_9 :

c_{10} :

c_{11} :

مثال: نوع نقاط داده شده را در توابع زیر مشخص کنید.

$$y = |x^2 - 1|$$

در $x=0$

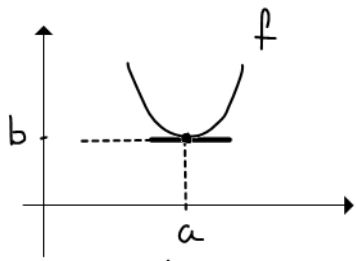
$$۲/ y = x [x] \quad x = \frac{1}{p} \rightarrow$$

$$۳/ y = x + [x] \quad x = 1 \rightarrow$$

$$۴/ y = \cos x + |\cos x| \quad x = \pi, \quad x = \frac{\pi}{p} \rightarrow$$

$$۵/ y = \sin x - [\sin x] \quad x = \pi, \quad x = \frac{\pi}{p} \rightarrow$$

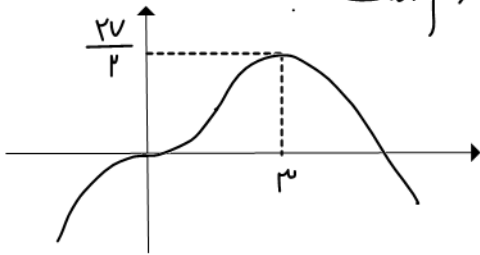
مثال: تابع $f(x) = \begin{cases} x^2 - x & x \geq 0 \\ x + 2 & x < 0 \end{cases}$ چند آلفا همبندی دارد ؟



نکته: محتمل است نقطه اکسترمیمی روجا صدق نکند:

(۱) در خود تابع f $(f(a)=b)$ (۲) $f'=0$ در $(f'(a)=0)$

مثال: a , b را طوری بیابید که تابع $f(x)=ax^3+bx^2$ در نقطه $(-1, 3)$ دارای اکسترمیمی باشد؟



مثال: شکل زیر خود را تابع $f(x)=ax^4+2x^3+bx^2$ می باشد. a که ام است؟

نست: اگر تابع $f(x)=\begin{cases} x^2 & x>0 \\ a & x=0 \\ x-3 & x<0 \end{cases}$ در $x=0$ اکسترمیمی نداشته باشد، مجموعه مقادیر a که ام است؟

(۱) $[0, 3]$ (۲) $[-3, 0]$ (۳) $(-\infty, -3] \cup [0, +\infty)$ (۴) $(-\infty, 0] \cup [3, +\infty)$

تست: در تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} (x-1)^2 - 2 & x > 0 \\ K+1 & x = 0 \\ 1 - |x-1| & x < 0 \end{cases}$ ، حدود K برای آن که تابع در $x=0$ ادامه‌پذیر نباشد، چقدر است؟

$$(4) \quad -2 < K < -1$$

$$(3) \quad K \geq -1$$

$$(2) \quad -2 < K \leq -1$$

$$(1) \quad -2 \leq K \leq -1$$

نقاط بحرانی:

اگر تابع f در $x=c$ تعریف شده باشد، آن را بحرانی گوئیم هرگاه دارای یکی از دو شرط زیر باشد:

$$y' = 0$$

$$x=c$$

$$(1) \quad f'(c) = 0 \quad \text{یا} \quad (2) \quad f'(c) \text{ موجود نباشد}$$

نکات:

۱- همه نقاط ادامه بحرانی هستند و علی‌کلیت صدق نمی‌کند.

۲- نقاط انتهایی بازه بحرانی محسوب می‌شوند.

۳- اگر مستقیماً از نمودار به موازات محور x باشد، بی‌شمار نقطه بحرانی داریم.

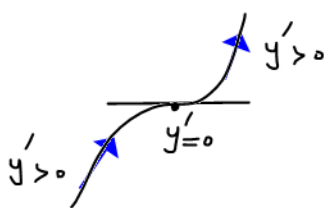
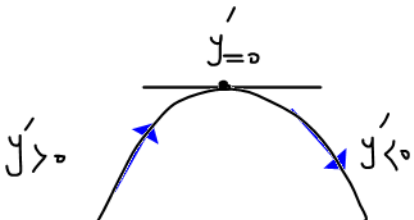
* برای به دست آوردن طول نقاط بحرانی و ادامه‌پذیری، y' را درست می‌آوریم، ریشه‌های توان فرد

صورت و مخرج (توابع رادیکالی) به شدت می‌تواند در دامنه تعریف شده باشد طول نقطه بحرانی و ادامه‌پذیری و

ریشه‌های توان زوج آن طول نقطه بحرانی و محقق است.

* اگر در نقطه‌ای تغییر علامت دهد

اتمام نمی‌شود محسوب می‌شود.



مثال: نقاط بحرانی توابع زیر را بدست آورید.

$$1/ \quad y = x^4 - 2x^2$$

$$2/ \quad y = \sqrt[3]{x^3 - 3x}$$

$$3/ \quad y = \sqrt{x^2 - 4}$$

* اگر فرض را در حال زوج باشد، دامنه آن را بدست آورید.

$$4/ \quad y = \sqrt{4 - x^2}$$

$$5/ \quad y = x + \frac{4}{x}$$

$$y/y = x^{\frac{r}{n}} - x^{\frac{r}{n}}$$

$$y/y = (x^r - 2x) \sqrt[3]{x}$$

* برای تعیین نقاط بحرانی $|f|$:
 ریشه اول: رسم نمودار
 ریشه دوم: (۱) ریشه های توان ۱ $f=0$
 ریشه ها $f'=0$

$$y/y = |\cos x| \quad x \in (-\frac{\pi}{2}, 2\pi)$$

$$y/y = |x^r - x|$$

$$1/ \quad f(x) = \begin{cases} 2x^2 - x & 0 < x < 1 \\ 3x^2 - 2 & 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

آزمون مشتق (جهت تشخیص نوع اکстрیم‌ها) :

نقطه بحرانی $x=c$ را :

1) $\max$ بی‌گوتیم هرگاه f' از $(+)$ به $(-)$ تغییر علامت دهد. 

2) $\min$ بی‌گوتیم هرگاه f' از $(-)$ به $(+)$ تغییر علامت دهد. 

* اگر f' در نقطه‌ای تغییر علامت ندهد، اکتریم بی‌محسوب نمی‌شود.

مثال : نوع نقاط اکتریم بی‌توابع زیر را تعیین کنید.

$$1/ \quad y = x^4 - 2x^2$$

$$2/ \quad y = (x^2 - 4)^{\frac{2}{3}}$$

تست: تابع $f(x) = \frac{a}{x} + bx^2$ در نقطه $(-2, 1)$ دارای اکترم نمی است. عدد a و نوع اکترم
 نمی کدام است؟

$$\text{Max}, \frac{4}{3} \quad (4)$$

$$\text{Min}, \frac{4}{3} \quad (3)$$

$$\text{Max}, -\frac{4}{3} \quad (2)$$

$$\text{Min}, -\frac{4}{3} \quad (1)$$

تست: اگر تابع $f(x) = \frac{x^2 - 2x}{x + a}$ دارای اکترم نمی باشد، مقادیر a که ام است؟

$$a < 2 \quad (4)$$

$$-2 < a < 0 \quad (3)$$

$$a < 0 \text{ یا } a > 2 \quad (2)$$

$$a < -2 \text{ یا } a > 0 \quad (1)$$

تست: در تابع $f(x) = |x - 4|$ ، فاصله در نقطه Max بی ر Min بی آل کدام است ؟

$$2\sqrt{5} \quad (4)$$

$$3\sqrt{2} \quad (3)$$

$$2\sqrt{2} \quad (2)$$

$$\sqrt{5} \quad (1)$$

تست: فاصله نقطه Max بی تابع $f(x) = x + \sqrt{4x - x^2}$ از نیمار ناصیه اول کدام است ؟

$$2\sqrt{2} \quad (4)$$

$$2 \quad (3)$$

$$\sqrt{2} \quad (2)$$

$$1 \quad (1)$$

نکته: توابع زیر در $x = \alpha$ دارای آسِم نمی‌باشند:

$$1- y = |x - \alpha| \cdot g(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow \alpha} g(x) > 0 \quad \text{نی} \quad \min$$

$$x = \alpha$$

$$2- y = (x - \alpha)^{p_n} \cdot g(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow \alpha} g(x) < 0 \quad \text{نی} \quad \max$$

$$\left. \begin{aligned} y &= \sqrt[p_{k+1}]{(x - \alpha)^{p_n}} \cdot g(x) \\ y &= \sqrt[k]{|x - \alpha|} \cdot g(x) \end{aligned} \right\} \quad 3-$$

مثال: نوع نقاط داده شده را در توابع زیر مشخص کنید:

$$1/ y = (x - 2)^2 (x^2 + x - 9) \quad x = 2, \text{ در}$$

$$2/ y = x |x - 4| \quad x = 4, \text{ در}$$

تست: فرض کنید A, B نقاط آسِم تابع $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 1$ باشند. خط نقطه
روی منحنی f وجود دارد که خطوط مماس بر آن موازی پاره خط AB است؟

۳/۴

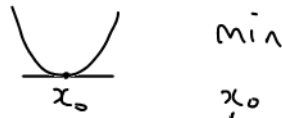
۲/۳

۱/۲

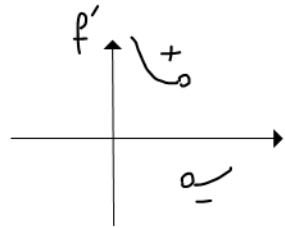
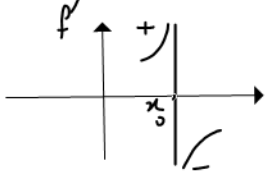
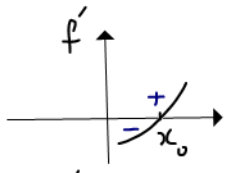
۱/ صفر

نکته: اگر نمودار مشتق تابع پیوسته f را داشته باشیم، نقاط زیر طول نقطه اکسترم برای تابع f باشد:

(۱) محل برخورد با محور x ها



(۲) نقاط قائم با انفعال سازه

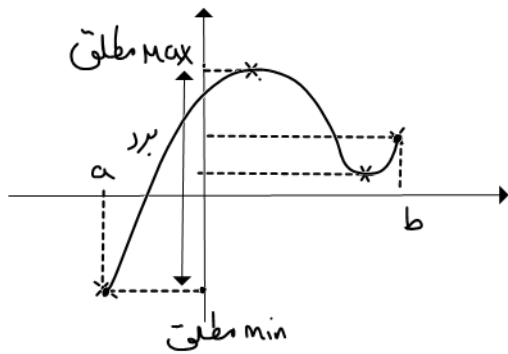


۳- نقاط استوایی که حدیچ در راست مختلف علامت دارند



تعیین اکسترم مطلق تابع پیوسته f در بازه $[a, b]$:

نقاط بحرانی مطلق به بازه $[a, b]$ را بدست آورده و مقدار آنها را محاسبه می کنیم، هر کدام کمتر شود $\min$ مطلق و هر کدام بیشتر شود $\max$ مطلق تابع مورد نظر است.



مثال: کمترین و بیشترین مقدار تابع $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$ را در بازه $[-2, 3]$ بدست آورید.

نست: $\max$ ، $\min$ مطلق تابع $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 15x$ در بازه $[-4, 3]$ کدام است؟

(۴) -17 و 36

(۳) -36 و 17

(۲) -45 و 17

(۱) -18 و 24

نست: Max مطلق تابع $f(x) = \frac{1}{x^4 - 4x^3 + 4x^2 + 4}$ کدام است؟

$$\frac{1}{2} \quad (4)$$

$$\frac{1}{3} \quad (3)$$

$$\frac{1}{5} \quad (2)$$

$$\frac{1}{6} \quad (1)$$

نکته: اگر بازه به صورت (a, b) باشد، در نقاط انتهایی و انتهایی به صورت حدی عمل می‌کنیم.
اگر بیشترین یا کمترین مقدار تابع روی این نقاط واقع شوند، وجود ندارد.

مثال: $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1 \quad x \in (-1, 4)$

نکته: اگر بازه‌ای داده شود، Max، Min مطلق را روی دامنه تابع بررسی می‌کنیم.
مثال: بیشترین و کمترین مقدار تابع $f(x) = x\sqrt{1-x^2}$ چیست؟

تست: اگر $f(x) = \max\{|2x|, |x+1|\}$ باشد، آنگاه $\min$ تابع $f(x)$ کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{3}$ (۲) $\frac{2}{3}$ (۳) $\frac{4}{3}$ (۴) ۲

تست: اگر $f(x) = \max\{x^2, |x - \frac{3}{4}|\}$ باشد، کمترین مقدار تابع $f(x)$ کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{4}$ (۲) $\frac{1}{3}$ (۳) $\frac{4}{9}$ (۴) $\frac{1}{2}$

تست: $\max$ تابع $f(x) = -|x| \cos x$ در بازه $[-1, 1]$ کدام است؟

- (۱) صفر (۲) $\frac{1}{\pi}$ (۳) $\cos 1$ (۴) ۱

تست: کمترین مقدار تابع $f(x) = x - \sqrt{x^3 - 3x^2}$ برای $x \in \mathbb{R}$ کدام است؟

- (۱) -۱ (۲) $-\frac{1}{3}$ (۳) صفر (۴) $\frac{1}{3}$

نست: $\max$ مطلق تابع $P(x) = -x + \sqrt{x^3 - x^2}$ ندارد است؟

(۴) $\max$ دارد

(۳) $\frac{2}{3}$

(۲) $\frac{1}{3}$

(۱) صفر

نست: تابع با ضابطه

$$f(x) = \begin{cases} \cos \pi x & |x| < 1 \\ 2 - |x - \frac{1}{2}| & 1 \leq |x| \leq 2 \end{cases}$$

(۲) $\max$ مطلق دارد - $\min$ مطلق ندارد

(۱) $\max$ و $\min$ مطلق دارد

(۴) $\max$ و $\min$ مطلق ندارد

(۳) $\max$ مطلق ندارد - $\min$ مطلق دارد

نکته: برای بدست آوردن بیشترین و کمترین مقدار تابعی به صورت
 $y = a \sin^2 u + b \sin u + c$
 $y = a \cos^2 u + b \cos u + c$

با تغییر متغیر $\sin u = t$ یا $\cos u = t$ و شرط $-1 \leq t \leq 1$ - مثال را حل می‌کنیم.

مثال: بیشترین و کمترین مقدار توابع زیر را بیابید.

۱/ $y = \sin^2 u - \sin u$

۲/ $y = \sin^2 x + \cos x$

۳/ $y = \sqrt{8 \sin u} - \sin u$

نکته: صفحات ۲۴۴ الی ۲۴۵ در تویج کده ۲ جا صدق می کند:

(۲) در صورت تابع

(۱) در صورت تابع f

$$y = \frac{f(x)}{g(x)}$$

آنگاه همبندی نقطه (x_0, y_0)

$$1/ y_0 = \frac{f(x_0)}{g(x_0)}$$

$$2/ y_0 = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$$

$$\text{اثبات: } y' = \frac{f'(x)g(x) - g'(x)f(x)}{g^2(x)} \rightarrow y'(x_0) = 0 \rightarrow f'(x_0)g(x_0) - g'(x_0)f(x_0) = 0$$

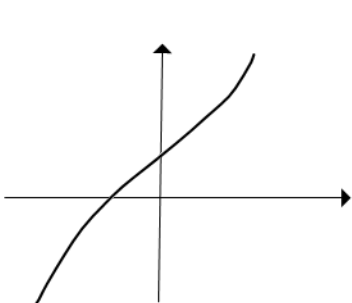
$$f'(x_0)g(x_0) = g'(x_0)f(x_0) \rightarrow \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)} = \frac{f(x_0)}{g(x_0)} = y_0$$

مثال: a, b را طوری باید که نقطه $(-2, 3)$ آنگاه همبندی تابع $f(x) = \frac{ax+b}{x}$ باشد.

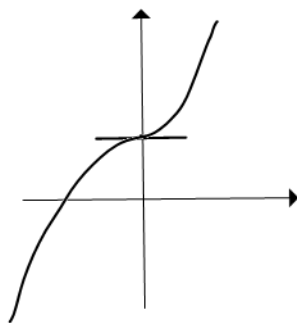
صعودی یا نزولی بودن تابع (یکنواختی):

$$x_1 < x_2 \rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

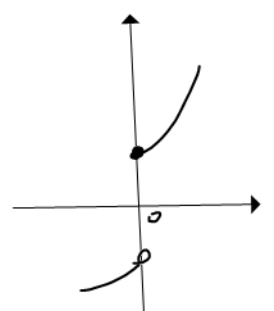
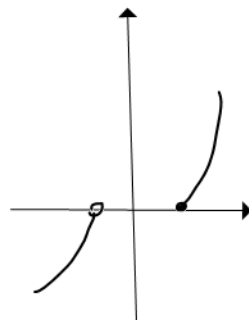
آنگاه صعودی:



$f' > 0$

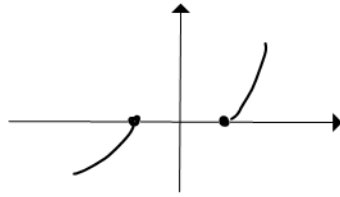
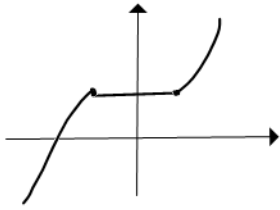


$f' \geq 0$



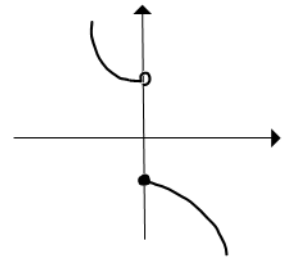
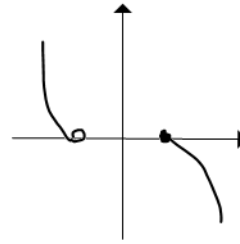
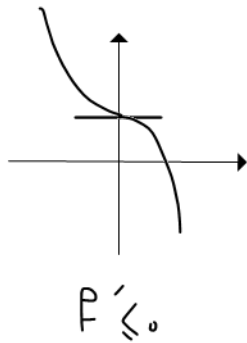
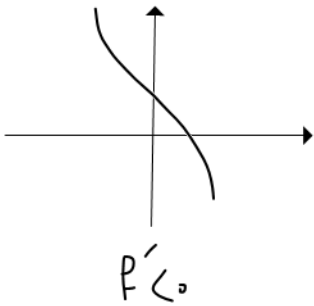
$$x_1 < x_2 \longrightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

تابع صعودی :



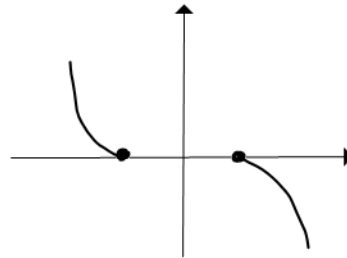
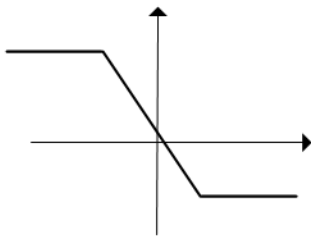
$$x_1 < x_2 \longrightarrow f(x_1) > f(x_2)$$

تابع آلیه‌آ نزولی :



$$x_1 < x_2 \longrightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$$

تابع نزولی :

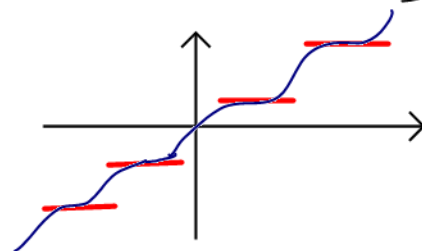


الف) تابع f ، تابع است مشتق پذیر (مخودار f' همواره پیوسته است) :

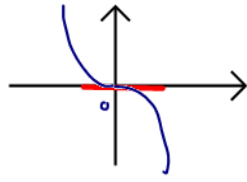
۱- تابع f ، همواره صعودی گزینیم هرگاه $f' \geq 0$ و مخودار مشتق در این حالت در بالای

محور x یا ماس بر آن است.

مثال: $f(x) = x + \sin x$



۲- تابع f را همواره نزولی گوئیم هرگاه $f' \leq 0$ و نمودار مشتق در این حالت در زیر محور x یا تماس بر آن است.



مثال: $f(x) = -x^3$

۳- تابع f را نه صعودی و نه نزولی گوئیم هرگاه f' در بازه‌ای مثبت و در بازه‌ای منفی باشد (نکته: توان فرد داشته باشد)

در این حالت جدول تغییر علامت را رسم و آن را تعیین علامت می‌کنیم.

مثال: $f(x) = x^3 - 3x^2$

۴- تابع ثابت، هم صعودی و هم نزولی است.

ب) تابع f مشتق ناپذیر باشد (نمودار مشتق، نامعین است ناپیوسته) :

مثال: $f(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{x} & x \leq 0 \\ x^2 - 1 & x > 0 \end{cases}$ هر است رسم کنیم

مثال: $f(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{x} & x \leq 0 \\ x^2 + 1 & x > 0 \end{cases}$

مثال: $f(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{x} & x \leq 0 \\ x^2 - 1 & x \geq 1 \end{cases}$

مثال: یک‌نمایی حرکت از توابع زیر را بررسی کنید:

۱/ $y = |x^2 - 1|$

۲/ $y = |x| + |x - 2|$

۳/ $y = \frac{1}{x}$

$$f/ y = \tan x - \sin x$$

$$\left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$$

نست : تابع $y = \frac{x}{x^2 - 1}$ در کدام بازه زیر همواره نزولی است ؟

$$\begin{array}{cccc} (-\infty, +\infty) & (-1, 1) & (-1, +\infty) & (-\infty, 1) \end{array} \quad \begin{array}{c} (4) \\ (3) \\ (2) \\ (1) \end{array}$$

نست : عدد a را در کدام فاصله در نظر بگیریم که تابع $f(x) = \frac{ax - 2}{x + a - 3}$ با ضابطه $x \geq 1$ اکیداً صعودی باشد ؟

$$\begin{array}{cccc} (2, +\infty) & [2, +\infty) & (-\infty, 0] & (-\infty, 1) \end{array} \quad \begin{array}{c} (4) \\ (3) \\ (2) \\ (1) \end{array}$$

نست : تابع $f(x) = x^3 + mx^2 + x$ همواره صعودی است . حدود m کدام است ؟

$$|m| \leq \sqrt{3} \quad -\sqrt{3} \leq m \leq \sqrt{3} \quad 0 \leq m \leq \sqrt{3} \quad |m| \leq \sqrt{3}$$

نست : تابع $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$ در بازه $(-a, a)$ همواره نزولی است . بیشترین مقدار a کدام است ؟

$$1 \quad 2 \quad 3 \quad 4$$

نست : تابع $f(x) = x^{\frac{4}{3}} - x^{\frac{2}{3}}$ ، $x > 0$ در بازه (a, b) همواره نزولی است . بیشترین مقدار $(b-a)$ کدام است ؟

$$\frac{1}{2} \quad \sqrt{2} \quad \frac{\sqrt{2}}{4} \quad \frac{\sqrt{2}}{2}$$

نست : جهت حرکت تابع $P(x) = x \sin x + \cos x$ در بازه $(\pi, 2\pi)$ به کدام صورت است ؟

(۱) همواره صعودی

(۲) همواره نزولی

(۳) ابتدا صعودی سپس نزولی

(۴) ابتدا نزولی سپس صعودی

مثال : حدود a را طوری بیابید که تابع $y = \frac{a \cos x}{2 \cos x + 1}$ در بازه $(\pi, 2\pi)$ همواره صعودی باشد ؟

نکات :

- ۱- مجموع در تابع صعودی ، صعودی است .
- ۲- اگر در تابع صعودی و مثبت باشند ، ضرب آنها نیز صعودی است .
- ۳- جهت حرکت f ، f - خلاف یکدیگر است .

"	"	"	"	"
"	"	"	"	"

نکته: اگر n را از $-\infty$ به $+\infty$ افزایش دهیم، تابع $y = \frac{1}{x^2 + 2x + 3}$...

(۲) همواره کم می شود

(۱) همواره زیاد می شود

(۳) ابتدا زیاد سپس کم می شود

(۴) ابتدا کم می شود

۴- برای تشخیص صعودی یا نزولی بودن توابع مرکب، کافی است علامت مشتق آنها را در هم ضرب کنیم.

مثال: اگر f و g به صورت زیر باشند، یکپارچگی $f \circ g$ را بررسی کنید.

روال کلی حل مسائل بهینه سازی:

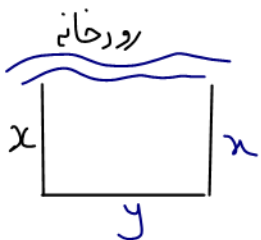
۱- تعریف مسئله رسم می کنیم

۲- متغیرها را تشخیص و رابطه ای بین آنها می نویسیم (رابطه کلی)

۳- کمیتی که می خواهیم Max یا Min شود را تعیین و معادله آن را می نویسیم (معادله اصلی)

۴. با استفاده از رابطه کلی، یکی از متغیرها را نسبت به دیگری بدست آورده و در معادله اصلی، جایگذاری کرده پس بر حسب یک متغیر مشتق و حاصل را مساوی صفر قرار می دهیم.
مثال: محیط متغیری برابر ۲۰ است. بیشترین مقدار مساحت را بیابید.

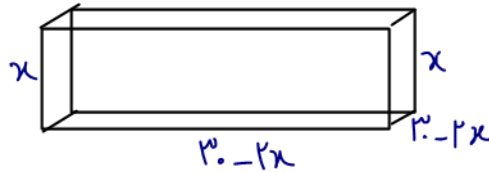
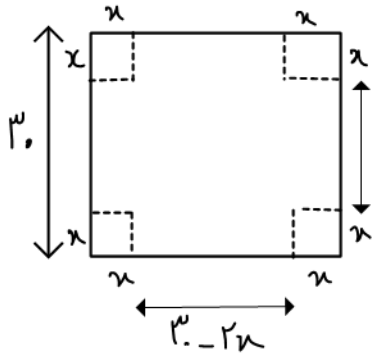
* اگر مجموعه دو مقدار مثبت عدد ثابتی شود، حاصل ضرب آنها زمانی $\max$ خواهد بود که با هم برابر باشند.
مثال: با طنابی به طول ۱۲۰ متری فواهم حمامی به شکل متغیل در حاشیه یک رودخانه بکشیم، بیشترین مساحت متغیل چقدر است؟



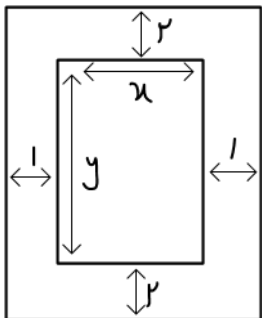
مثال: تفاضل دو عدد حقیقی برابر ۱۰ است. دو عدد را چنان بیابید که ضرب آنها کمترین مقدار ممکن گردد.

مثال: غلظت یک ماده شیمیایی، t ساعت بعد از تزریق از رابطه $C(t) = \frac{۳t}{t^۳ + ۲۷}$ بدست می آید.
چند ساعت پس از تزریق، غلظت در خون بیشترین مقدار ممکن خواهد بود؟

مثال: ورق فلزی مربع شکل، ضلع 3 cm را در نظر بگیرید. می‌خواهیم از چهار گوشه آن مربع‌های به ضلع x برش
 زنیم، سپس با تا کردن ورق در امتداد خط چین‌های مشخص شده یک جعبه در باز بسازیم. مقدار x چقدر
 باشد که حجم قوطی بیشترین مقدار ممکن گردد؟

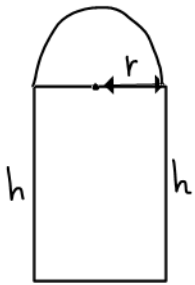


مثال: هر صفحه مستطیل شکل از یک کتاب چوبی، شامل یک متن با مساحت 32 cm^2 خواهد بود.
 هنگام طراحی قطع این کتاب، لازم است حاشیه‌های بالا و پایین هر صفحه 2 cm و حاشیه‌های کناری هر کدام
 1 cm در نظر گرفته شوند. ابعاد صفحه را طوری تعیین کنید که مساحت هر صفحه از کتاب کمترین مقدار ممکن باشد.

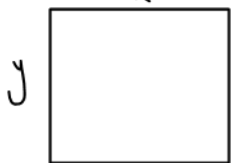


مثال: هزینه سوخت یک قطار در هر ساعت برای حرکت با سرعت $7 \frac{\text{KM}}{\text{h}}$ برابر 32.7^2 تومان است. همچنین سایر هزینه‌ها برای هر ساعت، صرف نظر از سرعت برابر ۸۰۰۰۰ تومان است. قطار با چه سرعتی حرکت کند که هزینه آن در یک کیلومتر کمترین مقدار ممکن باشد.

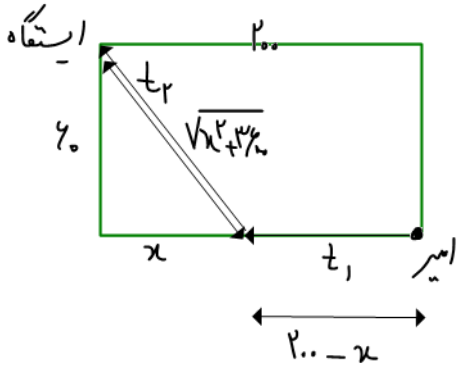
مثال: در برخی بناهای تاریخی پیجره‌هایی وجود دارد که به شکل یک مستطیل در نیم دایره‌ای بر روی آن می‌باشد به طوری که قطر نیم دایره برابر با پهنای مستطیل است. اگر محیط پیجره ۴٫۵ متر باشد، ابعاد آن را طوری بیابید که بیشترین نوردهی را داشته باشد.



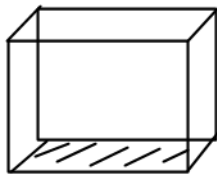
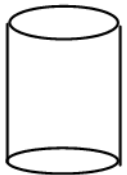
مثال: کشاورزی می‌خواهد دور یک مزرعه مستطیل شکل به مساحت ۱۰۰۰۰ مترمربع را دیوارکشی کند. هزینه هر متر دیوارهای شمالی و جنوبی ۲ میلیون تومان و هزینه هر متر دیوارهای شرقی و غربی ۸ میلیون تومان است. ابعاد مزرعه چقدر باشد تا هزینه دیوارکشی کمترین مقدار ممکن گردد.



مثال: امیری فزاهد به ایستگاه اتوبوسی که در ۲۰۰ متری غرب و ۶۰ متری شمال موقعیت فعلی او بعد از پارک قرار دارد بود، او می‌تواند با سرعت ۳ م/س از پیاده‌رو کنار پارک به سمت غرب برود. همچنین می‌تواند از درون پارک و با سرعت ۲ م/س بجزر کند. با توجه به شکل، مقدار x را طوری بیابید که در کمترین زمان به ایستگاه برسد.

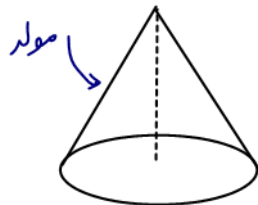
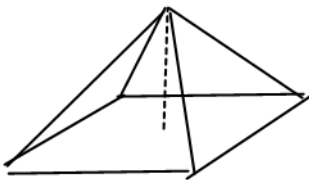


منشور: دو قاعده یکسان و موازی که رؤس آنها به هم وصل باشد



$$\text{ارتفاع} \times \text{مساحت قاعده} = \text{حجم } V$$

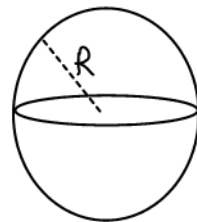
$$\text{ارتفاع} \times \text{محیط قاعده} = S \text{ جانبی}$$



$$\text{کهرم: ارتفاع} \times \text{مساحت قاعده} = \frac{1}{3} V$$

$$V = \frac{4}{3} \pi r^3$$

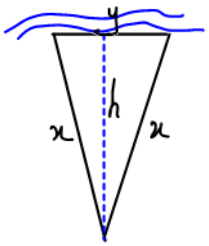
$$S = 4 \pi r^2$$



کره:

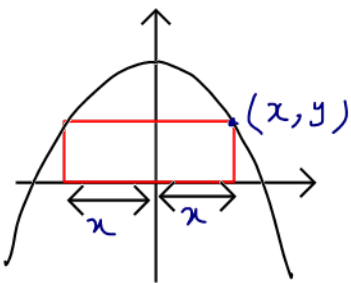
مثال: بی فوایم یک قوسی فلزی استوانه‌ای شکل در برابر سازه‌ای که گنجایش آن دقیقاً یک لیتر است. ابعاد قوسی چقدر باشد تا مقدار فلز بکار رفته $\min$ شود.

مثال: بی فوایم کنار رودخانه یک محوطه به شکل مثلث متساوی‌الساقین را زده‌ای کنیم. به طوری که قاعده مثلث منطبق بر رودخانه باشد. اگر تنها هزینه ۱۰۰ متر را در اختیار داشته باشیم، در این صورت بیشترین



مساحت ممکن برای مثلث چقدر خواهد بود؟

مثال: ابعاد مستطیلی با بیشترین مساحت ممکن که در رأس آن روی محور x ها و در رأس دیگرش بالای محور x



و روی سهمی $y = 12 - x^2$ باشد را تعیین کنید.

نست: بیشترین مساحت مستطیلی که در ضلع آن بر روی محورهای مختصات در رأس چهارم آن بر روی

منحنی به معادله $y = \sqrt{12 - x}$ در ناحیه اول واقع شود که ام است؟

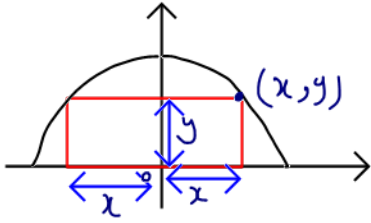
$$18 \quad 14$$

$$16 \quad 13$$

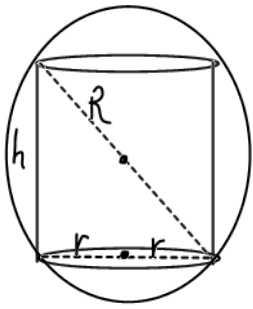
$$8\sqrt{3} \quad 2$$

$$8\sqrt{2} \quad 1$$

مثال: یک مستطیل در یک نیم دایره محاط شده است. اگر شعاع دایره ۴ سانتی متر باشد، طول در عرض مستطیل را طوری بدست آورید که مساحت آن بیشترین مقدار ممکن گردد.



مثال: درون کره ای به شعاع R ، استوانه ای به حجم Max محاط کرده ایم. شعاع قائده در ارتفاع استوانه را بیابید.



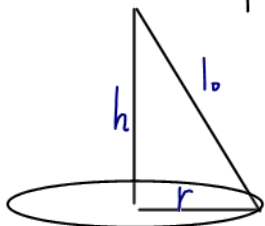
سست: از بین مثلث های قائم الزامی با اندازه وتر ۱ در ضلع قائم با کدام نسبت انتخاب شود تا حجم حاصل از دوران این مثلث حول ضلع قائم، بیشترین باشد؟

$$\frac{\sqrt{2}}{1} \quad (۴)$$

$$\frac{3}{2} \quad (۳)$$

$$\frac{\sqrt{3}}{1} \quad (۲)$$

$$\frac{2}{1} \quad (۱)$$



مثال: Min فاصله منحنی $y = \sqrt{x}$ از نقطه $(0, 1)$ چقدر است؟

نست: قرینه نقطه A دایره بر سهمی $y = x^2$ ، رانست به نیاز ناصیه اول رسوم را تعیین و آن را A' می نامیم، اگر طول نقطه A بین در طول متوالی از کل تقاطع تابع f با خط نیاز مورد تقریب باشد، Max طول پایه خط AA' که ام است؟

$$\frac{\sqrt{2}}{8} \quad (14)$$

$$\frac{\sqrt{2}}{4} \quad (13)$$

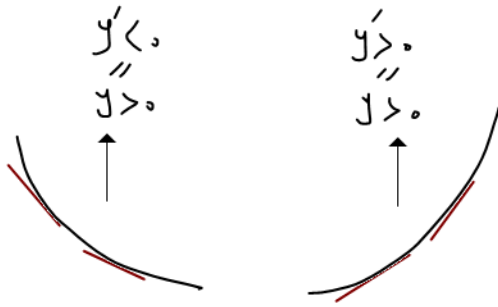
$$\frac{\sqrt{2}}{2} \quad (12)$$

$$\sqrt{2} \quad (1)$$

مثال: کمترین فاصله منحنی $y^2 = 2x + 4$ از مبدأ مختصات چقدر است؟

مثال: کمترین فاصله منحنی $y = x^2$ از خط $x - y - 4 = 0$ چقدر است؟

تقریبی :



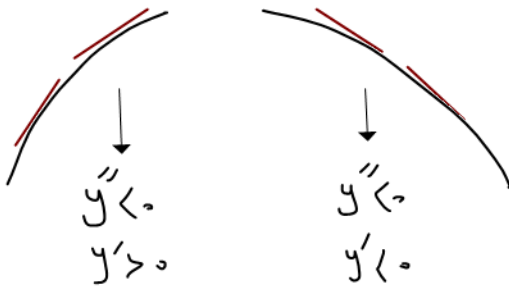
الف) تقریب بالا :

یک منحنی $\min$ دارای قوسی از آن را در تقریب

در تقریب بالا مماس بر منحنی در زیر منحنی و $y'' < 0$ همواره (+) است.

* نمودار مشتق در این حالت همواره صعودی است.

ب) تقریب پایین :



یک منحنی $\max$ دارای قوسی از آن را در تقریب

در تقریب پایین ، مماس بر منحنی در بالای منحنی

و $y'' < 0$ همواره منفی است.

* نمودار مشتق در این حالت همواره نزولی است.

* برای بررسی تقریب تابع ، ریشه های توان فرد صورت و مخرج y' را بدست آورده و

y' را تعیین علامت می کنیم.

مثال : $y = \frac{1}{x}$

مثال: $y = x^6 - x^4$

تست: نقطه نمودار $y = \frac{1}{x^2 + 12}$ در بازه $(-a, a)$ روبه پایین است. بیشترین مقدار a کدام است؟

۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴)

تست: جهت نقطه $y = x^2 + \sqrt{x}$ در بازه (a, ∞) چگونه است؟

- ۱) همواره روبه بالا ۲) همواره روبه پایین
- ۳) ابتدا روبه بالا سپس روبه پایین ۴) ابتدا روبه پایین سپس روبه بالا

نست: تقریباً تابع $y = x^{\frac{1}{3}} - x^{\frac{4}{3}}$ در بازه (a, b) ردیابی است. بیشترین مقدار $(b-a)$ کدام است؟

۵ (۴)

۴ (۳)

۳ (۲)

۲ (۱)

نست: تقریباً تابع $y = x^2 |x-1|$ در بازه (a, b) به طریقی صاف است. بیشترین مقدار $(b-a)$ کدام است؟

۳ (۴)

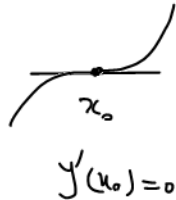
۲ (۳)

 $\frac{5}{3}$ (۲) $\frac{2}{3}$ (۱)

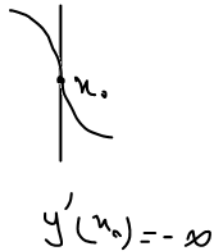
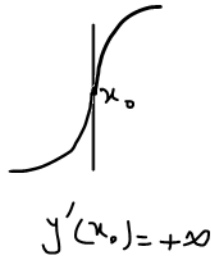
نقطه کف :

نقطه‌ای است که منحنی در آن تغییر انحنا دارد و مماس بر منحنی در این نقطه از داخل منحنی می‌گذرد.

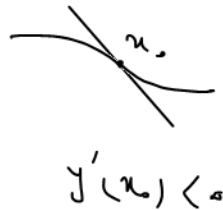
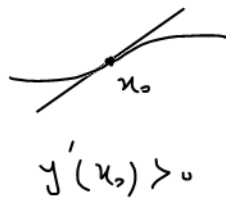
کف افقی



کف قائم



کف مایل



* y'' در نقطه کف تغییر علامت می‌دهد. (رشته‌های توان فرد y'')

* اگر y'' در نقطه کف موجود باشد، لزوماً برابر صفر است.



* مماس چپ و راست در نقطه کف باید در یک راستا قرار گیرند

مثال: نقاط کف توابع زیر را در صورت وجود بیابید.

$$1/ \quad y = x - 1, \quad \frac{5}{3}, \quad \frac{2}{3}$$

$$2/ \quad y = \frac{1}{30} x^6 - \frac{1}{12} x^4 + \sqrt{x} - 1$$

$$3/ \quad y = (x+2)^3 \sqrt{x}$$

مثال: اگر T دوره تناوب $y = \frac{\sin x}{1 + \cos x}$ باشد، این منحنی درباره $(\pi, \pi + \pi)$ چند نقطه

کف دارد؟

$$\begin{aligned} 1 + \cos x &= 2 \cos^2 \frac{x}{2} \\ \sin x &= 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} \end{aligned}$$

نکته: محضات نقطه کف ۲ جابجایی کند:

$$f'' = 0 \quad (۲)$$

(۱) در خود تابع f

ست: اگر $A(۱, -۲)$ نقطه کف $f(x) = ax^3 + bx^2 - 3x - 1$ باشد، مقدار تابع در نقطه

Max بی آن کدام است؟

(۱۴) ماکزیمم نمی

۶۳

۵۲

۱۴

مثال: نشان دهید توابع زیر در نقاط داده شده دارای نقطه کف هستند.

$$y = x|x| \quad (در ۰)$$

* تابع $y = (x-a)|x-a|$ در $x=a$ دارای نقطه کف با مماس افقی است.

* در توابع قدر مطلق، جزء صحیح، چند ضابطه‌ای و راریطی، اگر گفته شود تابع در $x=0$ چه نقطه‌ای است، به صورت زیر محل می‌کنیم. y را بدست می‌آوریم:

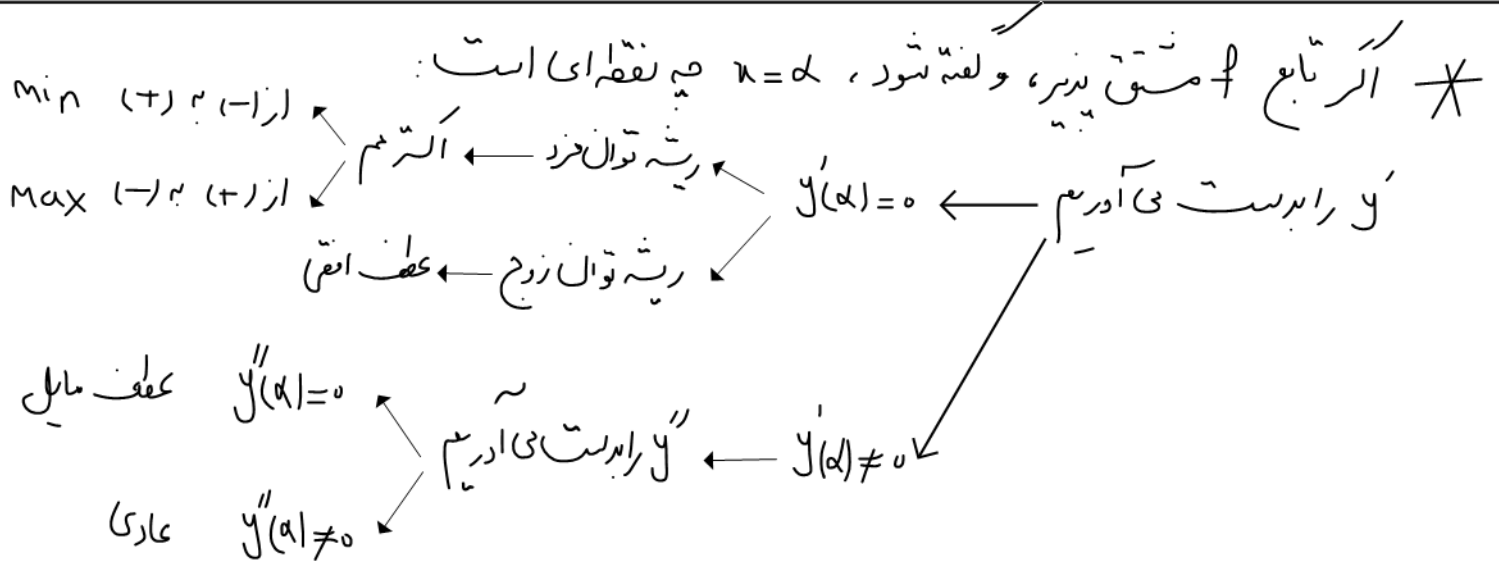
اگر y در $x=0$ تغییر حالت نداده $\rightarrow$ اگر هم نباشد
 از $(+)$ به $(-)$ $\rightarrow$ $\max$ نباشد
 از $(-)$ به $(+)$ $\rightarrow$ $\min$ نباشد

اگر y در $x=0$ تغییر حالت نداده $\rightarrow$ مشتق چپ و راست برابر باشد $\rightarrow$ کف است
 " " " " " " " " $\rightarrow$ نباشد $\rightarrow$ عاری

$$y = \sqrt[3]{x} \quad \text{در } x=0$$

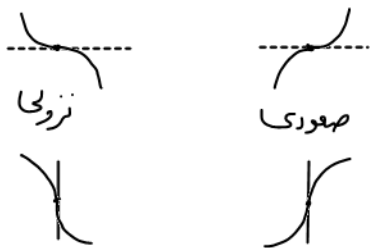
تست: نقطه $x=0$ برای تابع $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & x \geq 0 \\ x^2 & x < 0 \end{cases}$ چه نقطه‌ای است؟

Max (1) Min (2) کف (3) عاری (4)



مثال: نقطه $x = 0$ برای تابع $f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$ چه نقطه ای است؟ نقطه عطف تابع را در صورت وجود بیابید.

نکته: توابع زیر در $x = \alpha$ دارای نقطه عطف هستند:



(1) $y = (x - \alpha)^{2n+1} \cdot g(x)$ (عطف افقی)

(2) $y = \sqrt[n]{(x - \alpha)^{2k+1}} \cdot g(x)$ (عطف قائم) ($n \leq k$)

$g(\alpha) > 0 \rightarrow$ صعودی

$g(\alpha) < 0 \rightarrow$ نزولی

مثال: مماس بر منحنی $y = \frac{(x+a)^3}{x^2+1}$ در $x = -1$ از داخل منحنی می‌گذرد، مقدار a کدام است؟

مثال: جهت تقعر تابع $f(x) = x^4 - 4x^3$ را بررسی کرده و نقاط عطف آن را بیابید.

تست: به ازای چند مقدار m ، متعلق به اعداد صحیح تابع $f(x) = \frac{1}{12}x^4 - \frac{1}{6}mx^3 + \frac{1}{2}x^2 + 1$ فاقد نقطه عطف است؟

۴ (۶)

۳ (۵)

۲ (۴)

۱ (۳)

تست: اگر نقطه عطف تابع $y = mx^3 - (m+1)x^2 - x$ در ناحیه دوم یا سوم قرار داشته باشد، حدور m کدام است؟

۴ (۰ < m < ۱-)

۳ (۱ < m < ۰)

۲ (۱- > m)

۱ (۰ < m)

تست: مجموعه طول های نقاط عطف تابع $f(x) = \begin{cases} x^3 + 4x^2 & x \leq 1 \\ 22 - \frac{15}{x} & x > 1 \end{cases}$ کدام است؟

- (۱) $\{-2\}$ (۲) $\{1\}$ (۳) $\{-2, 1\}$ (۴) $\emptyset$

تست: مجموعه طول نقاط عطف تابع $y = x|x^2 - 4x|$ کدام است؟

- (۱) $\{\frac{4}{3}\}$ (۲) $\{0, 2, \frac{4}{3}\}$ (۳) $\{4, \frac{4}{3}\}$ (۴) $\{0, \frac{4}{3}\}$

نکته: طول نقطه کف $y = \frac{x}{|x|+1}$ که است؟

۴) ماکزیمم

۱ (۳)

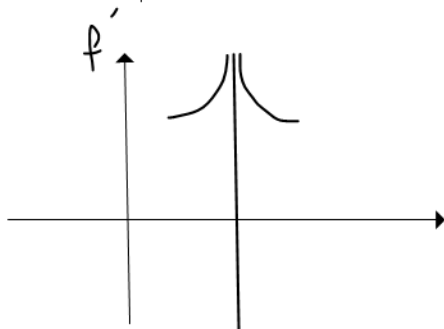
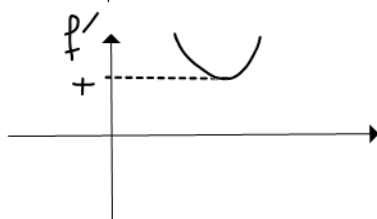
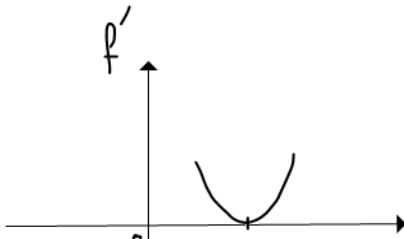
۲) صفر

۱ (۱)

نکته: اگر نمودار مشتق تابع پیوسته f را داشته باشیم، نقاط زیر حول نقطه کف برای

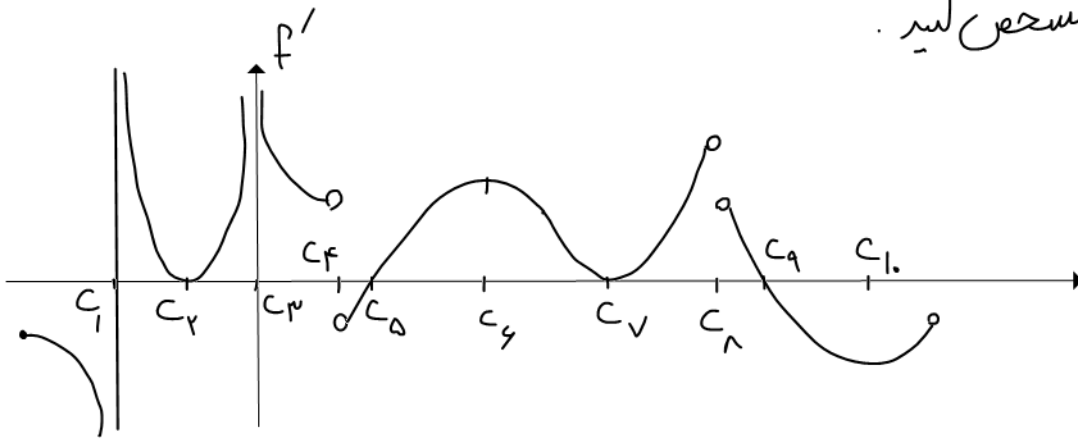
تابع f محسوب می‌شود:

۱) Min و Max تابع f'



۲) نقاط ماکزیمم با الفصال مضاعف

مثال: نمودار مشتق تابع پیوسته f به صورت زیر است. نوع نقاط داده شده را برای تابع f مشخص کنید.



c_1 :

c_2 :

c_3 :

c_4 :

c_5 :

c_6 :

c_7 :

c_8 :

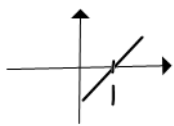
c_9 :

c_{10} :

رسم توابع کثیرالجملة بدون استفاده از مشتق:

۱- وقتی a به سمت $\pm\infty$ میل می‌کند، حجم از ریشه‌های است با بزرگترین درجه خود.

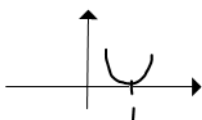
$$y = (x-1)$$



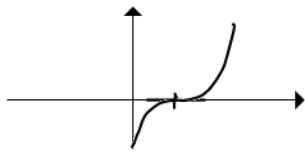
۲- ریشه توان $\perp$ حل برخورد نمودار با محور x است.

۳- ریشه ملکر زوج حول نقطه اکثتم و نمودار در این نقطه بر محور x مماس است.

$$y = (x-1)^2$$

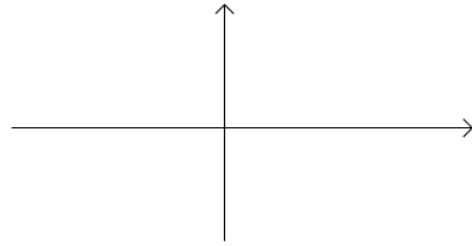


۴- ریشه مکرر فرد حول نقطه عطف و مماس در این نقطه روی محور x قرار دارد.

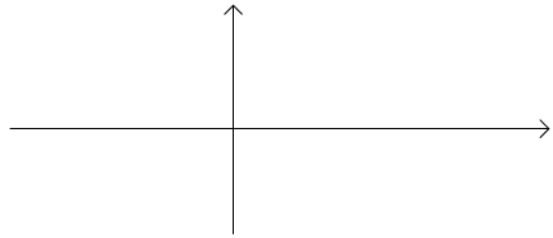
$$y = (x-1)^3$$


مثال: نمودار توابع زیر را رسم کنید

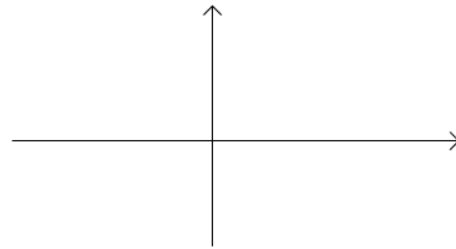
۱/ $y = x^4 - 2x^2$



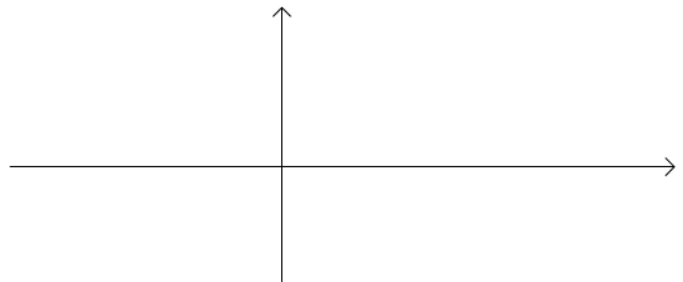
۲/ $y = x^5 - x^3$



۳/ $y = x^5 - x^4$



۴/ $y = (x+2)(x^2-9)^2(x^2-2)^3$



مثال: تابع $y = |(x-1)(x-2)(x-3)|$ چند آلفه می دارد؟