اصلاحیه

✍ فصل دوم – بخش ۳ - سوال ۱۹: گزینه ۴ صحیح است.

سؤالات تشریحی پاسخنامه

بخش ۱

-۱ آسان

وقتی می‌نویسیم: $f:A\to B$ یعنی تابع **f** از مجموعهٔ **A** به مجموعهٔ **B** تعریف شده است. مجموعهٔ **A** رو دامنه و مجموعهٔ **B** رو هم‌دامنه می‌نامیم که **B** ممکن هست برد هم باشه. (برد زیر مجموعه هم دامنه است.)

توی این تابع، دامنه $D=[-1,2]$ هست و هم‌دامنه $\mathbb{R}$ هست و ما می‌دونیم برای $y=x^2$، برد همهٔ اعداد نامنفی هست یعنی $R=[0,+\infty)$ پس هر مجموعه‌ای که شامل برد باشه قابل‌قبول هست. از طرفی برای $x\in[-1,2]$ داریم: $R=[0,2]$

پس موارد «ب» و «ت» قابل‌قبول هستند زیرا دامنه‌ها برابر هستند و برد را شامل می‌شوند.

-۲ آسان

با توجه به نمودار تابع **f**، دامنه $[-2,1]$ است و برد $[-1,1]$.

پس تابعی قابل‌قبول است که دامنه $[-2,1]$ باشد و با حفظ ضابطه، بر آن شامل $[-1,1]$ باشد (مفهوم هم‌دامنه)

پس فقط مورد «ت» قابل‌قبول است.

-۳ دشوار

برای تشخیص تابع بودن از روی ضابطه، به نکته‌های زیر توجه کن:

۱) اگر **y** داخل قدرمطلق باشه یا توان زوج داشته باشه، شک کن که احتمالاً تابع نباشه ولی با اطمینان نمی‌تونی بگی حتماً تابع نیست یادت باشه حالت‌های خاص و استثنا وجود دارند.

۲) برای اطمینان از تابع نبودن، دنبال عددی بگرد که اگر به‌جای **x** قرار بدی، دو مقدار برای **y** به دست بیاری و این خودش میشه مثال نقض برای اثبات تابع نبودن!

آ) $y=\sqrt{4-x^2}-\sqrt{x^2-4}$

همان طوری که می‌بینی، **y** یک طرف تنهاست و سمت راست عبارتی برحسب **x** پس تابع هست. (به دامنش فکر کن!)

ب) $|y|-x^2-x-1=0$

شک می‌کنیم که احتمالاً تابع نباشه اما بیا $|y|$ رو تنها کنیم:

$|y|=x^2+x+1$

حالا به‌جای **x** اگر عدد صفر رو قرار بدیم داریم:

$x=0\Rightarrow |y|=1\Rightarrow y=\pm 1$

به‌ازای یک مقدار **x**، دو مقدار برای **y** داریم پس این رابطه تابع نیست.

پ) $x^2+y^2+4x+2y+\underbrace{5}_{4+1}=0$

برای بررسی روابطی به این شکل ابتدا سعی کن با مربع کامل کردن عبارت‌ها به فرم مناسبی برسی:

$(x^2+4x+4)+(y^2+2y+1)=0\Rightarrow (x+2)^2+(y+1)^2=0$

دو عبارت نامنفی (توان ۲) با هم جمع شده ومساوی صفر شده‌اند پس لازم است هر دو صفر شوند یعنی $x=-2$ و $y=-1$ یعنی نقطهٔ $(-2,-1)$ و می‌دانیم نقطه تابع است پس این رابطه تابع است.

پس حواست به این نکته باشه: رابط $(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=R^2$، نمایشگر یک دایره با مرکز (α,β) و شعاع **R** است. بنابراین تابع نیست مگر این که $R=0$.

ت) $1+x-x^2|y|=0$

با توجه به این که **y** درون قدرمطلق هست، حدس می‌زنیم رابطه تابع نباشد.

$1+x=x^2|y|\xrightarrow{x=1}2=|y|\Rightarrow y=\pm 2\Rightarrow$ تابع نیست.

ث) $(x-1)(y+5)=0$

ضرب دو پرانتز صفر شده، معنی آن این هست که حداقل یکی از پرانتزها صفر هست پس $x=1$ یا $y=-5$. در حالتی که $x=1$ باشد می‌توان مقادیر مختلفی برای **y** در نظر گرفت پس تابع نیست.

ج) $f(x)=\begin{cases}x^2-3x & x\ge 1\\ 2x+5 & x\le 1\end{cases}$

روابط چند ضابطه‌ای در صورتی تابع هستند که دامنه هر ضابطه، اشتراکی نداشته باشند یا اگر عددی در هر دو بازه وجود دارد، مقدار رابطه از هر دو ضابطه یکی باشد.

توی این رابطه، عدد ۱ در هر دو بازه وجود دارد پس مقداردهی را انجام می‌دهیم:

$1^2-3(1)=-2\quad,\quad 2(1)+5=-7\quad,\quad -2\neq 7$

پس این رابطه تابع نیست.

چ) $|x|+|y-1|=0$

مجموع دو عبارت نامنفی برابر صفر شده، پس لازمه هر دو عبارت صفر باشند:

$|x|=0\Rightarrow x=0$

$|y-1|=0\Rightarrow y=1$

پس باز هم به نقطهٔ $(0,1)$ رسیدیم که تابع هست.

۴- متوسط

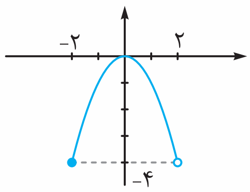
برای تشخیص برد تابع‌های درجه دوم باید حواست به رأس سهمی باشه. که اگر طول رأس سهمی درون بازه باشه، حتماً مقدار عرض اون رو حساب کنیم:

$$y=-x^۲ \quad x_A=-\frac{b}{۲a}=۰ \xrightarrow[\text{هست}]{\text{توی بازه}} y_A=-(۰)^۲=۰ \Rightarrow \text{مقدار ماکزیمم}$$

x	-۲	۰	۲
$-x^۲$	-۴	۰	-۴

$\Rightarrow R=[-۴,۰)$

روش دوم: به کمک نمودار



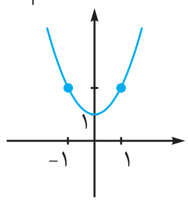
۵- آسان

آ) اگر عدد حقیقی را x در نظر بگیریم، تابع g ابتدا x را به $x^۲$ تبدیل می‌کنه و سپس به $x^۲+۱$ پس:

$$g(x)=x^۲+۱$$

برای رسم می‌تونیم از نقطه‌یابی استفاده کنیم:

	-۱	۰	۱
	۲	۱	۲



ب) از روی نمودار، بخش‌هایی از محور y که توسط نمودار پوشیده شده رو بر می‌داریم:

$R=[۱,+\infty)$

پ) هم‌دامنه، هر مجموعه‌ای است که شامل برد باشد پس مثلاً $[۰,+\infty)$ یا $\mathbb{R}$ می‌توانند هم‌دامنه باشند.

۶- متوسط

برای تشخیص ضابطه‌ای تابع بیا چند مقدار از تابع را ببینیم:

t	۵	۱۰	۱۵	۲۰
h	۱	۲	۳	۴

با مقایسهٔ مقادیر h (فاصلهٔ طی شده) با زمان t متوجه می‌شویم که مقادیر h، از تقسیم t بر ۵ به دست می‌آیند مثلاً: $۱۵\div ۵=۳$

بنابراین می‌توان نوشت:

$$h(t)=\frac{t}{۵}$$

که واحدِ t ثانیه و واحد h، کیلومتر است.

اگر $t\in[۲,۱۰]$، چون تابع h خطی هست برای محاسبهٔ برد کافیه ابتدا و انتهای دامنه رو در h جاگذاری کنیم:

$$h(۲)=\frac{۲}{۵}=۰/۴\ \text{km}$$

$$h(۱۰)=\frac{۱۰}{۵}=۲\ \text{km}$$

پس برد به‌صورت $[۰/۴\,,۲]$ است.

۷- متوسط

دو تابع **f** و **g** رو مساوی می‌نامیم اگر هر دو شرط زیر برقرار باشند:

۱) $D_f=D_g$ $\qquad$ $f(x)=g(x)$ به‌ازای xهای برابر

شرط اول میگه دامنه‌ها برابر باشند، شرط دوم میگه به‌ازای **x**های متعلق به دامنهٔ مشترک مقدار **f** و **g** (بُرد) مساوی باشند.

آ) $D_f:\frac{x-۱}{x+۳}\geq ۰ \Rightarrow D_f=(-\infty,-۳)\cup[۱,+\infty)$

$D_g: x-۱\geq ۰ \Rightarrow x\geq ۱\cap x+۳>۰$

$\Rightarrow x>-۳$

$\Rightarrow D_g=[۱,+\infty)$

شرط اول برقرار نیست پس **f** و **g** مساوی نیستند. (و دیگه لازم نیست شرط دوم رو چک کنیم.)

ب) $D_f:(x=۴)\cup(x\neq ۴)=\mathbb{R} \qquad D_g=\mathbb{R}$

پس شرط اول برقرار هست. ✓

توی این قسمت، چون تابع **f** دوضابطه‌ای هست پس هر دو بازه رو جداگانه در نظر می‌گیریم:

$$x\neq ۴ \Rightarrow f(x)=\frac{x^۲-۱۶}{x-۴}=\frac{\cancel{(x-۴)}(x+۴)}{\cancel{x-۴}}=x+۴=g(x)$$

$$x:۴ \Rightarrow f(۴)=۲ \quad \text{و} \quad g(۴)=۴+۴=۸$$

پس به‌ازای $x=۴$ مقدار **f** و **g** مساوی نیستند پس توابع **f** و **g** مساوی نیستند.

پ)

$$\left.\begin{array}{l} D_f=\mathbb{R}\ (\text{زیر رادیکال همواره مثبت و مخرج همواره مخالف صفر}) \\ D_g=\mathbb{R}\ (\text{زیر رادیکال همواره مثبت}) \end{array}\right\} \Rightarrow D_f=D_g \checkmark$$

$$f(x)=\frac{x^۲}{۲+\sqrt{۴+x^۲}}\times\frac{\sqrt{۴+x^۲}-۲}{\sqrt{۴+x^۲}-۲}=\frac{x^۲(\sqrt{۴+x^۲}-۲)}{۴+x^۲-۴}$$

$$=\sqrt{۴+x^۲}-۲=g(x)$$

پس **f** و **g** مساوی‌اند.

ت) $D_f: x^۲-۲x\geq ۰ \Rightarrow x(x-۲)\geq ۰ \Rightarrow$

	۰		۲	
+	۰	−	۰	+

$\Rightarrow D_f=(-\infty,۰]\cup[۲,+\infty)$

$D_g: x\geq ۰\cap x-۲\geq ۰ \Rightarrow x\geq ۲ \Rightarrow D_g=[۲,+\infty)$

دامنهٔ **f** و **g** مساوی نیستند پس توابع **f** و **g** مساوی نیستند.

ث)

$$\left.\begin{array}{l} D_f=\mathbb{R}\ (\text{مخرج مخالف صفر}) \\ D_g=\mathbb{R}\ (\text{چندجمله‌ای}) \end{array}\right. \Rightarrow D_f=D_g$$

$$f(x)=\frac{۵x^۲-۱۰}{۵}=\frac{۵(x^۲-۲)}{۵}=x^۲-۲=g(x)$$

ضابطهٔ دو تابع هم مساوی هستند پس هر دو شرط برقرار است و بنابراین توابع **f** و **g** مساوی‌اند.

۸- آسان

دو تابع f و g دارای دامنهٔ برابر هستند پس در صورتی مساوی می‌شوند که مقادیر f و g به‌ازای $x \in \mathbb{R}$ نیز مساوی شود:

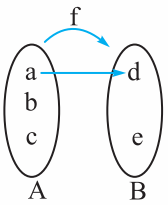
$x \neq ۱ \Rightarrow g(x)=f(x)$ ✓

$x=۱ \Rightarrow g(۱)=f(۱)$

$-a+۳=۲ \Rightarrow a=۱$

۹- دشوار

می‌دونیم رابطه‌ای تابع هست که به‌ازای هر مقدار x، فقط یک مقدار برای y داشته باشیم پس طبق نمودار روبه‌رو، از a می‌تونیم فقط به یکی از اعضای B پیکان وصل کنیم و بنابراین دو انتخاب برای a وجود داره.



به همین ترتیب برای b و c هم دو انتخاب وجود داره (محدودیت ورود پیکان نداریم).

پس $۲\times۲\times۲$ یعنی $۲^۳$ تابع مختلف و غیرتهی از A به B وجود دارد.

به طور کلی اگر A دارای n عضو و B دارای m عضو باشد تعداد توابع ناتهی از A به B برابر m^n است. توابع این سؤال رو ببینیم:

$(۱)\ f=\{(a,e)(b,e)(c,e)\}$

$(۲)\ f=\{(a,e)(b,e)(c,d)\}$

$(۳)\ f=\{(a,e)(b,d)(c,e)\}$

$(۴)\ f=\{(a,e)(b,d)(c,d)\}$

$(۵)\ f=\{(a,d)(b,d)(c,d)\}$

$(۶)\ f=\{(a,d)(b,d)(c,e)\}$

$(۷)\ f=\{(a,d)(b,e)(c,d)\}$

$(۸)\ f=\{(a,d)(b,e)(c,e)\}$

به ترتیب نوشتن زوج مرتب‌ها دقت کن!

۱۰- دشوار

أ) $D=[-۴,+\infty) \Rightarrow x \geq -۴$

ب) $۰ \leq x \leq ۳ \Rightarrow$ ثابت f

پ) $\forall x>۳\,;\ f(x)=x^۲$

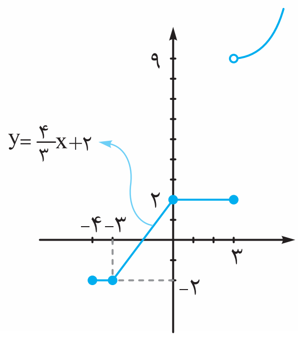
ت) $-۳ \leq x<۰ \Rightarrow f(x)=ax+b$

ث) $\underbrace{f(۳)=۲}_{\text{تابع ثابت}=۲}\ ,\ f(-۳)=-۲$

$$\Rightarrow f(x)=\begin{cases} -۲ & -۴\leq x<-۳ \\ \frac{۴}{۳}x+۲ & -۳\leq x<۰ \\ ۲ & ۰\leq x\leq ۳ \\ x^۲ & x>۳ \end{cases}$$

$$\begin{vmatrix}۰\\۲\end{vmatrix}\ ,\ \begin{vmatrix}-۳\\-۲\end{vmatrix}$$

$$y=ax+۲ \quad \begin{vmatrix}-۳\\-۲\end{vmatrix} \Rightarrow a=+\frac{۴}{۳}$$



پاسخنامه سؤالات تستی

بخش ۱

۱- گزینه «۱» آسان

گفتیم چند ضابطه‌ای‌ها در صورتی تابع‌اند که مقدار هر ضابطه به‌ازای xهای یکسان یکی باشه پس:

$x=۰ \Rightarrow -۲b=-a \Rightarrow ۲b=a$

$x=۲ \Rightarrow ۸-a=۱ \Rightarrow ۸-۱=a \Rightarrow \boxed{a=۷} \Rightarrow ۲b=۷ \Rightarrow \boxed{b=\frac{۷}{۲}}$

$\Rightarrow \frac{a}{b}=\frac{۷}{\frac{۷}{۲}}=۲$

۲- گزینه «۱» متوسط

$$f(x)=\begin{cases} \frac{x-۱}{x^۲+۲} & x\leq -۱ \cup x\geq ۱ \\ \frac{x^۲-ax+b}{x-۲} & -۱\leq x\leq ۱ \end{cases}$$

$x=-۱ \Rightarrow -\frac{۲}{۳}=\frac{+a+b}{-۳} \Rightarrow a+b+۱=۲ \Rightarrow \boxed{a+b=۱}$

$x=۱ \Rightarrow ۰=\frac{۱-a+b}{-۱} \Rightarrow ۱-a+b=۰ \Rightarrow \boxed{-a+b=-۱}$

پس از حل دستگاه داریم: $a=۱$ و $b=۰$ پس $ab=۰$.

۳- گزینه «۲» متوسط

همان طوری که می‌دونی در زوج مرتب اگر مؤلفه‌های اول برابر باشند، الزاماً باید مؤلفه‌های دوم هم یکسان باشند پس:

$$\begin{cases}(۳,m^۲)\\(۳,m+۲)\end{cases} \Rightarrow m^۲=m+۲ \Rightarrow m^۲-m-۲=۰ \Rightarrow m=-۱,۲$$

چون در مؤلفه‌های اول m داریم پس جاگذاری می‌کنیم:

$m=-۱ \Rightarrow f=\{(۳,۱),(۲,۱),(-۲,-۱),(-۱,۴)\}$

تابع هست پس $m=-۱$ قابل‌قبول است و گزینهٔ ۲ درست است. اما چرا $m=۲$ جواب نیست؟

$m=۲ \Rightarrow f=\{(۳,۴),\underline{(۲,۱)},(-۲,۲),\underline{(۲,۴)}\}$

برای $x=۲$ دو مقدار برای y داریم پس f تابع نمی‌شود.

۴- گزینه «۱» — دشوار

$x=-۱ \Rightarrow ۱+a=\frac{-۱+۳}{۱} \Rightarrow ۱+a=۲ \Rightarrow \boxed{a=۱}$

$$\Rightarrow f(x)=\begin{cases} x^۲+۱ & x\geq -۱ \\ \frac{x^۳-۳x}{x+۲} & x\leq -۱\end{cases}$$

برخورد با محور **x** یعنی $y=۰$:

$f(x)=۰ \Rightarrow (۱)\ x\geq -۱: \quad x^۲+۱=۰$ جواب ندارد. $\Rightarrow$ برخورد نداریم

$(۲)\ x\leq -۱ \Rightarrow \frac{x^۳-۳x}{x+۲}=۰ \Rightarrow x(x^۲-۳)=۰$

$\Rightarrow x=۰,-\sqrt{۳},+\sqrt{۳}$

با توجه به دامنه $(x\leq -۱)$، فقط $x=-\sqrt{۳}$ قابل‌قبول است.

۵- گزینه «۱» — متوسط

۱) $D_f: ۸x-x^۲\geq ۰ \Rightarrow ۰\leq x\leq ۸ \Rightarrow D_f=[۰,۸]$ ، $D_g:(x\geq۰)\cap(۸-x\geq۰)(x\leq ۸)\Rightarrow D_g=[۰,۸]$ $\Rightarrow D_f=D_g$ ✓

$g(x)=\sqrt{x}.\sqrt{۸-x}=\sqrt{x(۸-x)}=f(x)$ ✓ $\Rightarrow$ f و g مساویند

۲) $D_f:-x\geq۰ \Rightarrow x\leq ۰, D_g:-x^۳\geq ۰\Rightarrow x\leq ۰$ ✓

$g(x)=\sqrt{-x^۳}=\sqrt{-x^۲\times x}=|x|\sqrt{-x}\neq f(x)$ $\Rightarrow$ مساوی نیستند

۳) $f(۴)=۳, g(۴)=۸$ $\Rightarrow$ مساوی نیستند

۴) $D_f:(-\infty,-۳]\cup(۱,+\infty)$ ، $D_g:(۱,+\infty)$ $\Rightarrow D_f\neq D_g$ $\Rightarrow$ مساوی نیستند

۶- گزینه «۳» — دشوار

$D_f=\mathbb{R}-\{۲\} \Rightarrow D_g=\mathbb{R}-\{۲\}$

تابع **g** کسری هست با مخرج درجه ۲ که با توجه به این که دامنهٔ آن فقط یک عدد حذف شده پس عدد ۲ ریشهٔ مضاعف مخرج بوده و مخرج به‌صورت $k(x-۲)^۲$ هست با مقایسهٔ مخرج با این عبارت $k=۱$ هست و

$x^۲+bx+c=(x-۲)^۲ \Rightarrow x^۲+bx+c=x^۲-۴x+۴$

$\Rightarrow \boxed{b=-۴},\boxed{c=۴}$

$\Rightarrow g(x)=\frac{x^۲-۴}{(x-۲)^۲}=\frac{\cancel{(x-۲)}(x+۲)}{\cancel{(x-۲)}(x-۲)}=\frac{x+۲}{x-۲}=f(x)$

$\Rightarrow \boxed{a=۲} \Rightarrow a+c=۲+۴=۶$

۷- گزینه «۱» — دشوار

$x=۲\Rightarrow f(۲)=g(۲)\Rightarrow b=۲+c$

$x\neq ۲\Rightarrow \frac{x^۲-۵x+a}{x-۲}=x+c$

$\Rightarrow x^۲-۵x+a=x^۲+(c-۲)x-۲c$

$c-۲=-۵ \Rightarrow \underline{c=-۳}\ ,\ a=-۲c\Rightarrow \underline{a=۶}$

$b=۲+(-۳)=-۱$

$abc=۶\times(-۱)\times(-۳)=۱۸$

۸- گزینه «۴» — متوسط

$D_f:-x>۰\Rightarrow x<۰\Rightarrow D_f=(-\infty,۰)$

پس گزینه‌های ۲ و ۳ رد هستن.

$f(x)=\frac{x}{\sqrt{-x}}\times\frac{\sqrt{-x}}{\sqrt{-x}}=\frac{\cancel{x}\sqrt{-x}}{-\cancel{x}}=-\sqrt{-x}$

که البته با توجه به این که $f(-۱)=-۱$، تنها گزینهٔ ۴ درست هست.

۹- گزینه «۲» — متوسط

بررسی گزینه‌ها:

۱) $x=۰\Rightarrow y^۲=۴\Rightarrow y=\pm۲\Rightarrow$ تابع نیست.

۲) y به صورت عبارتی برحسب x هست پس تابع است

زیرا به‌ازای هر مقدار **x** فقط یک مقدار برای **y** به دست میاد.

۳) $x=۱\Rightarrow |y+۲|=۲\Rightarrow y=۰,-۴\Rightarrow$ تابع نیست.

۴) $x=۱\Rightarrow |y|=۱\Rightarrow y=\pm۱\Rightarrow$ تابع نیست.

۱۰- گزینه «۲» — دشوار

$\begin{cases} f(x)=\sqrt{x-x^۲} & D_f=[۰,۱] \\ g(x)=\sqrt{x}.\sqrt{۱-x} & D_g=[۰,۱]\end{cases}$ و $f(x)=g(x)\Rightarrow$ f و g مساوی

$\begin{cases} f(x)=\frac{x}{|x|}=\begin{cases}۱ & x>۰\\ -۱ & x<۰\end{cases} \\ g(x)=\frac{|x|}{x}=\begin{cases}۱ & x>۰\\ -۱ & x<۰\end{cases}\end{cases}$ $\Rightarrow$ f و g مساوی

$\begin{cases} f(x)=\sqrt{\frac{x-۱}{x-۲}} \Rightarrow D_f=(-\infty,۱]\cup(۲,+\infty) \\ g(x)=\frac{\sqrt{x-۱}}{\sqrt{x-۲}} \Rightarrow D_g=(۲,+\infty)\end{cases}$ $\Rightarrow \times$

$\begin{cases} f(x)=x\sqrt{x^۲-۱} & D_f=(-\infty,۱]\cup(۱,+\infty)=D_g \\ g(x)=\sqrt{x^۴-x^۲} & g(x)=|x|\sqrt{x^۲-۱}\neq f(x)\end{cases}$ $\Rightarrow \times$

۱۱- گزینه «۲» — آسان

نمایشی قابل‌قبول است که دامنه همان $[۰,\frac{۱}{۳}]$ باشد و هم دامنه، شامل برد باشد و ضابطهٔ تابع به‌صورت $f(x)=x^۲$ حفظ شود پس: $\begin{cases} f:[۰,\frac{۱}{۳}]\Rightarrow\mathbb{R}\\ f(x)=x^۲\end{cases}$

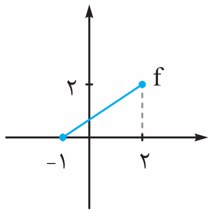
و $\begin{cases} f:[۰,\frac{۱}{۳}]\Rightarrow[۰,+\infty)\\ f(x)=x^۲\end{cases}$ هر دو قابل‌قبول‌اند.

۱۲- گزینهٔ «۲» آسان

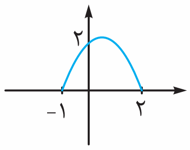
مجموعهٔ **A** دارای ۲ عضو و مجموعه **B** دارای ۳ عضو است پس تعداد توابع از **A** به **B** برابر $۳^۲$ یعنی ۹ است.

۱۳- گزینهٔ «۲» متوسط

آ) نادرست. مثال نقض:



$D_f=[-۱,۲]$
$R_f=[۰,۲]$



$D_g=[-۱,۲]$
$R_g=[۰,۲]$ در حالی که $\Rightarrow f\neq g$

ب) درست است ممکن است برد، همهٔ هم‌دامنه را شامل شود.

پ) نادرست. برد، زیرمجموعه‌ای از هم‌دامنه است.

ت) درست.

۱۴- گزینهٔ «۳» متوسط

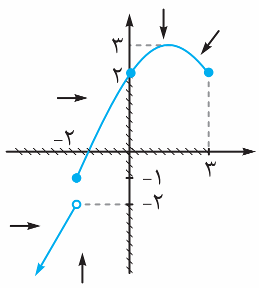
$D_f=D_g=\mathbb{R}$

$$g(x)=\begin{cases}x^۲ & x\geq ۰\\ -x^۲ & x<۰\end{cases}$$

به‌ازای $x\geq ۰$ برابرند ولی در حالت کلی با وجود برابری دامنه‌ها، برابر نیستند پس گزینه ۳ تنها گزینهٔ درست است.

۱۵- گزینهٔ «۴» دشوار

یه روش باحال یاد بدم؟! وقتی می‌خوای دامنه تعیین کنی فرض کن چراغ‌قوه‌ای رو برداشتی و از پشت نمودار و به سمت محور **x** (موازی محور **y**) نور می‌تابونی، هرجا روی محور **x** سایه افتاد دامنه است. همین اتفاق از سمت چپ و راست روی محور **y** برد رو نشون میده:



$D_f=(-\infty,۳]$
$R_f=(-\infty,۲]\cup[-۱,۳]$

۱۶- گزینهٔ «۱» آسان

$M(۳۸)=۲/۸۹(۳۸)+۷۰/۶۴=۱۸۰/۴۶$

۱۷- گزینهٔ «۲» متوسط

تابع **f** همانی است یعنی هر عدد بهش بدی «همان» را بر می‌گرداند.

$f(x)=x$

$g(x)=k$ (عددی ثابت k)

$$f^۲(۳)+۴g(۵)=\frac{۱}{۲}f(۲)\Rightarrow ۳^۲+۴k=\frac{۱}{۲}\times ۲$$

$$\Rightarrow ۹+۴k=۱\Rightarrow ۴k=-۸\Rightarrow k=-۲$$

$$\Rightarrow g(x)=-۲$$

$$g(۲۰۵)=-۲$$

۱۸- گزینهٔ «۱» آسان

$$f(x)=x\Rightarrow (a-۲b)x+۲b+a=x$$

$$\Rightarrow\begin{cases}a-۲b=۱ & (\text{ضریب } x)\\ ۲b+a=۰ & (\text{عددثابت})\end{cases}$$

$$۲a=۱\Rightarrow a=\frac{۱}{۲}\Rightarrow b=-\frac{۱}{۴}$$

$$af(۳)-۲b=\frac{۱}{۲}(۳)-۲(-\frac{۱}{۴})=\frac{۳}{۲}+\frac{۱}{۲}=۲$$

۱۹- گزینهٔ «۳» آسان

$$x=-\frac{۱}{۲}\Rightarrow f(-\frac{۱}{۲})=g(-\frac{۱}{۲})$$

$$\Rightarrow ۲(-\frac{۱}{۲})-۱=۱-k$$

$$-۲=۱-k\Rightarrow k=۱+۲=۳$$

۲۰- گزینهٔ «۳» آسان

همان طوری که از دامنه مشخص هست، دامنه تنها ۳ عضو داره پس تابع هم به‌صورت سه نقطه هست پس گزینه‌های ۱ و ۲ رد میشن.

اگه **f** رو به زبان ریاضی بنویسیم:

$$f(x)=\frac{x}{۲}+۳$$

$$f(-۱)=-\frac{۱}{۲}+۳=\frac{۵}{۲}=۲/۵$$

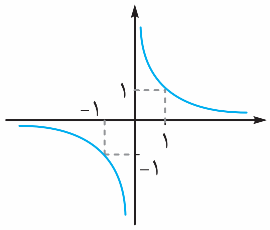
$$f(۰)=۳$$

$$f(۳)=\frac{۳}{۲}+۳=\frac{۹}{۲}=۴/۵$$

که در گزینه ۳ درست رسم شده است.

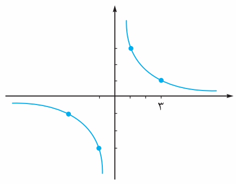
۱- متوسط

آ) نمودار تابع $y=\frac{1}{x}$ که به نمودار پروانه‌ای معروف هست به این صورت رسم میشه:



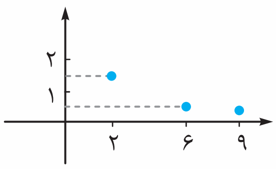
$D=\mathbb{R}-\{0\}\,,\,R=\mathbb{R}-\{0\}$

پس نمودار $y=\frac{3}{x}$ در راستای عمودی کشیده میشه (۳ برابر)



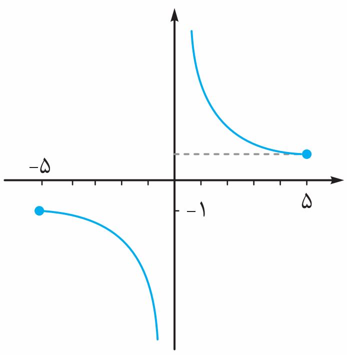
ب)

x	2	6	9
$\frac{3}{x}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$

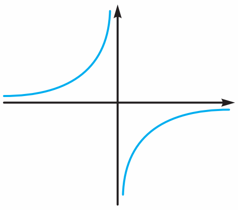


پ)

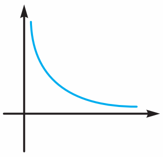
x	-5	5
$\frac{3}{x}$	$-\frac{3}{5}$	$\frac{3}{5}$



ت) $S(x)=-\frac{3}{x}$ همون نمودار $y=\frac{3}{x}$ هست که نسبت به محور **x**ها قرینه شده.



ث)



۲- متوسط

دامنه صورت، کل اعداد حقیقی است و محدودیتی ایجاد نمی‌کند و $\mathbb{R}-\{1,2\}$ نشان می‌دهد که $x=1$ و $x=2$ ریشه‌های مخرج بوده‌اند و مخرج را می‌توان به‌صورت زیر نوشت:

$$(x-1)(x-2)=x^2-ax+2b$$

$$x^2-3x+2=x^2-ax+2b$$

$$\Rightarrow a=3\,,\,b=1\ \Rightarrow\ \frac{a}{b}=\frac{3}{1}=3$$

۳- متوسط

مخرج کسر درجه ۲ است در حالی که فقط یک عضو از **R** حذف شده و معنی آن این است که عدد **a** ریشهٔ مضاعف مخرج هست و مخرج به فرم اتحاد مربع است:

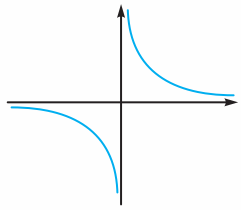
$$x^2-6x+b=(x-a)^2$$

$$x^2-6x+b=x^2-2ax+a^2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -2a=-6\ \Rightarrow\ a=3 \\ b=a^2\ \Rightarrow\ b=9 \end{cases}$$

$$\Rightarrow\ f(x)=\frac{x-3}{(x-3)^2}=\frac{1}{x-3}\ \Rightarrow\ f(4)=\frac{1}{4-3}=1$$

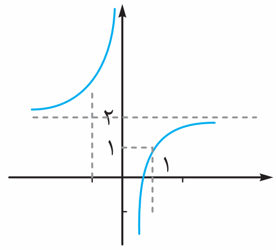
۴- دشوار



$y=\frac{۱}{x}$

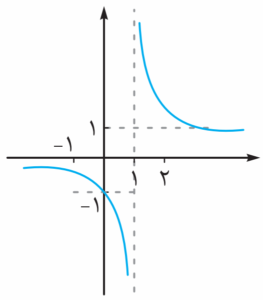
آ) $y=\frac{۲x-۱}{x}=۲-\frac{۱}{x}=-\frac{۱}{x}+۲$

ابتدا نسبت به محور **x** قرینه و سپس ۲ واحد به بالا می‌بریم:



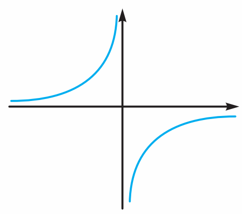
ب) $y=\frac{۱}{x-۱}\,,\,x>۱$

با توجه به انتقال تابع، کافیست به‌اندازه یک واحد به سمت راست منتقل کنیم.



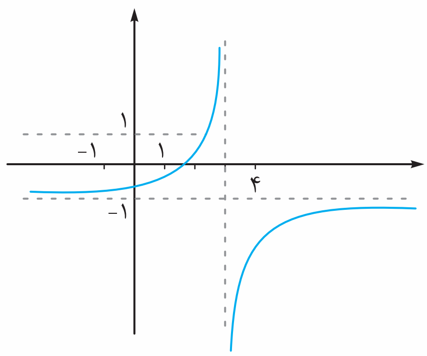
پ) $y=-\frac{۱}{x}$

یادت باشه که اگر نمودار $-f(x)$ را خواستی بکشی باید نمودار **f** رو نسبت بـه محور **x**ها قرینه کنی:



ت) $y=\frac{-x+۲}{x-۳}=-\frac{(x-۲)}{x-۳}=-\frac{x-۳+۱}{x-۳}=-۱-\frac{۱}{x-۳}$

۳ واحد به راست قرینه نسبت به محور **x** ۱ واحد به پائین



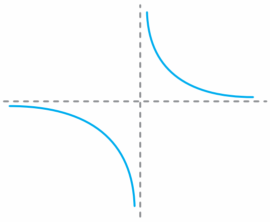
نکته مهم: توابعی به فرم $y=\frac{ax+b}{cx+d}$ رو توابع هموگرافیک می‌نامیم.

$(ad-bc\neq ۰)$

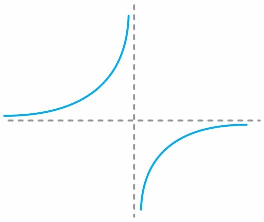
نمودار این توابع از دو فرم زیر تبعیت می‌کنن:

$(۱)\ af-bc>۰\Rightarrow$ صعودی $\qquad (۲)\ ad-bc<۰\Rightarrow$ نزولی

$y=\frac{a}{c}$



(ریشه مخرج) $x=\frac{-d}{c}$



$y=\frac{a}{c}$

$x=\frac{-d}{c}$

۵- آسان

آ) x درصد آلودگی را نشان می‌دهد پس: $x=٪۵۰$ یا $x=\frac{۱}{۲}$

$f(\frac{۱}{۲})=\frac{۲۵۵(\frac{۱}{۲})}{۱۰۰-\frac{۱}{۲}}=\frac{\frac{۲۵۵}{۲}}{\frac{۱۹۹}{۲}}=\frac{۲۵۵}{۱۹۹}=۱/۲۸$ میلیون تومان

ب) تابع به صورت کسری است پس دامنه به‌صورت {ریشه مخرج} $-\ \mathbb{R}$ نوشته می‌شود:

$D=\mathbb{R}-\{۱۰۰\}$

۶- آسان

آ) در انتهای ماه پنجم $t=۵$ است پس:

$n(۵)=\frac{۹۵۰۰(۵)-۲۰۰۰}{۴+۵}=\frac{۴۵۵۰۰}{۹}=۵۰۵۵/۵$

یعنی حدود ۵۰۵۵ نفر

ب) $n(t)=۵۵۰۰$ پس:

$\frac{۹۵۰۰t-۲۰۰۰}{۴+t}=۵۵۰۰$

$\Rightarrow ۹۵۰۰t-۲۰۰۰=۲۲۰۰۰+۵۵۰۰t$

$۴۰۰۰t=۲۰۰۰\Rightarrow t=۵/۵\Rightarrow$ پس از ۵/۵ ماه

۷- دشوار

می‌دانیم رابطه‌ای بین سرعت، زمان و فاصله از رابطهٔ $V=\frac{x}{t}$ به دست میاد

پس:

$$۶۰=\frac{۱۰}{t_۱} \Rightarrow t_۱=\frac{۱}{۶},\ ۱۰۰=\frac{x-۱۰}{t_۲} \Rightarrow t_۲=\frac{x-۱۰}{۱۰۰}$$

اگر طول کل مسیر رو با **x** نشون بدیم:

$$V=\frac{x}{t_۱+t_۲}=\frac{x}{\frac{۱}{۶}+\frac{x-۱۰}{۱۰۰}}=\frac{x}{\frac{۱۰۰+۶x-۶۰}{۶۰۰}}=\frac{۶۰۰x}{۶x+۴۰}$$

$$\Rightarrow V(x)=\frac{۶۰۰x}{۶x+۴۰}$$

ب) $V(x)=۹۰$ پس:

$$\frac{۶۰۰x}{۶x+۴۰}=۹۰$$

$$\Rightarrow ۶۰۰x=۵۴۰x+۳۶۰۰ \Rightarrow ۶۰x=۳۶۰۰ \Rightarrow x=۶۰\ \text{km}$$

۸- متوسط

آ) $x^۲-۷x+۱۰\neq ۰ \Rightarrow (x-۲)(x-۵)\neq ۰$

$\Rightarrow x\neq ۲,۵ \Rightarrow D_f=\mathbb{R}-\{۲,۵\}$

ب) $x^۳-۲x^۲-۳x+۴\neq ۰$

برای حل این نامساوی به دلیل این که درجه ۳ هست یکی از اعداد $۱,-۱,۲,-۲$ را به ترتیب جاگذاری می‌کنیم:

$x=۱ \Rightarrow ۱-۲-۳+۴=۰$

پس یکی از ریشه‌ها $x=۱$ است. برای یافتن بقیه از تقسیم کردن کمک می‌گیریم:

$$\begin{array}{l|l} \cancel{x^۳}-۲x^۲-۳x+۴ & x-۱ \\ \hline -\cancel{x^۳}\pm x^۲ & x^۲-x-۴ \\ \quad -\cancel{x^۲}-۳x & \\ \quad \pm\cancel{x^۲}\pm x & \\ \qquad -۴x+۴ & \\ \qquad +۴x-۴ & \\ \qquad\quad ۰ & \end{array}$$

$\Rightarrow x^۲-x-۴\neq ۰$

$\Rightarrow \Delta=۱-۴(-۴)=۱۷$

$\Rightarrow x=\frac{۱\pm\sqrt{۱۷}}{۲}$

$\Rightarrow D_f=\mathbb{R}-\{۱,\frac{۱\pm\sqrt{۱۷}}{۲}\}$

پ) مخرج $\neq ۰ \Rightarrow (x-۱)(x+۲)\neq ۰ \Rightarrow x\neq ۱,-۲$

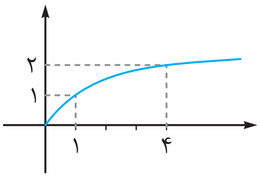
$\Rightarrow D=\mathbb{R}-\{۱,۲\}$

ت) $x^۲+۱\neq ۰ \Rightarrow x^۲\neq -۱$ همواره درست $\Rightarrow D=\mathbb{R}$

زیرا $x^۲+۱$ در مخرج کسر هیچ‌گاه صفر نمیشه و همواره مقدار مثبتی به ما می‌دهد.

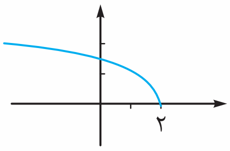
۹- آسان

نمودار تابع رادیکالی $y=\sqrt{x}$ به‌صورت زیر هست که به «ابرو» معروفه!

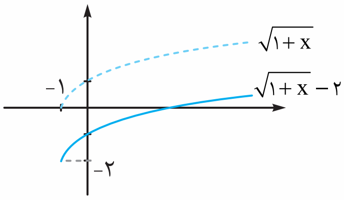


حالا واسه انتقال اول دقت کن ببین ریشهٔ داخل رادیکال چه عددی هست شروع نمودار از همون عدده. بعد اگر ضریب **x** مثبت بود نمودار رو به سمت راست بکش و اگر ضریب **x** منفی بود، نمودار رو به سمت چپ بکش.

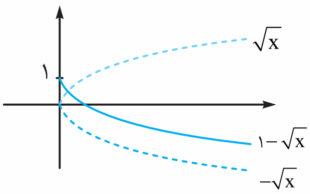
آ) $y=\sqrt{-x+۲} \Rightarrow x=۲$ و ضریب x منفی



ب) $y=\sqrt{۱+x}-۲$ $x=-۱$ به سمت راست

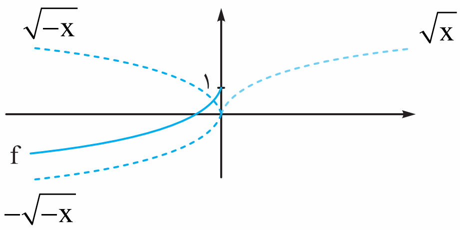


پ) $y=۱-\sqrt{x}$

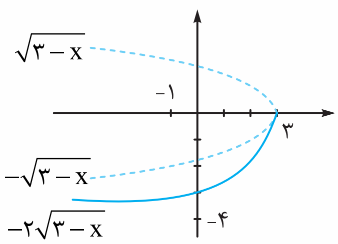


ت) $y=-\sqrt{-x}+۱$

قرینه نسبت به محور x ↓ ↓ قرینه نسبت به محور y



ث) $y=-۲\sqrt{۳-x}$



۱۰- متوسط

دامنهٔ توابع رادیکالی، xهایی‌ست که زیر رادیکال رو منفی نکنه پس کافیه عبارت زیر رادیکال رو بزرگ‌تر مساوی صفر بزاریم و نامعادله رو حل کنیم:

آ) $2x+6\ge 0 \Rightarrow 2x\ge -6 \Rightarrow x\ge -3 \Rightarrow D=[-3,+\infty)$

ب) $3x+1\ge 0 \Rightarrow 3x\ge -1 \Rightarrow x\ge -\frac{1}{3} \Rightarrow D=[-\frac{1}{3},+\infty)$

پ) $x\ge 0 \Rightarrow D=[0,+\infty)$

ت) $x<0 \Rightarrow 2-x\ge 0 \Rightarrow x\le 2 \xrightarrow{\cap} D_1=(-\infty,0)$

$x\ge 0 \Rightarrow x\ge 0 \Rightarrow D_2=[0,+\infty)$

$D=D_1\cup D_2=(-\infty,+\infty)=\mathbb{R}$

برای تعیین برد عبارت‌ها و توابع رادیکالی حواست باشه که رادیکال همواره نامنفی هست:

آ) $\sqrt{2x+6}\ge 0 \Rightarrow \sqrt{2x+6}-2\ge -2 \Rightarrow R=[-2,+\infty)$

ب) $\sqrt{3x+1}\ge 0 \Rightarrow R=[0,+\infty)$

پ) $2\sqrt{x}\ge 0 \Rightarrow 2\sqrt{x}-3\ge 3 \Rightarrow R=[-3,+\infty)$

ت) $\sqrt{2-x}\ge 0 \Rightarrow R_1=[0,+\infty)$

$\sqrt{x}\ge 0 \Rightarrow -\sqrt{x}\le 0 \Rightarrow 2-\sqrt{x}\le 2 \Rightarrow R_2=(-\infty,2]$

$\Rightarrow R=R_1\cup R_2=\mathbb{R}$

۱۱- دشوار

آ) حواست هم به رادیکال‌ها باشه هم به مخرج کسر:

$x-1\ge 0 \Rightarrow x\ge 1$

و

$x^2-64\ne 0 \Rightarrow x^2\ne 64 \Rightarrow x\ne \pm 8$

$\xrightarrow{\cap} D=[1,+\infty)-\{8\}$

ب) صورت چند جمله‌ای $\Rightarrow \mathbb{R}$

رادیکال‌های با فرجهٔ فرد محدودیتی ایجاد نمی‌کنند و اون‌ها رو نادیده می‌گیریم.

مخرج: $|x|-5\ne 0 \Rightarrow |x|\ne 5 \Rightarrow x\ne \pm 5 \Rightarrow D=\mathbb{R}-\{-5,+5\}$

پ)

$x-4\ge 0 \Rightarrow x\ge 4$

$|x|-7\ne 0 \Rightarrow |x|\ne 7 \Rightarrow x\ne \pm 7$

$\xrightarrow{\cap} D=[4,+\infty)-\{7\}$

۱۲- دشوار

آ) $x^2+3\ge 0$ همواره برقرار

$x+|x|\ne 0 \Rightarrow |x|\ne -x \Rightarrow x>0 \Rightarrow D=(0,+\infty)$

ب) $1-x^2\ge 0 \Rightarrow x^2\le 1 \Rightarrow |x|\le 1 \Rightarrow -1\le x\le 1$

$|x|-x\ne 0 \Rightarrow |x|\ne x \Rightarrow x<0\} \xrightarrow{\cap} -1\le x<0$

پ)

$x-3\ge 0 \Rightarrow x\ge 3$

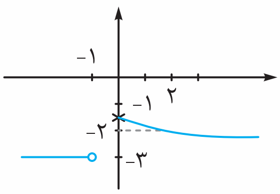
$6-x>0 \Rightarrow x<6$

$\xrightarrow{\cap} D=[3,6)$

مخرج نمی‌تونه صفر بشه.

۱۳- دشوار

$$f(x)=\begin{cases}-\sqrt{x+2} & x\ge 0 \Rightarrow \begin{array}{c|cc} x & 0 & 2\\ \hline y & -\sqrt{2} & -2\end{array}\\ -3 & x<-1\end{cases}$$



$D=(-\infty,-1)\cup[0,+\infty)$

$R=(-\infty,-\sqrt{2}]$

۱۴- دشوار

$|x-1|\,(x^2-4)\ge 0$

$x=1 \quad x=\pm 2$

می‌دونیم که قدرمطلق همواره مثبت هست فقط به‌ازای ریشهٔ عبارت داخلی، صفر میشه

x	$-\infty$	-2		1		2	$+\infty$
$\lvert x-1\rvert$	+		+	0	+		+
(x^2-4)	+	0	−		−	0	+
P	+ ج	0	−	0	−	0	+ ج

$D=(-\infty,-2]\cup[2,+\infty)$

۱۵- دشوار

تو این جور سؤال‌ها اول بدون توجه به نمودار، دامنهٔ تابعی که داده رو مشخص کن، مثلاً تو این سؤال تابع رادیکالی داده پس:

$-xf(x)\ge 0$

$$\Rightarrow xf(x)\le 0 \Rightarrow \begin{cases}(1)\begin{cases}x\le 0\\ f\ge 0\end{cases} \Rightarrow \text{ربع دوم}\\ (2)\begin{cases}x\ge 0\\ f\le 0\end{cases} \Rightarrow \text{ربع چهارم}\end{cases}$$

پس دامنه یا xهایی رو مشخص می‌کنیم که در این دو ربع نمودار داشته باشیم:

$D=[-4,-2]\cup[0,4]$

۱۶- متوسط

حواست باشه که ۳ تا رادیکال داریم:

(1) $x+3\ge 0 \Rightarrow x\ge -3$

(2) $x+2\ge 0 \Rightarrow x\ge -2$

(3) $\sqrt{x+3}-\sqrt{x+2}\ge 0 \Rightarrow \sqrt{x+3}\ge\sqrt{x+2}$

$\xrightarrow{\text{توان ۲}} x+3\ge x+2 \Rightarrow 3\ge 2 \Rightarrow$ همواره برقرار

پس با اشتراک‌گیری داریم:

$x\ge -2$

$\Rightarrow D=[-2,+\infty)$

۱۷- دشوار

$$x^2+\underset{x=-2}{\underset{\downarrow}{|x+2|}}+3x\ge 0$$

$$(1)\ x\ge -2 \Rightarrow x^2+x+2+3x\ge 0 \Rightarrow x^2+4x+2\ge 0$$

$$\Rightarrow \Delta=8 \Rightarrow x=\frac{-4\pm\sqrt{8}}{2}=-2\pm\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow x\le -2-\sqrt{2} \cup x\ge -2+\sqrt{2}$$

$$\xrightarrow{\text{اشتراک با بازه ابتدایی}} D_1=[-2+\sqrt{2},+\infty)$$

$$(2)\ x< -2 \Rightarrow x^2-x-2+3x\ge 0 \Rightarrow x^2+2x-2\ge 0$$

$$\Delta=12 \Rightarrow x=\frac{-2\pm\sqrt{12}}{2}=-1\pm\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow x\le -1-\sqrt{3} \cup x\ge -1+\sqrt{3}$$

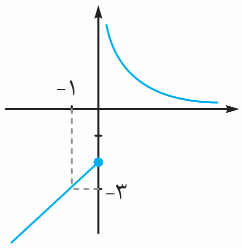
$$\xrightarrow{\text{اشتراک با بازه ابتدایی}} D_2=(-\infty,-1-\sqrt{3})$$

$$\Rightarrow D=D_1\cup D_2=(-\infty,-1-\sqrt{3})\cup[-2+\sqrt{2},+\infty)$$

۱۸- متوسط

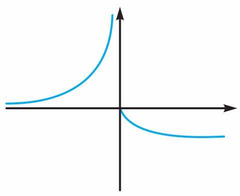
آ) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x} & x>0\\ x-2 & x\le 0\end{cases}$

x	0	-1
y	-2	-3



$D=\mathbb{R}-\{0\}$
$R=(-\infty,3]\cup(0,+\infty)$

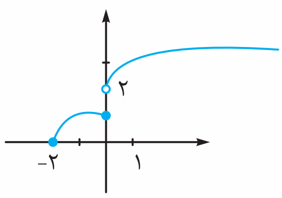
ب)



$D=\mathbb{R}-\{0\}$
$R=\mathbb{R}-\{0\}$

پ)

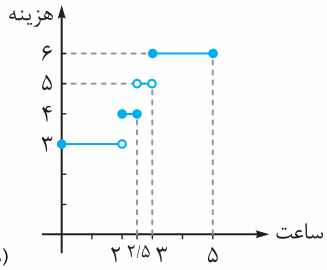
x	-2	0
$\sqrt{x+2}$	0	$\sqrt{2}$



$D=[-2,+\infty)$
$R=[0,\sqrt{2}]\cup(2,+\infty)$

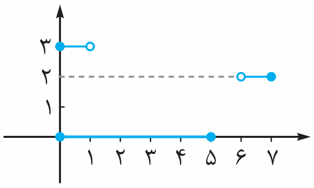
۱۹- آسان

آ) $f(x)=\begin{cases}3 & 0\le x<2\\ 4 & 2\le x\le 2/5\\ 5 & 2/5<x<3\\ 6 & 3\le x\le 5\end{cases}$



ب)

۲۰- آسان



۲۱- دشوار

برای رسم توابع براکتی (جزءصحیح) لازمه بازه رو طوری تقسیم‌بندی کنیم که عبارت داخل براکت به فاصلهٔ ۱ واحدی قرار بگیره.

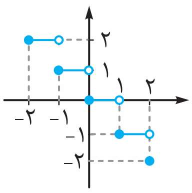
آ) $-2\le x<-1 \Rightarrow [x]=-2 \Rightarrow y=+2$

$-1\le x<0 \Rightarrow [x]=-1 \Rightarrow y=1$

$0\le x<1 \Rightarrow [x]=0 \Rightarrow y=0$

$1\le x<2 \Rightarrow [x]=1 \Rightarrow y=-1$

$x=2 \Rightarrow [2]=2 \Rightarrow y=-2$

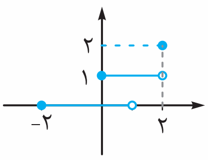


ب) داخل براکت $\frac{x}{2}$ هست پس بازه رو ۲ واحدی بگیر (برعکس!) تا $\frac{x}{2}$ در بازهٔ یک واحدی قرار بگیره.

$-2\le x<0 \Rightarrow -1\le \frac{x}{2}<0 \Rightarrow [\frac{x}{2}]=-1 \Rightarrow y=0$

$0\le x<2 \Rightarrow 0\le \frac{x}{2}<1 \Rightarrow [\frac{x}{2}]=0 \Rightarrow y=1$

$x=2 \Rightarrow y=1+[1]=2$



به رابطهٔ بین طول پله‌ها و ضریب x داخل براکت دقت کن!

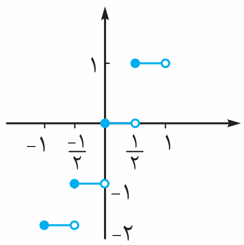
پ) تو این قسمت برعکس قسمت قبلی ضریب x داخل براکت ۲ هست پس بازه‌ها رو نصف کن یعنی به فاصلهٔ $\frac{1}{2}$ در نظر بگیر (بازم برعکس!)

$$-1 \leq x < -\frac{1}{2} \Rightarrow -2 \leq 2x < -1 \Rightarrow y = -2$$

$$-\frac{1}{2} \leq x < 0 \Rightarrow -1 \leq 2x < 0 \Rightarrow y = -1$$

$$0 \leq x < \frac{1}{2} \Rightarrow 0 \leq 2x < 1 \Rightarrow y = 0$$

$$\frac{1}{2} \leq x < 1 \Rightarrow 1 \leq 2x < 2 \Rightarrow y = 1$$



می‌بینی! ضریب x برابر ۲ بود اما طول پله‌ها نصف شده!

۲۲- دشوار

آ) $[-2,-1) \Rightarrow y = x+2$

x	-2	-1
$x+2$	0	1

$[-1,0) \Rightarrow y = x+1$

x	-1	0
$x+1$	0	1

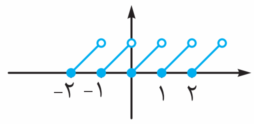
$[0,1) \Rightarrow y = x$

x	0	1
x	0	1

$[1,2) \Rightarrow y = x-1$

x	1	2
$x-1$	0	1

کافیه برای رسم خط s نقطهٔ ابتدا و انتها رو جاگذاری کنی!



همونطور که از نمودار پیداست برد این تابع $[0,1)$ هست و یادت باشه: $0 \leq x-[x] < 1$

ب) $y = x+[x] \quad [-2,2)$

$[-2,1) \Rightarrow y = x-2$

x	-2	-1
$x-2$	-4	-3

$[-1,0) \Rightarrow y = x-1$

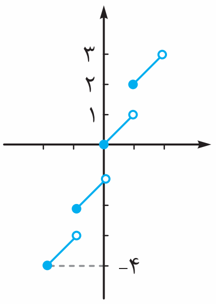
x	-1	0
$x-1$	-2	-1

$[0,1) \Rightarrow y = x$

x	0	1
x	0	1

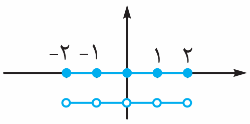
$[1,2) \Rightarrow y = x+1$

x	1	2
$x+1$	2	3



پ) $y = [x]+[-x] \quad [-2,2)$

از ویژگی‌های براکت می‌دونیم که $[x]+[-x] = \begin{cases} 0 & x \in \mathbb{Z} \\ -1 & x \notin \mathbb{Z} \end{cases}$ پس:



ت) $y = |x|+[x] \quad (-1,1)$

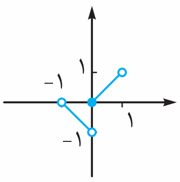
با توجه به این که قدرمطلق داریم پس به علامت بازه‌ها توجه کنیم:

$-1 < x < 0 \Rightarrow y = -x+(-1) = -x-1$

x	-1	0
$-x-1$	0	-1

$0 < x < 1 \Rightarrow y = x+0 = x$

x	0	1
x	0	1



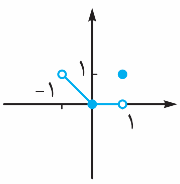
۲۳- دشوار

آ) $-1 \leq x < 0 \Rightarrow [x] = -1 \Rightarrow y = -x$

x	-1	0
$-x$	1	0

$0 \leq x < 1 \Rightarrow [x] = 0 \Rightarrow y = 0$

$x = 1 \Rightarrow y = 1[1] = 1$



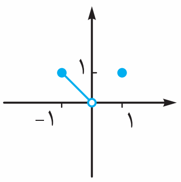
ب) چون تابع کسری هست اول دامنه رو تعیین کنیم:

$[x] \neq 0 \Rightarrow x \notin [0,1)$

$-1 \leq x < 0 \Rightarrow [x] = -1 \Rightarrow y = \frac{x}{-1} = -x$

$x = 1 \Rightarrow y = \frac{1}{1} = 1 \Rightarrow (1,1)$

x	-1	0
$-x$	1	0



یادت باشه: $[x] = n \Rightarrow n \leq x < n+1$ (با شرط $n \in \mathbb{Z}$)

۲۴- متوسط

$$\sqrt{x^۲-۴x+۴}+\sqrt{x^۲-۶x+۹}=\sqrt{(x-۲)^۲}+\sqrt{(x-۳)^۲}$$

$$=|x-۲|+|x-۳|$$

حال به بازهٔ **x** دقت کنیم:

$$[x]=۲ \Rightarrow \underbrace{۲\le x}_{x-۲\ge ۰} < \underbrace{۳}_{x-۳<۰}$$

پس عبارت مساوی هست با:

$$=\cancel{x}-۲-\cancel{x}+۳=۱$$

۲۵- آسان

$$[۳x+۱]=x+۴ \Rightarrow \underbrace{x+۴\le ۳x+۱}_{(۱)}\overset{(۲)}{<}x+۴+۱$$

$$(۱)\ x+۴\le ۳x+۱ \Rightarrow ۲x\ge ۳ \Rightarrow x\ge \frac{۳}{۲}$$

$$(۲)\ ۳x+۱<x+۵ \Rightarrow ۲x<۴ \Rightarrow x<۲$$

با اشتراک گرفتن بین بازه‌های به دست آمده مجموعه جواب به‌صورت $[\frac{۳}{۲},۲)$ است.

۲۶- متوسط

اول به این نکتهٔ مهم توجه کن که تنها در صورتی می‌تونی یه عدد رو که داخل براکت جمع و تفریق شده رو از براکت بیرون بیاری کـه اون عددصـحیح باشـه یعنی:

$$[x+k]=[x]+k\ \ ,\ \ k\in\mathbb{Z}$$

در غیر این صورت اجازهٔ خروج نداره!

$$[x+\frac{۵}{۲}]+[x+\frac{۱}{۲}]=۴ \Rightarrow [x+\frac{۱}{۲}+۲]+[x+\frac{۱}{۲}]=۴$$

$$\Rightarrow [x+\frac{۱}{۲}]+۲+[x+\frac{۱}{۲}]=۴ \Rightarrow ۲[x+\frac{۱}{۲}]=۲$$

$$\Rightarrow [x+\frac{۱}{۲}]=۱ \Rightarrow ۱\le x+\frac{۱}{۲}<۲ \Rightarrow \frac{۱}{۲}\le x<\frac{۳}{۲}$$

$\Rightarrow$ مجموعه جواب $=[\frac{۱}{۲},\frac{۳}{۲})$

۲۷- دشوار

با توجه به رادیکال درون مخرج کسر، عبارت زیر رادیکال باید فقط مثبت باشد.

$[x]^۲-۳>۰ \Rightarrow [x]^۲>۳ \Rightarrow [x]>\sqrt{۳}$ یا $[x]<-\sqrt{۳}$

$$[x]>\sqrt{۳} \Rightarrow [x]\ge ۲ \Rightarrow x\ge ۲$$

یا

$$[x]<-\sqrt{۳} \Rightarrow [x]\le -۲ \Rightarrow x<-۲+۱ \Rightarrow x<-۱$$

$\Rightarrow$ مجموعه جواب $=(-\infty,-۱)\cup[۲,+\infty)$

یادت باشه: اگر $n\in\mathbb{Z}$:

$$[x]>n \Rightarrow x\ge n+۱$$

$$[x]\ge n \Rightarrow x\ge n$$

$$[x]<n \Rightarrow x<n$$

$$[x]\le n \Rightarrow x<n+۱$$

۲۸- دشوار

یادت هست که $۰\le x-[x]<۱$ پس $۰\le ۲x-۲[x]<۲$ و بـرد تـابع $f(x)$ به‌صورت $[۰,۲)$ است.

اما برای **g** داریم:

$$۰\le ۲x-[۲x]<۱$$

چون به طور کلی می‌تونیم بگیم: $۰\le ☺-[☺]<۱$

پس:

$$R_f=[۰,۲)$$

$$R_g=[۰,۱)$$

۲۹- آسان

آ) می‌توان **y** را برحسب **x** محاسبه کرد پس تابع هست ✓

ب) $x=۱$ خطی قائم و موازی محور **y** است پس تابع نیست ×

پ) $y=-۲$ تابع ثابت است ✓

ت) $۱-۰\ne ۰+۳$ پس تابع نیست ×

ث) اگر قرار دهیم $x=۱$ آن‌گاه $y^۲=۱$ و $y=\pm۱$ پس تابع نیست ×

۳۰- دشوار

فرض کنیم $[x]=n$ پس:

$$n\le x<n+۱$$

هر سه طرف را با $k\in\mathbb{Z}$ جمع می‌کنیم:

$$\underline{n+k}\le \underline{x+k}<\underline{n+k}+۱$$

پس می‌توان نوشت:

$$[x+k]=n+k$$

طبق فرض $n=[x]$ پس: $[x+k]=[x]+k$

۱- گزینه «۳» متوسط

$f(x)=\frac{ax-2}{x-a} \qquad D_f=\mathbb{R}-\{a\}$

اگر **f** یک تابع ثابت هست یعنی حاصل تقسیم صورت به مخرج یک عدد میشه

اگر از صورت **a** (ضریب **x**) رو فاکتور بگیریم:

$$f(x)=\frac{ax-2}{x-a}=\frac{a(x-\frac{2}{a})}{x-a}=a \Rightarrow x-\frac{2}{a}=x-a$$

$$\Rightarrow \frac{2}{a}=a \Rightarrow a^2=2 \Rightarrow a=\pm\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} f(x)=\sqrt{2}\ ,\ x\neq\sqrt{2} \\ \text{یا} \\ f(x)=-\sqrt{2}\ ,\ x\neq-\sqrt{2} \end{cases}$$

۲- گزینه «۴» دشوار

مخرج کسر $x^2-4\neq0 \Rightarrow x^2\neq4 \Rightarrow \boxed{x\neq\pm2}$ (۱)

مخرج کسر $x^2+3x\neq0 \Rightarrow x(x+3)\neq0 \Rightarrow \boxed{x\neq0,-3}$ (۲)

مخرج کسر $1+\frac{2}{x^2+3x}\neq0 \Rightarrow \frac{2}{x^2+3x}\neq-1 \Rightarrow x^2+3x\neq-2$

$\Rightarrow x^2+3x+2\neq0 \xrightarrow{a+c=b} \boxed{x\neq-1,-2}$ (۳)

با توجه به شرط‌های ۱ تا ۳، این اعداد در دامنه قرار ندارند: $0,-3,\pm2,-1$

$D=\mathbb{R}-\{-3,-2,-1,0,2\}$

۳- گزینه «۳» متوسط

تابع کسری است. مخرج درجه ۲ است اما دامنه برابر $\mathbb{R}$ است. معنی آن این است که مخرج فاقد ریشه است پس:

اگر درجه ۱ باشد حتماً ریشه دارد ⇐ (درجه ۲ باشد.) $a\neq0$ و

$\Delta<0 \Rightarrow 4-4a(5)<0 \Rightarrow 4-20a<0$

$\Rightarrow 4<20a \Rightarrow a>\frac{1}{5}$

۴- گزینه «۱» دشوار

سعی می‌کنیم ضابطهٔ تابع رو کمی ساده کنیم:

$$f(x)=\frac{x^2-2x-3}{2x^2+2x}=\frac{(x-3)\cancel{(x+1)}}{2x\cancel{(x+1)}}=\frac{x-3}{2x}$$

$$=\frac{x}{2x}-\frac{3}{2x}=\frac{1}{2}-\frac{3}{2x}$$

اگر به ضابطهٔ جدید توجه کنیم می‌بینیم که مقدار $\frac{3}{2x}$ از $\frac{1}{2}$ کم شده و هیچ وقت صفر نمیشه (کسری که صورت صفر نباشه، صفر نمیشه!) پس مقدار **y** هیچ وقت $\frac{1}{2}$ نمی‌شه پس $R=\mathbb{R}-\{\frac{1}{2}\}$

۵- گزینه «۱» متوسط

$D_f=\mathbb{R}-\{1\} \Rightarrow D_g=\mathbb{R}-\{1\}$

پس مخرج کسر **g** دارای ریشه مضاعف $x=1$ است و به فرم $(x-1)^2$ نوشته می‌شود:

$x^2-2cx+1=x^2-2x+1$

$\Rightarrow 2c=2 \Rightarrow \boxed{c=1}$

از طرفی ضابطه‌ها برابرند:

$$\frac{ax+b}{x^2-2x+1}=\frac{5}{x-1}$$

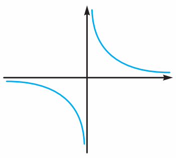
$\Rightarrow ax^2-ax+bx-b=5x^2-10x+5$

$\Rightarrow \boxed{a=5}\ ,-b=5 \Rightarrow \boxed{b=-5}$

$\Rightarrow a+b+c=5+1-5=1$

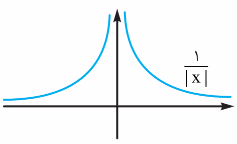
۶- گزینه «۲» متوسط

می‌دونی که نمودار $y=\frac{1}{x}$ به‌صورت

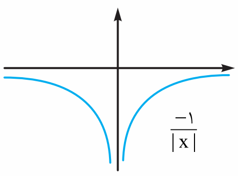


هست.

برای رسم تابع $y=\frac{-1}{|x|}$، با توجه به این که **x** به داخل قدرمطلق رفته باید بخش‌هایی از نمودار که زیر محور **x** هست رو به بالای محور **x** قرینه کنیم و سپس تأثیر ۱− در کل تابع، قرینه کردن کل نمودار نسبت به محور **x** هست:

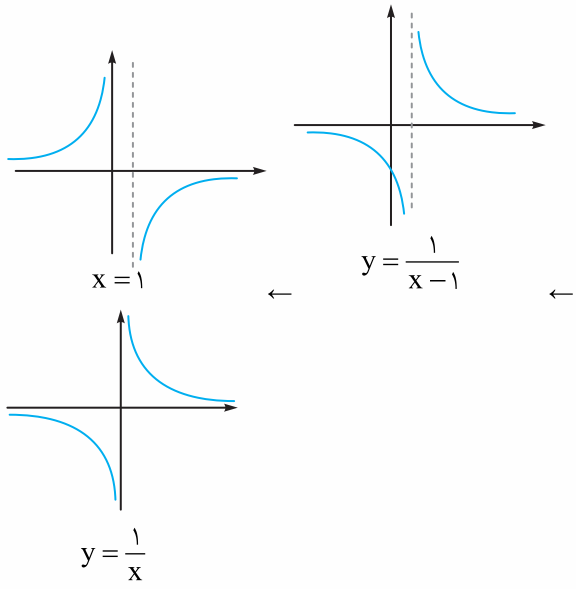


$\Rightarrow$



۷- گزینه «۱» — متوسط

اگر از انتقال استفاده کنیم، نمودار $\frac{۱}{x}$ به‌اندازه ۱ واحد به راست منتقل میشه و سپس نسبت به محور **x**، قرینه میشه:



۸- گزینه «۱» — دشوار

با توجه به وجود قدرمطلق در مخرج کسر دو بازهٔ متفاوت در نظر می‌گیریم:

$(۱)\ x\geq ۰ \Rightarrow |x|=x \Rightarrow x^۲-x-۲\neq ۰$

$\Rightarrow (x-۲)(x+۱)\neq ۰ \Rightarrow x\neq -۱,۲ \xrightarrow{x\geq ۰}$ فقط ۲ قابل‌قبول

$(۲)\ x<۰ \Rightarrow |x|=-x \Rightarrow x^۲+x-۲\neq ۰$

$\Rightarrow (x+۲)(x-۱)\neq ۰ \Rightarrow x\neq -۲,۱ \xrightarrow{x<۰}$ فقط -۲ قابل‌قبول

$\Rightarrow D=\mathbb{R}-\{-۲,+۲\}$

۹- گزینه «۳» — آسان

باز همون داستان مخرج درجه ۲ و ریشه مضاعف:

$x=-۱$ مضاعف $\Rightarrow x^۲+ax+b=(x+۱)^۲$

$\Rightarrow x^۲+ax+b=x^۲+۲x+۱$

با مقایسه طرفین: $a=۲\,,\,b=۱$

$\Rightarrow a+b=۳$

۱۰- گزینه «۳» — آسان

$۲-|x-۳|\geq ۰ \Rightarrow ۲\geq |x-۳|$

یا $|x-۳|\leq ۲ \Rightarrow -۲\leq x-۳\leq ۲$

$\Rightarrow ۱\leq x\leq ۵$

اعداد صحیح بازه $=۱,۲,۳,۴,۵$

یادت نره:

$|☺|\leq a \xrightarrow{a>۰} -a\leq ☺\leq a$

$|☺|\geq a \xrightarrow{a>۰} ☺\leq -a \cup ☺\geq a$

۱۱- گزینه «۳» — دشوار

دامنه تابع رادیکالی: $ax^۲-۳bx+c\geq ۰$

نتیجه شده: $\{\frac{۳}{۲}\}$ یعنی این عبارت فقط به ازای $x=\frac{۳}{۲}$ تعریف شده هست و در بقیه اعداد تعریف نشده هستش.

خب پس یعنی $x=\frac{۳}{۲}$ ریشه هست و به ازای بقیه مقادیر عبارت منفی میشه

پس میشه گفت به‌صورت $k(x-\frac{۳}{۲})^۲$ هست که **k** منفی باشه.

$-x^۲-۳bx+c=k(x-\frac{۳}{۲})^۲$

$=k(x^۲-۳x+\frac{۹}{۴})=kx^۲-۳kx+\frac{۹}{۴}k$

مقایسه کنیم:

ضریب $x^۲$: $-۱=k$

ضریب x: $-۳b=-۳k \Rightarrow b=-۱$

عدد تنها: $c=\frac{۹}{۴}k \Rightarrow c=-\frac{۹}{۴}$

$\Rightarrow ۲b^۲+۴c=۲-۹=-۷$

۱۲- گزینه «۱» — دشوار

عبارت زیر رادیکال به ظاهر درجه ۲ هست اما دامنه به شکل بازهٔ $[۳,+\infty)$ است. می‌دانیم این بازه مربوط به عبارت‌ها و نامعادلات درجه اول هست زیرا مجموعه جواب نامعادله‌های درجه دوم یا $[a,b]$ یا $(-\infty,a]\cup[b,+\infty)$ هست پس $a=۰$ و داریم:

$ax^۲+bx+۳c=bx+۳c\geq ۰$

پس به‌صورت $b(x-۳)$ بوده:

$bx+۳c=bx-۳b \Rightarrow b=-c \Rightarrow b+c=۰$

$\Rightarrow a+b+c=۰$

۱۳- گزینه «۲» — متوسط

رادیکال داخلی:

$۱-۳x\geq ۰ \Rightarrow ۱\geq ۳x \Rightarrow \boxed{x\leq \frac{۱}{۳}}$

و

رادیکال خارجی:

$۲-\sqrt{۱-۳x}\geq ۰$

$\Rightarrow ۲\geq \sqrt{۱-۳x} \xrightarrow{\text{توان ۲}} ۴\geq ۱-۳x$

$\Rightarrow ۳x\geq ۱-۴ \Rightarrow ۳x\geq -۳ \Rightarrow \boxed{x\geq -۱}$

اشتراک این دو بازه: $D=[-۱,\frac{۱}{۳}]$

اعداد صحیح بازه $=\{-۱,۰\}$

۱۴- گزینه «۴» متوسط

تابعی که دامنه‌اش رو می‌خواد به فرم رادیکالی هست پس:

$(۲x-۲)f(x)\geq ۰$ یا $(۲x-۲)y\geq ۰$

و دو حالت ممکنه اتفاق بیفته:

$$(۱)\begin{cases}۲x-۲\geq ۰ \Rightarrow x\geq ۱\\ y\geq ۰\end{cases}\Rightarrow D_۱=[۲,+\infty)$$

یعنی بـه‌ازای سـمت راسـت $x=۱$، نمـودار بـالای محـور **x** باشه: $D_۱=[۲,+\infty)$

یا

$$(۲)\begin{cases}۲x-۲\leq ۰ \Rightarrow x\leq ۱\\ y\leq ۰\end{cases}\Rightarrow D_۲=[-۲,۱]$$

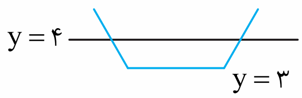
$$D_۱\cup D_۲=[-۲,۱]\cup[۲,+\infty)$$

۱۵- گزینه «۴» دشوار

$$|x+۱|+|x-۲|-۴\geq ۰$$

$$\Rightarrow |x+۱|+|x-۲|\geq ۴$$

از فصل قبل می‌دونیم نمودار تابع سمت چپ گلدانی هست و کف گلدان $y=|b-a|=|۲-(-۱)|=۳$ هست. پس خط $y=۴$ بالاتر از کف گلدان قرار می‌گیره:



پس کافیه دو خط کناری رو با $y=۴$ برخورد بدیم:

$$(۱)\ x<-۱ \Rightarrow -x-۱-x+۲\geq ۴ \Rightarrow -۲x\geq ۳ \Rightarrow x\geq -\frac{۳}{۲}\ \text{قق}$$

$$(۲)\ x>۲ \Rightarrow x+۱+x-۲\geq ۴ \Rightarrow ۲x\geq ۵ \Rightarrow x\geq \frac{۵}{۲}\ \text{قق}$$

$$\Rightarrow D=\mathbb{R}-(-\frac{۳}{۲},\frac{۵}{۲})\qquad \text{اعداد صحیح}=-۱,۰,۱,۲$$

۱۶- گزینه «۱» متوسط

$$|۲x-۱|<۱ \Rightarrow -۱<۲x-۱<۱ \Rightarrow ۰<۲x<۲$$

$$\Rightarrow ۰<x<۱ \Rightarrow [x]=۰$$

همچنین:

$$۰<x<۱ \Rightarrow ۰<x^۲<۱ \Rightarrow [x^۲]=۰$$

$$\Rightarrow [x^۲]+[x]=۰$$

۱۷- گزینه «۲» آسان

$$f(x)=[x]$$

$$f(x[x])=[x-[x]]$$

می‌دونیم که: $۰\leq x-[x]<۱$

پس: $[x-[x]]=۰$

۱۸- گزینه «۲» متوسط

می‌دونیم که:

$$[x]+[-x]=\begin{cases}۰ & x\in\mathbb{Z}\\ -۱ & x\notin\mathbb{Z}\end{cases}$$

$$f([x]+[-x])=\begin{cases}f(۰) & x\in\mathbb{Z}\\ f(-۱) & x\notin\mathbb{Z}\end{cases}$$

$$=\begin{cases}[۰] & x\in\mathbb{Z}\\ [-۱] & x\notin\mathbb{Z}\end{cases}=\begin{cases}۰ & x\in\mathbb{Z}\\ -۱ & x\notin\mathbb{Z}\end{cases}$$

$$R=\{-۱,۰\}$$

۱۹- گزینه «۲» دشوار

از اونجایی که می‌دونیم حاصل جمع دو براکت، عددصحیح هست پس

$$[x]+[۴x-\frac{۱}{۳}]\in\mathbb{Z} \Rightarrow ۸+x\in\mathbb{Z} \Rightarrow x\in\mathbb{Z}$$

پس **x** عددصحیح است و می‌تونه از جزءصحیح خارج بشه:

$$\Rightarrow \cancel{x}+۴x+\underbrace{[-\frac{۱}{۳}]}_{-۱}=۸+\cancel{x}$$

$$\Rightarrow ۴x=۹ \Rightarrow x=\frac{۹}{۴} \Rightarrow$$ یک جواب دارد.

۲۰- گزینه «۲» آسان

$$[x-\frac{۳}{۲}]+[x-\frac{۱}{۲}]=\frac{۱}{۲}$$

بدون حل معادله می‌تونیم بگیم این معادله هیچ جوابی نداره چون امکان نداره مجموع دو براکت برابر $\frac{۱}{۲}$ بشه.

۲۱- گزینه «۳» آسان

صورت چند جمله‌ای هست و محدودیتی برای **x** ایجاد نمی‌کنه پس:

$$[x]^۲-۴>۰ \Rightarrow [x]^۲>۴ \Rightarrow |[x]|>۲$$

$$\begin{cases}[x]>۲ \Rightarrow x\geq ۲\\ \text{یا}\\ [x]<-۲ \Rightarrow x<-۲\end{cases}\Rightarrow D=(-\infty,-۲)\cup[۲,+\infty)$$

۲۲- گزینه «۳» آسان

$$y=[\frac{x}{۲}]$$

ضریب **x** داخل براکت $\frac{۱}{۲}$ است پس بازه‌ها را ۲ واحدی در نظر می‌گیریم:

$$-۲\leq x<۰$$

$$۰\leq x<۲$$

پس دو پله با طول ۲ واحد داریم:

$$\text{مجموع طول‌ها}=۲+۲=۴$$

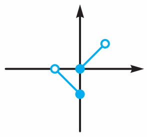
۲۳- گزینه «۴» متوسط

$-1<x<0 \Rightarrow y=-x+[x]=-x-1$

x	-1	0
$-x-1$	0	-1

$0\le x<1 \Rightarrow y=x+[x]=x+0=x$

x	0	1
x	0	1



روش تستی:

گزینه «۱»: رد هست چون ۱- رو توپر کشیده در حالی که در بازه نیست.

گزینه «۲»: رد هست چون $y(0)=0$

اگر $x=-\frac{1}{2}$ آن گاه $y=-\frac{1}{2}$ پس گزینه ۳ هم رد میشه.

۲۴- گزینه «۳» دشوار

اول توجه کنیم که چون ۳x جلوی تابع جزءصحیح قرار گرفته پس $3x\in\mathbb{Z}$.

$[x]=3x \Rightarrow \underline{3x\le x}\ \underline{<3x+1}$

$2x\le 0 \qquad x<3x+1$

$x\le 0 \qquad -1<2x$

$-\frac{1}{2}<x$

$\Rightarrow -\frac{1}{2}<x\le 0$

$x=0 \Rightarrow [0]=3(0)\checkmark$

$-\frac{1}{2}<x<0 \Rightarrow [x]=-1 \Rightarrow 3x=-1 \Rightarrow x=-\frac{1}{3}$

پس معادله تنها دو جواب دارد.

۲۵-گزینه «۴» متوسط

$(1)\ 1-x^2\ge 0 \Rightarrow 1\ge x^2 \Rightarrow 1\ge |x|$

$-1\le x\le 1$

$(2)\ [x]+[-x]\neq 0 \Rightarrow x\notin\mathbb{Z}$

$\xrightarrow{(1)\cap(2)} (-1,1)-\{0\}$

۲۶-گزینه «۱» متوسط

$x-5\in\mathbb{Z} \Rightarrow x\in\mathbb{Z} \Rightarrow 2x, 3x\in\mathbb{Z}$

$\Rightarrow 2x+3x=x-5 \Rightarrow 4x=-5 \Rightarrow x=-\frac{5}{4}$ غقق

۲۷- گزینه «۲» متوسط

x داخل جزءصحیح ضریب ۲ دارد پس بازه‌ها را به طول $\frac{1}{2}$ می‌گیریم:

$0\le x<\frac{1}{2}$

$\frac{1}{2}\le x<1$

$1\le x<\frac{3}{2}$

$\frac{3}{2}\le x<2$

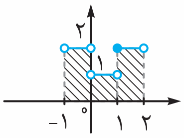
پس ۴ پاره‌خط مساوی داریم.

۲۸- گزینه «۱» آسان

$-1<x<0 \Rightarrow y=-(-1)+1=2$

$0<x<1 \Rightarrow y=1(0)+1=1 \quad (x\neq 0)$

$1\le x<2 \Rightarrow y=1(1)+1=2$



$S=(1\times 2)+(1\times 1)+(1\times 2)=5$

۲۹-گزینه «۳» آسان

$[-\frac{5}{3}]+[-\frac{10}{3}]+[-5]=[-1/6]+[-3/3]-5$

$=-2-4-5=-11$

۳۰- گزینه «۳» دشوار

بازه‌ها را ۰/۵ واحدی می‌گیریم و چون ضریب **x** منفی هست و نقاط تو خالی و توپر را جابه‌جا می‌کند $x=-\frac{1}{2}$ و $x=0$ را هم جداگانه حساب می‌کنیم:

$x=-\frac{1}{2} \Rightarrow [-2(-\frac{1}{2})]=[1]=(1)$

$-\frac{1}{2}<x<0 \Rightarrow 0<-2x<1 \Rightarrow [-2x]=(0)$

$x=0 \Rightarrow [-2(0)]=0$

$0<x<\frac{1}{2} \Rightarrow -1<-2x<0 \Rightarrow [-2x]=(-1)$

$x=\frac{1}{2} \Rightarrow [-2(-\frac{1}{2})]=[-1]=-1$

$\frac{1}{2}<x<1 \Rightarrow -2<-2x<-1 \Rightarrow [-2x]=(-2)$

۳۱-گزینه «۴» متوسط

$\frac{1}{2}\le x\le 1 \Rightarrow 1\le\frac{1}{x}\le 2$

$(1)\ 1\le\frac{1}{x}<2 \Rightarrow [\frac{1}{x}]=1$

$(2)\ \frac{1}{x}=2 \Rightarrow [2]=2$

۳۲- گزینه «۱» آسان

$2\le -2x+\frac{1}{3}<3$

$\frac{5}{3}\le -2x<\frac{8}{3}$

$-\frac{4}{3}<x\le -\frac{5}{6}$

۳۳- گزینه «۲» دشوار

$$[x^2+x]=-1 \Rightarrow \underset{(1)}{-1\le} x^2+x \underset{(2)}{<0}$$

$(1)\ x^2+x\ge -1 \Rightarrow x^2+x+1\ge 0$ همواره برقرار

زیرا $a>0$ و $\Delta<0$ است پس $x\in\mathbb{R}$

$$(2)\ x^2+x<0 \Rightarrow x(x+1)<0 \Rightarrow -1<x<0$$

$$\Rightarrow -1<x<0 \Rightarrow 0<x^{20}<1 \Rightarrow [x^{20}]=0$$

۳۴- گزینه «۱» آسان

$$[x]+1=0 \Rightarrow [x]=-1$$

$$\Rightarrow -1\le x<0 \Rightarrow D=\mathbb{R}-[-1,0)$$

۳۵- گزینه «۳» دشوار

$$([x]-2)(3-[x])\ge 0$$

$$(1)\begin{cases}[x]-2\ge 0 \Rightarrow [x]\ge 2 \Rightarrow x\ge 2\\ 3-[x]\ge 0 \Rightarrow [x]\le 3 \Rightarrow x<4\end{cases} \Rightarrow [2,4)$$

$$(2)\begin{cases}[x]-2\le 0 \Rightarrow [x]\le 2 \Rightarrow x<3\\ 3-[x]\le 0 \Rightarrow [x]\ge 3 \Rightarrow x\ge 3\end{cases} \Rightarrow \varnothing$$

$$D=[2,4)\cup\varnothing=[2,4)$$

۳۶- گزینه «۲» آسان

با امتحان کردن چند مقدار نمودار صحیح را انتخاب می‌کنیم.

$$x=-\frac{1}{2} \Rightarrow y=0$$

در گزینه‌های ۱و ۳ $x=0 \Rightarrow y=-1$

$$x=\frac{1}{2} \Rightarrow y=-2$$

پس گزینه ۲ صحیح است.

۳۷- گزینه «۴» آسان

می‌دانیم از داخل براکت اعداد صحیح از جمله $[x]$ را می‌توان بیرون آورد:

$$=[x+[x]+[x]]-([x]+2[x]+3)$$

$$=3[x]-3[x]-3=-3$$

۳۸- گزینه «۳» دشوار

در حل این تست از دو خاصیت جزءصحیح استفاده می‌کنیم:

$1)\ [x+k]=[x]+k\ ,\ k\in\mathbb{Z}$

$2)\ x=[x]+P\quad 0\le P<1$

$$g(x)=2x-3-[2x-3]-2(x-[x])$$

$$=\cancel{2x}-\cancel{3}-[2x]+\cancel{3}-\cancel{2x}+2[x]=2[x]-[2x]$$

می‌دانیم که اجازهٔ ورود یا خروج ضریب **x** رو نداریم.

$$x=[x]+P \xrightarrow{\times 2} 2x=2[x]+2P$$

$$\Rightarrow g(x)=2[x]-[\underbrace{2[x]}_{\in\mathbb{Z}}+2P]=2\cancel{[x]}-2\cancel{[x]}-[2P]$$

$$=-[2P] \xrightarrow{0\le P<1 \Rightarrow 0\le 2P<2} [2P]=0,1$$

$$\Rightarrow -[2P]=0,-1$$

$$\Rightarrow R_g=\{-1,0\}$$

۳۹- گزینه «۱» دشوار

ابتدا به دامنه توجه کنیم:

$$x-[x]-\frac{3}{4}\ge 0 \Rightarrow x-[x]\ge\frac{3}{4}$$

از قبل می‌دانیم: $0\le x-[x]<1$ از اشتراک این دو بازه

$$\frac{3}{4}\le x-[x]<1 \Rightarrow 0\le x-[x]-\frac{3}{4}<\frac{1}{4}$$

$$\xrightarrow{\sqrt{\ }} 0\le\sqrt{x-[x]-\frac{3}{4}}<\frac{1}{2}$$

۴۰- گزینه «۲» آسان

طبق رابطهٔ داده شده داریم:

$$[(\sqrt{2}+1)^6]=[198-(\sqrt{2}-1)^6]$$

$$=198+[-(\sqrt{2}-1)^6]$$

$$0<\sqrt{2}-1<1 \Rightarrow 0<(\sqrt{2}-1)^6<1 \Rightarrow -1<-(\sqrt{2}-1)^6<0$$

$$\Rightarrow [-(\sqrt{2}-1)^6]=-1$$

$\Rightarrow$ حاصل عبارت $=198+(-1)=197$

۴۱- گزینه «۳» متوسط

$$[x^2-5x]=10 \Rightarrow 10\le x^2-5x<11$$

$$[x^2-7x]=10 \Rightarrow 10\le x^2-7x<11$$

از جمع کردن سه طرف این نامعادلات با یکدیگر داریم:

$$20\le 2x^2-12x<22 \Rightarrow 10\le x^2-6x<11$$

برای رسیدن به مربع کامل $(x-3)^2$ لازم است $(\frac{b}{2})^2$ رو به طرفین اضافه کنیم یعنی عدد ۹ رو:

$$19\le x^2-6x+9\le 20 \Rightarrow 19\le(x-3)^2<20$$

طبق ویژگی براکت داریم:

$$[(x-3)^2]=19$$

۴۲- گزینه «۲» آسان

با تقسیم جملات بر ۳ داریم:

$$[2x]+[2x+\frac{1}{3}]=\frac{14}{3}$$

این معادله هیچ جوابی ندارد زیرا جمع دو جزءصحیح عددی غیرصحیح شده است.

۴۳- گزینه «۲» دشوار

$(x-2)$ زیر رادیکال است پس:

$$x-2\geq \Rightarrow x\geq 2 \Rightarrow x-\sqrt{2}\geq 2-\sqrt{2}$$

$$\xrightarrow{\sqrt{2}\cong 1/4} x-\sqrt{2}\geq 0/6 \Rightarrow [x-\sqrt{2}]\geq 0$$

می‌دونیم که حاصل رادیکال همواره نامنفی هست و طبق نتیجه‌ای که گرفتیم براکت نیز نامنفی هست پس این معادله تنها در صورتی جواب دارد که هر دو هم زمان صفر شوند:

$$\sqrt{x-2}=0 \Rightarrow x=2$$

$$[2-\sqrt{2}]=[0/6]=0$$

پس $x=2$ تنها جواب معادله است.

۴۴- گزینه «۳» آسان

$$[x]\neq x \Rightarrow x\notin \mathbb{Z}$$

$$[-x+5]+[x-2]=[-x]+5+[x]-2=[x]+[-x]+3$$

و می‌دانیم که حاصل $[x]+[-x]$ به‌ازای $x\notin\mathbb{Z}$ برابر -1 هست پس:

$$=-1+3=2$$

۴۵- گزینه «۴» دشوار

از این که $\frac{x}{7}$ در هر دو براکت وجود داره و با علامت قرینه هستن سعی در ساده کردن داخل براکت‌ها می‌کنیم:

$$\frac{x+9}{7}=\frac{x}{7}+\frac{9}{7}=\frac{x}{7}+\frac{2}{7}+1$$

$$\frac{12-x}{7}=\frac{12}{7}-\frac{x}{7}=\frac{14-2}{7}-\frac{x}{7}=2-\frac{2}{7}-\frac{x}{7}$$

$$[\frac{x+9}{7}]+[\frac{12-x}{7}]=3 \Rightarrow [\frac{x}{7}+\frac{2}{7}]+1+[-\frac{x}{7}-\frac{2}{7}]+2=3$$

$$\Rightarrow [\frac{x}{7}+\frac{2}{7}]+[-(\frac{x}{7}+\frac{2}{7})]=0$$

$$t=\frac{x}{7}+\frac{2}{7} \Rightarrow [t]+[-t]=0 \Rightarrow t\in\mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow \frac{x+2}{7}\in\mathbb{Z} \Rightarrow \frac{x+2}{7}=k\,,k\in\mathbb{Z} \Rightarrow x=7k-2\,,k\in\mathbb{Z}$$

چون بی‌شمار **k** وجود دارد پس بی‌شمار جواب هم برای **x** وجود دارد.

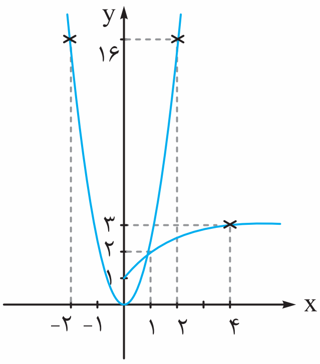
۴۶- گزینه «۱» متوسط

این معادله رو به کمک رسم حل می‌کنیم چون فقط تعداد ریشه خواسته و مقدار دقیق ریشه مورد نظر نیست. پس x^4 رو یک طرف نگه داریم و بقیه رو ببریم سمت راست:

$$\underbrace{x^4}_{f(x)}=\underbrace{\sqrt{x}+1}_{g(x)}$$

x	−2	−1	0	1	2
f(x)	16	1	0	1	16

x	0	1	4
f(x)	1	2	3



همان طور که از نمودار پیداست، دو تابع **f** و **g** تنها در یک نقطه تقاطع دارند پس معادله فقط یک جواب دارد.

۴۷- گزینه «۱» متوسط

$$x^3=[x]+[26-x]$$

۲۶ عدد صحیح است پس می تواند از جزءصحیح خارج شود:

$$x^3=[x]+[-x]+26$$

$$(1)\ x\in\mathbb{Z} \Rightarrow [x]+[-x]=0 \Rightarrow x^3=26 \Rightarrow x=\sqrt[3]{26}$$

اما $\sqrt[3]{26}\notin\mathbb{Z}$ پس غیرقابل‌قبول است.

$$(2)\ x\notin\mathbb{Z} \Rightarrow [x]+[-x]=-1 \Rightarrow x^3=-1+26=25$$

$$\Rightarrow x=\sqrt[3]{25}$$

$\sqrt[3]{25}\notin\mathbb{Z}$ پس در بازه قرار دارد و قابل‌قبول است.

۴۸- گزینه «۲» آسان

ضریب **x** داخل پرانتز $\frac{1}{2}$ است پس بازه‌ها را به فاصلهٔ ۲ واحد در نظر می‌گیریم:

$[-2,0)$

$[0,2)$

$[2,4)$

$[4,6)$

پس نمودار از ۴ پاره‌خط مساوی تشکیل شده.

۴۹- گزینه «۲» دشوار

x برابر با مجموع سه عدد صحیح شده است پس $x\in\mathbb{Z}$.

و بنابراین $۲x^۲\in\mathbb{Z}$ و $۲x^۲-x\in\mathbb{Z}$ پس:

$$۲x^۲-x-x+\underbrace{[\frac{\sqrt{۳}}{۵}]}_{[۰/۳۴]=۰}+۱=x$$

$$\Rightarrow ۲x^۲-۳x+۱=۰$$

$$\xrightarrow{a+b+c=۰}\begin{cases}x=۱\\ x=\frac{c}{a}=\frac{۱}{۲} \quad \text{غقق}\ (x\in\mathbb{Z})\end{cases}$$

پس تنها جواب معادله $x=۱$ است.

۵۰- گزینه «۲» متوسط

$$[x]+[-x]=\begin{cases}۰ & x\in\mathbb{Z}\\ ۱ & x\notin\mathbb{Z}\end{cases}$$

$$(۱)\ x\in\mathbb{Z}\ \Rightarrow\ \frac{-۹+x}{۴x^۲+۴x}=۰\ \Rightarrow\ -۹+x=۰\ \Rightarrow\ \boxed{x=۹}\ \text{قق}$$

$$(۲)\ x\notin\mathbb{Z}\ \Rightarrow\ \frac{-۹+x}{۴x^۲+۴x}=-۱\ \Rightarrow\ ۴x^۲+۴x=۹-x$$

$$\Rightarrow ۴x^۲+۵x-۹=۰$$

$$\xrightarrow{a+b+c=۰}\ x=۱\ \text{غقق}\ ,\ -\frac{۹}{۴}\ \text{قق}\ \Rightarrow\ \boxed{x=-\frac{۹}{۴}}$$

۱- آسان

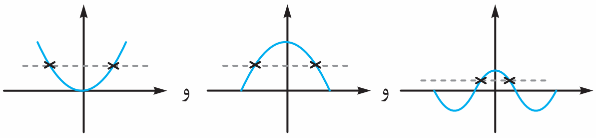
حواستون باشه‌ها! تعریف یک‌به‌یک بودن از لحاظ زوج مرتب: یا y برابر نداشته باشیم یا اگر y برابر داشتیم xها نیز برابر باشند.

تعریف یک‌به‌یک بودن از لحاظ شکل: خطوط موازی محور xها شکل را در حداکثر در یک نقطه قطع کنند.

تعریف یک‌به‌یک بودن از لحاظ ضابطه: $y_۱=y_۲\ \Rightarrow\ x_۱=x_۲$

آ) یک‌به‌یک نیست چون $y=۴$ دارای دو x متفاوت $x=۳$ و $x=۷$ است.

ب و پ و ت) یک‌به‌یک نیستند چون



ث) یک‌به‌یک است چون کدملی تنها می‌تواند مربوط به یک فرد باشد.

ج) یک‌به‌یک است چون هر خط موازی محور xها تنها در نقطه آن را قطع می‌کند.

$$\text{چ)}\ y=x^۲-۲x+۳\ \Rightarrow\ y=x^۲-۲x+۱+۲$$

$\Rightarrow\ y=(x-۱)^۲+۲$ یک‌به‌یک نیست.

$$y_۱=y_۲\ \Rightarrow\ (x_۱-۱)^۲+۲=(x_۲-۱)^۲+۲\ \Rightarrow\ (x_۱-۱)^۲=(x_۲-۱)^۲$$

$\Rightarrow\ |x_۱-۱|=|x_۲-۱|$ یک‌به‌یک است.

$$\text{ح)}\ y=x-۳\ \Rightarrow\ y_۱=y_۲\ \Rightarrow x_۱-۳=x_۲-۳\ \Rightarrow\ x_۱=x_۲$$

$$\text{خ)}\ y=\frac{x-۱}{x-۲}\ \Rightarrow\ y_۱=y_۲\ \Rightarrow\ \frac{x_۱-۱}{x_۱-۲}=\frac{x_۲-۱}{x_۲-۲}\ \xrightarrow{\text{طرفین‌وسطین}}$$

$$\cancel{x_۱x_۲}-۲x_۱-x_۲+\cancel{۲}=\cancel{x_۱x_۲}-x_۱-۲x_۲+\cancel{۲}$$

$$-x_۱=-x_۲\Rightarrow x_۱=x_۲$$

یک‌به‌یک است.

حواستون باشه‌ها! توابع سهمی، قدرمطلق، به طور کلی یک‌به‌یک نیستند. همچنین خط و هموگرافیک و رادیکال به طور کلی یک‌به‌یک هستند. (به جز خطوط $y=$ عدد)

۲- آسان

حواستون باشه‌ها! رابطه‌ها زمانی تابع یک‌به‌یک هستند که:

تعریف تابع $\Rightarrow\ x_۱=x_۲\ \Rightarrow\ y_۱=y_۲$

تعریف یک‌به‌یک $\Rightarrow\ y_۱=y_۲\ \Rightarrow\ x_۱=x_۲$

بنابه تعریف تابع چون مؤلفه -۳ یکسان است باید مؤلفه‌های دوم آن‌ها نیز برابر باشند پس:

$$m-۱=m^۲-m\ \Rightarrow\ m^۲-۲m+۱=۰$$

$$\Rightarrow\ (m-۱)^۲=۰\ \Rightarrow\ m=۱$$

با جای‌گذاری $m=۱$ در رابطه:

$$f=\{(-۳,۰)(۲,-۳)(-۳,۰)(۴,-۳)\}$$

چون $m=۱$ باعث می‌شود دو زوج مرتب $(۴,-۳)$ و $(۲,-۳)$ یک‌به‌یک بودن را به هم بزند پس $m=۱$ قابل‌قبول نیست.

۳- آسان

طبق تعریف یک‌به‌یک از لحاظ زوج مرتب داریم:

$(-۲,۳)(۲a-b,۳) \Rightarrow ۲a-b=-۲$

$(-۳,۷)(a-b,۷) \Rightarrow a-b=-۳$

با حل دستگاه داریم:

$$\begin{cases} ۲a-\cancel{b}=-۲ \\ -a+\cancel{b}=۳ \end{cases}$$

$a=۱, b=۴$

$a+b=۱+۴=۵$

۴- آسان

طبق تعریف یک‌به‌یک از لحاظ زوج مرتب و تعریف تابع:

$(۲,m^۲-m)=(۲,m)$

$\xrightarrow{\text{تابع}} m^۲-m=m \Rightarrow m^۲-۲m=۰ \Rightarrow m(m-۲)=۰$

$\Rightarrow m=۰, m=۲$

با جای‌گذاری $m=۰$ و $m=۲$ داریم:

$m=۰ \Rightarrow (۱+k,۵)(۲,۰)(۳-۲k,۵) \xrightarrow[\text{یک‌به‌یک}]{\text{طبق تعریف}} ۱+k=۳-۲k$

$\Rightarrow ۳k=۲ \Rightarrow k=\frac{۲}{۳}$

$m=۲ \Rightarrow (۱+k,۵)(۲,۲)(۳-۲k,۵) \xrightarrow[\text{یک‌به‌یک}]{\text{طبق تعریف}} ۱+k=۳-۲k$

$\Rightarrow ۳k=۲ \Rightarrow k=\frac{۲}{۳}$

در حالت اول $mk=(۰)(\frac{۲}{۳})=۰$ و در حالت دوم $mk=(۲)(\frac{۲}{۳})=\frac{۴}{۳}$

۵- آسان

چون در $y=۱$، xهای ۴ و ۷ و در $y=۲$ و xهای ۲ و ۳ و ۵ و در $y=۳$، xهای ۱ و ۶ در ارتباط هستند پس یک‌به‌یک نیست.

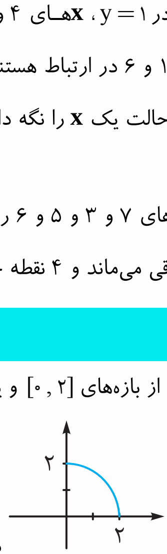
در هر حالت یک x را نگه داشته و باقی xها را حذف می‌کنیم مثلاً:

$(۴,۱)(۲,۲)(۱,۳)$

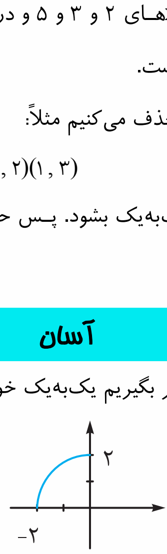
پس xهای ۷ و ۳ و ۵ و ۶ را حذف کردیم تا یک‌به‌یک بشود. پس حداکثر ۳ نقطه باقی می‌ماند و ۴ نقطه حذف می‌شود.

۶- آسان

هر یک از بازه‌های $[۰,۲]$ و یا $[-۲,۰]$ را در نظر بگیریم یک‌به‌یک خواهد بود.



$[۰,۲]$ یک‌به‌یک است

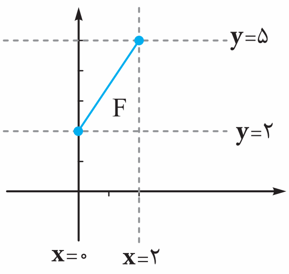


$[-۲,۰]$ یک‌به‌یک است.

۷- آسان

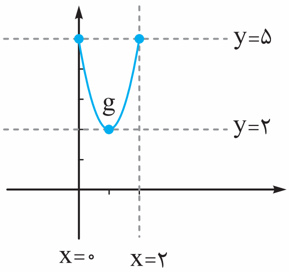
آ) باید شکلی رسم کنید که خطوط موازی محور xها شکل را حداکثر در یک نقطه قطع کنند.

f را تابعی خطی با دامنه $[۰,۲]$ و برد $[۲,۵]$ رسم کردیم.



ب) در بازه‌های داده شده شکل را طوری رسم می‌کنیم که خطوط موازی محور xها شکل را در بیش از یک نقطه قطع کنند.

تابع **g** را سهمی با دامنه و برد مورد نظر رسم کردیم



۸- آسان

حواستون باشه‌ها! $f^{-۱}$ از لحاظ زوج مرتب به معنای جابه‌جایی **x** و **y** است.

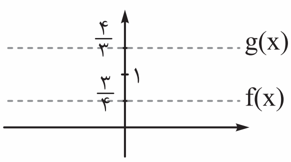
نکته مهم این که $f^{-۱} \neq \frac{۱}{f}$

$f^{-۱}=\{(۱,۲)(۳,-۱)(۴,۷)\} \Rightarrow f=\{(۲,۱)(-۱,۳)(۷,۴)\}$

$f(۲)=۱ \Rightarrow f^{-۱}(۱)=۲, f(-۱)=۳ \xrightarrow{\text{پس}} \frac{۲}{۱-۳}=\frac{۲}{-۲}=-۱$

۹- آسان

خیر، $f(x)=\frac{۳}{۴}$ خطی است موازی محور xها و همچنین $g(x)=\frac{۴}{۳}$ نیز خطی است موازی محور xها در حالی که دو تابع زمانی وارون یکدیگرند که نسبت به نیمساز ناحیه اول و سوم قرینه باشند. در حالی که **f** و **g** نسبت به نیمساز ناحیه اول و سوم قرینه نیستند.



۱۰- متوسط

برد وارون تابع **f** همان دامنه تابع **f** است.

$D_f = R_{f^{-1}}$

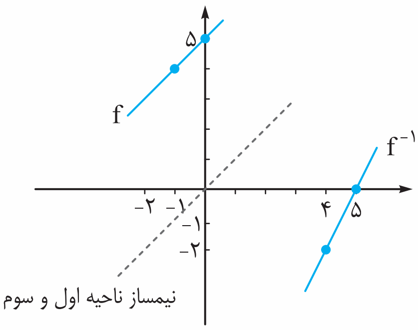
$\{a^{۲}, b+۳\} = R_{f^{-۱}} = \{-۵, ۹\}$

اگر این دو مجموعه با هم برابر باشند $a^{۲}=۹$ پس در نتیجه: $a=\pm۳$

همچنین $b+۳=-۵ \Leftarrow b=-۸$

۱۱- متوسط

آ) ابتدا تابع **f** را رسم می‌کنیم و قرینه آن را نسبت به نیمساز ناحیه اول و سوم رسم می‌کنیم.



$f(x)=۲x+۵$

نمودار **f** چون خطوط موازی محور **x**ها شکل را در یک نقطه قطع می‌کنند پس یک‌به‌یک است.

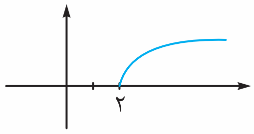
ب) $y=۲x+۵ \Rightarrow y-۵=۲x \Rightarrow \frac{y-۵}{۲}=x \Rightarrow f^{-۱}(x)=\frac{x-۵}{۲}$

۱۲- متوسط

ابتدا دامنه و برد **f** را به دست می‌آوریم:

$D_f : x-۲\geq ۰ \Rightarrow x\geq ۲ \Rightarrow D_f:[۲,+\infty)$

$R_f : y\geq ۰$



چون **f** یک‌به‌یک است پس $f^{-۱}$ را به دست می‌آوریم:

$y=\sqrt{x-۲} \xrightarrow[\text{عوض می‌کنیم}]{\text{جای x و y را}} x=\sqrt{y-۲}$

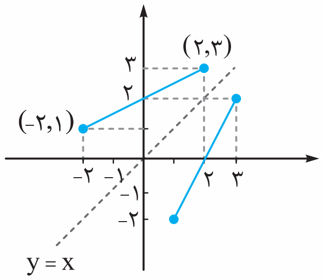
$\xrightarrow{\text{با شرط } x\geq ۰} x^{۲}=y-۲ \Rightarrow x^{۲}+۲=y$

پس $D_{f^{-۱}}=x\geq ۰$ و $R_{f^{-۱}}=[۲,+\infty)$

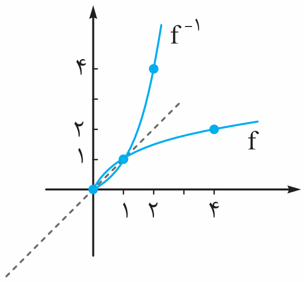
نتیجه این سؤال که $D_f=R_{f^{-۱}}$ و $D_{f^{-۱}}=R_f$ را به خاطر بسپارید.

۱۳- متوسط

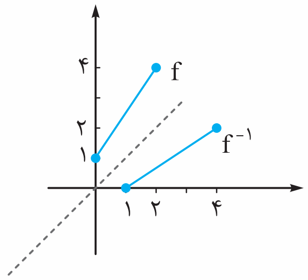
موارد آ و پ و ج یک‌به‌یک نیستند پس طبق خواسته سؤال تنها وارون ب و ت و ث را رسم می‌کنیم. وارون یک تابع را نسبت به نیمساز ناحیه اول رسم می‌کنیم.



نیمساز ناحیه اول و سوم (ب



نیمساز ناحیه اول و سوم(پ



نیمساز ناحیه اول و سوم(ت

۱۴- متوسط

حواستون باشه‌ها! شرط وارون‌پذیری یک تابع، یک‌به‌یک بودن آن است پس:

$(۱,۴)(n^{۲}-۸,۴) \xrightarrow[\text{طبق تعریف یک‌به‌یک}]{} ۱=n^{۲}-۸ \Rightarrow ۹=n^{۲} \Rightarrow n=\pm۳$

$n=+۳ \Rightarrow f\{(۱,۴)(m+۹,-۱)(۱,۴)(۲,۴)(۳,m+۳)\}$

چون یک‌به‌یک بودن (۲,۴) و (۱,۴) را خراب می‌کند پس $n=۳$ غیرقابل‌قبول است.

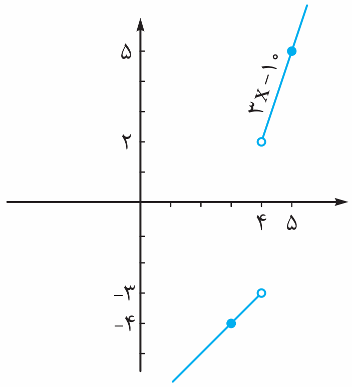
$n=-۳ \Rightarrow f=\{(۱,۴)(m+۹,-۱)(۱,۴)(۲,-۱)(۳,m-۳)\}$

$m+۹=۲ \Rightarrow m=-۷$

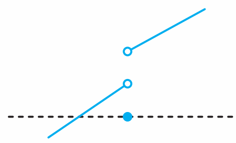
پس $m=-۷$ و $n=-۳$ قابل‌قبول است.

۱۵- دشوار

حواستون باشه‌ها! برای تحلیل یک‌به‌یک بودن توابع چند ضابطه‌ای شکل آن‌ها را رسم کنید. ابتدا $۳x-۱۰$ و $x-۷$ را در بازه‌های مورد نظر رسم کنید.



با توجه به شکل در $x=۴$ نقطه‌ای که گذاشته می‌شود باید y ای بین $[-۳,۲]$ داشته باشد وگرنه یک‌به‌یک بودن را خراب می‌کند [مثلاً



] پس:

$$-۳\le k-۵\le ۲ \Rightarrow ۲\le k\le ۷$$
$$k=[۲,۷]$$

۱۶- متوسط

آ) $f(x)=x^۲-۲x+۱+۲ \Rightarrow f(x)=(x-۱)^۲+۲ \xrightarrow[\text{یک‌به‌یک‌بودن}]{\text{شرط وارون‌پذیری}}$

$$y_۱=y_۲ \Rightarrow (x_۱-۱)^۲+۲=(x_۲-۱)^۲+۲ \Rightarrow (x_۱-۱)^۲=(x_۲-۱)^۲$$

یک‌به‌یک نیست. $|x_۱-۱|=|x_۲-۱|$

محدود کردن دامنه $[x_S,+\infty)$ و یا $(-\infty,x_S]$ پس دامنهٔ محدود باید $[۱,+\infty)$ و یا $(-\infty,۱]$ با در نظر گرفتن $D=[۱,+\infty)$ محدود

$$f(x)=(x-۱)^۲+۲ \quad D:[۱,+\infty)$$
$$x=(y-۱)^۲+۲ \Rightarrow x-۲=(y-۱)^۲ \Rightarrow \sqrt{x-۲}=y-۱$$
$$\Rightarrow \sqrt{x-۲}+۱=y=f^{-۱}(x)$$

ب) $g(x)=(x+۵)^۲ \Rightarrow y_۱=y_۲ \Rightarrow (x_۱+۵)^۲=(x_۲+۵)^۲$

$$\Rightarrow |x_۱+۵|=|x_۲+۵|$$

یک‌به‌یک نیست پس دامنه محدود می‌کنیم پس: $D=[-۵,+\infty)$

$$y=(x+۵)^۲ \text{ محدود } D:[-۵,+\infty)$$
$$x=(y+۵)^۲ \Rightarrow \sqrt{x}=y+۵ \Rightarrow \sqrt{x}-۵=y \Rightarrow \sqrt{x}-۵=g^{-۱}(x)$$

پ) $h(x)=-|x-۱|+۱$

$$y_۱=y_۲ \Rightarrow -|x_۱-۱|+۱=-|x_۲-۱|+۱ \Rightarrow |x_۱-۱|=|x_۲-۱|$$

یک‌به‌یک نیست پس باید دامنه محدود کنیم:

$$y=-|x-۱|+۱ \quad D=[۱,+\infty)$$
$$y=-(x-۱)+۱ \xrightarrow{x\ge ۱} y=-x+۱+۱$$
$$\Rightarrow y=-x+۲ \Rightarrow x=-y+۲$$
$$\Rightarrow x-۲=-y \Rightarrow -x+۲=y=h^{-۱}(x)$$

ت) $P(x)=\sqrt{x+۲}-۳$

$$y_۱=y_۲ \Rightarrow \sqrt{x_۱+۲}-۳=\sqrt{x_۲+۲}-۳ \Rightarrow \sqrt{x_۱+۲}=\sqrt{x_۲+۲}$$
$$\Rightarrow x_۱+۲=x_۲+۲ \Rightarrow x_۱=x_۲$$

یک‌به‌یک است.

$$y=\sqrt{x+۲}-۳ \Rightarrow x=\sqrt{y+۲}-۳ \Rightarrow x+۳=\sqrt{y+۲}$$
$$\Rightarrow (x+۳)^۲=y+۲ \Rightarrow (x+۳)^۲-۲=y=P^{-۱}(x)$$

ث) $K(x)=\dfrac{-۷x+۳}{۵}$

$$y_۱=y_۲ \Rightarrow \frac{-۷x_۱+۳}{۵}=\frac{-۷x_۲+۳}{۵} \Rightarrow -۷x_۱+۳=-۷x_۲+۳$$
$$\Rightarrow -۷x_۱=-۷x_۲ \Rightarrow x_۱=x_۲$$

یک‌به‌یک است.

$$y=\frac{-۷x+۳}{۵} \Rightarrow x=\frac{-۷y+۳}{۵} \Rightarrow ۵x=-۷y+۳ \Rightarrow ۵x-۳=-۷y$$
$$\Rightarrow y=\frac{۵x-۳}{-۷}=K^{-۱}(x)$$

ج) $M(x)=\dfrac{۲x-۱}{x-۳}$

$$y_۱=y_۲ \Rightarrow \frac{۲x_۱-۱}{x_۱-۳}=\frac{۲x_۲-۱}{x_۲-۳}$$
$$\Rightarrow ۲\cancel{x_۱x_۲}-۶x_۱-x_۲+\cancel{۳}=۲\cancel{x_۱x_۲}-x_۱-۶x_۲+\cancel{۳}$$
$$۵x_۲=۵x_۱ \Rightarrow x_۲=x_۱$$

یک‌به‌یک است.

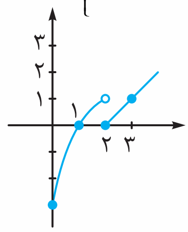
$$y=\frac{۲x-۱}{x+۳} \Rightarrow x=\frac{۲y-۱}{y-۳} \Rightarrow xy-۳x=۲y-۱$$
$$xy-۲y=۳x-۱ \Rightarrow (x-۲)y=۳x-۱ \Rightarrow y=\frac{۳x-۱}{x-۲}=M^{-۱}(x)$$

۱۷- دشوار

$$f(x)=\begin{cases}۴x-x^۲-۳ & x<۲\\ x-۲ & x\geq ۲\end{cases}$$

x	۲	۱	۰
y	۱	۰	-۳

x	۲	۳
y	۰	۱



تابع یک به یک نیست پس وارون‌پذیر نیست.

$D_f=x<۲=R_{f^{-۱}}=(-\infty,۲)$

$R_f: x<۲ \Rightarrow x-۲<۰ \Rightarrow (x-۲)^۲>۰ \Rightarrow -(x-۲)^۲<۰$

$\Rightarrow -(x-۲)^۲+۱<۱ \Rightarrow y<۱$

$y=-(x-۲)^۲+۱ \Rightarrow x=-(y-۲)^۲+۱$

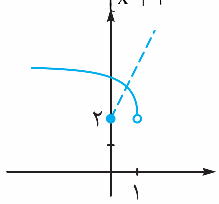
$\Rightarrow x-۱=-(y-۲)^۲ \quad R_f=D_{f^{-۱}}=(-\infty,۱)$

$-x+۱=(y-۲)^۲ \Rightarrow \sqrt{-x+۱}=y-۲ \Rightarrow \sqrt{-x+۱}+۲=y=f^{-۱}(x)$

$D_f: x\geq ۲=R_{f^{-۱}}$

$R_f: x\geq ۲ \Rightarrow x-۲\geq ۰ \Rightarrow y\geq ۰ \Rightarrow D_{f^{-۱}}=[۰,+\infty)$

$$f^{-۱}(x)=\begin{cases}\sqrt{-x+۱}+۲ & x<۱\\ x+۲ & x\geq ۰\end{cases}$$



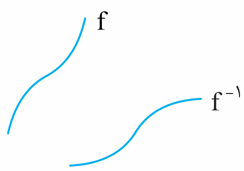
شکل و ضابطه یک‌به‌یک نیستند و وارون‌پذیری ندارند.

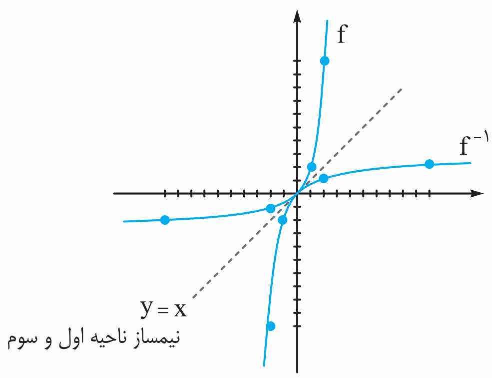
۱۸- دشوار

ابتدا با استفاده از نقطه‌دهی **f** را رسم کنیم:

$f(x)=x^۳+x$

x	-۲	-۱	۰	۱	۲
y	-۱۰	-۲	۰	۲	۱۰





۱۹- دشوار

حواستون باشه‌ها! تابع **f** و $f^{-۱}$ یکدیگر را روی نیمساز ربع اول و سوم قطع می‌کند پس می‌توان **f** را با $y=x$ قطع داد پس:

$$f(x)=\begin{cases}x^۲ & x\geq ۰\\ -x^۲ & x<۰\end{cases} \qquad f(x)=\begin{cases}x(x) & x\geq ۰\\ x(-x) & x<۰\end{cases}$$

$x\geq ۰: x^۲=x \Rightarrow x^۲-x=۰ \Rightarrow x(x-۱)=۰ \Rightarrow x=۰$ قق $, x=۱$ قق

$x<۰: -x^۲-x=۰ \Rightarrow -x(x+۱)=۰ \Rightarrow x=۰$ غقق $, x=-۱$ قق

پس **f** و $f^{-۱}$ یکدیگر را در سه نقطه به طول‌های ۱ و ۰ و ۱− قطع می‌کنند.

۲۰- متوسط

با توجه به نکته سؤال قبل:

$f(x)=x^۲-۴x+۶ \Rightarrow x^۲-۴x+۶=x \Rightarrow x^۲-۵x+۶=۰$

$\Rightarrow (x-۲)(x-۳)=۰ \Rightarrow x=۲$ قق $, x=۳$ قق

۲۱- متوسط

با توجه به نکته سؤال قبل:

$x^۳-۵x^۲+۴x=x \Rightarrow x^۳-۵x^۲+۳x=۰$

$\Rightarrow x(x^۲-۵x+۳)=۰$

$x=۰$

$x^۲-۵x+۳=۰ \Rightarrow \Delta=۲۵-۱۲=۱۳$

۲ ریشه دارد.

پس جمعاً سه نقطهٔ برخورد خواهد داشت.

۲۲- متوسط

با توجه به سؤال قبل:

$\dfrac{x+۴}{x-۲}=x \Rightarrow x+۴=x^۲-۲x \Rightarrow x^۲-۳x-۴=۰ \Rightarrow x=-۱, x=۴$

۲۳- دشوار

آ) $y=۳x^۲-۶ \Rightarrow x=۳y^۲-۶ \Rightarrow x+۶=۳y^۲ \Rightarrow \dfrac{x+۶}{۳}=y^۲$

$\Rightarrow \sqrt{\dfrac{x+۶}{۳}}=y=f^{-۱}(x)$

ب) $y=\dfrac{۲x-۱}{x+۴} \Rightarrow x=\dfrac{۲y-۲}{y+۴} \Rightarrow xy+۴x=۲y-۱$

$\Rightarrow xy-۲y=-۴x-۱$

$y(x-۲)=-۴x-۱ \Rightarrow y=\dfrac{-۴x-۱}{x-۲}=g^{-۱}(x)$

پ) $h(x)=|x-۳|+۷ \xrightarrow{x\leq ۳}$

$h(x)=-(x-۳)+۷=-x+۳+۷=-x+۱۰$

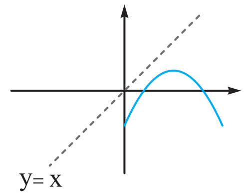
$y=-x+۱۰ \Rightarrow x=-y+۱۰ \Rightarrow y=-x+۱۰=h^{-۱}(x)$

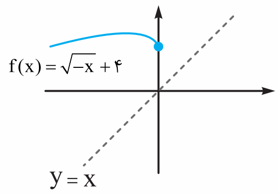
ت) $$k^{-۱}(x)=\begin{cases}x\leq ۰ \Rightarrow y=x^۲ \Rightarrow x=y^۲ \Rightarrow \sqrt{x}=y\\ x>۰ \Rightarrow y=-x^۲ \Rightarrow x=-y^۲ \Rightarrow -x=y^۲\\ \Rightarrow \sqrt{-x}=y\end{cases}$$

$$k^{-۱}(x)=\begin{cases}\sqrt{x} & x\geq ۰\\ \sqrt{-x} & x<۰\end{cases}$$

۲۴- متوسط

آ) $y=x$ و یا $y=-x$ را می‌توان در نظر گرفت

ب)


پ)


۲۵- آسان

$$y=۴x \xrightarrow[\text{یک‌به‌یک‌بودن است}]{\text{شرط وارون‌پذیری}} y_۱=y_۲ \Rightarrow ۴x_۱=۴x_۲ \Rightarrow x_۱=x_۲$$

یک‌به‌یک است. پس وارون‌پذیر است.

۲۶- متوسط

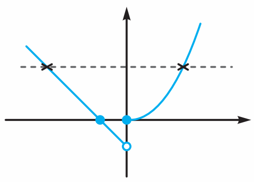
وارون تابع **f** را می‌یابیم:

$$y=\frac{۳}{x-۲} \Rightarrow x=\frac{۳}{y-۲}$$

$$xy-۲x=۳ \Rightarrow xy=۳+۲x \Rightarrow y=\frac{۳+۲x}{x}+g(x)$$

۲۷- آسان

$$h(x)=\begin{cases} x^۲ & x\geq ۰ \\ -x-۱ & x<۰ \end{cases}$$



خطوط موازی محور **x**ها در بیش از یک نقطه قطع می‌کند.

۲۸- دشوار

حواســـتون باشـــهـــا! وارون تـــابع هموگرافیـــک $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$

به‌صورت: $y^{-۱}=\dfrac{-dx+b}{cx-a}$

پس در نتیجه وارون این تابع $y^{-۱}=\dfrac{-۲x+۲}{x-a}$ است.

$$\frac{-۲x+۲}{x-a}=\frac{ax+۲}{x+۲}$$

از تساوی دو طرف نتیجه می‌شود $a=-۲$ است.

۲۹- آسان

اگر $f^{-۱}(x)=x-۱$ است پس $f(x)=x+۱$ است در نتیجه:

$$g(x)=x+۱+\sqrt{x+۱} \xrightarrow{x+۱=t} g(t)=t+\sqrt{t} \xrightarrow[(x\,,۱۲)\in g]{g^{-۱}(۱۲)}$$

$$۱۲=t+\sqrt{t} \Rightarrow t+\sqrt{t}-۱۲=۰ \Rightarrow (\sqrt{t}+۴)(\sqrt{t}-۳)=۰$$

$$\sqrt{t}=۴ \text{ غ‌ق‌ق }, \sqrt{t}=۳ \Rightarrow t=۹$$

$$x+۱=۹ \Rightarrow x=۸$$

۳۰- آسان

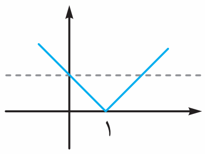
چون $f^{-۱}(a)$ را خواسته است پس یعنی: $(x\,,a)\in f$

$$۹=۲^{۳x}+x$$

$$۹=۸^{x}+x \Rightarrow x=۱$$

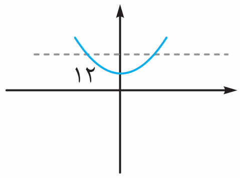
۱- گزینهٔ «۲» آسان

به بررسی گزینه‌ها می‌پردازیم:



۱) یک‌به‌یک نیست

۲) $g=\{(۱,۲)(۲,۴)(۳,۶)\}$ یک‌به‌یک است.



۳) یک‌به‌یک نیست

دو زوج مرتب با yهای یکسان xهای متفاوت دارند پس یک‌به‌یک نیست.

۴) $(۱,۵)(۴,۵)$

۲- گزینهٔ «۳» آسان

با توجه به خطوط موازی محور **x**ها تنها گزینه ۳ یک‌به‌یک است.

گزینه اول ویژگی تابع بودن را دارا نیست.

۳- گزینهٔ «۲» آسان

به بررسی گزینه‌ها می‌پردازیم:

گزینه «۱»: با دامنهٔ محدود $[x_S\,,+\infty)$ و یا $(-\infty\,,x_S]$ یک‌به‌یک است. غلط

گزینه «۲»: صحیح

گزینه «۳»: خطی موازی محور **x**ها شرط یک‌به‌یک بودن است. غلط

گزینه «۴»: نسبت به نیمساز ناحیه اول و سوم. غلط

۴- گزینه «۱» — متوسط

با توجه به نکته گفته شده وارون تابع $f(x)=\frac{ax+b}{cx+d}$ به‌صورت $f^{-۱}=\frac{-dx+b}{cx-a}$ است پس:

$$g^{-۱}(x)=\frac{-۲x-۱}{x-۲}$$

که اگر از منفی صورت فاکتور گرفته و در مخرج ضرب کنیم به گزینه یک می‌رسیم: $\frac{۲x+۱}{۲-x}$

۵- گزینه «۳» — متوسط

دقت کنید $D_f=R_{f^{-۱}}$ و $R_f=D_{f^{-۱}}$ پس:

$D_f: x+۳\geq ۰ \Rightarrow x\geq -۳=R_{f^{-۱}}$

$R_f: y\geq -۵ \Rightarrow D_{f^{-۱}}$

$y=\sqrt{x+۳}-۵ \Rightarrow x=\sqrt{y+۳}-۵ \Rightarrow x+۵=\sqrt{y+۳}$

$\Rightarrow (x+۵)^۲=y+۳$

$x^۲+۱۰x+۲۵=y+۳ \Rightarrow x^۲+۱۰x+۲۲=y=f^{-۱}(x)$

$D_{f^{-۱}}: x\geq -۵$

۶- گزینه «۳» — متوسط

$f^{-۱}(۴)$ یعنی $(x,۴)\in f$ پس:

$۴=-x+\sqrt{-۲x}$

$۴+x=\sqrt{-۲x} \xrightarrow{\text{طرفین به توان ۲}} (۴+x)^۲=(\sqrt{-۲x})^۲$

$\Rightarrow ۱۶+۸x+x^۲=-۲x$

$x^۲+۱۰x+۱۶=۰ \Rightarrow (x+۲)(x+۸)=۰$

$x=-۲$ قق — $x=-۸$ غقق

↓ صدق — ↓ صدق

$۴=۲+\sqrt{۴}$ — $۴=۸+۴$

$۴=۴$ ✓ — $۴\neq ۱۲$

۷- گزینه «۲» — دشوار

برای داشتن تابع یک‌به‌یک هر مؤلفه از مجموعه **A** باید تنها با یک مؤلفه از **B** در ارتباط باشد. پس:

$A=\{۱,۲,۳,۴\}$

$\downarrow$

$B=\{۱,۲,۳,۴,۵\}$

برای عدد ۱ از مجموعه **A** تنها یک جفت انتخاب از **B** وجود دارد.

برای عدد ۲ از مجموعه **A**، ۴ انتخاب از مجموعه **B** داریم.

برای عدد ۳ از مجموعه **A**، ۳ انتخاب از مجموعه **B** داریم.

برای عدد ۴ از مجموعه **A**، ۲ انتخاب از مجموعه **B** داریم.

پس در نتیجه: $۱\times ۴\times ۳\times ۲=۲۴$

روش دوم: استفاده از فرمول ترتیب است.

۸- گزینه «۳» — متوسط

خروجی به معنای حاصل عبارت $-\frac{x}{۲+\sqrt{x}}$ است پس:

$\frac{-x}{۲+\sqrt{x}}=-۱ \Rightarrow -x=-۲-\sqrt{x} \Rightarrow ۰=x-\sqrt{x}-۲$

$۰=(\sqrt{x}-۲)(\sqrt{x}+۱)$

$\sqrt{x}=۲ \Rightarrow x=۴ , \sqrt{x}=-۱$ غقق

$x=۴$ به معنای خروجی تابع $۲x-۳$ است پس:

$۲x-۳=۴ \Rightarrow ۲x=۷ \Rightarrow x=\frac{۷}{۲}$

۹- گزینه «۴» — آسان

$(۳,۲)=(b,۲) \xrightarrow{\text{یک‌به‌یک}} b=۳$

$(۳,۲)=(۳,a^۲-a) \xrightarrow{\text{تابع}} a^۲-a=۲ \Rightarrow a^۲-a-۲=۰$

$\Rightarrow (a-۲)(a+۱)=۰$

$a=۲ , a=-۱$

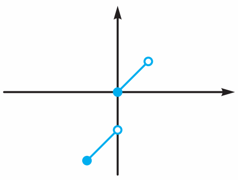
$a=۲ \Rightarrow \{(۳,۲)(۲,۵)(۳,۲)(۳,۲)(-۱,۴)\} \Rightarrow a=۲$ قق

$a=-۱ \Rightarrow \{(۳,۲)(-۱,۵)(۳,۲)(۳,۲)(-۱,۴)\}$

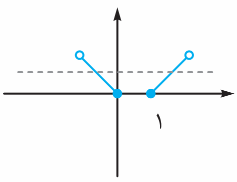
$\xrightarrow{\text{تعریف تابع}} (-۱,۵)(-۱,۴)$ غقق

پس $a=۲$ قابل‌قبول است و $b=۳$

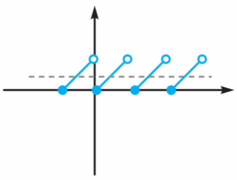
۱۰- گزینه «۱» — دشوار



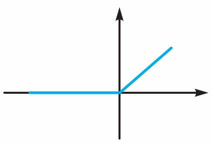
۱) یک‌به‌یک است



۲) یک‌به‌یک نیست

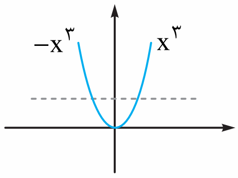


۳) یک‌به‌یک نیست

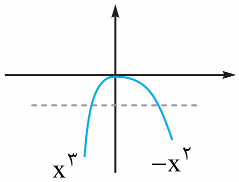


۴) یک‌به‌یک نیست

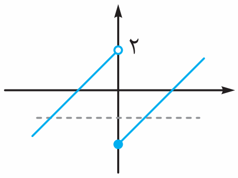
۱۱- گزینه «۴» دشوار



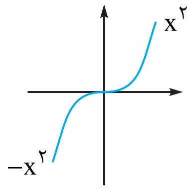
۱) یک‌به‌یک نیست



۲) یک‌به‌یک نیست



۳) یک‌به‌یک نیست



۴) یک‌به‌یک است

۱۲- گزینه «۴» دشوار

علاوه بر رسم توابع می‌توان با یک خروجی تعداد ورودی‌ها را حساب کرد پس:

$$۱)\ y=x^۵-x+۱ \Rightarrow y=۱ \Rightarrow ۱=x^۵-x+۱$$

$$\Rightarrow x^۵-x=۰ \Rightarrow x(x^۴-۱)=۰$$

$$x(x-۱)(x+۱)(x^۲+۱)=۰$$

$x=-۱$ و $x=۱$ و $x=۰$ یک خروجی به ازای سه ورودی است پس

یک‌به‌یک نیست.

$$۲)\ y=|x|+\sqrt[۳]{x} \Rightarrow y=۰ \Rightarrow |x|+\sqrt[۳]{x}=۰$$

$$\Rightarrow |x|=-\sqrt[۳]{x} \Rightarrow x=-۱, x=۰$$

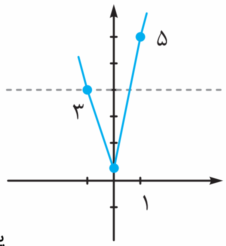
یک‌به‌یک نیست.

$$۳)\ y=|x-۲|+\sqrt{x} \Rightarrow y=۲ \Rightarrow ۲=|x-۲|+\sqrt{x}$$

$$\begin{cases} x\ge ۲: ۲=x-۲+\sqrt{x} \Rightarrow x+\sqrt{x}-۴=۰ \\ x<۲: ۲=-x+۲+\sqrt{x} \Rightarrow x-\sqrt{x}=۰ \\ \Rightarrow \sqrt{x}(\sqrt{x}-۱)=۰ \Rightarrow x=۰, x=۱ \end{cases}$$

یک‌به‌یک نیست.

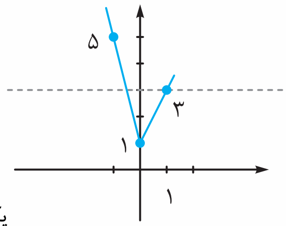
۱۳- گزینه «۴» دشوار



یک‌به‌یک نیست پس معکوس‌پذیر نیست

$۱)\ y=۳|x|+x+۱$

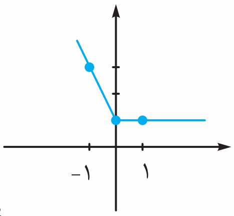
x	−۱	۰	۱
y	۳	۱	۵



یک‌به‌یک نیست معکوس‌پذیر نیست

$۲)\ y=۳|x|-x+۱$

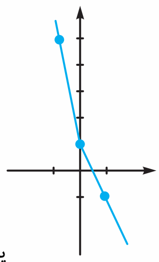
x	−۱	۰	۱
y	۵	۱	۳



یک‌به‌یک نیست

$۳)\ y=|x|-x+۱$

x	−۱	۰	۱
y	۳	۱	۱



یک‌به‌یک است و معکوس پذیر

$۴)\ y=|x|-۳x+۱$

x	−۱	۰	۱
y	۴	۱	−۱

۱۴- گزینه «۳» دشوار

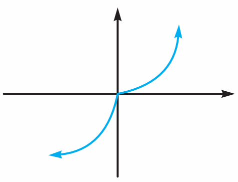
$$y=\sqrt{x} \Rightarrow x=y \Rightarrow x^۲=y \Rightarrow D_{f^{-۱}}: x\ge ۰$$

$D_f: x\ge ۰$

$R_f: y\ge ۰$

$$y=-x^۲ \Rightarrow x=-y^۲ \Rightarrow -x=y^۲$$

$$\Rightarrow -\sqrt{-x}=y \Rightarrow D_{f^{-۱}}: x<۰$$



$D_f: x<۰$

$R_f: y<۰$

$$f^{-۱}(x)=\begin{cases} x^۲ & x\ge ۰ \\ \sqrt{-x} & x<۰ \end{cases}$$

۱۵- گزینه «۳» متوسط

اگر $(x\,,y)\in f$ باشد آنگاه $(y\,,x)\in f^{-۱}$ پس معکوس گزینه‌ها را صدق می‌دهیم:

$۱)(۶۶\,,۴) \Rightarrow ۴=۶۶^{۳}+\sqrt{۶۶}$ ×

$۲)(۱\,,۳) \Rightarrow ۳=۱^{۳}+\sqrt{۱}$ ×

$۳)(۴\,,۶۶) \Rightarrow ۶۶=۴^{۳}+\sqrt{۴}$ ✓

$۴)(۲\,,۱) \Rightarrow ۱=۲^{۳}+۱$ ×

۱۶- گزینه «۴» متوسط

با توجه به $g^{-۱}(۱۶)$ پس $g(x)=۱۶$ پس

$f(۳x-۴)=۱۶$

$(۳x-۴\,,۱۶)\in f \Rightarrow (۱۶\,,۳x-۴)\in f^{-۱}$

$۳x-۴=۱۶+۴ \Rightarrow ۳x=۲۴ \Rightarrow x=۸$

۱۷- گزینه «۲» دشوار

با توجه به $g^{-۱}(۶)$ پس $(x\,,۶)\in g$

$۶=f(x)+\sqrt{f(x)} \xrightarrow{f(x)=t} t+\sqrt{t}-۶=۰$

$\Rightarrow (\sqrt{t}+۳)(\sqrt{t}-۲)=۰$

$\sqrt{t}=-۳$ غ‌ق‌ق , $\sqrt{t}=۲ \Rightarrow \boxed{t=۴}$

$f(x)۴ \Rightarrow (x\,,۴)\in f \Rightarrow (۴\,,x)\in f^{-۱} \Rightarrow f^{-۱}(۴)=\sqrt[۳]{۲(۴)}=۲$

۱۸- گزینه «۳» دشوار

$D_{f^{-۱}}=R_f\,,D_f=R_{f^{-۱}}$

پس به‌دست‌آوردن برد تابع می‌پردازیم:

$۰\le\sqrt{x-۱} \Rightarrow ۰\ge-\sqrt{x-۱}$

$۳\ge ۳-\sqrt{x-۱}\ge ۰ \Rightarrow$ چون زیر رادیکال بزرگ‌تر قرار می‌گیرد

$\sqrt{۳}\ge\sqrt{۳-\sqrt{x-۱}}\ge ۰ \Rightarrow [۰\,,\sqrt{۳}]$

۱۹- گزینه «۴» دشوار

ریشهٔ داخل پرانتز $x=۲$ است پس:

$x\le ۲: f(x)=۲x-۴+۲x \Rightarrow f(x)=۴x-۴$

برد: $x\le ۲ \Rightarrow ۴x\le ۸ \Rightarrow ۴x-۴\le \Rightarrow y\le ۴$

$x>۲: f(x)=۲x+۴-۲x \Rightarrow f(x)=۴$ یک‌به‌یک نیست.

پس $f(x)=۴x-۴$ با $D_f:(-\infty\,,۲]$ و $R_f:(-\infty\,,۴]$ داریم:

$y=۴x-۴ \Rightarrow f^{-۱}(x)=\frac{۱}{۴}x+۱$

$D_{f^{-۱}}=R_f=(-\infty\,,۴]$

۲۰- گزینه «۴» دشوار

f و $f^{-۱}$ اگر متقاطع باشند روی نیمساز اول و سوم متقاطع هستند پس می‌توان:

$x^{۲}+۲x+۱=x \Rightarrow x^{۲}+x+۱=۰ \Rightarrow \Delta=۱-۴=-۳$

ریشه ندارد غیرمتقاطع هستند.

۲۱- گزینه «۲» دشوار

حواستون باشه‌ها! تابع چند ضابطه‌ای وقتی یک‌به‌یک است که

(۱) اولاً در هر ضابطه یک‌به‌یک باشد.

(۲) برد ضابطه‌ها اشتراک نداشته باشند.

$x>۳ \Rightarrow ۲x>۶ \Rightarrow ۲x+a>۶+a \Rightarrow y>۶+a$

$x\le ۳ \Rightarrow x-۳a\le ۳-۳a \Rightarrow y\le ۳-۳a$

کافی است.

$۳-۳a\le ۶+a \Rightarrow ۴a\ge -۳ \Rightarrow a\ge -\frac{۳}{۴}$

۲۲- گزینه «۴» دشوار

حواستون باشه‌ها! تابع هموگرافیک زمانی وارون‌پذیر نیست که یک‌به‌یک نباشد و زمانی یک‌به‌یک نیست که $ad-bc=۰$ باشد پس:

$۵-(۸m)=۰ \Rightarrow ۵=-۸m \Rightarrow m=-\frac{۵}{۸}$

۲۳- گزینه «۴» آسان

اگر $(x\,,y)\in f$ پس $(y\,,x)\in f^{-۱}$

اگر $(۴\,,۱)$ از وارون **f** می‌گذرد پس $(۱\,,۴)\in f$ پس $۴=a+۱ \Rightarrow a=۳$

$f(x)=۳x+۱ \Rightarrow f^{-۱}(x)=\frac{x-۱}{۳} \xrightarrow{(۱۰\,,۳)} \frac{۱۰-۱}{۳}=۳$ ✓

۲۴- گزینه «۲» متوسط

یعنی دو تابع وارون یکدیگرند پس:

$۲x-۳y=b \Rightarrow \frac{۲}{۳}x-\frac{b}{۳}=y$

$f(x)=\frac{۲}{۳}x-\frac{b}{۳} \Rightarrow f^{-۱}(x)=\frac{x+\frac{b}{۳}}{\frac{۲}{۳}}=\frac{۳}{۲}x+\frac{b}{۲}$

پس $f^{-۱}(x)$ با $ax+by=۸$ باید برابر باشد پس:

$ax-۸=-by$

$-\frac{a}{b}x+\frac{۸}{b}=y=f^{-۱}(x)$

$$-\frac{a}{b}x+\frac{۸}{b}=\frac{۳}{۲}x+\frac{b}{۲}\begin{cases}\Rightarrow \frac{۸}{b}=\frac{b}{۲} \Rightarrow b^{۲}=۱۶ \Rightarrow b=\pm ۴\\ \Rightarrow -\frac{a}{۴}=\frac{۳}{۲} \Rightarrow a=-۶\end{cases}$$

$$\frac{-a}{-۴}=\frac{۳}{۲} \Rightarrow a=+۶$$

$$a+b \xrightarrow{a=-۶\,,\,b=۴} a+b=-۲$$

$$\xrightarrow{b=-۴\,,\,a=۶} a+b=+۲$$

۲۵- گزینه «۴» متوسط

$y=x^{۲}-۴x+۴-۴ \Rightarrow y=(x-۲)^{۲}-۴ \quad D_f: x<۲$

$x-۲<۰ \Rightarrow (x-۲)^{۲}>۰$

$(x-۲)^{۲}-۴>-۴ \Rightarrow y>-۴$

$y>-۴=R_f=D_{f^{-۱}}$

$f^{-۱}(x)=\sqrt{x+۴}+۲$

$D_{f^{-۱}}=[-۴,+\infty)$

۲۶- گزینه «۱» متوسط

$\begin{matrix} x>۰ \\ y>۰ \end{matrix} \Rightarrow f(x)=\sqrt{۱-x^{۲}} \Rightarrow f^{-۱}(x)=\sqrt{-x^{۲}+۱}$

$\begin{matrix} x<۰ \\ y<۰ \end{matrix} \Rightarrow f(x)=-\sqrt{۱-x^{۲}} \Rightarrow f^{-۱}(x)=\sqrt{۱-x^{۲}}$

$\Rightarrow f^{-۱}(x)=f(x)$

۲۷- گزینه «۲» دشوار

$x\le۱ \Rightarrow -۲x\ge-۲$ یا $-۲x+۳\ge۱ \Rightarrow R_f=D_{f^{-۱}} \Rightarrow x\ge۱$

$y=-۲x+۳ \Rightarrow x=-۲y+۳ \Rightarrow x-۳=-۲y$

$\Rightarrow \frac{x-۳}{-۲}=y=f^{-۱}(x)$

$x>۱ \Rightarrow -\frac{۱}{۲}x<-\frac{۱}{۲} \Rightarrow -\frac{۱}{۲}x+\frac{۳}{۲}<۱ \Rightarrow R_f=D_{f^{۱}} \Rightarrow x<۱$

$y=-\frac{۱}{۲}x+\frac{۳}{۲} \Rightarrow f^{-۱}(x)=-۲x+۳$

۲۸- گزینه «۳» متوسط

$x\ge۰ \Rightarrow f(x)=x^{۲} \Rightarrow f^{-۱}(x)=\sqrt{x}$

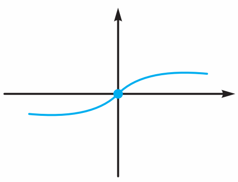
$D_f=R_{f^{-۱}}=y\ge۰$

$R_f=D_{f^{-۱}}=x\ge۰$

$x<۰ \Rightarrow f(x)=-x^{۲} \Rightarrow f^{-۱}(x)=-\sqrt{-x}$

$D_f=R_{f^{-۱}}=y<۰$

$R_f=D_{f^{-۱}}=x<۰$



۱- آسان

آ) $D_{\frac{f}{g}}=\{D_f\cap D_g\}-\{g(x)=۰\}$

$D_f=\{۱,-۲,۰\}\quad D_g=\{۱,۲,۰\} \Rightarrow D_f\cap D_g=\{۱,۰\}$

$g(x)=۰ \Rightarrow$ یعنی در تابع g، y صفر داشته باشیم که نداریم.

$D_{\frac{f}{g}}=\{۱,۰\}-\{\}=\{۱,۰\}$

$\frac{f}{g}(۱)=\frac{f(۱)}{g(۱)}=\frac{۲}{۵} \Rightarrow (۱,\frac{۲}{۵}) \quad , \quad \frac{f}{g}(۰)=\frac{f(۰)}{g(۰)}=\frac{۷}{-۱}=-۷ \Rightarrow (۰,-۷)$

$\frac{f}{g}=\{(۱,\frac{۲}{۵}),(۰,-۷)\}$

ب) $f-g=D_{f-g}=\{D_f\cap D_g\}=\{۱,۰\}$

$(f-g)(۱)=f(۱)-g(۱)=۲-۵=-۳,$
$(f-g)(۰)=f(۰)-g(۰)=۷-(-۱)=۸$

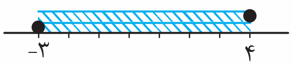
$f-g=\{(۱,-۳)(۰,۸)\}$

۲- دشوار

۱) $f+g=\{D_f\cap D_g\}$

$D_f: x+۳\ge۰ \Rightarrow x\ge-۳$

$D_g: ۴-x\ge۰ \Rightarrow ۴\ge x$

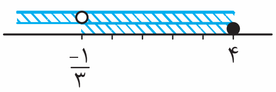


$[-۳,۴]$

$f+g=\sqrt{x+۳}+\sqrt{۴-x} \quad D_{f+g}=[-۳,۴]$

۲) $D_g: ۴-x\ge۰ \Rightarrow ۴\ge x$

$D_h: x\ne-\frac{۱}{۳}$

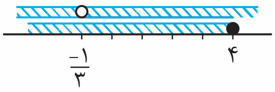


$(-\infty,-\frac{۱}{۳})\cup(-\frac{۱}{۳},۴]$

$g-h=\sqrt{۴-x}-\frac{x+۳}{۳x+۱} \quad D_{g-h}=(-\infty,-\frac{۱}{۳})\cup(-\frac{۱}{۳},۴]$

۳) $D_g: ۴-x\ge۰\Rightarrow ۴\ge x\Rightarrow ۴\ge x$

$D_h=x\ne-\frac{۱}{۳}$



$gh=\{D_g\cap D_h\}=(-\infty,۴]-\{-\frac{۱}{۳}\}$

$gh=(\sqrt{۴-x})(\frac{x+۳}{۳x+۱})$

$D_{\frac{f}{g}}\Rightarrow\{D_f\cap D_g\}-\{g(x)=۰\}=[-۳,۴]-\{۴\}=[-۳,۴)$

$g(x)=۰\Rightarrow\sqrt{۴-x}=۰\Rightarrow ۴-x=۰\Rightarrow ۴=x$

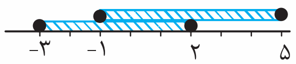
$\frac{f}{g}=\frac{\sqrt{x+۳}}{\sqrt{۴-x}}$

$(f+g)(۲)=f(۲)+g(۲)=\sqrt{۵}+\sqrt{۲}$

$(f.h)(۱)=f(۱).h(۱)=(۲)(\frac{۴}{۴})=۲$

۳- دشوار

طبق تعریف کتاب می‌دانیم که شرط $f+g$ داشتن اشتراک دامنه‌هاست پس:



$=[-۱,۲]$

$D_f=[-۳,۲]\ ,\ D_g=[-۱,۵]$

شروع به نوشتن ضابطه‌های موجود در تابع **g** می‌کنیم:

$$g(x)=\begin{cases}x+۱ & -۱\le x\le ۱\\ ۲ & ۱\le x\le ۵\end{cases}$$

شروع به نوشتن ضابطه‌های موجود در تابع **f** می‌کنیم:

$$f(x)=\begin{cases}\frac{۱}{۲}x-\frac{۱}{۲} & -۳\le x\le -۱\\ -۱ & -۱\le x\le ۱\\ ۲x-۳ & ۱\le x\le ۲\end{cases}$$

حاصل اشتراک دامنه‌های **f** و **g** را به دست آورده و در اشتراک، **y**های موجود را جمع می‌کنیم.

$$f+g=\begin{cases}\frac{۱}{۲}x-\frac{۱}{۲}+x+۱ & -۱\le x\le ۱\\ ۲x-۳+۲ & ۱\le x\le ۲\end{cases}$$

$$f+g=\begin{cases}\frac{۳}{۲}x+\frac{۱}{۲} & -۱\le x\le ۱\\ ۲x-۱ & ۱\le x\le ۲\end{cases}$$

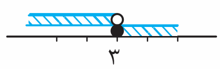
۴- آسان

برای آن که $f\times g$ موجود باشد باید دامنهٔ آن‌ها اشتراک داشته باشد.

$D_f:x-۳\ge ۰\Rightarrow x\ge ۳\Rightarrow[۳,+\infty)$

$D_g:۳-x>۰\Rightarrow ۳>x\Rightarrow(-\infty,۳)$

اشتراک $D_f\cap D_g$ به‌صورت:



چون اشتراک تهی است پس $f\times g$ موجود نمی‌باشد.

۵- دشوار

ابتدا اشتراک دامنه‌ها را بین **f** و **g** می‌یابیم:

$D_f:x\ge ۰$

$D_g:\{۰,۲,۴,۵,۹\}\Rightarrow D_f\cap D_g=\{۰,۴,۵,۹\}$

حال ابتدا $۲g$ را بدست می‌آوریم که به معنای ۲ برابر کردن **y**های **g** است.

$۲g=\{(۰,-۶)(-۲,۲)(۴,۶)(۵,۰)(۹,۲۲)\}$

دامنه قابل قبول برای $\frac{f-g}{۲g}$ را به دست می‌آوریم:

$D_{f-g}=\{۰,۴,۵,۹\}\quad D_{۲g}=\{۰,-۲,۴,۵,۹\}$

$\{D_{f-g}\cap D_{۲g}\}-\{۲g(x)=۰\}=\{۰,۴,۵,۹\}-\{۵\}=\{۰,۴,۹\}$

$(\frac{f-g}{۲g})(۰)=-\frac{۱}{۲}\quad(\frac{f-g}{۲g})(۴)=\frac{۵}{۶}\quad(\frac{f-g}{۲g})(۹)=\frac{۸}{۱۱}$

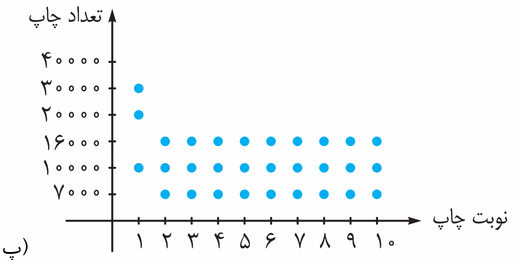
کم‌ترین مقدار به معنای کم‌ترین **y** است که $\frac{۸}{۱۱}$ کم‌ترین مقدار خواهد بود.

۶- متوسط

آ) $f(x)=\begin{cases}۱۰۰۰۰ & n=۱\\ ۷۰۰۰ & n>۱\end{cases}\qquad g(x)=\begin{cases}۲۰۰۰۰ & n=۱\\ ۹۰۰۰ & n>۱\end{cases}$

ب) $h(x)=f(x)+g(x)=\begin{cases}۳۰۰۰۰ & n=۱\\ ۱۶۰۰۰ & n>۱\end{cases}$

پ)



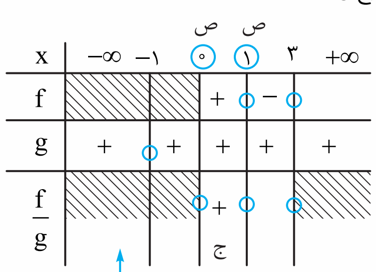
۷- دشوار

ابتدا به دامنهٔ $\sqrt{\frac{f}{g}}$ توجه می‌کنیم:

$\frac{f}{g}\ge ۰$

باتوجه به شکل ریشه‌های تابع f $\Leftarrow$ $x=۰,۱,۳$

و همچنین ریشه‌های تابع g $\Leftarrow$ $x=-۱$



چون در دامنه نیستند.

دامنه: $\frac{f}{g}$:$[۰,۱]\cup\{۳\}$

۸- متوسط

تابع **fog** یا $f(g(x))$ به معنای آن است که ابتدا **x**ها به‌عنوان ورودی در تابع **g** قرار بگیرند و به‌عنوان ورودی تابع **f** استفاده شوند پس:

$$۲ \xrightarrow{g} ۱۱ \xrightarrow{f} ۷ \Rightarrow (۲,۷)$$
$$۴ \xrightarrow{g} -۲ \xrightarrow{f} ۴ \Rightarrow (۴,۴)$$
$$۶ \xrightarrow{g} ۳ \xrightarrow{f} -۵ \Rightarrow (۶,-۵)$$
$$۳ \xrightarrow{g} ۲ \xrightarrow{f} -۵ \Rightarrow (۳,-۵)$$
$$D_{fog} = \{۲,۴,۶,۳\}$$

۹- متوسط

با توجه به دامنه تابع **g** می‌توانیم آن را به‌صورت زوج مرتب:

$$g = \{(۱,۲)(۲,۴)(۳,۶)(۴,۸)\ ....\}$$
$$f = \{(۱,۲)(۲,۳)(۳,۵)(۴,۷)\}$$
$$D_{f+g} = D_f \cap D_g = \{۱,۲,۳,۴\}$$
$$f+g = \{(۱,۴)(۲,۷)(۳,۱۱)(۴,۱۵)\}$$

$$gof = g(f(x)) \quad \begin{array}{l} ۱ \xrightarrow{f} ۲ \xrightarrow{g} ۴ \\ ۲ \xrightarrow{f} ۳ \xrightarrow{g} ۶ \\ ۳ \xrightarrow{f} ۵ \xrightarrow{g} ۱۰ \\ ۴ \xrightarrow{f} ۷ \xrightarrow{g} ۱۴ \end{array} = \{(۱,۴)(۲,۶)(۳,۱۰)(۴,۱۴)\}$$

۱۰- متوسط

$$f^{-۱}(x) = \frac{x-۵}{۲}$$

$fof^{-۱}$ و $f^{-۱}of$ دامنه‌های متفاوتی دارد چون که:

$fof^{-۱} = f(f^{-۱}(x)) \Rightarrow$ $D_{f^{-۱}}$ مهم است

$f^{-۱}of = f^{-۱}(f(x)) \Rightarrow$ D_f مهم است

$$fof^{-۱} = f(f^{-۱}(x)) = ۲(\frac{x-۵}{۲}) + ۵ = x$$

$$f^{-۱}of = f^{-۱}(f(x)) = \frac{۲x+۵-۵}{۲} = x$$

ترکیب هر تابع با وارونش برابر تابع همانی می‌شود اما دامنه‌های آن‌ها متفاوت است. در این سؤال $D_{f^{-۱}} = \mathbb{R}, D_f = \mathbb{R}$ است پس شکل هر دو نیمساز ربع اول و سوم است.

۱۱- دشوار

آ) تابع **f** به معنای آن است که هر کالای گران‌تر از ۱۲۰۰ تومان، مشمول ۴۰۰ تومان تخفیف می‌شود و تابع **g** یعنی هر کالای گران‌تر از ۱۲۰۰ تومان، مشمول ۲۵ درصد تخفیف می‌شود چون ۷۵ درصد آن دریافت می‌شود.

ب) $fog = f(g(x)) = ۰/۷۵x - ۴۰۰$

یعنی به‌ازای هر کالای گران‌تر از ۱۲۰۰ ابتدا ۲۵ درصد تخفیف و ۴۰۰ تومان دیگر نیز از بهایش کاسته می‌شود.

ت) $۰/۷۵x - ۴۰۰ < ۰/۷۵x - ۳۰۰ \Rightarrow -۴۰۰ < -۳۰۰$

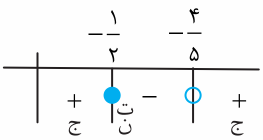
این نامعادله بیان می‌کند که خرید با تخفیف از نوع **fog** همواره ارزان‌تر از خرید با تخفیف نوع **gof** است.

۱۲- دشوار

آ) $fog = f(g(x)) = \sqrt{\frac{x+۲}{۲x+۱} + ۲} = \sqrt{\frac{x+۲+۴x+۲}{۲x+۱}} = \sqrt{\frac{۵x+۴}{۲x+۱}}$

ب) $D_g : x \neq -\frac{۱}{۲} \qquad D_f : x+۲ \geq ۰ \Rightarrow x \geq -۲$

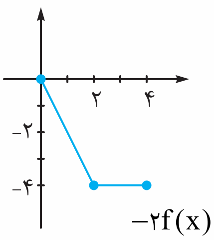
$$D_{fog} = \{D_g \mid g(x) \in D_f\} = \{x \neq -\frac{۱}{۲} \mid \frac{x+۲}{۲x+۱} \geq -۲\}$$
$$= \{x \neq -\frac{۱}{۲} \mid \frac{x+۲}{۲x+۱} + ۲ \geq ۰\} = \{x \neq -\frac{۱}{۲} \mid \frac{x+۲+۴x+۲}{۲x+۱} \geq ۰\}$$
$$= \{x \neq -\frac{۱}{۲} \mid \frac{۵x+۴}{۲x+۱} \geq ۰\} = \{x \neq -\frac{۱}{۲} \mid (-\infty, -\frac{۱}{۲}) \cup [-\frac{۴}{۵}, +\infty)\}$$



$$(-\infty, -\frac{۱}{۲}) \cup [-\frac{۴}{۵}, +\infty)$$

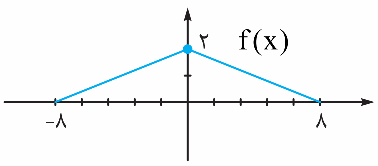
۱۳- متوسط

حواستون باشه‌ها $y = kf(x)$ به معنای آن است که **y**های تابع **f** در (-۲) ضرب شود چون ضریب منفی است به معنای قرینه شدن تمام **y**های شکل است و در نتیجه شکل نسبت به محور **x**ها قرینه می‌شود. پس:

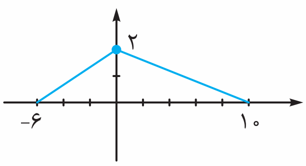


۱۴- دشوار

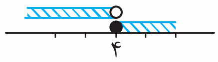
حواستون باشه‌ها! ابتدا نمودار $f(x)$ را می‌خواهیم بدست بیاوریم که به معنای آن است که هر **x** باید دو برابر شود تا به $f(x)$ برگردد. پس:



حال هر نقطه به‌اندازهٔ ۲ واحد به سمت راست منتقل می‌شود پس:



۱۵- دشوار

الف) $D_f \cap D_g =$  $=\{۴\}$

$D_f: ۴-x \geq ۰ \Rightarrow ۴ \geq x$

$D_g: x-۴ \geq \Rightarrow x \geq ۴$

چون $(f\times g)(۴)=f(۴)\times g(۴)=۰\times ۰=۰$ فقط یک نقطه مشترک است

ب) $D_{fog}=\{D_g \mid g(x)\in D_f\}=\{x\geq ۴ \mid \sqrt{x-۴}\leq ۴\}$

$\{x\geq ۴ \mid x-۴\leq ۱۶\}$

$\{x\geq ۴ \mid x\leq ۲۰\} \Rightarrow [۴\,,۲۰]$

$f(g(x))=\sqrt{۴-\sqrt{x-۴}}$

۱۶- متوسط

حواستون باشه‌ها اگر تابع بیرونی داده شده باشد از تعریف $f(g(x))$ استفاده می‌کنیم یعنی:

$f(g(x))=۲g(x)-۵=۲x+۱=f(g(x))$

$۲g(x)-۵=۲x+۱$

$۲g(x)=۲x+۶$

$g(x)=x+۳$

۱۷- آسان

حواستون باشه‌ها! اگر در ترکیب توابع تابع داخلی داده شود آن را **t** می‌گیریم:

$g(x+۳)=x^۲-۱ \xrightarrow{x+۳=t} x=t-۳ \Rightarrow g(t)=(t-۳)^۲-۱$

پس $g(x)=(x-۳)^۲-۱$

۱۸- متوسط

با استفاده از تعریف معکوس تابع:

$f^{-۱}(g(a))=۵ \Rightarrow (g(a)\,,۵)\in f^{-۱}$

$(۵\,,g(a))\in f$

$f(۵)=g(a) \xrightarrow{f(۵)=۲(۵)-۳} ۷=g(a)$

$(a\,,۷)\in g$

پس **a** باید صفر باشد که $(۰\,,۷)\in g$

سؤالات تستی

پاسخنامه

بخش ۴

۱- گزینه «۱» متوسط

ابتدا در دامنه‌های مشترک $f+g$ و $f-g$ را حساب می‌کنیم:

$f+g=\{(۱,۴)(۲,۸)(۴,۸)\}\,, f-g=\{(۱,۰)(۲,-۲)(۴,۲)\}$

$(f+g)o(f-g)$

$۱ \xrightarrow{f-g} ۰ \Rightarrow \times$

$۲ \xrightarrow{f-g} -۲ \Rightarrow \times$

$۴ \xrightarrow{f-g} ۲ \xrightarrow{f+g} ۸$

$\{(۴\,,۸)\}$

۲- گزینه «۲» متوسط

حواستون باشه‌ها! $g^{-۱}of^{-۱}=(fog)^{-۱}$

$(fog)^{-۱}(a)=۸ \Rightarrow (a\,,۸)\in (fog)^{-۱} \Rightarrow (۸\,,a)\in fog$

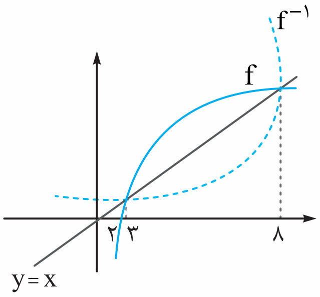
$f(g(x))=f(g(۸))=a$

$f(۷)=a$

پس $a=۳$ است.

۳- گزینه «۴» متوسط

با توجه به نمودار می‌توان به‌راحتی $f^{-۱}$ را رسم کرد پس:



دامنه رادیکال $x-f^{-۱}(x)\geq ۰$

$x\geq f^{-۱}(x)$

بازه‌ای که وارون تابع **f** از $y=x$ پایین‌تر است دقیقاً $[۳\,,۸]$ است.

۴- گزینه «۴» **متوسط**

بسیار مراقب باشید که $D_{f^{-1}of}$ با $D_{fof^{-1}}$ برابر نخواهد بود.

$$D_{f^{-1}of} = f^{-1}(f(x))$$

$$D_f : x^3 - 8 \ge 0 \Rightarrow x^3 \ge 8 \Rightarrow x \ge 2$$

پس باید دامنهٔ رسم تابع مورد نظر $x \ge 2$ باشد پس گزینه ۴ صحیح است.

۵- گزینه «۱» **متوسط**

ابتدا g^{-1} را به دست آورید:

$$g^{-1} = \{(-1,2)(4,-1)(-2,3)(-3,4)\}$$

$$g^{-1}(f(x)) = 3 \Rightarrow (f(a),3) \in g^{-1} \Rightarrow f(a) = -2 \Rightarrow (a,-2) \in f$$

چون خروجی تابع f، ۲- است پس باید در ضابطه $-\sqrt{x}$ صدق کند پس:

$$-\sqrt{-a} = -2 \Rightarrow \sqrt{-a} = 2 \Rightarrow -a = 4 \Rightarrow a = -4$$

۶- گزینه «۳» **متوسط**

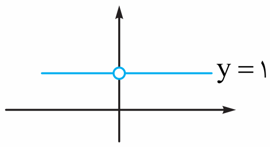
ابتدا دامنه $f \cdot g$ را به دست می‌آوریم:

$$D_f = \mathbb{R} - \{0\} \quad D_g = \mathbb{R}$$

$$D_{f \cdot g} = D_f \cap D_g = \mathbb{R} - \{0\}$$

$$f.g = (x + \frac{1}{x})(\frac{x}{x^2+1}) = (\frac{\cancel{x^2+1}}{\cancel{x}})(\frac{\cancel{x}}{\cancel{x^2+1}}) = 1$$

$$D = \mathbb{R} - \{0\}$$



۷- گزینه «۴» **آسان**

با توجه به مقدار توابع از روی شکل

$$f(2) = 2$$

$$g(4) = 0 \Rightarrow f(0) = 0$$

$$f(1) = 1 \Rightarrow g(1) = -2$$

$$\text{حاصل} = \frac{2+0}{-2} = -1$$

۸- گزینه «۱» **آسان**

ابتدا با توجه به $f(g(x))$، $g(x)$ را به دست می‌آوریم:

$$f(x) = x^2 - x + \frac{1}{4} - \frac{9}{4} = (x - \frac{1}{2})^2 - \frac{9}{4}$$

$$f(g(x)) = (g(x) - \frac{1}{2})^2 - \frac{9}{4} = (x + \frac{1}{2})^2 - \frac{9}{4}$$

$$(g(x) - \frac{1}{2})^2 = (x + \frac{1}{2})^2$$

$$|g(x) - \frac{1}{2}| = |x + \frac{1}{2}|$$

$$g(x) - \frac{1}{2} = x + \frac{1}{2} \Rightarrow g(x) = x + 1$$

$$g(x) + f(x) = \cancel{x} + 1 + x^2 - \cancel{x} - 2 = x^2 - 1$$

و یا

$$g(x) - \frac{1}{2} = -x - \frac{1}{2} \Rightarrow g(x) = -x$$

$$f(x) + g(x) = +x^2 - x - 2 - x = x^2 - 2x - 2$$

۹- گزینه «۱» **آسان**

$$f(x - [x]) = [x - [x]] \xrightarrow[\text{عدد صحیح است خارج می‌شود}]{\text{چون } [x]} [x] - [x] = 0$$

$$f(0) = [0] = 0$$

۱۰- گزینه «۱» **آسان**

$$f(g(1-\sqrt{2})) = f(6 - 4\sqrt{2}) = |6 - 4\sqrt{2}| = 6 - 4\sqrt{2}$$

$$g(1-\sqrt{2}) = (1 - \sqrt{2} + 1)^2 = (2 - \sqrt{2})^2 = 4 + 2 - 4\sqrt{2} = 6 - 4\sqrt{2}$$

$$g(f(1-\sqrt{2})) = g(\sqrt{2} - 1) = (\sqrt{2} - 1 + 1)^2 = 2$$

$$\text{حاصل} = 6 - 4\sqrt{2} - 2 = 4 - 4\sqrt{2} = 4(1 - \sqrt{2})$$

۱۱- گزینه «۳» **دشوار**

$$g(f(x)) = -2 \xrightarrow{g(x) = x^2 + x - 2} g(x) = (x + \frac{1}{2})^2 - \frac{9}{4}$$

$$-2 = (f(x) + \frac{1}{2})^2 - \frac{9}{4}$$

$$\frac{1}{4} = (f(x) + \frac{1}{2})^2 \Rightarrow \frac{1}{2} = f(x) + \frac{1}{2}$$

$$0 = f(x)$$

$$0 = [x] + [-x]$$

می‌دانیم که تابع معروف $[x] + [-x]$ زمانی صفر خواهد بود که $x \in \mathbb{Z}$

$$f(x) + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2} \Rightarrow f(x) = -1$$

$$[x] + [-x] = -1$$

همچنین تابع معروف $[x] + [-x] = -1$ است زمانی که $x \notin \mathbb{Z}$ با اجتماع دو جواب به دست آمده $\mathbb{R}$ جواب خواهد بود.

۱۲- گزینه «۲» **آسان**

$$f^{-1}(g(2a)) = 6 \Rightarrow (g(2a), 6) \in f^{-1} \Rightarrow (6, g(2a)) \in f$$

پس $g(2a) = 3$ است پس:

$$(2a, 3) \in g \Rightarrow 3 = \frac{2a}{2a - 1} \Rightarrow 6a - 3 = 2a \Rightarrow 4a = 3 \Rightarrow a = \frac{3}{4}$$

۱۳- گزینه «۲» آسان

می‌دانیم که $g^{-۱}of^{-۱}=(fog)^{-۱}$ پس:

$$(fog)^{-۱}(a)=۸ \Rightarrow (a,۸)\in(fog)^{-۱} \Rightarrow (۸,a)\in fog$$

$$f(g(۸))=a \xrightarrow{g(۸)=\sqrt{۸(۵)+۹}} f(۷)=a \Rightarrow a=۳$$

۱۴- گزینه «۳» دشوار

ابتدا تابع **g** را به دست می‌آوریم:

$$g(f(x))=۸x^۲+۲۲x+۲۰$$

$$g(۲x+۳)=۸x^۲+۲۲x+۲۰ \xrightarrow[\substack{۲x=t-۳\\ x=\frac{t-۳}{۲}}]{۲x+۳=t}$$

$$g(t)=۸(\frac{t-۳}{۲})^۲+۲۲(\frac{t-۳}{۲})+۲۰$$

$$g(t)=۸\frac{(t-۳)^۲}{۴}+۲۲\frac{t-۳}{۲}+۲۰ \Rightarrow g(t)=۲(t-۳)^۲+۱۱(t-۳)+۲۰$$

$$g(t)=۲(t^۲-۶t+۹)+۱۱t-۳۳+۲۰=۲t^۲-۱۲t+۱۸+۱۱t-۳۳+۲۰$$

$$=۲t^۲-t+۵$$

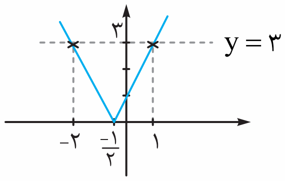
$$g(x)=۲x^۲-x+۵$$

$$f(g(x))=۲(۲x^۲-x+۵)+۳=۴x^۲-۲x+۱۰+۳=۴x^۲-۲x+۱۳$$

۱۵- گزینه «۳» دشوار

حال مساحت ناحیه محدود به $|۲x+۱|$ و $y=۳$ را به دست می‌آوریم.

$$|۲x+۱|=۳$$



$$\begin{cases}۲x+۱=۳ \Rightarrow ۲x=۲ \Rightarrow x=۱\\ ۲x+۱=-۳ \Rightarrow ۲x=-۴ \Rightarrow x=-۲\end{cases}$$

پس مثلثی با $h=۳$ است و قاعده $x=۱$ و $x=-۲$ است پس قاعده ۳ واحد و ارتفاع ۳ واحد داریم.

$$S=\frac{۳\times۳}{۲}=۴/۵$$

۱۶- گزینه «۲» دشوار

چون تابع **f** در نقاط ۶ و $-\frac{۱}{۴}$ ریشه دارد پس: $f(۶)=۰$

$$f(-\frac{۱}{۴})=۰$$

$$(fog)(x)=۰ \Rightarrow f(g(x))=۰ \Rightarrow g(x)=۶ \text{ یا } g(x)=-\frac{۱}{۴}$$

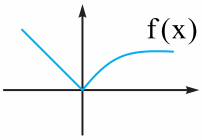
$$x-\sqrt{x}=۶ \text{ یا } x-\sqrt{x}+\frac{۱}{۴}=۰$$

$$x-\sqrt{x}-۶=۰\Rightarrow(\sqrt{x}-۳)(\sqrt{x}+۲)=۰\Rightarrow\begin{cases}\sqrt{x}=۳\Rightarrow x=۹\\ \sqrt{x}=-۲ \text{ غ ق ق}\end{cases}$$

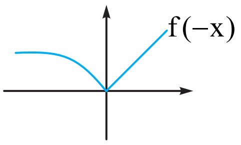
$$(\sqrt{x}-\frac{۱}{۲})^۲=۰ \Rightarrow \sqrt{x}=\frac{۱}{۲}\Rightarrow x=\frac{۱}{۴}$$

۱۷- گزینه «۱» دشوار

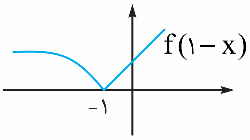
ابتدا از روی $f(x-۱)$ به نمودار $f(x)$ می‌رسیم:



ابتدا $f(-x)$ یعنی قرینه نمودار نسبت به محور **y**ها پس:



حال $f(۱-x)$ یعنی روی محور **x**ها یک واحد به سمت چپ منتقل شود پس:



۱۸- گزینه «۲» متوسط

با توجه به انتقال توابع می‌توان گفت: $-۲\le x\le ۴$

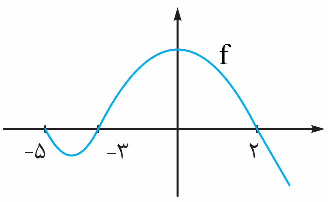
$$\xrightarrow{\text{ضرب در ۵}} -۲\le\frac{۳x-۲}{۵}\le۴$$

$$-۱۰\le۳x-۲\le۲۰\Rightarrow-۸\le۳x\le۲۲\Rightarrow-\frac{۸}{۳}\le x\le\frac{۲۲}{۳}$$

پس دامنهٔ $f(\frac{۳x-۲}{۵})$، $[\frac{-۸}{۳},\frac{۲۲}{۳}]$ است.

۱۹- گزینه «۴» دشوار

ابتدا از روی $f(x-۲)$ نمودار $f(x)$ را می‌یابیم و از روی نمودار آن دامنهٔ $x\cdot f(x)\ge۰$ را می‌یابیم.



x		-۵		-۳		۰		۲	
x	−		−		−	۰	+		+
f(x)	+	۰	−	۰	+		+		−
xf(x)	−	۰	+ ج	۰	−	۰	+ ج		−

$$[-۵,-۳]\cup[۰,۲]$$

۲۰- گزینه «۲» — متوسط

$D_f=\mathbb{R}\ \ \ D_g: x-x^2\ge 0 \Rightarrow x(1-x)=0$

		0		1	
	$-$		$+$		$-$

$D_{gof}=\{D_f \mid f(x)\in D_g\}$

$=\{\mathbb{R} \mid \frac{1-x^2}{1+x^2}\in[0,1]\}$

$=\{\mathbb{R} \mid 0\le \frac{1-x^2}{1+x^2}\le 1\}$

$0\le\frac{1-x^2}{1+x^2}\Rightarrow 1-x^2\ge0\Rightarrow 1\ge x^2\Rightarrow -1\le x\le 1$

$\frac{1-x^2}{1+x^2}-1\le 0\Rightarrow \frac{\cancel{1}-x^2-\cancel{1}-x^2}{1+x^2}\le 0\Rightarrow \frac{-2x^2}{1+x^2}\le 0$

$\Rightarrow -2x^2\le 0\Rightarrow \mathbb{R}$

از اشتراک جواب قسمت اول و دوم داریم:

$=[-1,1]$

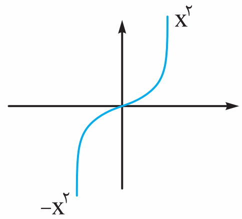
۱- متوسط

آ) نادرست ـ برد باید زیرمجموعه هم‌دامنه باشد اما $[-2,4]\not\subseteq[-1,5]$

ب) درست ـ چون یک‌به‌یک است.

پ) نادرست ـ تابع معروف $y=x-[x]$ دارای برد $[0,1)$ است پس $y=2x-2[x]$ دارای برد $[0,2)$ است.

۲- متوسط



آ)

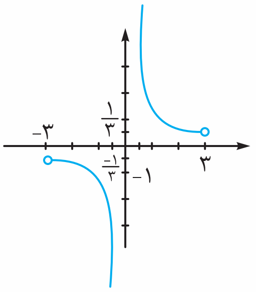
ب) دارای دامنه‌های برابر و به‌ازای xهای برابر، $f(x)=g(x)$ باشد.

پ) $D: 2-x\ge 0\Rightarrow 2\ge x$ و $R=y\le 1$

ت) ۸

ث) $\mathbb{R}-\{3\}$

۳- آسان



۴- متوسط

ابتدا دامنه تابع را بررسی می‌کنیم:

$D_f=\mathbb{R}$

$D_g=\mathbb{R}\Rightarrow D_f=D_g$

حال باید به‌ازای **x**های یکسان **y** برابر تولید کنند.

$g(1)=4$

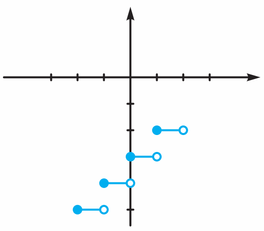
$f(1)=\frac{4-1}{1+1}=\frac{3}{2}\Rightarrow g(1)\ne f(1)$

پس دو تابع برابر نیستند.

۵- متوسط

نمودار $y=[x]-3$ را بررسی می‌کنیم:

x	$[x]$	$[x]-3$	x	y
$-2\le x<-1$	-2	-5	$-2,\ -1$	$-5,\ -5$
$-1\le x<0$	-1	-4	$-1,\ 0$	$-4,\ -4$
$0\le x<1$	0	-3	$0,\ 1$	$-3,\ -3$
$1\le x<2$	1	-2	$1,\ 2$	$-2,\ -2$



۶- آسان

اگر براکت ۵ شود یعنی داخل براکت بین ۵ تا ۶ بوده است.

$[2x-3]=5\to[2x]-3=5\to[2x]=8$

$8\le 2x<9\to 4\le x<4/5$

۷- دشوار

$$[۲x]=۱ \Rightarrow ۱\le ۲x<۲ \Rightarrow \frac{۱}{۲}\le x<۱$$

$$[۲x]=۲ \Rightarrow ۲\le ۲x<۳ \Rightarrow ۱\le x<\frac{۳}{۲}$$

$$[۲x]=۳ \Rightarrow ۳\le ۲x<۴ \Rightarrow \frac{۳}{۲}\le x<۲$$

از اجتماع بازه‌های **x** خواهیم داشت:

$$x=[\frac{۱}{۲},۲)$$

۸- دشوار

تابعی وارون‌پذیر است که یک‌به‌یک باشد پس:

$$y_۱=y_۲$$

$$\frac{۲x_۱-۱}{x_۱+۳}=\frac{۲x_۲-۱}{x_۲+۳}$$

$$\cancel{۲x_۱x_۲}+۶x_۱-x_۲-\cancel{۳}=\cancel{۲x_۱x_۲}+۶x_۲-x_۱-\cancel{۳}$$

$$۷x_۱=۷x_۲$$

$x_۱=x_۲$ یک‌به‌یک است

$$y=\frac{۲x-۱}{x+۳}$$

$$xy+۳y=۲x-۱$$

$$xy-۲x=-۳y-۱$$

$$x(y-۲)=-۳y-۱$$

$$x=\frac{-۳y-۱}{y-۲} \Rightarrow f^{-۱}(x)=\frac{-۳x-۱}{x-۲}$$

۹- دشوار

$$f(x)=\begin{cases} x+۲ & -۲\le x<۰ \\ ۲ & ۰\le x<۳ \end{cases} \quad g(x)=\begin{cases} -۲ & -۳\le x<۰ \\ ۲x-۲ & ۰\le x<۱ \end{cases}$$

$$f-g=\begin{cases} (x+۲)-(-۲) & -۲\le x<۰ \\ ۲-(۲x-۲) & ۰\le x<۱ \end{cases}$$

$$f-g=\begin{cases} x+۴ & -۲\le x<۰ \\ -۲x+۴ & ۰\le x<۱ \end{cases}$$

۱۰- متوسط

$$D_f: ۴-x\ge ۰ \Rightarrow ۴\ge x \quad D_g: x\ne ۲$$

$$D_{\frac{f}{g}}=\{D_f\cap D_g\}-\{g(x)=۰\}$$

$$=\{(-\infty,۲)\cup(۲,۴]\}-\{x=۱\}=(-\infty,۱)\cup(۱,۲)\cup(۲,۴]$$

$$(f-۳g)(-۵)=f(-۵)-۳g(-۵)=۳-۳(\frac{-۶}{-۷})=۳-\frac{۱۸}{۷}=\frac{۳}{۷}$$

۱۱- متوسط

الف) $D_{fog}=\{D_g \mid g(x)\in D_f\} \quad D_f: x\ne ۰, D_g: ۴-x\ge ۰ \Rightarrow ۴\ge x$

$$=\{x\le ۴ \mid \sqrt{۴-x}\ne ۰\}$$

$$\{x\le ۴ \mid ۴\ne x\}=(-\infty,۴)$$

ب) $(gof)(x)=g(f(x))=\sqrt{۴-\frac{۱}{x^۲}}$

۱- متوسط

آ) نادرست ـ چون برد دو تابع یکسان باشد الزاماً دو تابع با یکدیگر برابر نخواهند بود.

ب) نادرست ـ برد زیرمجموعه هم دامنه است پس هم دامنه شامل تمام اعضای برد است.

۲- دشوار

آ) ابتدا $x^۲-۶x$ را به مربع کامل تبدیل کنید:

$$x^۲-۶x+۹-۹=(x-۳)^۲-۹ \text{ و}$$

$$۶x-x^۲=-(x^۲-۶x+۹-۹)=-(x-۳)^۲+۹$$

پس:

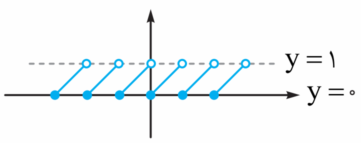
$$f(x)=[(x-۳)^۲-۹]-[-(x-۳)^۲+۹]$$

$$f(۳-\sqrt{۵})=[(\cancel{۳}-\sqrt{۵}-\cancel{۳})^۲-۹]-[-(\cancel{۳}-\sqrt{۵}-\cancel{۳})^۲+۹]=$$

$$=[-۴]-[۴]=-۸$$

ب) **g** - دو تابع معکوس یکدیگر اگر با هم ترکیب شوند حاصل آن تابع همانی می‌شود.

پ) $[۰,۱)$ با توجه به شکل معروف آن



۳- دشوار

روش اول:

ابتدا $fog^{-۱}$ را معنی کنیم:

$$f(g^{-۱}(x))=\frac{۱}{x^{۲}}\xrightarrow{f(۴)}g^{-۱}(x)=۴\Rightarrow(x,۴)\in g^{-۱}$$

$$(۴,x)\in g\Rightarrow\frac{۲(۴)-۱}{۴-۳}=x\Rightarrow\boxed{x=۷}$$

پس $f(g^{-۱}(۷))=\frac{۱}{۷^{۲}}$ پس:

$$(fog^{-۱})(۷)=\frac{۱}{۷^{۲}}=\frac{۱}{۴۹}$$

روش دوم: می‌توانیم $g^{-۱}$ را به دست آوریم:

$$y=\frac{۲x-۱}{x-۳}\Rightarrow xy-۳y=۲x-۱\Rightarrow xy-۲x=۳y-۱$$

$$x(y-۲)=۳y-۱\Rightarrow x=\frac{۳y-۱}{y-۲}\Rightarrow g^{-۱}(x)=\frac{۳x-۱}{x-۲}$$

حال $g^{-۱}(x)=۴$ را به دست می‌آوریم:

$$\frac{۳x-۱}{x-۲}=۴\Rightarrow ۳x-۱=۴x-۸\Rightarrow\boxed{۷=x}$$

پس $f(۴)=\frac{۱}{۷^{۲}}$ در نتیجه: $f(۴)=\frac{۱}{۴۹}$

۴- آسان

آ) $g^{-۱}=\{(۴,۰)(۵,۲)(۳,-۱)(۷,۶)\}$

$$f+g^{-۱}=\{(۴,-۱)(۵,۹)(۳,۴)\}$$

ب) $(fog)(x)=f(g(x))$

$۰\xrightarrow{g}۴\xrightarrow{f}-۱$

$۲\xrightarrow{g}۵\xrightarrow{f}۷$

$-۱\xrightarrow{g}۳\xrightarrow{f}۵$

$۶\xrightarrow{g}۷\longrightarrow\times$

$$fog=\{(۰,-۱)(۲,۷)(-۱,۵)\}$$

۵- دشوار

x	$-\infty$		-۴		۱		$+\infty$
		$+$	ت‌ن	$-$	○	$+$	

$D_{fog}=\{D_g\mid g(x)\in D_f\}$ $\quad D_g:\frac{x-۱}{x+۴}\geq ۰$

$$D_{fog}=\{(-\infty,-۴)\cup[۱,+\infty)\mid\sqrt{\frac{x-۱}{x+۴}}\neq ۵\}$$

$D_g:(-\infty,-۴)\cup[۱,+\infty)$

$D_f:x\neq ۵$

$$D_{fog}=\{(-\infty,-۴)\cup[۱,+\infty)\mid\frac{x-۱}{x+۴}\neq ۲۵\}$$

$$=\{(-\infty,-۴)\cup[۱,+\infty)\mid x-۱\neq ۲۵x+۱۰۰\}$$

$$\{(-\infty,-۴)\cup[۱,+\infty)\mid -۱۰۱\neq ۲۴x\}$$

$$\{(-\infty,-۴)\cup[۱,+\infty)\mid -\frac{۱۰۱}{۲۴}\neq x\}$$

$$=(-\infty,-\frac{۱۰۱}{۲۴})\cup(-\frac{۱۰۱}{۲۴},-۴)\cup[۱,+\infty)$$

۶- متوسط

$D_f:۴+x\geq ۰\Rightarrow x\geq -۴$

$۲+x>۰\Rightarrow x>-۲$ $\xrightarrow{\text{اشتراک}}x>-۲=(-۲,+\infty)=D_f$

x		-۴		-۲	
	$+$	○	$-$	ت‌ن	$+$

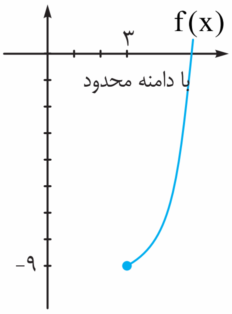
$(-\infty,-۴)\cup(-۲,+\infty)=D_g$

$D_g:\frac{۴+x}{۲+x}\geq ۰$

چون دامنهٔ دو تابع برابر نیست پس تابع‌ها برابر نیستند.

۷- دشوار

$f(x)=x^{۲}-۶x+۹-۹=(x-۳)^{۲}-۹$ محدود $D=[۳,+\infty)$



$f(x)=(x-۳)^{۲}-۹$

$D=[۳,+\infty)$

$y+۹=(x-۳)^{۲}$

$\sqrt{y+۹}=x-۳$

$\sqrt{y+۹}+۳=x$

$\sqrt{x+۹}+۳=f^{-۱}(x)$

۸- دشوار

$$(g^{-۱}of^{-۱})(۶)=g^{-۱}(f^{-۱}(۶))$$

ابتدا $f^{-۱}(۶)$ را به دست می‌آوریم:

$$x+\sqrt{x}=۶\Rightarrow x+\sqrt{x}-۶=۰\Rightarrow(\sqrt{x}+۳)(\sqrt{x}-۲)=۰$$

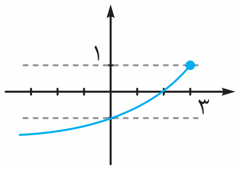
$\sqrt{x}=-۳$ غ‌ق , $\sqrt{x}=۲\Rightarrow x=۴$

پس: $f^{-۱}(۶)=۴$ است حال $g^{-۱}(۴)$ را به دست می‌آوریم:

$$\frac{۲x+۱}{x+۲}=۴\Rightarrow ۲x+۱=۴x+۸\Rightarrow -۷=۲x\Rightarrow x=-\frac{۷}{۲}$$

۹- متوسط

$f(x)=1-\sqrt{3-x}$



چون هر خط موازی محور xها شکل را در یک نقطه قطع می‌کند پس یک‌به‌یک است.

$y=1-\sqrt{3-x}$

$x=1-\sqrt{3-y}$

$\sqrt{3-y}=1-x$

$3-y=(1-x)^2$

$3-(1-x)^2=y \Rightarrow f^{-1}(x)=3-(1-x)^2$

۱۰- دشوار

x	$[x]$	$x-[x]$
$-2\le x<-1$	-2	$x+2$
$-1\le x<0$	-1	$x+1$
$0\le x<1$	0	x
$1\le x<2$	1	$x-1$
$x=2$	2	$x-2$

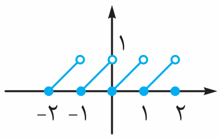
x	-۲	-۱
y	۰	۱

x	-۱	۰
y	۰	۱

x	۰	۱
y	۰	۱

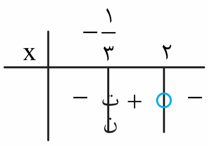
x	۱	۲
y	۰	۱

x	۲
y	۰



۱۱- دشوار

ابتدا با توجه به تعیین علامت محدودهٔ x را مشخص می‌کنیم:



$-\frac{1}{3}<x\le 2 \xrightarrow{\times 3} -1<3x\le 6$

[۳x] به معنای اعداد صحیح در این بازه است.

$-1<3x<0 \Rightarrow [3x]=-1$

$0\le 3x<1 \Rightarrow [3x]=0$

$1\le 3x<2 \Rightarrow [3x]=1$

$2\le 3x<3 \Rightarrow [3x]=2$

$3\le 3x<4 \Rightarrow [3x]=3$

$4\le 3x<5 \Rightarrow [3x]=4$

$5\le 3x<6 \Rightarrow [3x]=5$

$3x=6 \Rightarrow [3x]=6$

پاسخنامه سؤالات تستی

آزمون تستی پایانی

۱- گزینهٔ «۱» متوسط

ابتدا f^{-1} را به دست آوریم:

$f^{-1}=\{(2,1)(5,2)(4,3)(6,4)\}$

f^{-1} را با g ترکیب کنیم:

$$gof^{-1}=g(f^{-1}(x))\quad
\begin{array}{l}
2\xrightarrow{f^{-1}}1\xrightarrow{g}\times\\
5\xrightarrow{f^{-1}}2\xrightarrow{g}3\\
4\xrightarrow{f^{-1}}3\xrightarrow{g}1\\
6\xrightarrow{f^{-1}}4\xrightarrow{g}2
\end{array}$$

$gof^{-1}=\{(5,3)(4,1)(6,2)\}$

حالا اعمال جبری $\frac{g}{gof^{-1}}$ را با داشتن اشتراک دامنه‌های آن‌ها به دست می‌آوریم:

$$\begin{array}{l} D_g=\{2,4,5,3\}\\ D_{gof^{-1}}=\{5,4,6\}\end{array}\xrightarrow{\text{اشتراک}}\{5,4\}\Rightarrow \frac{g}{gof^{-1}}=\{(5,\frac{6}{3})(4,\frac{2}{1})\}$$
$=\{(5,2)(4,2)\}$

۲- گزینهٔ «۴» متوسط

در ابتدا برای به‌دست‌آوردن f^{-1} باید تابع یک‌به‌یک باشد چون f(x) در بازهٔ $x\ge 1$ هست پس f(x) یک‌به‌یک است. f(x) را به‌صورت مربع کامل می‌نویسیم:

$f(x)=x^2-2x+1-4$

$f(x)=(x-1)^2-4 \Rightarrow y=(x-1)^2-4$

$\Rightarrow y+4=(x-1)^2 \Rightarrow \sqrt{y+4}=x-1$

$\sqrt{y+4}+1=x \Rightarrow \sqrt{x+4}+1=f^{-1}(x)$

چون دربارهٔ نقطهٔ تقاطع f^{-1} و g صحبت شده است پس باید: $y_1=y_2$

$\sqrt{x+4}+1=\frac{x-9}{2}$

$2\sqrt{x+4}+2=x-9 \Rightarrow 2\sqrt{x+4}=x-11$

$\xrightarrow{\text{به توان ۲}} 4(x+4)=x^2-22x+121$

$4x+16=x^2-22x+121 \Rightarrow x^2-26x+105=0$

$\Rightarrow (x-21)(x-5)=0$

$x_1=21,\ x_2=5$

$\xrightarrow{\text{صدق در معادله}} x_1=21 \Rightarrow 2\sqrt{21+4}=21-11$

$\Rightarrow 10=10$ قق

$\longrightarrow x_2=5 \Rightarrow 2\sqrt{5+4}=5-11$

$\Rightarrow 6=-6$ غقق

۳- گزینه «۱» متوسط

حل این سؤال به روش‌های مختلفی می‌تواند باشد که ما به یک روش اشاره می‌کنیم:

$$(g^{-1}of^{-1})(20)=g^{-1}(f^{-1}(20))$$

ابتدا مقدار $f^{-1}(20)$ را حساب می‌کنیم. یعنی در تابع **f**، $y=20$ است:

$$20=x+\sqrt{x} \Rightarrow x+\sqrt{x}-20=0 \Rightarrow (\sqrt{x}+5)(\sqrt{x}-4)=0$$

$\sqrt{x}=-5$ غ‌ق‌ق , $\sqrt{x}=4 \Rightarrow x=16$

پس: $f^{-1}(20)=16$

حالا $g^{-1}(16)$ را حساب می‌کنیم که به معنای آن است که در تابع **g** به‌جای $y=16$ جای‌گذاری کنیم:

$$\frac{9x+6}{1-x}=16 \Rightarrow 9x+6=16-16x \Rightarrow 25x=10 \Rightarrow x=\frac{10}{25}=\frac{2}{5}$$

۴- گزینه «۲» دشوار

برد تابع **gof** یعنی خروجی تابع $g(f(x))$ است. پس ابتدا خروجی $f(x)$ را پیدا می‌کنیم.

حواستون باشه‌ها! خروجی تابع معروف $ax-[ax]$ که به نام باد در چمن معروف است $[0,1)$ است.

خروجی تابع $f(x)$ ورودی تابع $g(x)$ است پس ورودی تابع $g(x)$ به‌صورت $[0,1)$ است.

$$g(x)=-(x^2-4x)=-(x^2-4x+4-4)$$
$$=-((x-2)^2-4)=-(x-2)^2+4$$

چون در بازهٔ $[0,1)$ تابع $g(x)$ صعودی است پس با جای‌گذاری نقاط انتهایی بازه در $g(x)$ می‌توان به خروجی تابع $g(x)$ رسید پس:

$$x=0 \Rightarrow g(0)=-(0-2)^2+4=0$$
$$x=1 \Rightarrow g(1)=-(1-2)^2+4=3$$

پس خروجی نهایی به‌صورت $[0,3)$ است.

۵- گزینه «۳» متوسط

چون $g(x)$ وارون تابع $f(x)$ است پس $g(12)$ یعنی در تابع **f** به‌جای **y**، ۱۲ استفاده کنیم و $g(4)$ یعنی در تابع $f(x)$ به‌جای **y** از ۶ استفاده کنیم:

$$x+\sqrt{x}=12 \Rightarrow x+\sqrt{x}-12=0 \Rightarrow (\sqrt{x}+4)(\sqrt{x-3})=0$$

$\sqrt{x}=-4$ غ‌ق‌ق , $\sqrt{x}=3 \Rightarrow x=9 \Rightarrow g(12)=9$

$$x+\sqrt{x}=6 \Rightarrow x+\sqrt{x}-6=0 \Rightarrow (\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-2)=0$$

$\sqrt{x}=-3$ غ‌ق‌ق , $\sqrt{x}=2 \Rightarrow x=4 \Rightarrow g(6)=4$

پس $g(4)+g(12)=9+4=13$

۶- گزینه «۲» دشوار

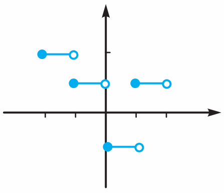
حواستون باشه‌ها! وارون کردن بعضی از توابع کار ساده‌ای نیست پس بهتر آن است که **f** را با نیمساز ناحیه اول و سوم قطع دهیم. به‌جای آن که **f** و f^{-1} را قطع دهیم چون اگر تابع **f**، f^{-1} را قطع کرده باشد این تقاطع روی نیمساز ناحیه اول و سوم اتفاق افتاده است.

حالا چون f^{-1} و **f** نسبت به $y=x$ قرینه‌اند، خود **f** نیز $y=-x$ را قطع می‌کند.

$$x-\frac{2}{x}=-x \Rightarrow 2x=\frac{2}{x} \Rightarrow x^2=1 \Rightarrow x=-1 \Rightarrow f(x)=1$$

پس حالا که نمودار **f** خط $y=x$ را در نقطهٔ $(-1,1)$ قطع می‌کند پس f^{-1} در نقطه $(1,-1)$ قطع می‌کند پس $x=1$

۷- گزینه «۲» متوسط



$$-\frac{1}{2}\le x<\frac{1}{2}\xrightarrow{\times 3}-\frac{3}{2}\le 3x<\frac{3}{2}$$

$$-\frac{3}{2}\le 3x<-1\xrightarrow{[3x]}[3x]=-2\Rightarrow 2|[3x]|-1\Rightarrow y=3$$

$$-1\le 3x<0\longrightarrow[3x]=-1\Rightarrow 2|[3x]|-1\Rightarrow y=0$$

$$0\le 3x<1\longrightarrow[3x]=0\Rightarrow 2|[3x]|-1\Rightarrow y=-1$$

$$1\le 3x<\frac{3}{2}\longrightarrow[3x]=1\Rightarrow 2|[3x]|-1\Rightarrow y=1$$

در نتیجه با توجه به گزینه‌ها و **y**های تولید شده گزینه «۲» پاسخ است.

۸- گزینه «۴» متوسط

حواستون باشه‌ها! نقطهٔ تلاقی دو نمودار یعنی دو نمودار **x** و **y** یکسانی دارند پس:

$$2y=x^2 \Rightarrow y=\frac{x^2}{2}\xrightarrow{\text{جایگذاری}}$$

$$x=\sqrt{\frac{x^2}{2}+3}-\sqrt{\frac{x^2}{2}-3}\xrightarrow{\text{طرفین به توان ۲}}$$

$$x^2=\frac{x^2}{2}+\cancel{3}+\frac{x^2}{2}-\cancel{3}-2\sqrt{\frac{x^2}{4}-9}$$

$$\cancel{x^2}=\cancel{x^2}-2\sqrt{\frac{x^4}{4}-9} \Rightarrow \frac{x^4}{4}-9=0 \Rightarrow \frac{x^4}{4}=9$$

$$\Rightarrow x^4=36 \Rightarrow x=\sqrt{6}$$

با جای‌گذاری **x** در عبارت $y=\frac{x^2}{2} \Leftarrow y=\frac{6}{2}=3$

بنابراین نقطه تلاقی دو شکل $(\sqrt{6},3)$ است پس فاصلهٔ آن تا مبدأ مختصات:

$$\sqrt{(\sqrt{6})^2+3^2}=\sqrt{6+9}=\sqrt{15}$$

۹- گزینه «۱» متوسط

$fofof(\sqrt{۲}) = f(f(f(\sqrt{۲})))$

ابتدا $f(\sqrt{۲})$ را محاسبه می‌کنیم:

$$f(\sqrt{۲}) = \frac{\sqrt{۲}(۲)}{۳\sqrt{۲} - \sqrt{۲}} = \frac{۲}{۲\sqrt{۲}} = \frac{۱}{\sqrt{۲}} \xrightarrow{\text{گویا}} \frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

پس $f(f(\frac{\sqrt{۲}}{۲}))$ باید محاسبه شود در نتیجه این بار $f(\frac{\sqrt{۲}}{۲})$ را محاسبه می‌کنیم:

$$f(\frac{\sqrt{۲}}{۲}) = \frac{\sqrt{۲}(\frac{\sqrt{۲}}{۲})}{\frac{۳\sqrt{۲}}{۲} - \sqrt{۲}} = \frac{۱}{\frac{۱}{۲}\sqrt{۲}} = \frac{۲}{\sqrt{۲}} \xrightarrow{\text{گویا}} \sqrt{۲}$$

پس $f(\sqrt{۲})$ مورد سؤال قرار گرفته است که ابتدا محاسبه کردیم و برابر $\frac{۱}{\sqrt{۲}}$ است.

۱۰- گزینه «۴» متوسط

ابتدا عبارت داده شده را تعیین علامت کنید:

x		$-\frac{۱}{۳}$		۲	
$۴-۲x$	+		+	۰	−
$۳x-۱$	−	۰	+		+
y	−	ت ن	+	۰	−

ج

$(-\frac{۱}{۳}, ۲]$

$$۴ - ۲x = ۰ \Rightarrow ۴ = ۲x \Rightarrow \boxed{x = ۲}$$

$$۳x + ۱ = ۰ \Rightarrow \boxed{x = -\frac{۱}{۳}}$$

پس $-\frac{۱}{۳} < x \leq ۲$ است حال طرفین در عدد ۳ ضرب شود تا $۳x$ ساخته شود:

$$-۱ < ۳x \leq ۶$$

$[۳x]$ به معنای اعداد صحیح بین -۱ تا ۶ است

پس: $[۳x] = -۱, ۰, ۱, ۲, ۳, ۴, ۵, ۶$

۱۱- گزینه «۲» آسان

اگر (x, y) از وارون تابع **f** عبور کند پس (y, x) از خود تابع **f** عبور می‌کند پس می‌توان وارون گزینه‌ها را در صورت سؤال امتحان کرد و با رد گزینه به جواب درست رسید.

$$۱)(-۱, -۲) \xrightarrow{f^{-۱}} (-۲, -۱) \xrightarrow[\text{جایگذاری}]{} -۱$$

$$= (-۲)^۳ - (-۲) + ۱ \Rightarrow -۱ \neq -۸ + ۲ + ۱$$

$$۲)(\frac{۵}{۸}, \frac{۱}{۲}) \xrightarrow{f^{-۱}} (\frac{۱}{۲}, \frac{۵}{۸}) \xrightarrow[\text{جایگذاری}]{} \frac{۵}{۸} = (\frac{۱}{۲})^۳ - (\frac{۱}{۲}) + ۱$$

$$\Rightarrow \frac{۵}{۸} = \frac{۱}{۸} - \frac{۱}{۲} + ۱ \checkmark$$

$$۳)(۱, ۲) \xrightarrow{f^{-۱}} (۲, ۱) \Rightarrow ۱ = ۲^۳ - ۲ + ۱ \Rightarrow ۱ \neq ۸ - ۲ + ۱$$

$$۴)(-\frac{۱}{۲}, -\frac{۱۱}{۸}) \xrightarrow{f^{-۱}} (-\frac{۱۱}{۸}, -\frac{۱}{۲}) \Rightarrow -\frac{۱}{۲} \neq (-\frac{۱۱}{۸})^۳ - (\frac{۱۱}{۸}) + ۱$$

۱۲- گزینه «۴» متوسط

$(gof)(x) = g(f(x)) = ۵x^۲ + ۱۱$

پس با جای‌گذاری $f(x) = ۲x$ داریم:

$$g(۲x) = ۵x^۲ + ۱۱$$

$$۲x = t \Rightarrow x = \frac{t}{۲}$$

$$g(t) = ۵(\frac{t}{۲})^۲ + ۱۱ \Rightarrow g(t) = \frac{۵t^۲}{۴} + ۱۱ \Rightarrow g(x-۷) = \frac{۵(x-۷)^۲}{۴} + ۱۱$$

$$g(x-۷) = \frac{۵}{۴}(x-۷)^۲ + ۱۱$$

کم‌ترین مقدار این تابع زمانی رخ می‌دهد که $x = ۷$ باشد و مقدار آن ۱۱ خواهد بود.

۱۳- گزینه «۲» متوسط

با استفاده از تعریف ترکیب توابع اگر $g(f(g(x+۲))) = ۰$ باشد در مرحله به دنبال ورودی آن هستیم که در تابع **g** و خروجی صفر ایجاد کرده باشد که با توجه به شکل ورودی ۲ خروجی صفر تولید کرده است پس:

$$f(g(x+۲)) = ۲$$

در مرحله بعدی به دنبال ورودی هستیم که در تابع **f** خروجی ۲ تولید کرده باشند پس:

$$f(x) = |\frac{۱}{۲}x - ۱| = ۲ \begin{cases} \Rightarrow \frac{۱}{۲}x - ۱ = ۲ \Rightarrow \frac{۱}{۲}x = ۳ \Rightarrow x = ۶ \\ \Rightarrow \frac{۱}{۲}x - ۱ = -۲ \Rightarrow \frac{۱}{۲}x = -۱ \Rightarrow x = -۲ \end{cases}$$

پس ورودی‌های تابع **f** ۶ و -۲ هستند پس:

که با توجه به شکل g محل برخورد این نقاط دو x متفاوت تولید می‌کند پس معادله

$$\begin{matrix} g(x+۲) = ۶ \\ \text{و} \\ g(x+۲) = -۲ \end{matrix} \Rightarrow \text{۲ ریشه دارد.}$$

۱۴- گزینه «۳» متوسط

چون تابع **g** وارون تابع **f** است پس $g(g(۱))$ به معنای آن است که در تابع **f** به‌جای **y** یک را جای‌گذاری کنیم.

$$۱ + x - ۲\sqrt{x} = ۱ \Rightarrow x - ۲\sqrt{x} = ۰ \Rightarrow \sqrt{x}(\sqrt{x} - ۲) = ۰ \Rightarrow x = ۰$$

$$\sqrt{x} - ۲ = ۰ \Rightarrow \sqrt{x} = ۲ \Rightarrow x = ۴$$

حالا یک‌بار به‌جای **y** صفر قرار می‌دهیم و بار دیگر ۴ را به‌عنوان خروجی تابع **f** قرار می‌دهیم:

$$۱ + x - ۲\sqrt{x} = ۰ \Rightarrow (\sqrt{x} - ۱)^۲ = ۰ \Rightarrow \sqrt{x} = ۱ \Rightarrow x = ۱ \text{ غ‌ق‌ق}$$

$$۱ + x - ۲\sqrt{x} = ۴ \Rightarrow x - ۲\sqrt{x} - ۳ = ۰ \Rightarrow (\sqrt{x} - ۳)(\sqrt{x} + ۱) = ۰$$

$$\sqrt{x} = ۳ \Rightarrow x = ۹, \sqrt{x} = -۱ \text{ غ‌ق‌ق}$$

پس جواب مسئله $x = ۹$ است.

۱۵- گزینه «۴» — دشوار

محل برخورد $f^{-۱}$ با $y=۱۲-x$ نقطه‌ای است به عرض ۱۰.

با جای‌گذاری $y=۱۰$ در $y=۱۲-x$ محل برخورد $f^{-۱}$ با **y** نقطهٔ $(۲,۱۰)$ به دست می‌آید پس $(۱۰,۲)$ در تابع **f** صدق می‌کند.

$$۲=\sqrt{۱۰-۲\sqrt{۱۰m-۱}}$$
$$۴=۱۰-۲\sqrt{۱۰m-۱}$$
$$۲\sqrt{۱۰m-۱}=۶ \Rightarrow \sqrt{۱۰m-۱}=۳ \Rightarrow ۱۰m-۱=۹ \Rightarrow ۱۰m=۱۰ \Rightarrow \boxed{m=۱}$$

پس سؤال $f(۱+۴)$ را می‌خواهد در نتیجه:

$$f(۵)=\sqrt{۵-۲\sqrt{۵-۱}}=\sqrt{۵-۴}=۱$$

۱۶- گزینه «۳» — متوسط

با توجه به تعریف ترکیب توابع مرحله به مرحله مقادیر خواسته شده را به دست می‌آوریم:

$$g(f(-\frac{۵}{۳}))$$
$$f(-\frac{۵}{۳})=۲[-\frac{۵}{۳}]-(-\frac{۵}{۳})=۲(-۲)+\frac{۵}{۳}=-۴+\frac{۵}{۳}=-\frac{۷}{۳}$$
$$g(-\frac{۷}{۳})=f([-\frac{۷}{۳}+f(-\frac{۷}{۳})])=f([-\frac{۷}{۳}-\frac{۱۱}{۳}])=f(-۶)=۲(-۶)+۶=-۶$$
$$f(-\frac{۷}{۳})=۲[-\frac{۷}{۳}]-(-\frac{۷}{۳})=۲(-۳)+\frac{۷}{۳}=-\frac{۱۱}{۳}$$

۱۷- گزینه «۳» — دشوار

فرض کنید ریشه‌های $۲x^۲-ax+b=۰$، α و β باشند پس ریشه‌های $۲ax^۲+ax-۶=۰$، $\alpha-\frac{۱}{۲}$ و $\beta-\frac{۱}{۲}$ خواهد بود. در هر دو معادله **S** و **P** معادله را بدست می‌آوریم:

$$۲x^۲-ax+b=۰ \Rightarrow S=\alpha+\beta=\frac{a}{۲}\,,\, P=\alpha\beta=\frac{b}{۲}$$
$$۲ax^۲+ax-۶=۰ \Rightarrow S=\alpha-\frac{۱}{۲}+\beta-\frac{۱}{۲}=-\frac{a}{۲a}$$
$$\Rightarrow \alpha+\beta-۱=-\frac{۱}{۲}\xrightarrow{\alpha+\beta=\frac{a}{۲}\ \text{جایگذاری}}$$
$$\frac{a}{۲}-۱=-\frac{۱}{۲} \Rightarrow \frac{a}{۲}=\frac{۱}{۲} \Rightarrow \boxed{a=۱}$$

همچنین برای **P** در این معادله داریم:

$$P=(\alpha-\frac{۱}{۲})(\beta-\frac{۱}{۲})=\alpha\beta-\frac{۱}{۲}\alpha-\frac{۱}{۲}\beta+\frac{۱}{۴}=\frac{b}{۲}-\frac{۱}{۲}(\alpha+\beta)+\frac{۱}{۴}$$
$$=\frac{b}{۲}-\frac{۱}{۲}(\frac{۱}{۲})+\frac{۱}{۴}=-\frac{۳}{a}$$
$$\frac{b}{۲}=-\frac{۳}{۱} \Rightarrow \boxed{b=-۶}$$
$$[\frac{ab}{۴}]=[-\frac{۶}{۴}]=[-۱/۵]=-۲$$

۱۸- گزینه «۱» — دشوار

ضابطهٔ $f(x)$ را مرتب می‌نویسیم پس:

$$f(x)=\begin{cases} ۲-۳x & x\le -\frac{۳}{۲} \\ ۲+۲mx-x^۲ & x>-\frac{۳}{۲} \end{cases}$$

در ضابطه اول با توجه به $x\le -\frac{۳}{۲}$ برد ضابطه اول را به دست می‌آوریم: $R_f=[\frac{۱۳}{۲},+\infty)$

پس به‌ازای $x=-\frac{۳}{۲}$، **y**های ضابطه دوم باید کمتر از $\frac{۱۳}{۲}$ یا در نهایت مساوی $\frac{۱۳}{۲}$ باشد پس:

$$۲+۲m(-\frac{۳}{۲})-(-\frac{۳}{۲})^۲\le\frac{۱۳}{۲}\Rightarrow ۲-\frac{۹}{۴}-۳m\le\frac{۱۳}{۲}\Rightarrow -۳m\le\frac{۱۳}{۲}+\frac{۱}{۴}$$
$$\boxed{m\ge-\frac{۹}{۴}} \quad (۱)$$

همچنین چون شرط وارون‌پذیری یک‌به‌یک بودن تابع است و سهمی به طور کلی یک‌به‌یک نیست پس با توجه به رأس سهمی

$$x_S=m \Rightarrow ۲+۲m^۲-m^۲<\frac{۱۳}{۲} \Rightarrow m^۲+۲<\frac{۱۳}{۲} \Rightarrow m^۲<\frac{۹}{۲}$$
$$\Rightarrow \boxed{-\frac{۳}{\sqrt{۲}}<m<\frac{۳}{\sqrt{۲}}} \quad (۲)$$

از اشتراک دو شرط (۱) و (۲) داریم: $m=-۲$

$$f^{-۱}(۱۹)=\alpha \Rightarrow f(\alpha)=-۱۹ \Rightarrow ۲-۴\alpha-\alpha^۲=-۱۹$$
$$\Rightarrow \alpha^۲+۴\alpha-۲۱=۰ \Rightarrow (\alpha-۳)(\alpha+۷)=۰$$

$\alpha=۳$ قق ، $\alpha=-۷$ غ ق ق

۱۹- گزینه «۲» — متوسط

چون **x** باید عدد صحیح باشد پس $(y^۲-۱)$ باید شمارنده ۷۲ باشد پس:

$$y^۲-۱=۱ \Rightarrow y^۲=۰ \Rightarrow y=۰$$

$$\left.\begin{array}{l} y^۲-۱=۳ \Rightarrow y^۲=۴ \Rightarrow y=\pm۲ \\ y^۲-۱=۸ \Rightarrow y^۲=۹ \Rightarrow y=\pm۳ \\ y^۲-۱=۲۴ \Rightarrow y^۲=۲۵ \Rightarrow y=\pm۵ \end{array}\right\} \Rightarrow$$

Xهای یکسان و **y** متفاوت ایجاد می‌کنند.

پس با حذف حداقل ۳ عضو می‌توان **f** تابع باشد.

۲۰- گزینه «۲» دشوار

چون خط را در نقطه‌ای به عرض ۷/۲ قطع می‌کند پس نقطه $(x\,,۷/۲)$ در خط صدق می‌کند:

$$۵(۷/۲)-۱۰x=۱۲$$

$$۳۶-۱۲=۱۰x \Rightarrow x=۲/۴$$

اگر $(۲/۴\,,۷/۲)\in f^{-۱}$ باشد پس: $(۷/۲\,,۴/۴)\in f$

$$۲/۴=\sqrt{۷/۲}\sqrt{۷/۲m-۱}\xrightarrow{\text{طرفین به توان۲}}۲/۴\times ۲/۴=۷/۲(۷/۲m-۱)$$

$$۰/۸=۷/۲m-۱ \Rightarrow ۱/۸=۷/۲m \Rightarrow m=\frac{۱}{۴}$$

$$f(\frac{۴}{m})=f(۱۶)=\sqrt{۱۶}\sqrt{۱۶(\frac{۱}{۴})-۱}=(۴)(\sqrt{۳})=۴\sqrt{۳}$$

۱- گزینه «۲»

چون دامنه **f** به‌صورت $\mathbb{R}-\{۲\}$ است و در مخرج عبارت درجه دو نوشته شده است پس حتماً عبارت مخرج مربع کاملی با ریشه ۲ بوده است پس:

$$(x-۲)^۲=x^۲-۴x+۴ \xrightarrow{\times ۲} ۲x^۲-۸x+۸$$

با مقایسه عبارت به دست آمده با عبارت موجود در مخرج کسر متوجه می‌شویم که $c=۸$ و $b=-۸$ است.

همچنین با توجه به نمودار **f** می‌توان متوجه شد که عبارت صورت مضربی از عبارت مخرج بوده است و دارای ریشه ۲ است پس: $۲a-۶=۰ \Leftarrow a=۳$

$$a^۲-b^۲+۲c=۳-۶۴+۱۶=-۵۱$$

۲- گزینه «۴»

با توجه به تابع **f** که رادیکال فرجه زوج در مخرج دارد دامنه آن باید زیر رادیکال باشد >۰ پس:

$$۳x^۲-bx+c>۰$$

با توجه به دامنهٔ داده شده حتماً عبارت $۳x^۲-bx+c$ همواره مثبت بوده است و

به‌ازای ۱ فقط صفر می‌شده است که دامنهٔ آن را $\mathbb{R}-\{۱\}$ اعلام کرده است. پس:

$$(x-۱)^۲=x^۲-۲x+۱ \xrightarrow{\times ۳} ۳x^۲-۶x+۳ \Rightarrow b=۶\,,c=۳$$

در نتیجه: $|c-b|=|۳-۶|=۳$

۳- گزینه «۲»

با توجه به دامنهٔ رادیکال فرجه زوج در صورت:

$$(۳-[x])([x]-۱)\geq ۰$$

$$\left.\begin{array}{l} ۳-[x]\geq ۰\Rightarrow ۳\geq [x]\Rightarrow [x]=۳,۲,۱,۰,-۱,\dots \\ [x]-۱\geq ۰\Rightarrow [x]\geq ۱\Rightarrow [x]=۱,۲,۳,۴,۵,\dots \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{اشتراک}} [x]=۱,۲,۳$$

$$[x]=۱ \Rightarrow ۱\leq x<۲$$

$$[x]=۲ \Rightarrow ۲\leq x<۳$$

$$[x]=۳ \Rightarrow ۳\leq x<۴$$

یا

$$\left.\begin{array}{l} ۳-[x]\leq ۰ \Rightarrow ۳\leq [x] \Rightarrow [x]=۳,۴,۵,\dots \\ [x]-۱\leq ۰ \Rightarrow [x]\leq ۱ \Rightarrow [x]=۱,۰,-۱,\dots \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{اشتراک}} \text{تهی}$$

اجتماع بازه جواب‌ها $[۱,۴)$

از اجتماع دو مجموعه جواب به دست آمده $[۱,۴)$ جواب نهایی است.

۴- گزینه «۱»

ریشه‌های عبارت $xf^{-۱}(x)$ را می‌یابیم:

$$xf^{-۱}(x)\geq ۰$$

$$D_f=[-۲,۲]\,,R_f=[-۱,۴]$$

$$x=۰ \Rightarrow f^{-۱}(x)=۰ \Rightarrow (x,۰)\in f^{-۱}$$

$$(۰,x)\in f$$

$$D_{f^{-۱}}=[-۱,۴]\,,R_f=[-۲,۲]$$

در نتیجه $f(۰)=۲$ است پس ریشهٔ $f^{-۱}$ عدد ۲ است.

x	-۱		۰		۲		۴
x		$-$	۰	$+$		$+$	
$f^{-۱}$		$-$		$-$	۰	$+$	
$xf^{-۱}(x)$		$+$ ج	ج	$-$	ج	$+$ ج	

جواب کل: $[-۱,۰]\cup[۲,۴]$

۵- گزینه «۳»

ابتدا به‌جای **x**ها مقدار ۱ را جای‌گذاری می‌کنیم تا $f(۱)$ را به دست آوریم:

$$x=۱ \Rightarrow f(۱f(۱))=۳f(۱) \xrightarrow{f(۱)=۲} f(۲)=۳(۲) \Rightarrow f(۲)=۶$$

حالا به‌جای **x**ها مقدار ۲ را جای‌گذاری می‌کنیم:

$$x=۲\Rightarrow f(۲f(۲))=۳f(۲)\xrightarrow{f(۲)=۶} f(۱۲)=۳(۶)=۱۸\Rightarrow f(۱۲)=۱۸$$

۶- گزینه «۲»

$f(x)=ax+b$

$f(2-x)=a(2-x)+b=2a-ax+b=-ax+2a+b$

$f(x-1)=a(x-1)+b=ax-a+b=ax-a+b$

پس:

$-ax+2a+b-ax+a-b=3x-m$

$-2ax+3a=3x-m$

$-2a=3 \Rightarrow a=-\frac{3}{2}$

$3a=-m \Rightarrow 3(-\frac{3}{2})=-m \Rightarrow m=\frac{9}{2}$

$f(2m-1)=f(2(\frac{9}{2})-1)=f(8)=-\frac{3}{2}(8)+b=-12+b$

$f(4m)=f(4(\frac{9}{2}))=f(18)=-\frac{3}{2}(18)+b=-27+b$

$-12+b+27-b=15$

۷- گزینه «۲»

$f(3x-2)=9x^2-12x+4+3x-2$

$f(3x-2)=(3x-2)^2+(3x-2) \xrightarrow{3x-2=t}$

$f(t)=t^2+t \Rightarrow f(x)=x^2+x$

۸- گزینه «۱»

ابتدا **f** را به‌صورت مربع کامل می‌نویسیم:

$f(x)=x^2-x+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}$

$f(x)=(x-\frac{1}{2})^2-\frac{1}{4} \xrightarrow[R:[-\frac{1}{4},+\infty)]{D:[\frac{1}{2},+\infty)} f^{-1}(x)=\sqrt{x+\frac{1}{4}}+\frac{1}{2}$

$D_{f^{-1}}=[-\frac{1}{4},+\infty)$

۹- گزینه «۲»

$f(x)=3-\sqrt{1-x} \Rightarrow$ $\quad f^{-1}(x)=-(-x+3)^2+1$

$D_f:1-x\geq 0 \Rightarrow 1\geq x$ $\quad f^{-1}(x)=-(x^2-6x+9)+1$

$R_f:(-\infty,3]$ $\quad f^{-1}(x)=-x^2+6x-9+1$

$f^{-1}(x)=-x^2+6x-8 \quad D_{f^{-1}}:x\leq 3$

۱۰- گزینه «۳»

قرینهٔ تابع **f** نسبت به نیمساز ربع اول و سوم به معنای یافتن وارون تابع **f** است.

$f^{-1}(x)=\frac{+3x-6}{4x-1}=g(x)$

$g(x-1)=\frac{3(x-1)-6}{4(x-1)-1}=\frac{3x-3-6}{4x-4-1}=\frac{3x-9}{4x-5}$

محل برخورد با محور **x**ها به معنای $y=0$ است پس:

$\frac{3x-9}{4x-5}=0$

$3x-9=0 \Rightarrow 3x=9 \Rightarrow \boxed{x=3}$

۱۱- گزینه «۲»

محل برخورد وارون **f** با محور **x**ها نقطه ۳ است پس:

$(3,a)\in f^{-1} \Rightarrow (a,3)\in f \Rightarrow a-2\sqrt{a}=3,\ a-2\sqrt{a}-3=0$

$(\sqrt{a}-3)(\sqrt{a}+1)=0$

$\Rightarrow \sqrt{a}=3,\ \sqrt{a}=-1$ غقق

$a=9$

پس نقطه $(9,3)\in f$ و $(3,9)\in f^{-1}$ است.

$g^{-1}(f^{-1}(3))=g^{-1}(9)$

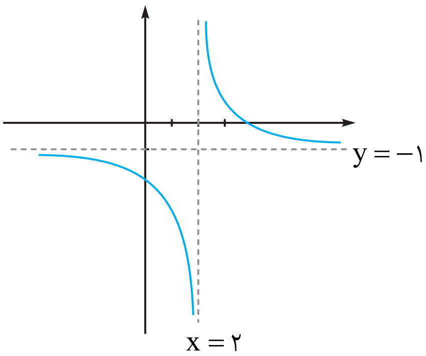
$9=\frac{x-2}{x-3} \Rightarrow 9x-27=x-2 \Rightarrow 8x=25 \Rightarrow x=\frac{25}{8}=3/125$

۱۲- گزینه «۱»

در ابتدا ضابطه‌های $f(x)$ و $g(x)$ را با توجه به معادله خط‌ها می‌نویسیم:

$f(x)=ax+b \Rightarrow f(x)=x-2$
$g(x)=ax+b \Rightarrow g(x)=-x$ $\xrightarrow{\text{پس}} \frac{g}{f}=\frac{-a}{x-2} \quad D:x+2$

این تابعی هموگرافیک است پس:



۱۳- گزینه «۱»

وارون تابع $f(x)=-x^2$ با دامنهٔ محدود $(-\infty,0]$ به‌صورت:

$y=-x^2 \Rightarrow -y=x^2 \Rightarrow \sqrt{-y}=-x \Rightarrow -\sqrt{-y}=x$

$f^{-1}(x)=-\sqrt{-x}$

محل برخورد دو تابع به‌صورت:

$-x-6=-\sqrt{-x}$

$-x+\sqrt{-x}-6=0 \xrightarrow{\sqrt{-x}=t} t^2+t-6=0 \Rightarrow (t+3)(t-2)=0$

$\Rightarrow t=-3$ غقق $, t=2$

$\sqrt{-x}=2 \Rightarrow -x=4=-4y=-2 \Rightarrow A(-4,-2)$

$(fog)(-4)=f(g(-4))=f(-2)=-4$

۱۴- گزینه «۴»

ضابطهٔ $f=\frac{۱}{x}$ با دامنهٔ محدود $(۰,+\infty)$ است و ضابطهٔ $g(x)$ با توجه به نقطهٔ شروع شکل و محل تقاطع آن با محور **y**ها به‌صورت

$$g(x)=-۲-\sqrt{x+۴}$$

است پس:

$$g(f(۶))=g(\frac{۱}{۶})=-۲-\sqrt{\frac{۱}{۶}+۴}=-۲-\frac{۵}{\sqrt{۶}}$$

$$=\frac{-۲\sqrt{۶}-۵}{\sqrt{۶}}\times\sqrt{۶}=-۲\sqrt{۶}-۵$$

۱۵- گزینه «۳»

می‌دانیم که ترکیب هر تابعی با وارون آن تابع همانی را تولید می‌کند اما دامنهٔ آن $\mathbb{R}$ نخواهد بود پس:

$$D_{fof^{-۱}}=\{D_{f^{-۱}}\,|\,f^{-۱}(x)\in D_f\}\xrightarrow[D_{f^{-۱}}:x\neq ۳]{D_f:x\neq ۲}\{x\neq ۳\,|\,\frac{۲x-۵}{x-۳}\neq ۲\}$$

$$\{x\neq ۳\,|\,۲x-۵\neq ۲x-۶\}$$
$$\{x\neq ۳\,|\,-۵\neq -۶\}$$
$$\{x\neq ۳\,|\,\mathbb{R}\}$$
$$x\neq ۳$$

پس تابع همانی با دامنهٔ $x\neq ۳$ باید جواب سؤال باشد.

۱۶- گزینه «۲»

تابع **g** تابعی خطی با ضابطهٔ $g(x)=x+۲\,,\,-۲\le x\le ۴$ است و تابع **f** سهمی با ضابطهٔ:

$$f(x)=a(x+۲)(x-۴)\Rightarrow -۲=a(۲)(-۴)\Rightarrow a=\frac{۱}{۴}$$

$$f(x)=\frac{۱}{۴}(x^۲-۲x-۸)=+\frac{۱}{۴}x^۲-\frac{۱}{۲}x-۲\quad D_f=[-۴,۶]$$

پس:

$$(fog)(x)=f(g(x))=\frac{۱}{۴}(x+۲)^۲-\frac{۱}{۲}(x+۲)-۲$$

$$=\frac{۱}{۴}(x^۲+۴x+۴)-\frac{۱}{۲}x-۱-۲$$

$$=\frac{۱}{۴}x^۲+x+۱-\frac{۱}{۲}x-۳=\frac{۱}{۴}x^۲+\frac{۱}{۲}x-۲$$

$$D_{fog}=\{D_g\,|\,g(x)\in D_f\}=\{[-۲,۴]\,|\,-۴\le x+۲\le ۶\}$$
$$=\{[-۲,۴]\,|\,[-۶,۴]\}=[-۲,۴]$$

۱۷- گزینه «۲»

$$f^{-۱}(۲)=a\Rightarrow (۲,a)\in f^{-۱}\Rightarrow (a,۲)\in f\Rightarrow a+\frac{۱}{a}=۲$$

می‌دانیم این معادله فقط به‌ازای $a=۱$ برابر ۲ می‌شود پس: $(۱,۲)\in\ \Rightarrow\ (۲,۱)\in f^{-۱}$

$$g^{-۱}(۱)\xrightarrow{(۱,۲)}g^{-۱}(۱)=۲$$

۱۸- گزینه «۲»

ابتدا نمودار $g(x)$ را بصورت تابع چند ضابطه‌ای می‌نویسیم و همچنین ضابطهٔ $f(x)$ را به دست می‌آوریم:

$$g(x)=\begin{cases}x^۲-۲x & x\ge ۲\\ -x^۲+۲x & x<۲\end{cases}\quad,\quad f(x)=۵x+۲\,,\,D_f=[-۱,۱]$$

$$x<۲\Rightarrow fog=f(g(x))=۵(-x^۲+۲x)+۲$$
$$=-۵x^۲+۱۰x+۲\,,\,D_{fog}=[-۱\sqrt{۲}\,,۲)$$

$$x\ge ۲\Rightarrow fog=f(g(x))=۵(x^۲-۲x)+۲=۵x^۲-۱۰x+۲\,,$$
$$D_{fog}=[۲\,,۱+\sqrt{۲})$$

۱۹- گزینه «۳»

حاصل جمع دو براکت که عدد صحیح است عددی صحیح باید باشد پس **x** عددی صحیح است.

همچنین چون می‌دانیم عددصحیح از داخل براکت خارج می‌شود پس:

$$x+[\frac{۳}{۷}]+۲x+[-\frac{۲۴}{۷}]=x+۶$$

$$۳x-۴=x+۶\Rightarrow ۲x=۱۰\Rightarrow x=۵$$

در نتیجه حاصل:

$$[\frac{-۵+۲}{۲}]=[-\frac{۳}{۲}]=[-۱/۵]=-۲$$

۲۰- گزینه «۲»

$$۶\le ۲x^۲-۳<۷$$

$$۶\le x^۲+۱<۷$$

طرفین را با هم جمع می‌کنیم:

$$۱۲\le ۳x^۲-۲<۱۴$$

پس $[۳x^۲-۲]$ شامل اعداد صحیح ۱۲ و ۱۳ خواهد بود.