۶۷. گزینهٔ (۲)

$$\begin{cases}\alpha = 3\beta + 3\\ \alpha + \beta = S = -\dfrac{-17}{3} = \dfrac{17}{3}\end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases}\alpha - 3\beta = 3\\ 3\alpha + 3\beta = 17\end{cases} \Rightarrow \alpha = 5\ ,\ \beta = \frac{2}{3}$$

$$\alpha\beta = P = \frac{m}{3} \Rightarrow \frac{m}{3} = 5 \times \frac{2}{3} \Rightarrow m = 10$$

....

۶۸. گزینهٔ (۴)

$$\alpha = 2\beta \Rightarrow \begin{cases} S = \alpha + \beta = 3\beta = -\dfrac{3}{m+1} \Rightarrow \beta = \dfrac{-1}{m+1} \quad (1)\\ P = \alpha\beta = 2\beta^2 = \dfrac{m}{m+1} \quad (2)\end{cases}$$

$$\xrightarrow{(1)\ ,\ (2)} 2\left(\frac{-1}{m+1}\right)^2 = \frac{m}{m+1}$$

$$\Rightarrow \frac{2}{(m+1)^2} = \frac{m}{m+1}$$

$$\Rightarrow 2(m+1) = m(m+1)^2$$

$$\Rightarrow m(m+1)^2 - 2(m+1) = 0$$

$$\Rightarrow (m+1)(m(m+1) - 2) = 0$$

$$\Rightarrow (m+1)(m^2 + m - 2) = 0$$

$$\begin{cases} m + 1 = 0 \Rightarrow m = -1 \quad \text{(غ ق ق)} \ \text{(در معادله درجه دوم نباید } \alpha = 0 \text{ باشد)}\\ m^2 + m - 2 = 0 \Rightarrow (m+2)(m-1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} m = -2\\ m = 1\end{cases}\end{cases}$$

....

۶۹. گزینهٔ (۲)

$$x(5x+3) = 2 \Rightarrow 5x^2 + 3x - 2 = 0$$

$$\alpha + \beta = S = -\frac{3}{5}$$

$$\alpha\beta = P = \frac{-2}{5} = -\frac{2}{5}$$

$$4x^2 - kx + 25 = 0$$

$$\frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\beta^2} = S' = -\frac{-k}{4} = \frac{k}{4}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\beta^2} = \frac{k}{4} \Rightarrow \frac{\alpha^2 + \beta^2}{\alpha^2\beta^2} = \frac{k}{4}$$

$$\Rightarrow \frac{(\alpha+\beta)^2 - 2\alpha\beta}{(\alpha\beta)^2} = \frac{S^2 - 2P}{P^2} = \frac{k}{4}$$

$$\Rightarrow \frac{(-\frac{3}{5})^2 - 2(-\frac{2}{5})}{(-\frac{2}{5})^2} = \frac{k}{4} \Rightarrow k = 29$$

۷۰. گزینهٔ (۳)

$$\alpha + \beta = -\frac{-3}{2} = \frac{3}{2}$$

$$\alpha\beta = \frac{-4}{2} = -2$$

$$x_1 = \frac{1}{\alpha} + 1 \quad , \quad x_2 = \frac{1}{\beta} + 1$$

$$\Rightarrow x_1 + x_2 = S = 2 + \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}$$

$$= 2 + \frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta} = 2 + \frac{\frac{3}{2}}{-2} = \frac{5}{4}$$

$$x_1x_2 = P = (\frac{1}{\alpha} + 1)(\frac{1}{\beta} + 1)$$

$$= 1 + \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\alpha\beta} = 1 + \frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta} + \frac{1}{\alpha\beta}$$

$$= 1 + \frac{\frac{3}{2}}{-2} + \frac{1}{-2} \Rightarrow P = -\frac{1}{4}$$

معادلهٔ موردنظر : $x^2 - Sx + P = 0 \Rightarrow x^2 - \frac{5}{4}x - \frac{1}{4} = 0$

$$\Rightarrow 4x^2 - 5x - 1 = 0$$

....

۷۱. گزینهٔ (۳)

$$\alpha + \beta = S = -\frac{-12}{4} = 3$$

$$\alpha\beta = P = \frac{1}{4}$$

$$\frac{1}{\sqrt{\alpha}} + \frac{1}{\sqrt{\beta}} = A \Rightarrow \left(\frac{1}{\sqrt{\alpha}} + \frac{1}{\sqrt{\beta}}\right)^2 = A^2$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{2}{\sqrt{\alpha\beta}} = A^2$$

$$\Rightarrow \frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta} + \frac{2}{\sqrt{\alpha\beta}} = A^2$$

$$\Rightarrow \frac{S}{P} + \frac{2}{\sqrt{P}} = A^2 \Rightarrow \frac{3}{\frac{1}{4}} + \frac{2}{\sqrt{\frac{1}{4}}} = A^2$$

$$\Rightarrow A^2 = 16 \xrightarrow{A>0} A = 4$$

....

۷۲. گزینهٔ (۱)

$$x_1 + x_2 = S = -\frac{-3}{1} = 3$$

$$x_1x_2 = P = \frac{1}{1} = 1$$

$$x_1\sqrt{x_2} + x_2\sqrt{x_1} = \sqrt{x_1^2x_2} + \sqrt{x_2^2x_1} =$$

$$\sqrt{x_1x_2}\,\underbrace{(\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2})}_{\sqrt{5}} = \sqrt{1} \times \sqrt{5} = \sqrt{5}$$

دقت داشته باشید که:

$$\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}=A \Rightarrow (\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2})^2=A^2$$
$$\Rightarrow \underbrace{x_1+x_2}_{3}+2\sqrt{\underbrace{x_1x_2}_{1}}=A^2$$
$$\Rightarrow A^2=5 \xrightarrow{A>0} A=\sqrt{5}$$

۷۳. گزینهٔ (۴)

$$x_1+x_2=S=-\frac{-7}{1}=7$$
$$x_1x_2=P=-\frac{8}{1}=-8$$
$$\sqrt[3]{x_1}+\sqrt[3]{x_2}=A \Rightarrow (\sqrt[3]{x_1}+\sqrt[3]{x_2})^3=A^3$$
$$\Rightarrow x_1+3\sqrt[3]{x_1^2x_2}+3\sqrt[3]{x_1x_2^2}+x_2=A^3$$
$$\Rightarrow \underbrace{x_1+x_2}_{7}+3\underbrace{\sqrt[3]{x_1x_2}}_{-2}\underbrace{(\sqrt[3]{x_1}+\sqrt[3]{x_2})}_{A}=A^3$$
$$\Rightarrow 7+3(-2)A=A^3 \Rightarrow A^3+6A-7=0$$
$$\xrightarrow{\text{حدس و آزمایش}} A=1 \Rightarrow \sqrt[3]{x_1}+\sqrt[3]{x_2}=1$$

نکته: دقت داشته باشید که در هر معادله از هر درجه‌ای، اگر مجموع ضرایب برابر با صفر بود، یکی از ریشه‌ها $x=1$ است.

۷۴. گزینهٔ (۱)

$$\alpha+\beta=S=-\frac{-2}{1}=2$$
$$\alpha\beta=\frac{-4}{1}=-4$$

α ریشه است. $\Rightarrow \alpha^2-2\alpha-4=0 \Rightarrow \alpha^2-4=2\alpha \quad (1)$

$$(\alpha^2-4)^2+4\beta^2 \overset{(1)}{=} (2\alpha)^2+4\beta^2$$
$$=4(\alpha^2+\beta^2)=4[(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta]$$
$$=4[S^2-2P]=4[2^2-2(-4)]=48$$

۷۵. گزینهٔ (۲) فرض می‌کنیم α و β ریشه‌های معادلهٔ داده‌شده باشند، بنابراین:

$$\alpha,\ \overset{\text{واسطه هندسی}}{\sqrt{2}},\ \beta : \text{دنبالهٔ هندسی} \Rightarrow (\sqrt{2})^2=\alpha\beta \Rightarrow \alpha\beta=2$$
$$\alpha\beta=P=\frac{m^2-3}{m} \Rightarrow \frac{m^2-3}{m}=2$$
$$\Rightarrow m^2-2m-3=0$$
$$\Rightarrow (m-3)(m+1)=0 \Rightarrow \begin{cases} m=3 & (\text{غ ق ق}) \\ m=-1 \end{cases}$$

دقت داشته باشید که به‌ازای $m=3$ داریم $3x^2-5x+6=0$ که دارای $\Delta<0$ است، بنابراین دو ریشه نخواهد داشت.

۷۶. گزینهٔ (۴) اگر α و β ریشه‌ها باشند، در این صورت:

$$\alpha,\ \overset{\text{واسطه حسابی}}{\frac{1}{8}},\ \beta : \text{دنبالهٔ حسابی} \Rightarrow \frac{1}{8}=\frac{\alpha+\beta}{2}$$
$$\Rightarrow \underbrace{\alpha+\beta}_{S}=\frac{1}{4} \Rightarrow S=\frac{1}{4}$$
$$S=-\frac{-3}{m^2-4} \Rightarrow \frac{3}{m^2-4}=\frac{1}{4}$$
$$\Rightarrow m^2-4=12 \Rightarrow m^2=16 \Rightarrow \begin{cases} m=4 & (\text{غ ق ق}) \\ m=-4 \end{cases}$$

دقت داشته باشید که اگر $m=4$ باشد، آن‌گاه $12x^2-3x+4=0$ دارای $\Delta<0$ است و در نتیجه دو ریشهٔ حقیقی نخواهد داشت.

۷۷. گزینهٔ (۲)

$$x^2+x+1=t$$
$$t^2+3t-4=0 \Rightarrow (t+4)(t-1)=0$$
$$\Rightarrow \begin{cases} t=-4 \Rightarrow x^2+x+1=-4 \\ \Rightarrow x^2+x+5=0 \xrightarrow{\Delta<0} (\text{ریشه ندارد}) \\ t=1 \Rightarrow x^2+x+1=1 \Rightarrow x^2+x=0 \Rightarrow \begin{cases} x=-1 \\ x=0 \end{cases} \end{cases}$$

۷۸. گزینهٔ (۴)

$$\frac{\alpha^3-\beta^3}{\alpha^2-\beta^2}=\frac{\cancel{(\alpha-\beta)}(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)}{\cancel{(\alpha-\beta)}(\alpha+\beta)}=\frac{S^2-2P+P}{S}$$
$$\text{می‌دانیم} \begin{cases} S=-\frac{b}{a}=2 \\ P=\frac{c}{a}=-1 \end{cases} \Rightarrow \frac{4+2-1}{2}=\frac{5}{2}$$

۷۹. گزینهٔ (۳) با توجه به این‌که α و β ریشه‌های معادله می‌باشند، در معادله صدق می‌کنند.

$$\alpha^2+2\alpha-1=0 \Rightarrow \alpha^2=1-2\alpha$$
$$\beta^2+2\beta-1=0 \Rightarrow \beta^2=1-2\beta$$
$$2\alpha^2+\beta^2-2\beta=2-4\alpha+1-2\beta-2\beta=-4\alpha-4\beta+3$$
$$=-4(\alpha+\beta)+3=-4S+3=-4(-2)+3=11$$
$$S=-\frac{b}{a}=-2$$

۸۰. گزینهٔ (۴)

$$\alpha\beta=\frac{c}{a}\Rightarrow \beta\alpha=-۳\Rightarrow\beta=\frac{-۳}{\alpha}\Rightarrow\beta^۳=\frac{-۲۷}{\alpha^۳}$$

$$\alpha^۳-\frac{۲۷}{\alpha^۳}=\alpha^۳+\beta^۳=S^۳-۳PS$$

می‌دانیم $\begin{cases}S=-\frac{b}{a}=۱\\ P=\frac{c}{a}=۳\end{cases}\Rightarrow ۱-۳(۱)(-۳)=۱۰$

۸۱. گزینهٔ (۱)

$$\xrightarrow{\alpha\ \text{ریشه‌ی معادله است}}\alpha^۲-۲\alpha-۱=۰\Rightarrow\alpha^۲=۲\alpha+۱$$

$$\xrightarrow{\times\alpha}\alpha^۳=۲\alpha^۲+\alpha=۲(۲\alpha+۱)+\alpha=۵\alpha+۲$$

$$\alpha^۳+۵\beta=۵\alpha+۲+۵\beta=۵(\alpha+\beta)+۲$$

$$=۵S+۲=۵(۲)+۲=۱۲$$

می‌دانیم $s=-\frac{b}{a}=۲$

۸۲. گزینهٔ (۲)

$$\begin{cases}\alpha=۲\beta^۲(۱)\\ \alpha\beta=-۱۶m^۳\xrightarrow{(۱)}(۲\beta^۲)\beta=-۱۶m^۳\Rightarrow\end{cases}$$

$۲\beta^۳=-۱۶m^۳\Rightarrow\beta=-۲m$ در معادلهٔ اولیه صدق می‌کند.

$$۴m^۲+۴m^۲-۱۶m^۳=۰\Rightarrow ۸m^۲-۱۶m^۳=۰$$

$$۸m^۲(۱-۲m)=۰\Rightarrow\begin{cases}m=۰\ \text{غ ق ق}\\ m=\frac{۱}{۲}\ \text{ق ق}\end{cases}$$

۸۳. گزینهٔ (۱)

$$\begin{cases}x'-x''+\frac{c}{a}=۰\\ x'+x''=-\frac{b}{a}(۱)\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x'-x''=-\frac{c}{a}\\ x'+x''=-\frac{b}{a}\end{cases}\xrightarrow{(۱)}۲x'=\frac{-b-c}{a}$$

$$\Rightarrow x'=\frac{-b-c}{۲a}$$

$$\xrightarrow{(۱)}\frac{-b-c}{۲a}+x''=-\frac{b}{a}\Rightarrow x''=\frac{b+c}{۲a}-\frac{b}{a}$$

$$\Rightarrow x''=\frac{b+c-۲b}{۲a}=\frac{c-b}{۲a}$$

۸۴. گزینهٔ (۲)

$$\begin{cases}x=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{۲a}\Rightarrow ۲ax+b=\pm\sqrt{\Delta}\\ y=\frac{-b'\pm\sqrt{\Delta}}{۲a'}\Rightarrow ۲a'+b'=\pm\sqrt{\Delta}\end{cases}$$

$$\Rightarrow(۲ax+b)^۲=(۲a'y+b')^۲=\Delta$$

۸۵. گزینهٔ (۳)

$$\begin{cases}y=۲x-۴\\ y=(m+۳)x^۲+mx\end{cases}\Rightarrow(m+۳)x^۲+mx=۲x-۴$$

$$\Rightarrow(m+۳)x^۲+(m-۲)x+۴=۰\ (۱)$$

چون خط بر منحنی مماس است، باید معادلهٔ (۱) دارای یک ریشهٔ مضاعف باشد:

$$\Delta=۰\Rightarrow(m-۲)^۲-۱۶(m+۳)=۰$$

$$\Rightarrow m^۲-۲۰m-۴۴=۰$$

$$(m-۲۲)(m+۲)=۰\Rightarrow\begin{cases}m=-۲\\ m=۲۲\end{cases}$$

۸۶. گزینهٔ (۳)

$$f(۲)=۰\Rightarrow ۱۶-۲۰-۲+m=۰\Rightarrow m=۶$$

$$۲x^۳-۵x^۲-x+۶=۰\Rightarrow(x-۲)(۲x^۲-x-۳)=۰$$

$$\Rightarrow ۲x^۲-x-۳=۰\Rightarrow\begin{cases}x=-۱\\ x=\frac{۳}{۲}\end{cases}$$

$$\begin{array}{l|l}۲x^۳-۵x^۲-x+۶ & x-۲\\ \hline -۲x^۳+۴x^۲ & ۲x^۲-x-۳\\ \hline -\cancel{x^۲}-x+۶ & \\ \cancel{x^۲}-۲x & \\ \hline -۳x+۶ & \end{array}$$

۸۷. گزینهٔ (۱)

چون منحنی دارای مینیمم است، پس $a>۰$ است. ضمناً $c=f(۰)$ (محل برخورد منحنی با محور عرض‌ها) که مثبت است.

$$x_{\text{راس}}<۰\Rightarrow-\frac{b}{۲a}<۰\Rightarrow\frac{b}{۲a}>۰\xrightarrow{a>۰}b>۰$$

پس: $a>۰$ ،$b>۰$ ،$c>۰$

۸۸. گزینهٔ (۱)

ریشه‌های معادله جدید: $y = x^2 \Rightarrow x = \sqrt{y}$

در معادله‌ی اولیه صدق می‌کند $(\sqrt{y})^2 - 3(\sqrt{y}) - 2 = 0$

$$\Rightarrow 3\sqrt{y} = y - 2$$

$$9y = y^2 - 4y + 4 \Rightarrow y^2 - 13y + 4 = 0$$

$$(y \xrightarrow{\text{تبدیل}} x) \Rightarrow x^2 - 13x + 4 = 0$$

---

۸۹. گزینهٔ (۴)

می‌دانیم معادلهٔ کلی سهمی با رأس $\begin{vmatrix} m \\ n \end{vmatrix}$ به‌صورت زیر می‌باشد:

$$y = a(x-m)^2 + n$$

پس:

رأس $\begin{vmatrix} 1 \\ 1 \end{vmatrix} \Rightarrow y = a(x-1)^2 + 1$

در معادلهٔ منحنی صدق می‌کند $\begin{vmatrix} 0 \\ 2 \end{vmatrix} \Rightarrow 2 = a + 1 \Rightarrow a = 1$

$$y = (x-1)^2 + 1 = x^2 - 2x + 2 \Rightarrow \begin{array}{l} a = 1 \\ b = -2 \\ c = 2 \end{array}$$

$$\Rightarrow abc = -4$$

---

۹۰. گزینهٔ (۴)

در تابع داده شده $x = -\frac{b}{2a} = 2$ محور تقارن است، پس:

$$f(2-k) = f(2+k)$$

یعنی: $f(2-(\sqrt{13}-3\sqrt{5})) = f(2+(\sqrt{13}-3\sqrt{5}))$

و اختلافشان صفر است.

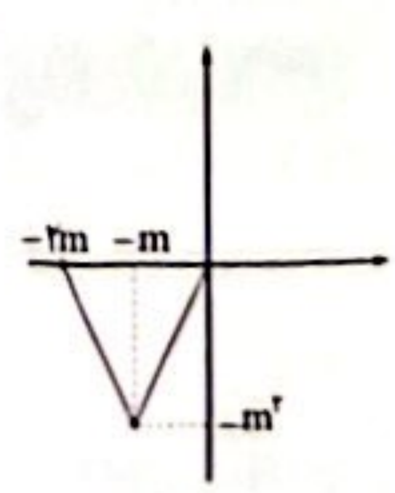
---

۹۱. گزینهٔ (۲)

رأس $y = m^2 - 2m^2 = -m^2$

رأس $x = -\frac{b}{2a} = \frac{-2m}{2} = -m \Rightarrow$

$$y = 0 \Rightarrow x(x+2m) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \Rightarrow y = 0 \\ x = -2m \Rightarrow y = 0 \end{cases}$$



مساحت $S = 8 \Rightarrow \frac{m^2 \times 2m}{2} = 8$

$$m^3 = 8 \Rightarrow m = 2$$

---

۹۲. گزینهٔ (۲)

چون نقاط A و B عرض یکسان دارند پس نسبت به محور تقارن $x = 2$ قرینهٔ یکدیگرند، چون $AB = 6$ است پس $B\begin{vmatrix} 5 \\ 0 \end{vmatrix}$ و $A\begin{vmatrix} -1 \\ 0 \end{vmatrix}$، لذا:

$$y = a(x+1)(x-5)$$

صادق است $\begin{vmatrix} 2 \\ 3 \end{vmatrix} \Rightarrow 3 = 3(a)(-3) \Rightarrow a = -\frac{1}{3}$

$$y = -\frac{1}{3}(x^2 - 4x - 5) = -\frac{1}{3}x^2 + \frac{4}{3}x + \frac{5}{3}$$

$$b = \frac{4}{3}, c = \frac{5}{3} \Rightarrow b + c = \frac{9}{3} = 3$$

---

۹۳. گزینهٔ (۲)

$$A = \alpha^2 + \beta^2 = S^2 - 2P = 4m^2 - 2(4m-5)$$

$$\begin{cases} s = -\frac{b}{a} = 2m \\ p = \frac{c}{a} = 4m - 5 \end{cases}$$

$$\Rightarrow A = 4m^2 - 8m + 10$$

$$m_{min} = -\frac{b}{2a} = \frac{8}{8} = 1$$

---

۹۴. گزینهٔ (۳)

$$x = \sqrt{2} - \sqrt{3} \Rightarrow x^2 = 2 + 3 - 2\sqrt{6}$$

$$x^2 - 5 = -2\sqrt{6} \Rightarrow x^4 - 10x^2 + 25 = 24$$

$$\Rightarrow x^4 - 10x^2 + 1 = 0$$

---

۹۵. گزینهٔ (۱)

$$x^3 + ax^2 - x^2 + 4x - ax - 4 = 0$$

مجموع ضرایب این معادله صفر است، پس یکی از جواب‌های معادله $x = 1$ است، یعنی یک عامل $(x-1)$ داریم.

$$(x^3 - x^2) + (ax^2 - ax) + 4x - 4 = 0 \Rightarrow$$

$$x^2(x-1) + ax(x-1) + 4(x-1) = 0 \Rightarrow$$

$$(x-1)(x^2 + ax + 4) = 0$$

چون معادله باید سه ریشه متمایز مثبت داشته باشد، لازم است که: $x^2 + ax + 4 = 0$ دارای دو ریشهٔ مثبت باشد.

یعنی: $\begin{cases} \Delta > 0 \\ P > 0 \\ S > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2 - 16 > 0 \\ 4 > 0 \text{ برقرار} \\ -a > 0 \end{cases}$

$$\begin{cases} \Rightarrow a > 4 \text{ یا } a < -4 \\ \Rightarrow a < 0 \end{cases} \Rightarrow a < -4$$

۹۶. گزینهٔ (۴)

ریشهٔ معادلهٔ جدید $y=\frac{1}{x}-1 \Rightarrow \frac{1}{x}=y+1 \Rightarrow x=\frac{1}{y+1}$

$$(x \xrightarrow{\text{تبدیل}} \frac{1}{x+1}) \Rightarrow 2(\frac{1}{x^2+2x+1})-3(\frac{1}{x+1})-1=0$$

$$\xrightarrow{x(x^2+2x+1)} 2-3x-3-x^2-2x-1=0$$

$$\Rightarrow x^2+5x+2=0$$

۹۷. گزینهٔ (۲)

باید $y>0 \Rightarrow (1-a)x^2+2\sqrt{6}x-a>0$

$$\Rightarrow \text{باید}: \begin{cases}\Delta'<0\\ a>0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}6+a(1-a)<0\\ 1-a>0\end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases}a^2-a-6>0\\ a<1\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}a<-2 \text{ یا } a>3\\ a<1\end{cases} \Rightarrow a<-2$$

۹۸. گزینهٔ (۳)

$8x^2-mx-8=0$ ، $2x^2-x-2=0$

(α^3,β^3) (α,β)

$$\begin{cases}P=-1\\ S=\frac{1}{2}\end{cases}$$

$$\alpha^3+\beta^3=S^3-3PS=\frac{m}{8} \Rightarrow \frac{1}{8}-3(\frac{1}{2})(-1)=\frac{m}{8}$$

$$\frac{1}{8}+\frac{3}{2}=\frac{m}{8} \Rightarrow \frac{m}{8}=\frac{13}{8} \Rightarrow m=13$$

۹۹. گزینهٔ (۴)

$$\text{باید} \begin{cases}\Delta'>0\\ P>0\\ S>0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}(a-2)^2+a-14>0 \Rightarrow a^2-3a-10>0\\ 14-a>0 \Rightarrow a<14\\ 2(a-2)>0 \Rightarrow a>2\end{cases}$$

$$\begin{cases}(a-5)(a+2)>0\\ a<14\\ a>2\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}a<-2 \text{ یا } a>5\\ a<14\\ a>2\end{cases} \Rightarrow 5<a<14$$

۱۰۰. گزینهٔ (۴)

$$\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}=2 \Rightarrow \alpha+\beta+2\sqrt{\alpha\beta}=4$$

$$S+2\sqrt{P}=4 \Rightarrow \frac{m+1}{2}+2\sqrt{\frac{1}{16}}=4$$

$$\begin{cases}S=\frac{m+1}{2}\\ P=\frac{1}{16}\end{cases} \quad \frac{m+1}{2}+\frac{1}{2}=4 \Rightarrow \frac{m+2}{2}=4 \Rightarrow m=6$$

۱۰۱. گزینهٔ (۴)

$$\text{باید} \begin{cases}\Delta'>0\\ P>0\\ S<0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}(m+1)^2-12(m-2)>0\\ \frac{12}{m-2}>0\\ \frac{2(m+1)}{m-2}<0\end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases}m^2-10m+25>0 \Rightarrow (m-5)^2>0\\ m>2\\ -1<m<2\end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases}m\neq 5\\ m>2\\ -1<m<2\end{cases} \Rightarrow m\in\varnothing$$

۱۰۲. گزینهٔ (۱)

کافیست $P<0 \Rightarrow \frac{1-m}{m+2}<0 \Rightarrow m<-2$ یا $m>1$

۱۰۳. گزینهٔ (۴)

نکته: زمانی نمودار یک سهمی بر محور xها مماس است که تابع آن، فقط یک صفر (یک ریشهٔ مضاعف) داشته باشد.

بنابراین:

$$(m+1)x^2+(m-1)x+\frac{m}{2}-1=0$$

$$\xrightarrow{\Delta=0} (m-1)^2-4(m+1)(\frac{m}{2}-1)=0$$

$$\Rightarrow m^2-2m+1-2m^2+4m-2m+4=0$$

$$\Rightarrow m^2=5 \xrightarrow{\text{ریشه‌گیری}} m=\pm\sqrt{5}$$

۱۰۴. گزینهٔ (۱)

$$y=-x^2+(3m+\frac{1}{m})x-3$$

نکته: شرط این‌که نمودار سهمی $y=ax^2+bx+c$ بر محور xها $(y=0)$ مماس شود، این است که $ax^2+bx+c=0$ ریشهٔ مضاعف داشته باشد.

بنابراین:

$$-x^2+(3m+\frac{1}{m})x-3=0$$

$$\xrightarrow{\Delta=0} (3m+\frac{1}{m})^2-4(-1)(-3)=0$$

$$\Rightarrow (3m+\frac{1}{m})^2=12$$

Scanned with CamScanner

$$\xrightarrow{\text{ریشه گیری}} 3m+\frac{1}{m}=\pm 2\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3m+\frac{1}{m}=2\sqrt{3} \\ \Rightarrow 3m^2-2\sqrt{3}m+1=0 \xrightarrow{\Delta=0} \text{(یک ریشه دارد)} \\ 3m+\frac{1}{m}=-2\sqrt{3} \\ \Rightarrow 3m^2+2\sqrt{3}m+1=0 \xrightarrow{\Delta=0} \text{(یک ریشه دارد)} \end{cases}$$

بنابراین برای m دو مقدار متفاوت به‌دست می‌آید.

۱۰۵. گزینهٔ (۳) وقتی دو نمودار $y=x^2$ و $y=ax-a$ یکدیگر را قطع نمی‌کنند، بنابراین معادلهٔ زیر، جواب ندارد.

$$x^2=ax-a \Rightarrow x^2-ax+a=0$$

یعنی Δ برای این معادله منفی به‌دست می‌آید لذا:

$\Delta<0 \Rightarrow a^2-4a<0 \Rightarrow$

a		0		4	
$a^2-4a<0$	$+$		$-$		$+$

$\Rightarrow 0<a<4$

حال معادلهٔ $\frac{1}{2}ax^2-ax+a=2$ را در نظر می‌گیریم. داریم:

$$\frac{1}{2}ax^2-ax+a=2 \Rightarrow x^2-2x+2=\frac{4}{a}$$

$$\Rightarrow x^2-2x+2-\frac{4}{a}=0$$

$$\Delta=(-2)^2-4(1)(2-\frac{4}{a})=4-8+\frac{16}{a}$$

$$=-4+\frac{16}{a} \xrightarrow[\frac{16}{a}>4]{0<a<4} \Delta>0 \Rightarrow \text{(دو ریشه حقیقی دارد)}$$

۱۰۶. گزینهٔ (۱) در واقع معادلهٔ $(2x+1)(x+8)=mx$ نباید ریشهٔ حقیقی داشته باشد لذا:

$$2x^2+16x+x+8=mx \Rightarrow 2x^2+(17-m)x+8=0$$

$$\Rightarrow \Delta=(17-m)^2-4(2)(8)<0$$

$$\Rightarrow (17-m)^2<64 \Rightarrow -8<17-m<8$$

$$\Rightarrow -25<-m<-9 \Rightarrow 25>m>9$$

نکته دقت داشته باشید که اگر $0<a$، آن‌گاه:

$$x^2\le a \Leftrightarrow -\sqrt{a}\le x\le \sqrt{a}$$

۱۰۷. گزینهٔ (۳) طول محل برخورد نمودار $f(x)$ با محور x ها، همان صفرهای تابع f هستند

$$f(2)=0 \Rightarrow 16-20-2+m=0 \Rightarrow m=6$$

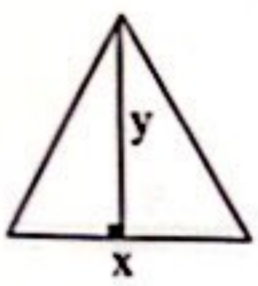
$$f(x)=2x^3-5x^2-x+6$$

$$\begin{array}{l|l} 2x^3-5x^2-x+6 & x-2 \\ \hline -2x^3+4x^2 & 2x^2-x-3 \\ \quad -x^2-x+6 & \\ \quad\ x^2-2x & \\ \quad -3x+6 & \\ \quad\ 3x-6 & \\ \quad\quad 0 & \end{array}$$

$$f(x)=(x-2)(2x^2-x-3)=0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x-2=0 \Rightarrow x=2 \\ 2x^2-x-3=0 \Rightarrow x=\frac{1\pm\sqrt{1+24}}{4} \Rightarrow \begin{cases} x=\frac{3}{2} \\ x=-1 \end{cases} \end{cases}$$

۱۰۸. گزینهٔ (۲)



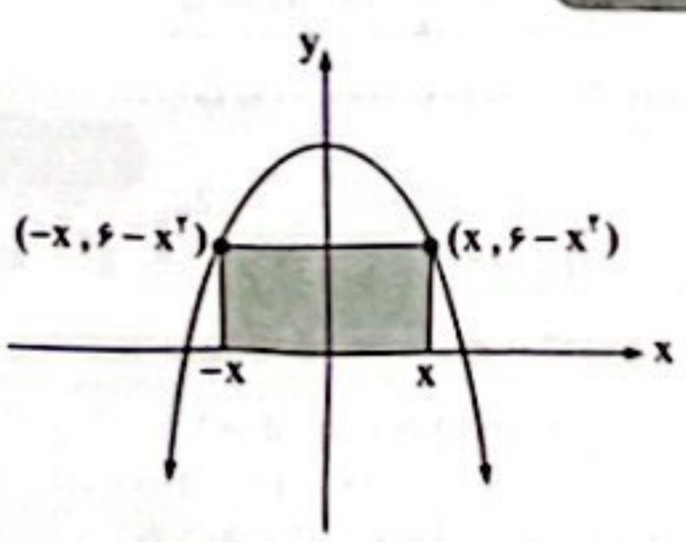
$$\Rightarrow x+y=16 \Rightarrow y=16-x$$

$$S(x)=\frac{x\times(16-x)}{2}=-\frac{1}{2}x^2+8x$$

$$x_{max}=-\frac{b}{2a}=\frac{-8}{-1}=8$$

$$S_{max}=-\frac{1}{2}(64)+64=32$$

۱۰۹. گزینهٔ (۴)



$$\text{طول مستطیل}=x-(-x)=2x$$

$$\text{عرض مستطیل}=6-x^2$$

$$\text{محیط مستطیل}=P(x)=(2x+6-x^2)(2)=-2x^2+4x+12$$

باید ماکزیمم مقدار تابع سهمی $P(x)$ را به‌دست آوریم:

$$x_{max}=\frac{-b}{2a}=\frac{-4}{-4}=1$$

$$P_{max}=-2+4+12=14$$

۱۱۰. گزینهٔ (۱) فرض می‌کنیم x طول ضلع مربع باشد.

$P(x)=۴x$

$S(x)=x^۲$

$۴x \geq ۲x^۲ \Rightarrow x^۲-۲x \leq ۰ \Rightarrow x(x-۲)\leq ۰$

x		۰		۲	
$x^۲-۲x\leq ۰$	+	۰	−	۰	+
		ج	ج	ج	

$\Rightarrow ۰ \leq x \leq ۲$

$D(x)=۴x-x^۲=-x^۲+۴x$

باید ماکزیمم مقدار تابع سهمی $D(x)$ را به‌دست آوریم:

مقدار ماکزیمم $= \dfrac{-\Delta}{۴a}=\dfrac{-(۱۶-۴(-۱)(۰))}{۴(-۱)}=\dfrac{-۱۶}{-۴}=۴$

۱۱۱. گزینهٔ (۴) با توجه به نمودار، صفرهای تابع، عبارت‌اند از $x=۴$ و $x=۰$. بنابراین:

$P(۰)=۰ \Rightarrow a(۰)^۲+b(۰)+c=۰ \Rightarrow c=۰ \quad (۱)$

$P(۴)=۰ \xrightarrow{(۱)} a(۴)^۲+b(۴)+۰=۰$

$\Rightarrow ۱۶a+۴b=۰ \Rightarrow b=-۴a \quad (۲)$

همچنین نقطهٔ $(-۲ , -۲)$ روی نمودار قرار دارد. لذا:

$-۲=a(-۲)^۲+b(-۲)+۰ \Rightarrow ۴a-۲b=-۲ \quad (۳)$

$\xrightarrow{(۲),(۳)} ۴a-۲(-۴a)=-۲ \Rightarrow a=-\dfrac{۱}{۶} \; , \; b=\dfrac{۲}{۳}$

$a+b+c=-\dfrac{۱}{۶}+\dfrac{۲}{۳}+۰=\dfrac{۳}{۶}=\dfrac{۱}{۲}$

۱۱۲. گزینهٔ (۴) روش اول:

> **نکته** می‌دانیم اگر $x_۱$ و $x_۲$ صفرهای تابع درجهٔ دوم $y=ax^۲+bx+c$ باشد، در این‌صورت می‌توان نوشت:
>
> $y=a(x-x_۱)(x-x_۲)$
>
> رأس سهمی $x=\dfrac{x_۱+x_۲}{۲}$

بنابراین:

صفرهای تابع f: $x_۱=۱ \; , \; x_۲=۳ \Rightarrow f(x)=a(x-۱)(x-۳) \quad (۱)$

از طرفی با توجه به نمودار، داریم:

رأس سهمی $x=\dfrac{۱+۳}{۲}=۲ \Rightarrow (۲,۳)\in f$

$f(۲)=۳ \xrightarrow{(۱)} ۳=a(۲-۱)(۲-۳) \Rightarrow a=-۳$

$\Rightarrow f(x)=-۳(x-۱)(x-۳)$

$=-۳(x^۲-۴x+۳)=-۳x^۲+۱۲x-۹$

روش دوم:

طول نقطه ماکزیمم $=\dfrac{۱+۳}{۲}=۲ \Rightarrow \dfrac{-b}{۲a}=۲$

$\Rightarrow b=-۴a \quad (۱)$

صفرهای تابع f: $x=۱ , x=۳ \Rightarrow$

ضرب ریشه ها $=۱\times۳=۳ \Rightarrow \dfrac{c}{a}=۳$

$\Rightarrow a=\dfrac{c}{۳} \quad (۲) \; , \; \xrightarrow{(۱),(۲)} b=-\dfrac{۴}{۳}c \quad (۳)$

نقطهٔ $(۲ , ۳)$ ماکزیمم است $\Rightarrow ۳=۴a+۲b+c$

$\xrightarrow{(۲),(۳)} ۳=۴(\dfrac{c}{۳})+۲(\dfrac{-۴}{۳}c)+c \Rightarrow c=-۹$

۱۱۳. گزینهٔ (۳) با توجه به نمودار، نقطهٔ $(۰ , ۳)$ روی نمودار واقع است. بنابراین:

$۳=a(۰)^۲+b(۰)+c \Rightarrow c=۳ \quad (۱)$

همچنین نقطهٔ $(-۲ , -۴)$ نقطهٔ مینیمم نمودار است. بنابراین:

$x=-\dfrac{b}{۲a} \Rightarrow -۴=-\dfrac{b}{۲a} \Rightarrow ۸a=b$

$\Rightarrow ۸a-b=۰ \quad (۲)$

$\xrightarrow{(۱)\,,\,(۲)} \underbrace{۸a-b}_{۰}-۳c=۰-۳(۳)=-۹$

۱۱۴. گزینهٔ (۳)

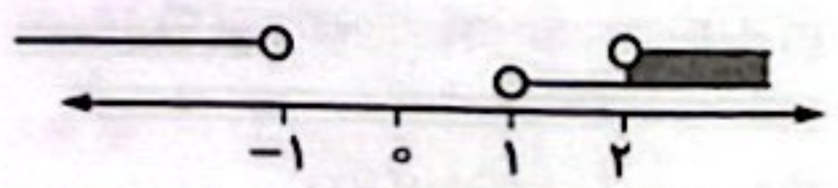
$$\begin{cases} a>۰ \Rightarrow \quad a-۱>۰ \Rightarrow a>۱ \quad (۱) \\ \Delta<۰ \Rightarrow \quad \Delta=۸-۴(a-۱)a<۰ \Rightarrow -۴a^۲+۴a+۸<۰ \end{cases}$$

$-۴a^۲+۴a+۸=۰ \Rightarrow a^۲-a-۲=۰$

$\Rightarrow (a-۲)(a+۱)=۰ \Rightarrow \begin{cases} a=۲ \\ a=-۱ \end{cases}$

a		−۱		۲	
$\Delta<۰$	−	۰	+	۰	−
		ج		ج	

$\Rightarrow a<-۱$ یا $a>۲ \quad (۲)$



$\xrightarrow{(۱)\cap(۲)} a>۲$

Scanned with CamScanner

۱۱۵. گزینهٔ (۴) یک عبارت درجه دوم، وقتی همواره مثبت است که نمودار آن، بالای محور x ها باشد.

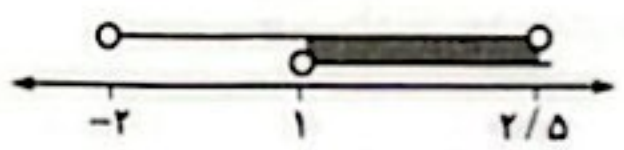
$$\begin{cases} a>0 \Rightarrow m-1>0 \Rightarrow m>1 \quad (1)\\ \Delta<0 \Rightarrow \Delta=36-4(m-1)(2m+1)<0 \\ \Rightarrow 36-8m^2+4m+4<0 \Rightarrow 8m^2-4m-40>0 \end{cases}$$

$$8m^2-4m-40=0 \Rightarrow 2m^2-m-10=0$$

$$\Rightarrow m=\frac{1\pm\sqrt{1+80}}{4} \Rightarrow \begin{cases} m=\frac{5}{2}=2.5 \\ m=-\frac{8}{4}=-2 \end{cases}$$

m		−2		2.5	
$8m^2-4m-40<0$	+	0	− (ج)	0	+

$\Rightarrow -2<m<2.5 \quad (2)$



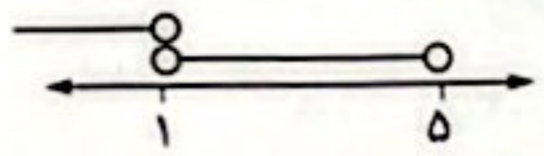
$\xrightarrow{(1)\cap(2)} 1<m<2.5$

۱۱۶. گزینهٔ (۳) یک عبارت درجه دوم، وقتی همواره منفی است که نمودار آن، پایین محور x ها باشد.

$$\begin{cases} a<0 \Rightarrow a-1<0 \Rightarrow a<1 \quad (1)\\ \Delta<0 \Rightarrow \Delta=(a-1)^2-4(a-1)<0 \Rightarrow (a-1)(a-5)<0 \end{cases}$$

a		1		5	
$\Delta<0$	+	0	− (ج)	0	+

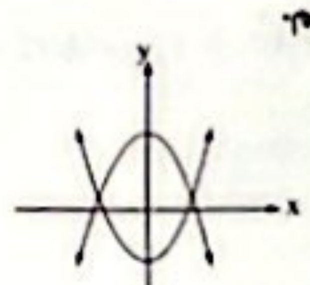
$\Rightarrow 1<a<5 \quad (2)$



$\Rightarrow a\in\varnothing$

دقت کنید که $a\in\varnothing$ از نظر منطقی یک عبارت نادرست است، زیرا $\varnothing$ هیچ عضوی ندارد. منظور از نوشتن این عبارت، این است که هیچ مقداری برای a یافت نمی‌شود.

۱۱۷. گزینهٔ (۱) حالت زیر را درنظر می‌گیریم.



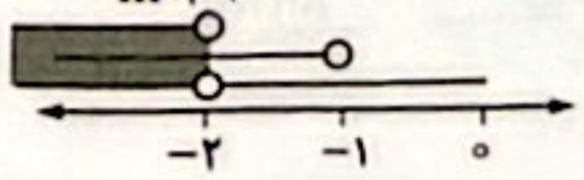
$$\begin{cases} a\neq 0 \\ \Delta>0 \\ P<0 \end{cases}$$

$m+2\neq 0 \Rightarrow m\neq -2 \Rightarrow m<-2$ یا $m>-2 \quad (1)$

$(m+2)x^2-2x+1=0$

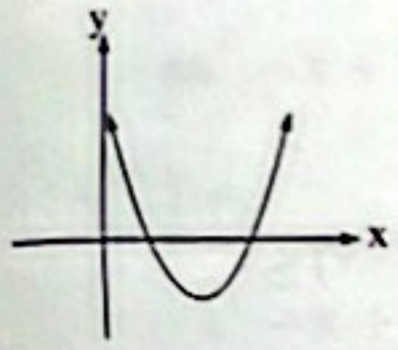
$\Rightarrow \Delta=4-4(m+2)(1)>0 \Rightarrow m+2<1 \Rightarrow m<-1 \quad (2)$

$P=\frac{1}{m+2}<0 \Rightarrow m+2<0 \Rightarrow m<-2 \quad (3)$



$\xrightarrow{(1)\cap(2)\cap(3)} m<-2$

۱۱۸. گزینهٔ (۳) چون $a=2>0$ بنابراین فقط حالت زیر را داریم.



$$\begin{cases} a>0 \\ \Delta>0 \\ S>0 \\ P>0 \end{cases}$$

$2x^2-4x+m-3=0$

$\Rightarrow \Delta=16-8(m-3)=40-8m>0 \Rightarrow m<5 \quad (I)$

$S=-\frac{-4}{2}=2>0$ (همواره برقرار است)

$a=2>0$ (همواره برقرار است)

از طرفی چون ضرب ریشه‌ها نیز مثبت خواهد شد خواهیم داشت:

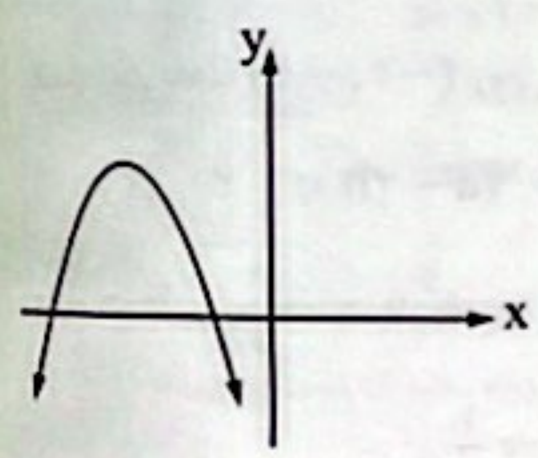
$P>0 \Rightarrow \frac{m-3}{2}>0 \Rightarrow m>3 \quad (II)$

$\xrightarrow{(I)\cap(II)} 3<m<5$

۱۱۹. گزینهٔ (۱) از آن‌جا که ضرب ریشه‌ها مثبت است، لذا:

$P>0 \Rightarrow \frac{-1}{a}>0 \Rightarrow a<0 \quad (I)$

بنابراین فقط حالت زیر را داریم:



$$\begin{cases} a<0 \\ \Delta>0 \\ S<0 \\ P>0 \end{cases}$$

$ax^2+(a+3)x-1=0$

$\Rightarrow \Delta=(a+3)^2-4(a)(-1)=a^2+10a+9$

$a^2+10a+9=0 \Rightarrow (a+1)(a+9)=0 \Rightarrow \begin{cases} a=-1 \\ a=-9 \end{cases}$

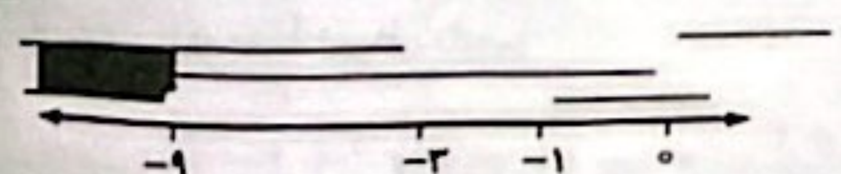
a		−9		−1	
$\Delta>0$	+ (ج)	0	−	0	+ (ج)

$\Rightarrow a<-9$ یا $a>-1 \quad (II)$

$S=-\frac{a+3}{a}<0 \Rightarrow \frac{a+3}{a}>0$

a		−3		0	
a+3	−	0	+		+
a	−		−	0	+
$\frac{a+3}{a}>0$	+ (ج)	0	−	ت ن	+ (ج)

$\Rightarrow a<-3$ یا $a>0 \quad (III)$



$\xrightarrow{(I)\cap(II)\cap(III)} a<-9$

۱۲۰. گزینهٔ (۱) حالت‌های زیر را درنظر می‌گیریم.

تابع باید دارای max باشد چون توابع min‌دار از ناحیهٔ اول می‌گذرند، پس:

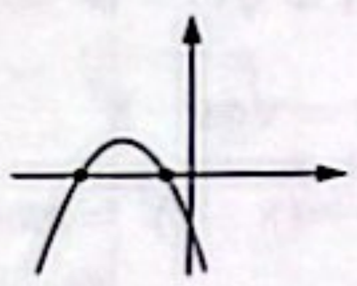
$a-3<0 \Rightarrow a<3 \quad (1)$

$(I)\begin{cases} \Delta<0 \\ a-3<0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a^2+4a-12<0 \\ a<3 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} -6<a<2 \\ a<3 \end{cases} \Rightarrow \boxed{-6<a<2}\ R_1$

$(II)\begin{cases} \Delta=0 \Rightarrow \boxed{a=-6,2}\ R_2 \\ a-3<0 \rightarrow a<3 \end{cases} \Rightarrow a=-6,2$

$(III)\begin{cases} \Delta>0 \\ a-3<0 \end{cases}$



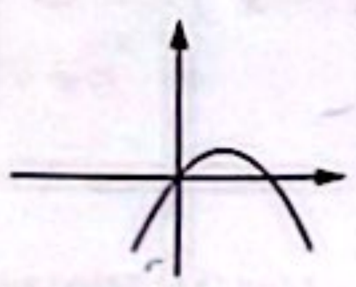
$\begin{cases} a^2+4a-12>0 \\ a<3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a<-6 \text{ یا } a>2 \\ a<3 \end{cases} \Rightarrow \boxed{a<-6}\ R_3$

از اجتماع سه جواب R_1 و R_2 و R_3 نتیجهٔ $a\leq 2$ به‌دست می‌آید.

۱۲۱. گزینهٔ (۳)

$y=x(ax-(a+2))=0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=\frac{a+2}{a} \end{cases}$

چون تابع دارای یک ریشهٔ صفر است برای این‌که از ناحیهٔ دوم عبور نکند باید دارای ریشهٔ دیگر مثبت باشد یا همان ریشهٔ $x=0$ را مجدداً داشته باشد.


یا


$\Rightarrow \frac{a+2}{a}\geq 0 \Rightarrow a\leq -2$ یا $a>0$

چون منحنی max دارد، پس $a\leq -2$ می‌باشد

۱۲۲. گزینهٔ (۳)

$\frac{x}{x-2}+\frac{1}{x}=2 \Rightarrow$ ک.م.م $=x(x-2)$

$\Rightarrow x(x-2)(\frac{x}{x-2}+\frac{1}{x}=2) \Rightarrow x^2+x-2=2x(x-2)$

$\Rightarrow 2x^2-7x+2=0 \Rightarrow P=\frac{2}{2}=1$

۱۲۰. گزینهٔ (۱) حالت‌های زیر را درنظر می‌گیریم.

تابع باید دارای max باشد چون توابع minدار از ناحیهٔ اول می‌گذرند، پس:

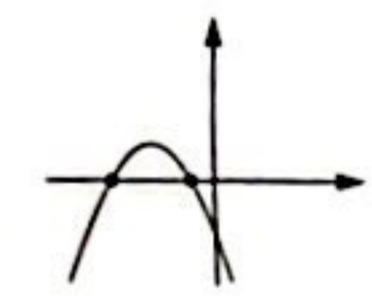
$$a-۳<۰ \Rightarrow a<۳ \qquad (۱)$$

$$(I)\begin{cases}\Delta<۰\\ a-۳<۰\end{cases} \rightarrow \begin{cases}a^۲+۴a-۱۲<۰\\ a<۳\end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases}-۶<a<۲\\ a<۳\end{cases} \Rightarrow \boxed{-۶<a<۲}\ R_۱$$

$$(II)\begin{cases}\Delta=۰ & \Rightarrow \boxed{a=-۶,۲}\ R_۲\\ a-۳<۰ & \rightarrow a<۳\end{cases} \Rightarrow a=-۶,۲$$

$$(III)\begin{cases}\Delta>۰\\ a-۳<۰\end{cases}$$



$$\begin{cases}a^۲+۴a-۱۲>۰\\ a<۳\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}a<-۶ \text{ یا } a>۲\\ a<۳\end{cases} \Rightarrow \boxed{a<-۶}\ R_۳$$

از اجتماع سه جواب $R_۱$ و $R_۲$ و $R_۳$ نتیجهٔ $a \le ۲$ به‌دست می‌آید.

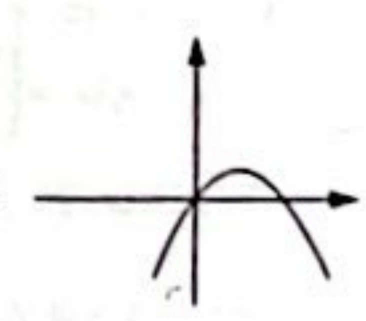
....

۱۲۱. گزینهٔ (۲)

$$y=x(ax-(a+۲))=۰ \Rightarrow \begin{cases}x=۰\\ x=\dfrac{a+۲}{a}\end{cases}$$

چون تابع دارای یک ریشهٔ صفر است برای این‌که از ناحیهٔ دوم عبور نکند، باید دارای ریشـهٔ دیگر مثبت باشد یا همان ریشهٔ $x=۰$ را مجدداً داشته باشد.

یا



$$\Rightarrow \frac{a+۲}{a} \ge ۰ \Rightarrow a \le -۲ \text{ یا } a>۰$$

چون منحنی max دارد، پس $a \le -۲$ می‌باشد.

....

۱۲۲. گزینهٔ (۳)

$$\frac{x}{x-۲}+\frac{۱}{x}=۳ \Rightarrow \text{ک.م.م} = x(x-۲)$$

$$\Rightarrow x(x-۲)\left(\frac{x}{x-۲}+\frac{۱}{x}=۳\right) \Rightarrow x^۲+x-۲=۳x(x-۲)$$

$$\Rightarrow ۲x^۲-۷x+۲=۰ \Rightarrow P=\frac{۲}{۲}=۱$$

۱۲۳. گزینهٔ (۲)

$$\frac{x-۲}{x+۲}+\frac{x}{x-۲}=\frac{۸}{x^۲-۴} \Rightarrow \text{ک.م.م} = x^۲-۴$$

$$\Rightarrow (x^۲-۴)\left(\frac{x-۲}{x+۲}+\frac{x}{x-۲}=\frac{۸}{x^۲-۴}\right)$$

$$\Rightarrow (x-۲)(x-۲)+(x+۲)x=۸$$

$$\Rightarrow x^۲-۴x+۴+x^۲+۲x=۸ \Rightarrow x^۲-x-۲=۰$$

$$\Rightarrow (x+۱)(x-۲)=۰ \Rightarrow \begin{cases}x=-۱\\ x=۲\ (\text{غ ق ق})\end{cases}$$

....

۱۲۴. گزینهٔ (۴)

$$\frac{\text{نمک}}{\text{آب نمک}}=\frac{۵}{۱۰۰}=\frac{x}{۳۰۰} \Rightarrow x=۱۵ \text{ کیلوگرم نمک}$$

$$\text{آب‌نمک جدید} = ۳۰۰+۵=۳۰۵ \text{ کیلوگرم} \Rightarrow \frac{۹}{۱۰۰}=\frac{۲۰}{۳۰۵-y}$$

$$\text{نمک جدید} = ۱۵+۵=۲۰ \text{ کیلوگرم}$$

$$\Rightarrow ۹(۳۰۵-y)=۲۰۰۰ \Rightarrow ۳۰۵-y \simeq ۲۲۲/۲ \Rightarrow y \simeq ۸۲/۸$$

....

۱۲۵. گزینهٔ (۳)

$$\left.\begin{aligned}\frac{۴۰}{۱۰۰}=\frac{x}{۱۱} &\Rightarrow x=\frac{۴۴۰}{۱۰۰}=۴/۴\\ \frac{۷۰}{۱۰۰}=\frac{y}{۴} &\Rightarrow y=\frac{۲۸۰}{۱۰۰}=۲/۸\end{aligned}\right\} \Rightarrow x+y=۷/۲$$

$$\frac{x+y}{۱۱+۴-a}=\frac{۵۰}{۱۰۰} \Rightarrow \frac{۷/۲}{۱۵-a}=\frac{۱}{۲}$$

$$\Rightarrow ۱۴/۴=۱۵-a \Rightarrow a=۰/۶$$

....

۱۲۶. گزینهٔ (۳) فـرض می‌کنیم کارگر اول، نصف کار را در x ساعت انجام دهد. بنابراین در یک ساعت $\frac{۱}{x}$ از نصف کار را انجام می‌دهد.

بنابراین کارگر دوم نصف دیگر کار را در $۱۲/۵-x$ ساعت و در نتیجه در یک ساعت $\frac{۱}{۱۲/۵-x}$ از نصف دیگر را انجام می‌دهد. لذا با هم در یک ساعت $\frac{۱}{x}+\frac{۱}{۱۲/۵-x}$ از نصف کار را انجام می‌دهند.

	نصف کار	ساعت
با هم:	$\frac{۱}{x}+\frac{۱}{۱۲/۵-x}$	۱
	۱	۳

$$\Rightarrow \frac{۱}{x}+\frac{۱}{۱۲/۵-x}=\frac{۱}{۳}$$

$$\Rightarrow ۳(۱۲/۵-x+x)=x(۱۲/۵-x)$$

$$\Rightarrow x^۲-۱۲/۵x+۳۷/۵=۰$$