اصلاحیه

- فصل اول - سؤالات بخش ۳ تستی ـ سؤال ۱۴: گزینه ۳ صحیح است.
- فصل اول ـ سؤالات بخش ۴ تستی ـ سؤال ۴: گزینه ۱ صحیح است.
- فصل اول ـ سؤالات تستی پایان فصل ـ سؤال ۴: پاسخ صحیح در گزینه‌ها نیست. گزینه ۱ اصلاح شود:

$$\frac{۱۰^{۲۱}-۱۹۰}{۲۷}$$

- فصل اول ـ سؤالات تستی پایان فصل - سوال ۲: گزینه ۲ صحیح است.
- فصل اول ـ سؤالات تستی پلاس - سوال ۲: گزینه ۲ صحیح است.

۱- آسان

سال دهم یاد گرفتیم که اگر جملات غیرمتوالی یک دنباله حسابی را داشته باشیم، برای محاسبه‌ی قدرنسبت از فرمول $d=\frac{a_m-a_n}{m-n}$ استفاده کنیم پس

$$d=\frac{a_۷-a_۳}{۷-۳}=\frac{۹-۲۵}{۷-۳}=-۴$$

و با جای‌گذاری در جمله‌ی سوم داریم:

$$a_۳=a_۱+۲d \Rightarrow a_۱-۸=۲۵ \Rightarrow a_۱=۳۳$$

معنی جمله مثبت این است که $a_n>۰$ و از دهم یاد گرفتیم که $a_n=a_۱+(n-۱)d$ پس:

$$a_۱+(n-۱)d>۰\Rightarrow ۳۳+(n-۱)(-۴)>۰\Rightarrow ۳۷-۴n>۰$$

$$۳۷>۴n\Rightarrow \frac{۳۷}{۴}>n$$

یعنی اولین عدد طبیعی کوچک‌تر از ۹/۲۵ که می‌شه ۹. پس ۹ جمله $\frac{۳۷}{۴}>n$

این دنباله مثبت است.

۲- آسان

$$a_{۲۰}=۵۲$$

$$a_۱+a_۲+a_۳=-۶$$

اگر هر کدام از اطلاعات سوال را بسط بدیم به اطلاعات زیر می‌رسیم.

$$\begin{cases}a_۱+۱۹d=۵۲\\ ۳a_۱+۳d=-۶\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a_۱+۱۹d=۵۲\\ -a_۱-d=۲\end{cases}$$

$$۱۸d=۵۴$$

$$d=۳\,,\,a_۱=-۵$$

حالا جمله چندم یعنی: a_n پس $a_n=۱۹$

$$a_۱+(n-۱)d=۱۹\Rightarrow -۵+(n-۱)(۳)=۱۹$$
$$\Rightarrow ۳n=۲۷\Rightarrow n=۹$$

۳- متوسط

وقتی به جملات دنباله نگاه می‌کنیم متوجه می‌شویم که هر جمله در عدد ۲ ضرب شده پس دنباله هندسی با قدرنسبت ۲ داریم.

از طرفی جمله کوچک‌تر از ۳۰۰ در ریاضی رو می‌دانیم که $a_n<۳۰۰$ می‌شه پس:

$$a_n<۳۰۰$$

$$a_۱r^{n-۱}<۳۰۰\Rightarrow (۰/۲۵)(۲)^{n-۱}<۳۰۰$$

$$(\frac{۱}{۴})(۲)^{n-۱}<۳۰۰\Rightarrow ۲^{n-۳}<۳۰۰$$

$$n-۳\le ۸\Rightarrow n\le ۱۱$$

حواستون به چند تا نکته باشه!

اول این که به‌جای (۰/۲۵) می‌توانید $(\frac{۱}{۴})$ بذارید.

دوم این که در مرحله آخر دنبال توانی از ۲ هستیم که از ۳۰۰ کم‌تر باشه و می‌دانیم: $۲^۸=۲۵۶$

پس ۱۱ جمله کوچک‌تر از ۳۰۰ دارد.

۴- متوسط

اگر به الگوی نوشتن جملات دنباله‌ای هندسی توجه کنیم، می‌بینیم که داریم:

$$a_۱+a_۲+a_۳+a_۴=۸۰$$
$$a_۱+a_۳=۲۰$$

با جای‌گذاری جمع جملات اول و سوم در معادله‌ی اول داریم:

$$a_۲+a_۴+۲۰=۸۰\Rightarrow a_۲+a_۴=۶۰\Rightarrow a_۱r+a_۱r^۳=۶۰\quad (۱)$$

از طرفی داشتیم:

$$a_۱+a_۳=۲۰\Rightarrow a_۱+a_۱r^۲=۲۰\quad (۲)$$

$$\xrightarrow{(۱)} r(\underbrace{a_۱+a_۱r^۲}_{۲۰})=۶۰\Rightarrow ۲۰r=۶۰\Rightarrow r=۳$$

حالا مقدار **r** رو تو معادله‌ی (۲) جای‌گذاری می‌کنیم:

$$a_۱+۹a_۱=۲۰$$

$$\Rightarrow ۱۰a_۱=۲۰\Rightarrow a_۱=۲\Rightarrow a_۵=a_۱r^۴=۲\times(۳)^۴=۱۶۲$$

۵- آسان

در سال دهم یاد گرفتیم که اگر سه جمله متوالی دنباله حسابی داشته باشیم مانند $a\,,b\,,c$ واسطه حسابی از رابطه ی $۲b=a+c$ حساب می‌شود پس:

$$۲(۳x+۲)=۳x-۱+۴x+۲\Rightarrow ۶x+۴=۷x+۱\Rightarrow ۳=x$$

با جای‌گذاری $x=۳$ در سه جمله اعداد دنباله ۸ ,۱۱ ,۱۴ به دست می‌آید پس:

$$a_{۱۶}=a_۱+۱۵d=۸+۱۵(۳)=۵۳$$

۶- آسان

وقتی به جملات دنباله نگاه کنیم متوجه می‌شیم جمله اول -۵ و جمله چهارم ۱ است. همچنین از پارسال می‌دانیم $d=\frac{a_m-a_n}{m-n}$ پس در $d=\frac{۱-(-۵)}{۴-۱}$ نتیجه $d=\frac{۶}{۳}=۲$ حالا به‌راحتی جملات دنباله را به دست میاریم.

$$-۵\,,-۳\,,-۱\,,+۱\,,۳$$

پس $c=۳\,,b=-۱\,,a=-۳$

$$a+b+c=-۳-۱+۳=-۱$$

۷- متوسط

در دنباله‌های هندسی هر جمله در قدرنسبت ضرب می‌شن پس در این دنباله قدرنسبت **m** هست پس جمله سوم هم $m^۳$ هست که شده ۶۴.

درنتیجه $m^۳ = ۶۴$

$m = ۴$

پس جملات دنباله به‌صورت $۴, ۱۶, ۶۴, \ldots$

$a_۴ = a_۱r^۳ = ۴(۴)^۳ = ۲۵۶$

حواستون باشه‌ها! قسمت اول سوال رو با واسطه هندسی هم می‌شد بریم!

۸- متوسط

اول از همه بریم سراغ سواد دهم شما!

عدد $۲\sqrt{۲}$ رو به صورت $\sqrt{۸}$ بنویسید که راحت بشید. پس:

$۲^y, \sqrt{۸}, ۲^x$

همچنین در سال دهم واسطه هندسی داشتید که می‌شه $b^۲ = ac$

پس $(\sqrt{۸})^۲ = ۲^y \times ۲^x$

با استفاده از قوانین توان داریم: $۲^۳ = ۸ = ۲^{x+y}$

$۳ = x + y$

در آخر هم واسطه حسابی **x** و **y** خواسته که می‌شه $\frac{x+y}{۲}$ پس واسطه برابر $\frac{۳}{۲}$ است.

۹- دشوار

حواستون به یک نکته باشه!

در سال دهم این سوالات را با بسط دادن جملات حل می‌کردید ولی حالا می‌تونید از این نکته استفاده کنید که اگر a_p, a_m, a_n سه جمله از دنباله حسابی باشند و همچنین سه جملهٔ متوالی دنباله هندسی باشند برای پیدا کردن قدرنسبت هندسی از رابطهٔ $q = \frac{p-m}{m-n}$ استفاده می‌کنیم پس:

$q = \frac{۳۷-۷}{۷-۱} = \frac{۳۰}{۶} = ۵$

حواستون باشه که راه حل تشریحی این سوال در سوالات تستی شماره ۲۰ آمده است.

۱۰- آسان

از سال‌های گذشته می‌دانیم که اعدادی مضرب ۱۵ هستند که بر ۳ و ۵ بخش پذیر باشند. پس دنباله اعداد سه رقمی‌مضرب ۱۵:

$۱۰۵, ۱۲۰, ۱۳۵, \ldots, ۹۹۰$

برای پیدا کردن S_n اولین چیزی که باید داشته باشد تعداد جملات هست که فرمول تعداد جملات دنباله از سال دهم:

تعداد $n = \frac{\text{اولی} - \text{آخری}}{\text{فاصله}} + ۱$

$n = \frac{۹۹۰-۱۰۵}{۱۵} + ۱ = ۶۰$

$S_{۶۰} = \frac{۶۰}{۲}[(۱۰۵) + (۶۰-۱)(۱۵)] = ۳۰[۲۱۰ + ۸۸۵] = ۳۲۸۵۰$

۱۱- آسان

البته که با دیدن این سوال دانش آموز باسواد از سال دهم به یاد شمارش می‌افته و از فرمول ترکیب استفاده می‌کنه و به راحتی جواب رو به صورت روبه رو حساب می‌کنه $\binom{۴۰}{۲} = \frac{۴۰ \times ۳۹}{۲} = ۷۸۰$

اما خب در بخش اول کتاب یازدهم چون از مجموع جملات می‌خواهیم استفاده کنیم پس این طور درنظر می‌گیریم که نقطه‌ی اول به ۳۹ نقطه دیگر وصل می‌شه، نقطه بعدی به ۳۸ نقطه دیگر و به همین صورت پس:

$۳۹ + ۳۸ + \ldots + ۱ = \frac{۳۹}{۲}[۳۹ + ۱] = \frac{۳۹ \times ۴۰}{۲} = ۷۸۰$

۱۲- آسان

از فرمول زیبای کتاب درسی به‌راحتی استفاده می‌کنیم:

$S_n = \frac{n}{۲}[۲a_۱ + (n-۱)d]$

$S_{۲۰} = \frac{۲۰}{۲}[۲(۵) + (۲۰-۱)(۴)] \Rightarrow S_{۲۰} = ۱۰[۱۰ + ۷۶]$

$\Rightarrow S_{۲۰} = ۱۰[۸۶] = ۸۶۰$

۱۳- متوسط

اول به این فکر کنید اعداد سه رقمی‌که در تقسیم بر ۹ باقی‌مانده ۲ دارند چه اعدادی هستند این اعداد مضرب ۹ هستند که ۲ واحد به آنها اضافه شده یعنی:

$۱۰۱, ۱۱۰, \ldots, ۹۹۲$

وقتی دنباله را پیدا کردیم مرحبه اول پیدا کردن تعداد و سپس فرمول S_n است.

$n = \frac{۹۹۲-۱۰۱}{۹} + ۱ = ۱۰۰$

$S_{۱۰۰} = \frac{۱۰۰}{۲}[۲(۱۰۱) + ۹۹(۹)] = ۵۰[۲۰۲ + ۸۹۱] = ۵۴۶۵۰$

۱۴- آسان

این سوال هم مشابه سوال یازده هست. یعنی می‌توان آن را با ترکیب از سال دهم حل کرد و به‌راحتی جواب $\binom{۲۰}{۲}$ را نوشت.

اما در سال یازدهم چون بحث بر سر مجموع هست پس می‌توان گفت نفر اول با ۱۹ نفر دیگرمی‌تواند گروه ۲ نفره تشکیل دهد، نفر دوم با ۳۸ نفر باقی مانده می‌تواند گروه ۲ نفره تشکیل دهد و به همین صورت پس دنباله ما به‌صورت:

$۱۹ + ۱۸ + \ldots + ۱ = \frac{۱۹}{۲}[۱۹ + ۱] = \frac{۱۹ \times ۲۰}{۲} = ۱۹۰$

۱۵- متوسط

در مرحله اول ورزشکار ۳ متر طی می‌کند و دوباره ۳ متر باز می‌گردد به نقطه شروع پس اولین مسافت برای اولین وزنه ۶ متر خواهد بود، همچنین برای وزنه دوم ۶ متر طی خواهد کرد و ۶ متر باز می‌گردد پس جمله دوم این دنباله ۱۲ متر خواهد بود و... درنتیجه دنباله ای به صورت زیر خواهیم داشت.

$$۶+۱۲+۱۸+\dots$$

این دنباله یک دنباله حسابی با قدرنسبت ۶ است پس:

$$S_n=\frac{n}{۲}[۲a_۱+(n-۱)d]\Rightarrow ۹۱۸=\frac{n}{۲}[۱۲+(n-۱)(۶)]$$

$$۹۱۸=\frac{n}{۲}[۱۲+۶n-۶]\Rightarrow ۹۱۸=۶۲+۳n^۲-۳n$$

$$۹۱۸=۳n^۲+۳n\Rightarrow ۰=۳n^۲+۳n-۹۱۸$$

$$۰=n^۲+n-۳۰۶\Rightarrow (n+۱۸)(n-۱۷)=۰\begin{cases}n=-۱۸ & \text{غ ق ق}\\ n=۱۷\end{cases}$$

۱۶- متوسط

با استفاده از روش گاوس خواهیم داشت:

آ) $۲+\quad ۴+\quad ۶+\dots+۲n$

$$\frac{(۲n)+(۲n-۲)+(۲n-۶)+\dots+(۲)}{\underbrace{(۲n+۲)+(۲n+۲)+\dots+(۲n+۲)}_{\text{تا } n}}=\frac{n(۲n+۲)}{۲}=\frac{۲n^۲+۲n}{۲}$$

$=n^۲+n$ مجموع اعداد طبیعی زوج

ب) $۱+\quad ۳+\quad ۵+\dots+۲n-۱$

$$\frac{(۲n-۱)+(۲n-۳)+(۲n-۵)+\dots+(۱)}{\underbrace{۲n+۲n+\dots+۲n}_{\text{تا } n}}$$

$=\frac{(n)(۲n)}{۲}=\frac{۲n^۲}{۲}=n^۲$ مجموع اعداد طبیعی فرد

پ) $۱+۲+۳+\dots+n$

$$\frac{n+\ n-۱+\ n-۲+\dots+۱}{(n+۱)+(n+۱)+\dots+(n+۱)}$$

$=\frac{n(n+۱)}{۲}=\frac{n^۲+n}{۲}$ مجموع اعداد طبیعی

۱۷- متوسط

حداقل چند جمله را جمع کنیم یعنی دنبال کم‌ترین تعداد **n** هست پس:

$$S_n>۶۵$$

$$\frac{n}{۲}[۲a_۱+(n-۱)d]>۶۵\Rightarrow\frac{n}{۲}[۲(۲)+(n-۱)(۵)]>۶۵$$

$$\frac{n}{۲}[۴+۵n-۵]>۶۵\Rightarrow\frac{n}{۲}[۵n-۱]>۶۵\Rightarrow\frac{۵}{۲}n^۲-\frac{n}{۲}-۶۵>۰$$

که این به معنای تعیین علامت عبارت هست پس:

$$۵n^۲-n-۱۳۰>۰\Rightarrow(۵n-۲۶)(n+۵)>۰$$

$$\Rightarrow\ n>\frac{۲۶}{۵}\ \Rightarrow\ n>۵/۲$$

اولین عدد طبیعی آن $n=۶$ هست.

۱۸- دشوار

اگر دنباله‌ای ۳۰ جمله داشته باشد پس ۱۵ جمله آن زوج و ۱۵ جمله آن فرد است اما حواستون باشه که وقتی شماره جملات زوج هستند یعنی قدرنسبت ۲d می‌شه همچنین وقتی شماره جملات فرد هستند قدرنسبت ۲d هست.

$S_{۱۵}=\frac{۱۵}{۲}[۲a_۱+(۱۵-۱)(۲d)]=۲۲۵$ جملات فرد

$$\frac{۱۵}{۲}[۲a_۱+۲۸d]=۲۲۵$$

$$۲a_۱+۲۸d=۳۰\quad **$$

$S_{۱۵}=\frac{۱۵}{۲}[۲a_۲+(۱۵-۱)(۲d)]=۲۷۰$ جملات شماره زوج

$$=\frac{۱۵}{۲}[۲a_۱+۲d+۲۸d]=۲۷۰$$

$$۲a_۱+۳۰d=۳۶\quad *$$

با حل دستگاه * و ** خواهیم داشت:

$$a_۱=-۲۷\ ,\ d=۳$$

۱۹- دشوار

این سوال را به دو صورت می‌شه حل کرد. روش اول این هست که شما فرمول S_n در کتاب درسی را مرتب کرده باشید و متوجه شده باشید که $S_n=\frac{d}{۲}n^۲+(a_۱-\frac{d}{۲})n$ هست پس در این سوال ضریب $n^۲$ نصف قدرنسبت است درنتیجه $a_۱-۴=-۵\ ,\ d=۸$

$$a_۱=-۱\ ,\ a_n=-۱+(n-۱)(۸)=۸n-۹$$

روش دوم حل این سوال این هست که $S_n-S_{n-۱}=a_n$

پس با جای‌گذاری $(n-۱)$ در فرمول S_n خواهیم داشت:

$$S_n-S_{n-۱}=[۴n^۲-۵n]-[۴(n-۱)^۲-۵(n-۱)]$$

$$=۴n^۲-۵n-۴n^۲+۱۳n-۹=۸n-۹=a_n$$

و برای یافتن $S_{۱۰}$ در فرمول به‌جای **n** عدد ۱۰ رو قرار می‌دهیم.

$$S_{۱۰}=۴(۱۰)^۲-۵(۱۰)=۴۰۰-۵۰=۳۵۰$$

۲۰- آسان

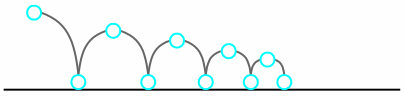
با توجه به فرمول کتاب درسی برای مجموع دنباله‌ی هندسی:

$$S_n = a_1 \frac{1-q^n}{1-q}$$

$$S_{10} = \frac{1}{9} \times \frac{1-3^{10}}{1-3} = \frac{-59048}{-18} = 3280/4$$

۲۱- دشوار

حواستون باشه‌ها! اول این که این توپ از ارتفاع ۱۵ متری رها می‌شه پس:



پس اولین جمله دنباله ۱۵ هست اما جملات بعدی ثلث، $(\frac{1}{3})$ رفت و برگشت توپ باید حساب شود.

$$15 + 2 \times \frac{15}{3} + 2 \times \frac{1}{3} \times \frac{15}{3} + \dots$$

چون ۱۵ به‌عنوان جمله اول، دنباله هندسی نمی‌سازد، مجموع جملات دوم به بعد را با استفاده از دنباله هندسی حساب کرده و در آخر با ۱۵ جمع می‌کنیم:

$$\frac{2}{3} \times 15(1 + \frac{1}{3} + \dots)$$

$$\frac{2}{3} \times 15(1 \times \frac{1-(\frac{1}{3})^4}{1-\frac{1}{3}}) = \frac{2}{3} \times 15(\frac{1-\frac{1}{81}}{\frac{2}{3}}) = 15 \times \frac{80}{81} = \frac{400}{27}$$

و در آخر این عدد با ۱۵ جمع می‌شود پس جواب آخر $\frac{805}{27} = 29/81$

۲۲- متوسط

خانه‌های شطرنج را شماره جملات درنظر می‌گیریم و تعداد گندم‌ها را خود جملات درنظر می‌گیریم:

$$\underbrace{1+2+4+8+\dots}_{\text{۶۴ تا}}$$

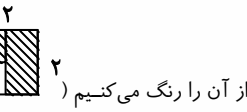
$$S_{64} = 1 \times \frac{1-2^{64}}{1-2} \Rightarrow S_{64} = 2^{64} - 1$$

پس $2^{64} - 1$ گرم گندم خواهد داشت.

۲۳- دشوار

در ابتدای سوال گفته شده که مربعی به طول ضلع ۲ واحد داریم که نصف آن را رنگ می‌کنیم مانند شکل زیر:

پس مساحت قسمت رنگ شده برابر مستطیلی یک در دو است پس جمله اول ۲ خواهد بود.



سپس در قسمت رنگ نشده دوباره نیمی‌از آن را رنگ می‌کنیم ( ) که مربعی یک در یک خواهد بود که مساحت آن ۱ خواهد بود و به همین ترتیب:

$$2, 1, \frac{1}{2}, \dots$$

حالا مجموع این قسمت‌های رنگ شده باید حداقل $\frac{96}{100}$ درصد سطح مربع باشد.

$$2 + 1 + \frac{1}{2} + \dots \geq \frac{96}{100} \times 4$$

$$2 \times \frac{1-(\frac{1}{2})^n}{1-\frac{1}{2}} \geq \frac{96}{100} \times 4 \Rightarrow \cancel{4}(1-(\frac{1}{2})^n) \geq \frac{96}{100} \times \cancel{4} \Rightarrow 1-(\frac{1}{2})^n \geq \frac{96}{100}$$

$$\frac{4}{100} \geq (\frac{1}{2})^n \xrightarrow{\text{طرفین وسطین}} 25 \leq 2^n$$

اولین عدد طبیعی که در این نامساوی صدق می‌کند $n = 5$ است. پس $n \geq 5$ خواهد بود.

۲۴- متوسط

حواستون باشه‌ها! توی این سوال بیشتر می‌خواییم ببینیم اتحاد بلدید یا نه!

$$S_6 = 846 \quad S_3 = 94$$

$$a_1 \frac{1-q^6}{1-q} = 846 \quad a_1 \frac{1-q^3}{1-q} = 94$$

در دنباله‌های هندسی به یاد داشته باشید که تقسیم کردن اطلاعات خیلی کمک کننده است.

$$\frac{\cancel{a_1}\frac{1-q^6}{\cancel{1-q}}}{\cancel{a_1}\frac{1-q^3}{\cancel{1-q}}} = \frac{846}{94} \Rightarrow \frac{\cancel{(1-q^3)}(1+q^3)}{\cancel{1-q^3}} = 9 \Rightarrow 1+q^3 = 9 \Rightarrow q = 2$$

حالا نسبت جمله هشتم به جمله پنجم دنباله هندسی یعنی:

$$\frac{a_8}{a_5} = \frac{a_1 q^7}{a_1 q^4} = q^3 = 8$$

۲۵- متوسط

تیکه اول سوال که مربوط به سال دهم هست یعنی:

$$d = \frac{a_{10} - a_5}{10-5} = \frac{27-12}{10-5} = \frac{15}{5} = 3$$

و با جای‌گذاری قدرنسبت، در بسط یکی از جملات a_1 را به دست می‌آوریم:

$$a_5 = a_1 + 4d$$

$$12 = a_1 + 4(3) \Rightarrow a_1 = 0$$

تیکه دوم سوال وقتی که گفته شده با شروع از جمله هفتم یعنی شش جمله قبل از مجموع بیست جمله اول کم شده پس در اصل $S_{20} - S_6$ را از ما خواسته:

$$S_{20} - S_6 = \frac{20}{2}[2(0) + (19)(3)] - \frac{6}{2}[2(0) + 5(3)] = 10[57] - 3[15] = 525$$

۲۶- دشوار

مجموع ۲۰ جمله اول دنباله حسابی از رابطه $S_{۲۰}=\frac{۲۰}{۲}[۲a_۱+(۱۹)(d)]$ به دست می‌آید.

حالا قدرنسبت را به $(d+۴)$ و جمله اول را به $(a_۱+۳)$ تغییر می‌دهیم پس مجموع ۲۰ جمله اول دنباله از رابطه $S_{۲۰}=\frac{۲۰}{۲}[۲(a_۱+۳)+(۱۹)(d+۴)]$ به دست می‌آید. از مقایسه دو رابطه به دست آمده داریم:

$$۱۰[۲a_۱+۶+۱۹d+۷۶]-۱۰[۲a_۱+۱۹d]$$

$$\cancel{۲۰a_۱}+۸۲۰+\cancel{۱۹۰d}-\cancel{۲۰a_۱}-\cancel{۱۹۰d}=۸۲۰$$

پس یعنی ۸۲۰ واحد به مجموع بیست جمله اول دنباله اضافه شده است.

۲۷- دشوار

داخل پرانتزها را وقتی نگاه می‌کنیم متوجه می‌شیم پرانتز اول دنباله هندسی با قدرنسبت x و پرانتز دوم دنباله هندسی با قدرنسبت $-x$ هست پس:

$$(۱\times\frac{۱-x^۵}{۱-x})(۱\times\frac{۱+x^۵}{۱+x})=$$

که دو عبارت صورت اتحاد مزدوج هست پس:

$$\frac{۱-x^{۱۰}}{۱-x^۲}=\frac{۱-(\sqrt{۳})^{۱۰}}{۱-(\sqrt{۳})^۲}$$

$$=\frac{۱-۳^۵}{۱-۳}=\frac{۱-۲۴۳}{-۲}=\frac{-۲۴۲}{-۲}=۱۲۱$$

۲۸- دشوار

اگر به جملات دنباله به‌صورت

دسته اول: ۱ $\xrightarrow{\text{مجموع}}$ ۱

دسته دوم: ۳ ۵ $\xrightarrow{\text{مجموع}}$ ۸

دسته سوم: ۷ ۹ ۱۱ $\xrightarrow{\text{مجموع}}$ ۲۷

⋮

دسته شانزدهم: $\xrightarrow{\text{مجموع}} n^۳$

نگاه کنیم متوجه می‌شیم که مجموع جملات هر دسته از $n^۳$ به دست آمده پس مجموع جملات دسته شانزدهم نیز از $۱۶^۳$ به دست می‌آید.

۲۹- دشوار

حواستون باشه‌ها! در دنباله حسابی فرمول $S_n=\frac{d}{۲}n^۲+(a_۱-\frac{d}{۲})n$ پس در مرحله اول با مقایسه صورت سوال این نکته متوجه می‌شیم که ضریب $n^۳$ باید صفر باشه پس $a-۲=۰$ در نتیجه $a=۲$. همچنین در این فرمول $۴b-۸=۰$ باشد پس $b=۲$ در $S_n=۳n^۲+۳n$ نتیجه $\frac{d}{۲}=۳$ و همچنین $d=۶$

$$a_۱-\frac{d}{۲}=۳\Rightarrow a_۱-۳=۳\Rightarrow a_۱=۶$$

و در آخر بسط جمله نهم در دنباله حسابی

$$a_۹=a_۱+۸d=۶+۸(۶)=۵۴$$

۳۰- شوار

این سوال تلفیقی از اطلاعات دهم و یازدهم داره! پس اول شماره جملات منفی را پیدا کنیم. جمله منفی در ریاضی یعنی $t_n<۰$ پس $\frac{۲n-۱۵}{۷}<۰$

پس $n<\frac{۱۵}{۲}$ و اولین عدد طبیعی کوچک‌تر از ۷/۵، هفت هست پس هفت جمله اول این دنباله منفی هستند در واقع این سوال $S_۷$ را از ما سوال می‌کند.

$$t_n=\frac{۲}{۷}n-\frac{۱۵}{۷}$$

پس قدرنسبت $d=\frac{۲}{۷}$, $t_۱=\frac{-۱۳}{۷}$ هست.

$$S_۷=\frac{۷}{۲}[۲(-\frac{۱۳}{۷})+۶(\frac{۲}{۷})]$$

$$S_۷=\frac{۷}{۲}[-\frac{۲۶}{۷}+\frac{۱۲}{۷}]=\frac{۷}{۲}[-\frac{۱۴}{۷}]=\frac{۷}{\cancel{۲}}[-\cancel{۲}]=-۷$$

۱- گزینه «۲» متوسط

چون بین دو عدد ۲۳ و ۱۲۳ نوزده واسطه قرار داده شده است پس یعنی دنباله بیست و یک جمله دارد.

$$۲۳\underbrace{\square\ \square\ \dots\ \square}_{۱۹\text{ جمله}}۱۲۳$$

$$d=\frac{۱۲۳-۲۳}{۲۱-۱}=۵$$

با توجه به فرمول قدرنسبت حسابی داریم

حواستون باشه‌ها! واسطه یازدهم دنباله به معنای جمله دوازدهم دنباله است پس:

$$a_{۱۲}=a_۱+۱۱d=۲۳+۱۱(۵)=۷۸$$

۲- گزینه «۴» دشوار

از دنباله‌های سال دهم می‌دونی که سه عدد از یک دنباله حسابی وقتی پشت سر هم باشن، می‌تونیم به‌صورت $x-d, x, x+d$ بنویسیم. چرا؟ چون فاصله وسطی با قبل و بعدش دقیقاً **d**، یعنی همون قدرنسبت هست. درسته؟

پس: $x-d+x+x+d=۲۱ \Rightarrow ۳x=۲۱ \Rightarrow x=۷$

حالا باجایگذاری $x=۷$ داریم: $۷-d, ۷, ۷+d$

گفته ضرب برابر ۲۳۱ یعنی: $(۷-d)(۷)(۷+d)=۲۳۱$

با یه مزدوج و یه ساده کردن: $\Rightarrow ۴۹-d^۲=۳۳ \Rightarrow d^۲=۱۶ \Rightarrow d=۴$

فرقی نداره **d** رو منفی یا مثبت بگیری، فقط جمله‌هات جابه‌جا می‌شن.

$d=(x+d)-(x-d)=۲d=۸$ (عدد بزرگ‌تر) ـ (عدد کوچک‌تر)

۳- گزینه «۲» دشوار

بخش اول که مجموع چهار جمله اول رو بهمون داده یعنی دقیقاً $S_۴$، اما بخش دوم چون شروع از جمله اول نیست پس با قبلی جمع می‌کنیم تا مجموع ۹ جمله اول به دست بیاد:

$$\underbrace{a_۱+a_۲+a_۳+a_۴}_{۱۵}+\underbrace{a_۵+a_۶+a_۷+a_۸+a_۹}_{۳۰} \Rightarrow S_۹=۴۵$$

حالا دستگاه تشکیل می‌دیم و حل می‌کنیم:

$$\begin{cases} S_۴=۱۵ \\ S_۹=۴۵ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ۲(۲a_۱+۳d)=۱۵ \\ \frac{۹}{۲}(\underbrace{۲a_۱+۸d}_{۲(a_۱+۴d)})=۴۵ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ۴a_۱+۶d=۱۵ \\ ۹a_۱+۳۶d=۴۵ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ۴a_۱+۶d=۱۵ \\ a_۱+۴d=۵ \end{cases}$$

با حل کردن دستگاه به جواب‌های $a_۱=۳, d=\frac{۱}{۲}$ می‌رسیم.

حالا جمله یازدهم رو حساب می‌کنیم:

$a_{۱۱}=a_۱+۱۰d=۳+۵=۸$

۴- گزینه «۲» دشوار

$۲-\sqrt{۳}, a_۲, a_۳, \ldots, a_{۵۱}, ۸+\sqrt{۳}$

۵۰ واسطه حسابی به شماره‌های $a_۲$ تا $a_{۵۱}$ هستند و می‌دونیم که اگر جملات اول و آخر یک دنباله حسابی رو داشته باشیم می‌تونیم از فرمول زیر مجموع جملات رو حساب کنیم:

$$S_n=\frac{n}{۲}(a_۱+a_n)$$

پس داریم:

$$S_{۵۰}=\frac{۵۰}{۲}(a_۲+a_{۵۱})=۲۵(a_۲+a_{۵۱})$$

حالا دو راه پیش رو داریم. بریم ببینیم:

روش اول:

$a_۲=a_۱+d$

$a_{۵۱}=a_{۵۲}-d$

$\Rightarrow S_{۵۰}=۲۵(a_۱+\cancel{d}+a_{۵۲}-\cancel{d})$

$=۲۵(۲-\sqrt{۳}+۸+\sqrt{۳})=۲۵\times۱۰=۲۵۰$

روش دوم: یه قانون هست به اسم «قانون اندیس **S**» که میگه:

اگر $m+n=p+q$ اونوقت $a_m+a_n=a_p+a_q$ پس

$a_۲+a_{۵۱}=a_۱+a_{۵۲}$ (چون $۲+۵۱=۱+۵۲$) و $S_{۵۰}=۲۵(a_۱+a_{۵۲})$

در نتیجه

$S_{۵۰}=۲۵(۲-\sqrt{۳}+۸+\sqrt{۳})=۲۵\times۱۰=۲۵۰$

۵- گزینه «۲» دشوار

هر وقت صحبت از جملات مشترک بین دو دنباله حسابی شد، دو تا کار باید انجام بدی اول این که، اولین جمله مشترک با ویژگی خواسته شده رو پیدا کنی، و دوم بین قدرنسبت‌های دو دنباله ک.م.م بگیری و دنباله جدیدی با شروع از همون اولین جمله مشترک و با قدرنسبت جدید بسازی.

$a_n=۲, ۵, ۸, ۱۱, ۱۴, \underline{۱۷}, \ldots \Rightarrow d_۱=۳$

$b_n=۱, ۵, ۹, ۱۳, \underline{۱۷}, ۲۱, \ldots \Rightarrow d_۲=۴$

$\Rightarrow d=\text{ک.م.م}[۳, ۴]=۱۲$

پس دنباله جدید، شروع از ۱۷ با قدرنسبت ۱۲ است.

۱۷, ۲۹, ۴۱, ۵۳, ۶۵, ۷۷, ۸۹

که ۷ تا جمله داره!

اگر هم خواستی با فرمول، **n** رو به دست بیاری:

$a_n=۱۷+۱۲(n-۱)=۱۲n+۵$

$۱۲n+۵<۱۰۰ \Rightarrow ۱۲n<۹۵ \Rightarrow n<۷/۹ \Rightarrow n=۷$

در نتیجه:

$S_{۵۰}=۲۵(۲-\sqrt{۳})=۲۵\times۱۰=۲۵۰$

۶- گزینه «۳» دشوار

طبق توضیحات تست قبلی داریم:

$a_n=-۱, ۳, ۷, ۱۱, \underline{۱۵}, \ldots \Rightarrow d_۱=۴$

$b_n=۷, ۹, ۱۱, ۱۳, \underline{۱۵}, \ldots \Rightarrow d_۲=۲$

$\Rightarrow d=\text{ک.م.م}[۲, ۴]=۴$

دنباله جدید با شروع از $a_۱=۱۵$ و با قدرنسبت $d=۴$ هستش:

۱۵, ۱۹, ۲۳, ۲۷, ...

که جمله عمومی‌اول به این صورت در میاد:

$a_n=۱۵+(n-۱)(۴)=۴n+۱۱$

برای این که ببینیم چند تا جمله داریم:

$۴n+۱۱<۱۰۰ \Rightarrow ۴n<۸۹ \Rightarrow n<۲۲/۲۵$

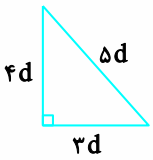
پس **n** برابر ۲۲ هست (**n** عدد طبیعی هست).

حالا می‌تونیم $S_{۲۲}$ رو حساب کنیم:

$$S_{۲۲}=\frac{۲۲}{۲}[۲(۱۵)+۲۱(۴)]=۱۱(۱۱۴)=۱۲۵۴$$

۷- گزینه «۱» دشوار

یه چیزی بهت یاد بدم! هر وقت اضلاع مثلث قائم‌الزاویه تشکیل دنباله حسابی بدهند، باید این سه تا عدد بیاد تو ذهنت:



(ضریب قدرنسبت از همون اعداد طلایی معروف ۵ ,۴ ,۳)

حالا گفته مساحت، پس میشه گفت: $\frac{۱}{۲}\times ۳d\times ۴d = ۲۴$

$\Rightarrow d^۲ = ۴ \Rightarrow d = ۲$ (حواست باشه **d** نمی‌تونه منفی بشه!)

پس اضلاع مثلث به ترتیب ۶ ,۸ ,۱۰ هستن. که طول ضلع کوچک میشه ۶

۸- گزینه «۳» آسان

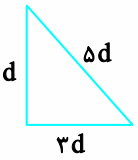
خب بهتره جملات را طبق الگوی حسابی بنویسیم تا به ارتباطی با جمله هشتم برسیم:

$$۳a_{۱۲} + ۴a_۵ = ۳۵$$
$$۳(a_۱ + ۱۱d) + ۴(a_۱ + ۴d) = ۳۵$$
$$۷a_۱ + ۴۹d = ۳۵$$

حالا جمله رو به ۷ تقسیم کنیم: $a_۱ + ۷d = ۵$

که این، همون الگوی حسابی جمله هشتم هست پس $a_۸ = ۵$

۹- گزینه «۴» متوسط

یادته گفتیم همچنین مثلثی این شکلیه: (

) گفته محیط برابر ۶۰ هست پس داریم:

پس داریم: $۳d + ۴d + ۵d = ۶۰$

$۱۲d = ۶۰ \Rightarrow d = ۵$

پس سه جمله اول دنباله میشه:

۱۵ ,۲۰ ,۲۵

حالا $S_{۲۰}$ رو حساب می‌کنیم:

$$S_{۲۰} = \frac{۲۰}{۲}[۲(۱۵) + ۱۹(۵)] = ۱۰(۱۲۵) = ۱۲۵۰$$

۱۰- گزینه «۱» دشوار

وقتی توی تست، اطلاعات مسأله به‌اندازه کافی نیست که بتونیم همه مجهول‌ها رو حساب کنیم، معمولاً واقعاً هم نیازی بهشون نداریم و کافیه فقط ارتباط بین اطلاعات مسأله و خواسته اون رو پیدا کنیم.

تو این تست اول $a_{۱۲}$ رو با الگو می‌نویسیم:

$a + ۱۱d = ۳۰$ (۱)

حالا $S_{۲۳}$ رو طبق فرمول مجموع بازش می‌کنیم:

یادت هست که $S_n = \frac{n}{۲}[۲a_۱ + (n-۱)d]$

$$S_{۲۳} = \frac{۲۳}{۲}[\underbrace{۲a + ۲۲d}_{۲(a+۱۱d)}]$$

$$(۱) \Rightarrow S_{۲۳} = \frac{۲۳}{۲}\times ۲\times ۳۰ = ۶۹۰$$

اگر می‌خوای یه راه میانبر و تستی از این سوال ببینی به تست شماره ۱۴ مراجعه کن!

۱۱- گزینه «۴» دشوار

می‌دونیم که در الگوی درجه دوم، فاصله بین جملات، تشکیل یک دنباله حسابی می‌دهند. پس اول دنباله حسابی و قدرنسبت اون رو پیدا کنیم:

۵ , ۸ , ۱۳ , ۲۰ , ۲۹ , ...
+۳ +۵ +۷ +۹
+۲ +۲ +۲

می‌بینیم که $d = ۲$ به دست می‌یاد.

در الگوی درجه دوم $t_n = an^۲ + bn + c$، عدد **a** همون نصف **d** هست پس:

$$a = \frac{۲}{۲} = ۱ \Rightarrow a = ۱$$

C، همون جمله صفرم هست و چون ۵ با عدد ۳ جمع شده تا به ۸ رسیده از سمت چپ باید یکی کم کنیم تا به $a_۰$ برسیم پس $c = ۴ , c = ۵ - ۱ = ۴$

و همچنین $b = a_۱ - (a + c)$ پس $b = ۵ - (۴ + ۱) = ۰$

درنتیجه $S_n = \frac{۵}{۲}n^۲ + \frac{۱}{۲}n$

مجموع ۱۰ جمله اول رو خواسته پس $S_{۱۰}$ رو می‌خواد $S_{۱۰} = \frac{۵}{۲}(۱۰۰) + \frac{۱}{۲}(۱۰) = ۲۵۵$

۱۲- گزینه «۴» متوسط

اطلاعات مسئله رو باز کنیم ببینیم به چی می‌رسیم!

$S_۵ = ۱۵$

$$\Rightarrow \frac{\not ۵^{۱}}{۲}[۲a_۱ + ۴d] = \not ۱۵^{۳} \Rightarrow \frac{۱}{\not ۴}\times \not ۴[a_۱ + ۲d] = ۳ \Rightarrow a_۱ + ۲d = ۳$$

گفته جملات سوم و اول قرینه هم هستند پس میشه گفت:

$a_۳ = -a_۱$

$$\Rightarrow a_۳ + a_۱ = ۰ \Rightarrow a_۱ + ۲d + a_۱ = ۰ \Rightarrow ۲a_۱ + ۲d = ۰ \Rightarrow a_۱ + d = ۰$$

دو معادله داریم که در یک دستگاه حل می‌کنیم:

$$-\begin{cases} a_۱ + ۲d = ۳ \\ a_۱ + d = ۰ \end{cases}$$

$d = ۳ \xrightarrow{\text{جایگذاری در دومی}} a_۱ + ۳ = ۰ \Rightarrow a_۱ = -۳$

$a_{۱۰} = a_۱ + ۹d = -۳ + ۹(۳) = ۲۴$

۱۳- گزینه «۲» متوسط

معنی جمله اول اینه که: $S_{۱۰} = S_{۱۱} - ۵$

به عبارتی میشه گفت: $S_{۱۱} - S_{۱۰} = ۵$

خوبه بدونیم که در دنباله حسابی: $S_n - S_{n-۱} = a_n$

پس داریم: $a_{۱۱} = ۵$

بریم سراغ خواسته مسأله: $S_{۲۱} = \frac{۲۱}{۲}[\underbrace{۲a + ۲۰d}_{۲(a+۱۰d)}]$ ، $a_{۱۱}$

$$\Rightarrow S_{۲۱} = ۲۱(a_{۱۱}) \overset{*}{=} ۲۱(۵) = ۱۰۵$$

۱۴- گزینه «۱» دشوار

حواستون باشه‌ها! در مجموع دنباله‌های حسابی اگر تعداد جملات فرد باشه (که جمله وسط داشته باشه) اگر جمله وسط را در تعداد جملات ضرب کنیم مجموع جملات به دست می‌آید یعنی:

مجموع جملات = (جمله وسط) (تعداد)

پس در این سوال که تعداد جملات $(۲n+۱)$ است:

$$(۱۳)(۲n+۱) = ۱۴۳ \Rightarrow ۲n+۱ = ۱۱ \Rightarrow ۲n = ۱۰ \Rightarrow n = ۵$$

۱۵- گزینه «۱» دشوار

توجه: این هم از همون مدل سوالاتی هست که گفتیم اطلاعات داده شده و خواسته شده سوال به هم مربوط هست و نیازی به محاسبات کامل نیست.

ضرب ۹ جمله اول رو باز کنیم:

$$a_۱a_۲.a_۳...a_۹ = ۸ \Rightarrow a_۱.a_۱r.a_۱r^۲...a_۱r^۸ = ۸$$

$$\Rightarrow a_۱^۹ \times r^{۱+۲+...+۸} = ۸ \Rightarrow a_۱^۹ \times r^{۳۶} = ۲^۳$$

$$\xrightarrow{\text{فرجه ۳ بگیریم}} a_۱^۳r^{۱۲} = ۲ \xrightarrow{\text{فرجه ۳}} a_۱r^۴ = \sqrt[۳]{۲}$$

حالا حاصل‌ضرب خواسته شده رو باز کنیم:

$$a_۲a_۴a_۶a_۸ = a_۱r \cdot a_۱r^۳ \cdot a_۱r^۵ \cdot a_۱r^۷$$

$$= a_۱^۴ \times r^{۱۶} = (a_۱r^۴)^۴ = (\sqrt[۳]{۲})^۴ = \sqrt[۳]{۲^۴} = \sqrt[۳]{۲^۳ \times ۱} = ۲\sqrt[۳]{۲}$$

۱۶- گزینه «۲» دشوار

اول فرض سوال رو به زبان ریاضی بنویسیم و با فرمول مجموع بازش کنیم:

$$S_۸ = \frac{۵}{۴}S_۴ \Rightarrow \frac{a(۱-r^۸)}{۱-r} = \frac{۵}{۴} \times \frac{a(۱-r^۴)}{۱-r}$$

می‌دونی که $(۱-r)$ رو می‌تونیم از دوطرف ساده کنیم چون می‌دونیم صفر نیست. اگر $r = ۱$ آن وقت دنباله، تبدیل به دنباله ثابت میشه و $S_۸ = \frac{۵}{۴}S_۴$ برقرار نیست.

$$۱-r^۸ = \frac{۵}{۴}(۱-r^۴)$$

حالا با کمک اتحاد مزدوج، سمت چپ رو تجزیه می‌کنیم:

$$(۱-r^۴)(۱+r^۴) = \frac{۵}{۴}(۱-r^۴)$$

باز هم ساده کردن $۱-r^۴$ به خاطر صفر نبودن هست چون با همون استدلال بالا، اگر $۱-r^۴ = ۰$ اونوقت $r = \pm ۱, r^۴ = ۱$ میشه که ممکن نیست چون $S_۸ = \frac{۵}{۴}S_۴$ اتفاق نمی‌افته!

$$۱+r^۴ = \frac{۵}{۴} \Rightarrow r^۴ = \frac{۱}{۴} \Rightarrow r^۲ = \frac{۱}{۲} \Rightarrow r = \pm\frac{۱}{\sqrt{۲}}$$

حالا بریم سراغ خواسته‌ی مسأله:

$$\frac{a_۷}{a_۱} = \frac{a_۱r^۶}{a_۱} = r^۶ = (r^۲)^۳ = (\frac{۱}{۲})^۳ = \frac{۱}{۸}$$

۱۷- گزینه «۱» دشوار

صورت کسر دقیقاً مجموع ۱۲ جمله از دنباله $۱, t, t^۲, ..., t^{۱۱}, ...$ هست پس میشه $S_{۱۲}$ با قدرنسبت t و جمله اول ۱.

مخرج کسر هم مجموع چهار جمله از دنباله $۱, t^۳, t^۶, t^۹, ...$ هست که میشه $S_۴$ با قدرنسبت $t^۳$ و جمله اول ۱، پس داریم:

یادآوری اتحاد چاق و لاغر:

$$a^۳ - b^۳ = (a-b)(a^۲ + ab + b^۲)$$

$$\frac{\frac{۱(۱-r^{۱۲})}{۱-t}}{\frac{۱(۱-(r^۳)^۴)}{۱-t^۳}} = \frac{۱-t^۳}{۱-t} \xrightarrow{\text{چاق و لاغر}} ۱+t+t^۲ = ۱ + \frac{\sqrt{۵}-۱}{۲} + (\frac{\sqrt{۵}-۱}{۲})^۲$$

$$= \frac{۲+\sqrt{۵}-۱}{۲} + \frac{۶+۱-۲\sqrt{۵}}{۴} = \frac{۱+\sqrt{۵}+۳-\sqrt{۵}}{۲} = ۲$$

۱۸- گزینه «۲» دشوار

برای پیدا کردن الگوی مناسب برای این دنباله دقت کنیم که $۱۰-۱ = ۹, ۱۰۰-۱ = ۹۹, ۱۰۰۰-۱ = ۹۹۹$ و .... به همین ترتیب تا آخرین عدد که $\underbrace{۱۰۰۰...۰}_{۲۰ \text{ تا}} - ۱$ هست. پس داریم:

$$۱۰-۱+۱۰^۲-۱+۱۰^۳-۱+...+۱۰^{۲۰}-۱$$

$$= (۱۰+۱۰^۲+۱۰^۳+...+۱۰^{۲۰}) - ۲۰$$

$$= \frac{۱۰(۱-۱۰^{۲۰})}{۱-۱۰} - ۲۰ = \frac{۱۰-۱۰^{۲۱}+۱۸۰}{-۹} = \frac{۱۰^{۲۱}-۱۹۰}{۹}$$

۱۹- گزینه «۱» متوسط

$\underset{a_1}{\downarrow}1, \dots, \dots, \underset{a_4}{\downarrow}\dots, \dots, \underset{a_7}{\downarrow}64$

اگر پنج واسطه حسابی بگذاریم، جمله وسط یعنی a_4 رو می‌خواهیم:

$$d=\frac{64-1}{7-1}=\frac{63}{6}=10/5 \Rightarrow a_4=1+(3)(10/5)=32/5 \Rightarrow A$$

که البته چون میانگین حسابی بین ۱ و ۶۴ میشه، پس می‌تونیم بگیم:

$$a_4=\frac{1+64}{2}=32/5$$

به همین صورت برای **B** داریم:

$$r^{7-1}=\frac{64}{1} \Rightarrow r^6=64 \Rightarrow r=2$$

$$a_4=1\times(2)^3=8 \Rightarrow B$$

که در گزینه ۱ درست اومده. $A+B=40/5$

اما گزینه ۲ غلط هست: $A-B=24/5$

و گزینه‌های ۳ و ۴ هم واضحه که نادرست هستند.

۲۰- گزینه «۴» متوسط

باید جملات رو از دنباله حسابی برداشت و بُرد درون دنباله‌ی هندسی گذاشت:

دنباله هندسی: $\underset{a_1+3d}{\downarrow}a_4 \quad , \quad \underset{a_1+5d}{\downarrow}a_6 \quad , \quad \underset{a_1+11d}{\downarrow}a_{12}$

از واسطه هندسی کمک می‌گیریم و داریم:

$$(a_1+5d)^2=(a_1+3d)(a_1+11d)$$

$$\cancel{a_1^2}+10a_1d+25d^2=\cancel{a_1^2}+14a_1d+33d^2$$

$$4a_1d+8d^2=0 \Rightarrow 4d(a_1+2d)=0 \Rightarrow d=0 \text{ یا } a_1+2d=0$$
$$\Rightarrow a_1=-2d$$

اگر a_1 رو در جملات جای‌گذاری کنیم، داریم:

$$d, 3d, 9d$$

که از مقایسه با استفاده از فرمول $r=\frac{a_2}{a_1}$، مقدار قدرنسبت دنباله هندسی برابر ۳ به دست می‌آید.

حواستون باشه‌ها راه حل دیگر این سوال در پاسخنامه سوالات تشریحی شماره سوال ۹ آمده است.

۲۱- گزینه «۳» دشوار

اگر جملات این دنباله را به‌صورت

$\{1\}$ دسته اول

$\{2,3\}$ دسته دوم

$\{4,5,6\}$ دسته سوم

$\{7,8,9,10\}$ دسته چهارم

درنظر بگیریم متوجه می‌شویم که جملات انتهایی هر دسته دنباله مثلثی است و از رابطه‌ای که در دهم یاد گرفتیم می‌دانیم دنباله‌های مثلثی از رابطه $\frac{n(n+1)}{2}$ به دست می‌آید پس جمله آخر دسته بیستم از رابطه $\frac{20(21)}{2}$ به دست می‌آید پس دسته بیستم $s\{191,\dots,210\}$

$$S_{20}=\frac{20}{2}[191+210]=4010$$

۲۲- گزینه «۲» آسان

اولین عدد دو رقمی مضرب ۷ و آخرین عدد دو رقمی مضرب ۷ را پیدا کنید.

$14, 21, \dots, 98$

حالا تعداد جملات را حساب کنید.

$$n=\frac{98-14}{7}+1=13$$

و در آخر S_{13} را حساب می‌کنیم:

$$S_{13}=\frac{13}{2}[2(14)+(12)(7)] \Rightarrow S_{13}=\frac{13}{2}[28+84]=728$$

۲۳- گزینه «۳» متوسط

اگر دسته‌ها را به‌صورت

$\{1\}$

$\{2,3,4\}$

$\{5,6,7,8,9\}$

در نظر بگیریم متوجه می‌شیم جمله آخر هر دسته مربع کامل شماره آن دسته یعنی n^2 است پس دسته نهم به‌صورت $\{8^2+1,\dots,9^2\}$

حواستون به این نکته باشه که جمله اول دسته نهم، یدونه بیشتر از جمله آخر دسته هشتم است.

حالا واسطه حسابی که از رابطه $b=\frac{a+c}{2}$ حساب می‌شه را محاسبه می‌کنیم.

$$b=\frac{8^2+1+9^2}{2}=\frac{64+1+81}{2}=73$$

۲۴- گزینه «۱» دشوار

اول از همه حواستون باشه که گفته اعداد حسابی **n**، یعنی جملات به‌صورت:

$$\underset{1+}{\downarrow}a_0+\underset{4+}{\downarrow}a_1+\underset{1+a+}{\downarrow}a_2+\underset{2+}{\downarrow}a_3+\underset{2+}{\downarrow}a_4+\underset{1+a+}{\downarrow}a_5+\underset{4+}{\downarrow}a_6+\underset{0+}{\downarrow}a_7+\underset{2+}{\downarrow}a_8+a_9=19$$
$$a+8=19$$
$$3a+25=19 \Rightarrow 3a=-6 \Rightarrow a=-2$$

$$a_2+a_5+a_8+\dots+a_{29}=([\tfrac{2}{2}]+a)+([\tfrac{5}{3}]+a)+\dots+([\tfrac{29}{11}]+a)$$
$$(1-2)+(1-2)+(1-1)+(1-1)+(1-1)+(1-1)+(1-1)$$
$$+(1-1)+(1-1)+(1-1)=-2$$

حواستون باشه‌ها! شاید علامت [ ] براکت رو هنوز بلد نباشید پس بدونید که [ ] بزرگ‌ترین عدد صحیح سمت چپ رو خروجی می‌ده مثلاً $[2/3]=2$

۲۵- گزینه «۴» دشوار

اول از همه حواستون به قدرنسبت طبیعی و بزرگ‌تر از یک باشد که این یعنی جملات دنباله‌ها افزایشی هستند. نکته دوم اینجاست که دنباله ۵ جمله داره پس بزرگ‌ترین جمله t_5 هست نکته سوم این که چون $t_5 = t_1 q^4$ هست قدرنسبت قطعاً از ۴ بزرگ‌تر نیست چون $q^4 = 4^4$ ۲۵۶ می‌شه که بزرگ‌تر از مجموعه داده شده است پس:

$$q=2 \Rightarrow \begin{cases} t_1=1 \xrightarrow{\text{دنباله}} 1,2,4,8,16 \\ t_1=2 \xrightarrow{\text{دنباله}} 2,4,8,16,32 \\ t_1=3 \xrightarrow{\text{دنباله}} 3,6,12,24,48 \\ t_1=4 \xrightarrow{\text{دنباله}} 4,8,16,32,64 \\ t_1=5 \xrightarrow{\text{دنباله}} 5,10,20,40,80 \\ t_1=6 \xrightarrow{\text{دنباله}} 6,12,24,48,96 \end{cases}$$

پس به طور کلی ۷ دنباله با این شرط می توان یافت:

$$q=3 \Rightarrow t_1=1 \xrightarrow{\text{دنباله}} 1,3,9,27,81$$

۲۶- گزینه «۳» دشوار

اگر به دسته‌ها به‌صورت

$\{1\}$ دسته اول

$\{2,3\}$ دسته دوم

$\{4,5,6\}$ دسته سوم

$\{7,8,9,10,11,12\}$ دسته چهارم

با نگاه کردن جملات آخر هر دسته متوجه دنباله $3,6,12,24,\ldots$ می‌شویم که با استفاده از جمله عمومی (به جز دسته اول) $a_n = 3\times 2^{n-2}$. پس جمله آخر دسته سیزدهم $a_{13} = 3\times 2^{11}$ خواهد بود. همچنین اگر جمله آخر دسته دوازدهم را حساب کنیم عدد بعدی آن جمله اول دسته سیزدهم را خواهد داد پس $a_{12} = 3\times 2^{10}$. حالا دسته سیزدهم $\{3\times 2^{10}+1,\ldots,3\times 2^{11}\}$ حواستون باشه‌ها! چون دنباله حسابی است میانگین تمام اعضا با میانگین عضو اول و آخر برابر خواهد بود پس:

$$\frac{(3\times 1024+1)+(3\times 2^{11})}{2} = \frac{3073+6144}{2} = 4608/5$$

۲۷- گزینه «۲» دشوار

تیکه اول سوال راجع‌به سه جمله متوالی یک دنباله هندسی صحبت می‌کند پس a, aq, aq^2 داریم بعدش این جملات به ترتیب در ۴، ۸، ۱۶ ضرب می‌شوند و جملات دنباله حسابی به صورت $4a, 8aq, 16aq^2$ هستند. و در دنباله‌های حسابی از واسطه حسابی می‌دانیم $2b = a + c$ پس:

$$2(8aq) = 4a + 16aq^2 \Rightarrow \cancel{16}a\cancel{q} = \cancel{4}a(1+4q^2)$$

$$4q = 1+4q^2 \Rightarrow 0 = 4q^2-4q+1 \Rightarrow 0 = (2q-1)^2 \Rightarrow q = \frac{1}{2}$$

و در آخر ارتباط بین جملات حسابی و هندسی را توضیح داده

$$a^2 + (aq)^2 + (aq^2)^2 = 4a + 8aq + 16aq^2$$

$$\xrightarrow{q=\frac{1}{2}} \frac{21}{16}a^2 = 12a \Rightarrow a = \frac{64}{7}$$

۲۸- گزینه «۴» آسان

خب این سوال منبع انرژی دهنده کنکور ۱۴۰۱ بوده دیگه!

$$d = \frac{a_{10}-a_5}{10-5} = \frac{5-8}{5} = -\frac{3}{5}$$

$$a_5 = a_1 + 4d$$

$$8 = a_1 + 4(-\frac{3}{5}) \Rightarrow 8 + \frac{12}{5} = a_1 \Rightarrow \frac{52}{5} = a_1$$

حالا با بسط جمله شانزدهم داریم:

$$a_{16} = a_1 + 15d = \frac{52}{5} + 15(-\frac{3}{5}) = \frac{52-45}{5} = \frac{7}{5} = 1/4$$

۲۹- گزینه «۴» دشوار

حواستون باشه‌ها! الگو خطی $t_n = an + b$ و دنباله حسابی $t_n = t_1 + (n-1)d$

کافیه قدم به قدم صورت سوال را معنی کنیم. جمله‌ی چهارم دنباله حسابی با جمله دوم الگو خطی برابر هستند یعنی:

$$t_1 + 3d = 2a + b$$

همچنین جمله هشتم دنباله حسابی با جمله هفتم الگو خطی برابر هستند یعنی:

$$t_1 + 7d = 7a + b$$

حالا گفته که جمله دهم الگو خطی صفر است یعنی:

$$10a + b = 0 \Rightarrow b = -10a \quad (*)$$

با جای‌گذاری * در اطلاعات بالا و حل دستگاه خواهیم داشت:

$$\begin{cases} -t_1 - 3d = 8a \\ t_1 + 7d = -3a \end{cases}$$

$$4d = 5a \Rightarrow d = \frac{5}{4}a$$

و در آخر نسبت جمله پانزدهم به قدرنسبت:

$$\frac{15a+b}{d} = \frac{15a-10a}{d} = \frac{5a}{\frac{5}{4}a} = 4$$

۳۰- گزینه «۲» متوسط

تنها دنباله‌ای که هم حسابی و هم هندسی باشند دنباله ثابت است که در آن $d = 0, r = 1$ هست پس $r + d = 1$

۱- آسان

ما برای معادلات درجه ۲ در سال دهم یاد گرفتیم که ریشه‌های آن را از راه تجزیه، ریشه‌گیری، مربع کامل و فرمول کلی (Δ) و یا روش تستی می‌توان پیدا کرد. در سال یازدهم روش **t** نیز به این روش‌ها اضافه می‌شود.

آ) $۳x^۲-۵x+۲=۰ \Rightarrow (۳x-۲)(x-۱)=۰ \Rightarrow \begin{cases} x=\frac{۲}{۳} \\ x=۱ \end{cases}$

ب) $۲x^۳+x^۲+۳x=۰ \xrightarrow{\text{فاکتورگیری}} x(۲x^۲+x+۳)=۰$

$\Rightarrow x_۱=۰, ۲x^۲+x+۳=۰ \Rightarrow \Delta<۰$ ریشه ندارد

پ) $x^۴-۳x^۲-۴=۰ \xrightarrow[\text{هرگاه عبارتی تکراری در معادلات یافتید آن را t بگیرید}]{x^۲=t}$

$t^۲-۳t-۴=۰ \xrightarrow[x_۱=-۱, x_۲=-\frac{c}{a}]{\text{چون } a+c=b \text{ پس}} t_۱=-۱, t_۲=۴$

$\xrightarrow{x^۲=t} x^۲=-۱$ ریشه ندارد $\quad x^۲=۴ \Rightarrow x=\pm ۲$

ت) $(۴-x^۲)^۲-(۴-x^۲)-۱۲=۰ \xrightarrow{۴-x^۲=t} t^۲-t-۱۲=۰$

$\xrightarrow{\text{جمله مشترک}} (t-۴)(t+۳)=۰$

$t_۱=۴, t_۲=-۳ \xrightarrow{۴-x^۲=t} \begin{cases} ۴-x^۲=۴ \Rightarrow x^۲=۰ \Rightarrow x=۰ \\ ۴-x^۲=-۳ \Rightarrow ۷=x^۲ \Rightarrow x=\pm\sqrt{۷} \end{cases}$

ث) $(\frac{x^۲}{۳}-۲)^۲-۷(\frac{x^۲}{۳}-۲)+۶=۰ \xrightarrow{\frac{x^۲}{۳}-۲=t}$

$t^۲-۷t+۶=۰ \xrightarrow[\text{یکی ۱ و دیگری } \frac{c}{a} \text{ است}]{\text{چون جمع ضرایب صفر است ریشه‌ها}} t_۱=۱, t_۲=۶$

$\xrightarrow{\frac{x^۲}{۳}-۲=t} \begin{cases} \frac{x^۲}{۳}-۲=۱ \Rightarrow \frac{x^۲}{۳}=۳ \Rightarrow x^۲=۹ \Rightarrow x=\pm ۳ \\ \frac{x^۲}{۳}-۲=۶ \Rightarrow \frac{x^۲}{۳}=۸ \Rightarrow x^۲=۲۴ \Rightarrow x=\pm ۲\sqrt{۶} \end{cases}$

۲- آسان

حواستان باشه‌ها! روش دیگری که برای یافتن صفرهای تابع یا ریشه‌های آن استفاده می‌کنند زمانی که ۱ ریشه عبارت را داشته باشند، تقسیم چکشی است. یعنی $f(x)$ بر $x-a$ بخش‌پذیر است اگر **a** یک ریشه $f(x)$ باشد.

چون یکی از ریشه‌های این تابع (-۲) است پس عبارت بر $x+۲$ بخش‌پذیر است. یعنی:

$f(-۲)=۰$

$(-۲)^۳+k(-۲)^۲-(-۲)-۲=۰ \Rightarrow -۸+۴k+۲-۲=۰$

$\Rightarrow ۴k=۸ \Rightarrow k=۲$

پس $f(x)=x^۳+۲x^۲-x-۲$ است. حال با تقسیم چکشی عبارت بر $x+۲$ تجزیه آن را داریم:

$$\begin{array}{r|l} x^۳+۲x^۲-x-۲ & x+۲ \\ \hline -x^۳+۲x^۲ & x^۲-۱ \\ \hline -x-۲ & \\ +x+۲ & \\ \hline ۰ & \end{array}$$

تجزیه عبارت $(x+۲)(x^۲-۱)$ پس $(x+۲)(x-۱)(x+۱)=۰$ و ریشه‌ها به‌صورت:

$x_۱=-۲, x_۲=۱, x_۳=-۱$

۳- آسان

حواستان باشه‌ها! برای نوشتن معادله درجه دو زمانی که ریشه‌های آن را دارید از رابطه $x^۲-sx+p=۰$ استفاده می‌کنید.

$p=\alpha\beta=\frac{c}{a}, s=\alpha+\beta=-\frac{b}{a}$

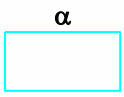
$s=۲+\sqrt{۳}+۲-\sqrt{۳}=۴$

$p=(۲+\sqrt{۳})(۲-\sqrt{۳})=۴-۳=۱$

پس معادلهٔ درجه ۲ به‌صورت $x^۲-۴x+۱=۰$ است.

۴- آسان

مستطیل روبه‌رو را درنظر بگیرید با توجه به اطلاعات مستطیل اگر α, β را ریشه‌های معادلهٔ درجه ۲ درنظر بگیریم خواهیم داشت:



محیط: $۲(\alpha+\beta)=۱۱ \Rightarrow \alpha+\beta=\frac{۱۱}{۲}=s$

مساحت $\alpha\beta=۶=p$

$x^۲-\frac{۱۱}{۲}x+۶=۰ \Rightarrow ۲x^۲-۱۱x+۱۲=۰$

$\Rightarrow \Delta=b^۲-۴ac=(-۱۱)^۲-۴(۲۴)=۱۲۱-۹۶=۲۵$

چون دلتا مثبت است پس این معادله ۲ ریشه دارد.

ریشه‌ها: $\frac{۱۱\pm ۵}{۲(۲)} \Rightarrow \begin{cases} \alpha=\frac{۱۶}{۴}=۴ \\ \beta=\frac{۶}{۴}=\frac{۳}{۲} \end{cases}$

۵- متوسط

حواستان باشه‌ها! در کتاب درسی روابطی که برای **s** و **p** بیان شده تنها

$$s=\alpha+\beta=\frac{b}{a}\quad,\quad p=\alpha\beta=\frac{c}{a}$$

$$|\alpha-\beta|=\frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}$$

روابط به دست آمده در قسمت آ و ب و ک و هـ را به خاطر بسپارید.

در معادلهٔ داده شده $2x^2-6x+3=0$ است پس: $p=\frac{3}{2}, s=3$

آ) $(\alpha+\beta)^2=\alpha^2+\beta^2+2\alpha\beta\Rightarrow s^2=\alpha^2+\beta^2+2p$

$\Rightarrow s^2-2p=\alpha^2+\beta^2$

$\alpha^2+\beta^2=(3)^2-2(\frac{3}{2})=9-3=6$

ب) $(\alpha+\beta)^3=\alpha^3+\beta^3+3\alpha\beta(\alpha+\beta)\Rightarrow s^3=\alpha^3+\beta^3+3ps$

$\Rightarrow s^3-3ps=\alpha^3+\beta^3$

$\alpha^3+\beta^3=(3)^3-3(\frac{3}{2}\times3)=27-\frac{27}{2}=\frac{27}{2}$

پ) $(\alpha^2+\beta^2)^2=\alpha^4+\beta^2+2(\alpha\beta)^2\Rightarrow(s^2-2p)^2=\alpha^4+\beta^4+2p^2$

$\Rightarrow (s^2-2p)^2=\alpha^4+\beta^4$

$(6)^2-2(\frac{3}{2})^2=36-2(\frac{9}{4})=36-\frac{9}{2}=\frac{63}{2}$

ت) $\left.\begin{matrix}\alpha^3+\beta^3=s^3-3ps=\frac{27}{2}\\ \alpha^2+\beta^2=s^2-2p=6\end{matrix}\right\}\xrightarrow[\text{شوند}]{\text{در هم ضرب}}$

$(\alpha^3+\beta^3)(\alpha^2+\beta^2)=\frac{27}{2}\times6\Rightarrow\alpha^5+\alpha^3\beta^2+\alpha^2\beta^3+\beta^5=81$

$\Rightarrow\alpha^5+\alpha^2\beta^2(\alpha+\beta)+\beta^5=81\Rightarrow\alpha^5+\beta^5=81-\alpha^2\beta^2(\alpha+\beta)$

$\alpha^5+\beta^5=81-p^2(s)=81-[\frac{9}{4}\times3]=\frac{297}{4}$

ث) $(\alpha^3+\beta^3)^2=\alpha^6+\beta^6+2(\alpha\beta)^3$

$(s^3-3ps)^2-2p^3=\alpha^6+\beta^6\Rightarrow(\frac{27}{2})^2-2(\frac{3}{2})^3=\alpha^6+\beta^6$

$=\frac{729}{4}-\frac{54}{8}=\alpha^6+\beta^6\Rightarrow175/5=\alpha^6+\beta^6$

ج) $\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}=A\xrightarrow[\text{به توان۲}]{\text{طرفین}}\alpha+\beta+2\sqrt{\alpha\beta}=A^2\Rightarrow s+2\sqrt{p}=A^2$

$\sqrt{s+2\sqrt{p}}=A\Rightarrow\sqrt{6+2\sqrt{\frac{3}{2}}}$

چ) $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}=\frac{s}{p}=\frac{3}{\frac{1}{3}}=2$

ح) $\beta\sqrt{\beta}+\alpha\sqrt{\alpha}=A\xrightarrow{\text{توان ۲}}(\beta\sqrt{\beta}+\alpha\sqrt{\alpha})^2=A^2$

$\Rightarrow\beta^3+\alpha^3+2\alpha\beta\sqrt{\alpha\beta}=A^2$

$s^3-3ps+2p\sqrt{p}=A^2$

$\sqrt{3^3-3(\frac{9}{2})+2(\frac{3}{2})\sqrt{\frac{3}{2}}}=\sqrt{\frac{27}{2}+3\sqrt{\frac{3}{2}}}$

خ) $\frac{\sqrt{\alpha}}{\beta}+\frac{\sqrt{\beta}}{\alpha}=\frac{\alpha\sqrt{\alpha}+\beta\sqrt{\beta}}{\alpha\beta}\overset{\text{قسمت (ج)}}{=\!=}\frac{\sqrt{\frac{27}{2}+3\sqrt{\frac{3}{2}}}}{\frac{3}{2}}=\frac{2\sqrt{\frac{27}{2}+3\sqrt{\frac{3}{2}}}}{3}$

د) $\alpha\beta^4+\beta\alpha^4=\alpha\beta(\beta^3+\alpha^3)=p(s^3-3ps)=\frac{3}{2}(27-3(\frac{9}{2}))$

$=\frac{3}{2}(27-\frac{27}{2})\Rightarrow\frac{3}{2}(\frac{27}{2})=\frac{81}{4}$

۶- آسان

حواستان باشه! رأس سهمی زمانی که دهنه سهمی بـه سـمت بالاسـت $(a>0)$ مینیمم سهمی محسوب می‌شود (min) و رأس سهمی زمانی که دهنـه سـهمی به سمت پایین است $(a<0)$ ماکسیمم سهمی است. (max)

آ) $f(x)=-2x^2+8x-5\Rightarrow\begin{cases}x_S=-\frac{b}{2a}=\frac{-8}{2(-2)}=\frac{-8}{-4}=2\\ y_S=-\frac{\Delta}{4a}\text{ یا }x_S\text{ جایگذاری}\end{cases}$

$y_S=-2(2)^2+8(2)-5=-8+16-5=3$

چون دهنه سهمی به سمت پایین است ماکسیمم است.

ب) $g(x)=3x^2+6x+5\Rightarrow\begin{cases}x_S=\frac{-6}{6}=-1\\ y_S=3(-1)^2+6(-1)+5=3-6+5=2\end{cases}$

چون دهنه سهمی به سمت بالا است مینیمم است.

۷- آسان

حواستان باشه‌ها! برای نوشتن معادله سهمی زمانی که دو ریشه داده شده باشـد از رابطه $y=a(x-\alpha)(x-\beta)$ و زمانی که رأس سـهمی داده شـده باشـد از رابطه $y=a(x-x_S)^2+y_S$ استفاده می‌کنیم.

آ) در این سهمی محور تقارن داده شده است و از سال دهم می‌دانیم که فاصـله ریشه‌ها تا محور تقارن سهمی یکسان است پس ریشه دیگر ایـن سـهمی $x=4$ است.

$y=a(x-2)(x-4)\Rightarrow4=a(0-2)(0-4)\Rightarrow4=8a$

$4=8a\Rightarrow\frac{1}{2}=a$

$y=\frac{1}{2}(x^2-6x+8)=\frac{1}{2}x^2-3x+4$

ب) در این شکل رأس سهمی داده شده است پس:

$y=a(x-2)^2+1\Rightarrow0=a(1-2)^2+1\Rightarrow0=a+1\Rightarrow-1=a$

$y=-1(x-2)^2+1\Rightarrow y=-(x^2-4x+4)+1=-x^2+4x-3$

۸- آسان

حواستان باشه‌ها! در معادله درجه۲ $ax^۲+bx+c$

۱- علامت **a**: دهنه سهمی (بالا **a** مثبت، پایین **a** منفی)

۲- علامت **b**: روش کتاب (از روی x_S تعیین می‌شود) روش دیگر (شیب محل برخورد با محور **y**ها)

۳- علامت **c**: محل برخورد با محور **y**ها

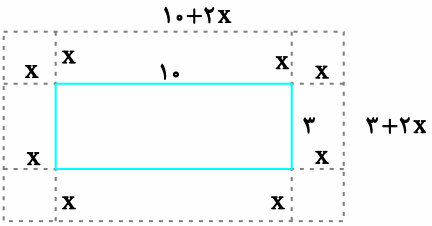
۴- علامت Δ : تعداد محل برخورد با محور **x**ها

در این سهمی چون دهنه سهمی به سمت بالاست پس $a \geq ۰$ است. چون x_S در قسمت منفی‌هاست پس $x_S = \frac{-b}{۲a} \leftarrow (-) = \frac{-(b)}{۲(+)}$ پس $b > ۰$

چون محل برخورد با محور **y**ها مثبت است پس $c > ۰$ و در آخر چون ۲ ریشه دارد $\Delta > ۰$

۹- متوسط

مساحت آبراه از تفاضل مساحت‌های دو مستطیل در شکل مقابل به دست می‌آید:

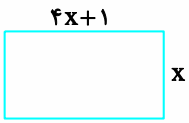


$(۱۰+۲x)(۳+۲x)-۱۰\times۳=۱۴$

$۴x^۲+۲۶x+۳۰-۳۰=۱۴ \Rightarrow ۴x^۲+۲۶x-۱۴=۰$

$(۴x-۲)(x+۷)=۰ \Rightarrow x=\frac{۱}{۲}, x=-۷$ غ ق ق

۱۰- آسان



مساحت $= S$

S دیوار = (S یک کاشی) × (تعداد کاشی)

$S = ۶۰۰۰\ cm^۲$ یک کاشی $\times ۲۰۰۰$

$S = ۳\ cm^۲$ یک کاشی

$S = (۴x+۱)(x)$ کاشی

$۳ = ۴x^۲+x \Rightarrow ۰ = ۴x^۲+x-۳$

$x_۱ = -۱, x_۲ = \frac{۳}{۴}$ غ ق ق

طول کاشی: $۴x+۱ = ۴(\frac{۳}{۴})+۱ = ۴$

۱۱- آسان

حواستان باشه‌ها! ۱- ریشه مضاعف یعنی $\Delta = ۰$

$\Delta = ۰ \Rightarrow b^۲-۴ac = ۰ \Rightarrow ۱۶-۴(m^۲-۳m) = ۰ \Rightarrow ۱۶-۴m^۲+۱۲m = ۰$

$۴m^۲-۱۲m-۱۶ = ۰ \Rightarrow ۴(m^۲-۳m-۴) = ۰ \Rightarrow m = -۱, m = ۴$

اگر $m = -۱ \Rightarrow -x^۲+۴x-۴ = ۰ \Rightarrow x = \frac{-۴}{۲(-۱)} = ۲$ ریشه مثبت

اگر $m = ۴ \Rightarrow +۴x^۲+۴x+۱ = ۰ \Rightarrow x = \frac{-۴}{۲(۴)} = -\frac{۱}{۲}$ ریشه منفی

پس $m = -۱$ قابل قبول است چون ریشه مثبت تولید کرده است.

۱۲- آسان

حواستان باشه‌ها! ۱- معادله درجه دوم زمانی دو ریشه حقیقی متمایز دارد که $\Delta > ۰$

۲- در معادله درجه دوم ضریب $x^۲$ نباید صفر باشد.

$\Delta > ۰ \Rightarrow b^۲-۴ac > ۰ \Rightarrow ۳۶-۴(۲m^۲-۵m+۲) > ۰$

$۹-۲m^۲+۵m-۲ > ۰ \Rightarrow -۲m^۲+۵m+۷ > ۰$

$m = -۱, m = \frac{۷}{۲}$

x	$-\infty$	-۱		$\frac{۷}{۲}$	$+\infty$
	-		+		-

ج

$(-۱, \frac{۷}{۲})$

$a \neq ۰ \Rightarrow m \neq \frac{۱}{۲}$

با اشتراک دو شرط خواهیم داشت $(-۱, \frac{۷}{۲}) - \{\frac{۱}{۲}\}$

۱۳- دشوار

حواستان باشه‌ها! معادله درجه ۴، زمانی ۴ ریشه حقیقی متمایز دارد که $S > ۰$، $P > ۰$ و $\Delta > ۰$

۱) $s > ۰ \Rightarrow \frac{m+۲}{۱} > ۰ \Rightarrow m > -۲$

۲) $p > ۰ \Rightarrow \frac{m+۵}{۱} > ۰ \Rightarrow m > -۵$

۳) $\Delta > ۰ \Rightarrow b^۲-۴ac > ۰ \Rightarrow (m+۲)^۲-۴(m+۵) > ۰$

$\Rightarrow m^۲+۴m+۴-۴m-۲۰ > ۰$

$m^۲-۱۶ > ۰ \Rightarrow m > ۴$ یا $m < -۴$

از اشتراک این سه شرط خواهیم داشت: $m > ۴$

۱۴- متوسط

حواستان باشه‌ها! در معادله درجه دوم $ax^۲+bx+c=۰$ مجموع مربعات ریشه‌ها:

$$\alpha^۲+\beta^۲=s^۲-۲p$$

و در آخر همیشه شرط $\Delta>۰$ چک شود.

$$۲x^۲+(m-۱)x-۱=۰$$

$$\alpha^۲+\beta^۲=s^۲-۲p=(\frac{-(m-۱)}{۲})^۲-۲(\frac{-۱}{۲})=\frac{۱۳}{۴}$$

$$\frac{m^۲-۲m+۱}{۴}+۱=\frac{۱۳}{۴} \Rightarrow \frac{m^۲-۲m+۱}{۴}=\frac{۹}{۴}$$

$$\Rightarrow m^۲-۲m+۱=۹ \Rightarrow m^۲-۲m-۸=۰$$

$$(m-۴)(m+۲)=۰ \Rightarrow m=۴, m=-۲$$

اگر $m=۴ \Rightarrow ۲x^۲+۳x-۱=۰ \Rightarrow \Delta=۹-۴(-۲)=۹+۸=۱۷>۰$

اگر $m=-۲ \Rightarrow ۲x^۲-۳x-۱=۰ \Rightarrow \Delta=۹-۴(-۲)=۱۷>۰$

هر دو قابل قبول هستند چون $\Delta>۰$ را حفظ کرده‌اند.

۱۵- دشوار

حواستان باشدها! اگر از فرمول‌های مربوط به α و β نتوانستیم استفاده کنیم از تعریف ریشه استفاده می‌کنیم

$$x^۲-۲x-۴=۰ \quad s=۲, p=۴$$

چون α ریشه معادله است پس در آن صدق می‌کند درنتیجه:

$$\alpha^۲-۲\alpha-۴=۰ \Rightarrow \alpha^۲-۴=۲\alpha$$

در نتیجه در عبارت $(\alpha^۲-۴)^۲+۴\beta^۲$ می‌توان ۲α را جای‌گذاری کرد پس:

$$(۲\alpha)^۲+۴\beta^۲=۴\alpha^۲+۴\beta^۲=۴(\alpha^۲+\beta^۲)=۴(s^۲-۲p)$$

$$=۴(۴-۲(-۴))=۴(۴+۸)=۴(۱۲)=۴۸$$

۱۶- متوسط

حواستون باشه‌ها! شرط آن که معادله درجه دو، ۲ ریشه حقیقی مثبت داشته باشد:

$$\Delta\geq۰, s>۰, p>۰$$

۱) $s>۰ \Rightarrow \frac{۲m+۲}{۱}>۰ \Rightarrow ۲m>-۲ \Rightarrow m>-۱$

۲) $p>۰ \Rightarrow \frac{m^۲-۴}{۱}>۰ \Rightarrow m^۲>۴ \Rightarrow m>۲$ یا $m<-۲$

۳) $\Delta\geq۰ \Rightarrow (۲m+۲)^۲-۴(m^۲-۴)\geq۰$

$$\Rightarrow ۴m^۲+۸m+۴-۴m^۲+۱۶\geq۰ \Rightarrow ۸m\geq-۲۰ \Rightarrow m\geq-\frac{۲۰}{۸}$$

با اشتراک سه شرط خواهیم داشت: $m>۲$

۱۷- متوسط

حواستان باشه‌ها! معادله درجه دو زمانی دو ریشه حقیقی متمایز منفی دارد که:

$$\Delta>۰, s<۰, p>۰$$

x		۰		۵	
	+		−	∄	+

۱) $s<۰ \Rightarrow \frac{۲a}{a-۵}<۰$ $\quad ۰<a<۵$

۲) $p>۰ \Rightarrow \frac{-۴}{a-۵}>۰ \Rightarrow a-۵<۰ \Rightarrow a<۵$

۳) $\Delta>۰ \Rightarrow ۴a^۲-۴(-۴a+۲۰)>۰ \Rightarrow ۴a^۲+۱۶a-۸۰>۰ \xrightarrow{\div ۴}$

$$a^۲+۴a-۲۰>۰$$

$$\Delta=+۱۶-۴(-۲۰)=۱۶+۸۰=۹۶$$

$$a=\frac{-۴\pm۴\sqrt{۶}}{۲}$$

$$\{a<-۲-۲\sqrt{۶}\}\cup\{a>-۲+۲\sqrt{۶}\}$$

اشتراک این سه جواب جواب نهایی سوال است. $-۲+۲\sqrt{۶}<a<۵$

۱۸- دشوار

حواستون باشه‌ها! به معادلاتی به فرم $ax+b\sqrt{x}+c=۰$ معادلات نیم مجذوری گفته می‌شود و زمانی این معادلات ۱ ریشه حقیقی دارند که $p<۰$

x		۱		۲	
	−	∞	+	۰	−

$$p<۰ \Rightarrow \frac{-m+۲}{m-۱}<۰$$

$$m:(-\infty,۱)\cup(۲,+\infty)$$

۱۹- متوسط

حواستون باشه‌ها! از رابطهٔ برای نوشتن معادله استفاده می‌کنیم.

$$x^۲-۶s+۱=۰ \Rightarrow s=\alpha+\beta=-\frac{b}{a}=۶ \quad , p=\alpha\beta=\frac{c}{a}=۱$$

ما به دنبال معادله‌ای هستیم که جواب‌های آن $\frac{\alpha}{۲}-۱, \frac{\beta}{۲}-۱$ باشد پس:

$$\text{جدید } s=\frac{\alpha}{۲}-۱+\frac{\beta}{۲}-۱=\frac{\alpha+\beta}{۲}-۲ \xrightarrow{\alpha+\beta=۶} \frac{۶}{۲}-۲=۱$$

$$\text{جدید } p=(\frac{\alpha}{۲}-۱)(\frac{\beta}{۲}-۱)=\frac{\alpha\beta}{۴}-\frac{\alpha}{۲}-\frac{\beta}{۲}+۱=\frac{\alpha\beta}{۴}-(\frac{\alpha+\beta}{۲})+۱$$

$$=\frac{۱}{۴}-۳+۱=-\frac{۷}{۴}$$

پس معادله به‌صورت

$$x^۲-۱x-\frac{۷}{۴}=۰ \Rightarrow ۴x^۲-۴x-۷=۰$$

۲۰- دشوار

اگر ریشه‌های معادله $3x^2-4x+1=0$ را α,β درنظر بگیریم

$$s=\alpha+\beta=\frac{-b}{a}=\frac{4}{3}$$

$$p=\alpha\beta=\frac{c}{a}=\frac{1}{3}$$

پس ریشه‌های معادله $3x^2-7mx+2=0$ خواهد بود پس: α^3,β^3

جدید $s=\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)\xrightarrow[\alpha\beta=\frac{1}{3}]{\alpha+\beta=\frac{4}{3}}$

$$(\frac{4}{3})^3-3(\frac{1}{3}\times\frac{4}{3})=\frac{64}{27}-\frac{4}{3}=\frac{28}{27}$$

از طرفی از روی معادله $s=-\frac{b}{a}$ داریم $s=\frac{7m}{3}$ جدید

از تساوی این دو مقدار خواهیم داشت:

$$\frac{28}{27}=\frac{7m}{3}\Rightarrow m=\frac{4}{9}$$

۲۱- آسان

حواستون باشه‌ها!

۱- پایین‌ترین نقطه سهمی، رأس سهمی است $x_S=-\frac{b}{2a},y_S=\frac{-\Delta}{4a}$

۲- در ناحیه دوم $x<0$ و $y>0$ است.

$$x_S=-\frac{b}{2a}=\frac{+2m}{2(m-1)}<0$$

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
		+		−		+	

$0<m<1$ (۱)

$$y_S=\frac{-\Delta}{4a}=\frac{-[4m^2-4(m^2-4m+3)]}{4(m-1)}>0$$

$$\frac{-4m^2+4m^2-16m+12}{4(m-1)}>0\Rightarrow\frac{-16m+12}{4(m-1)}>0$$

$m=1,m=\frac{12}{16}=\frac{3}{4}$

x	$-\infty$		$\frac{3}{4}$		1		$+\infty$
		−		+		−	

$\frac{3}{4}<m<1$ (۲)

جواب نهایی اشتراک (۱) و (۲) است

$$\frac{3}{4}<m<1$$

۲۲- متوسط

حواستون باشه‌ها! سهمی زمانی از هر چهار ناحیه مختصات می‌گذرد که $p<0$

$$p<0\Rightarrow\frac{c}{a}<0\Rightarrow\frac{1}{2m-4}<0\Rightarrow 2m-4<0\Rightarrow m<2$$

۲۳- متوسط

اگر یک ریشه ۵ واحد از ریشه‌ی دیگر بزرگ‌تر باشد می‌توان نوشت $\alpha=5+\beta$

از طرفی از روی معادله **s** و **p** را به دست آورده و $\alpha=5+\beta$ را در آنها جای‌گذاری می‌کنیم:

$$s=\frac{-b}{a}=\alpha+\beta\Rightarrow\frac{+3m}{m}=5+\beta+\beta\Rightarrow+3=5+2\beta$$

$$\Rightarrow-2=2\beta\Rightarrow\beta=-1,\alpha=4$$

$$p=\frac{c}{a}=\alpha\beta\Rightarrow\frac{m^2}{m}=+4\Rightarrow m^2-4m=0\Rightarrow m(m-4)=0$$

$$m\neq0,m=4$$

۲۴- آسان

چون یک ریشه۲برابر ریشه دیگر است پس: $\alpha=2\beta$

$$s=\alpha+\beta=\frac{-b}{a}$$

$$2\beta+\beta=9\Rightarrow3\beta=9\Rightarrow\beta=3,\alpha=6$$

$$p=\alpha\beta=\frac{c}{a}\Rightarrow18=\frac{m+1}{1}\Rightarrow m=17$$

حواستون باشه‌ها! این سوال اگر تشریحی نبود می‌توانستیم از فرمول $\alpha=k\beta$ استفاده کنیم.

$$\frac{(k+1)^2}{k}=\frac{b^2}{ac}$$

۲۵- متوسط

ابتدا معادله را مرتب می‌کنیم:

$$ax^2+3ax-a^2+2=0$$

حواستون باشه‌ها! ریشه‌ها معکوس یکدیگرند یعنی $\alpha=\frac{1}{\beta}$ و یا به عبارتی $a=c$

$$a=-a^2+2\Rightarrow a^2+a-2=0\Rightarrow(a+2)(a-1)=0\Rightarrow\begin{cases}a=-2\\a=1\end{cases}$$

چون هر دو $\Delta>0$ است پس قابل قبول هستند در نتیجه مجموع مقادیر **a**:

مجموع مقادیر $a=-2+1=-1$

۲۶- متوسط

حواستون باشه‌ها! ۱- معادله درجه دو زمانی دو ریشه قرینه دارد که $b=0$

۲- چک کردن $\Delta>0$

$$1)\ 2m^2-3m=0\Rightarrow m(2m-3)=0\Rightarrow\begin{cases}m=0\\m=\frac{3}{2}\end{cases}$$

پس $m=0$ قابل قبول است.

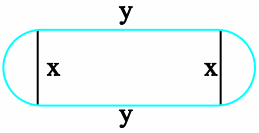
اگر $m=0\Rightarrow3x^2-4=0\Rightarrow\Delta=0-4(-12)=48>0$

اگر $m=\frac{3}{2}\Rightarrow3x^2-\frac{5}{2}=0\Rightarrow\Delta=0-4(-\frac{15}{2})=30>0$

پس $m=\frac{3}{2}$ قابل قبول است.

۲۷- دشوار

محیط استادیوم تشکیل شده است از $۲y$ و محیط یک دایره کامل پس:



$$\text{محیط} = ۲\pi r + ۲y$$

$$۱۵۰۰ = ۲\pi(\frac{x}{۲}) + ۲y \Rightarrow ۱۵۰۰ = \pi x + ۲y$$

$$y = \frac{۱۵۰۰ - \pi x}{۲} = ۷۵۰ - \frac{\pi}{۲}x$$

آ) مستطیل $S = xy \Rightarrow S = x(\frac{۱۵۰۰ - \pi x}{۲}) \Rightarrow S = ۷۵۰x - \frac{\pi}{۲}x^۲$

ابعاد مستطیل:

$$x_S = \frac{-b}{۲a} = \frac{-۷۵۰}{۲(-\frac{\pi}{۲})} = \frac{۷۵۰}{\pi}$$

$$y_S = ۷۵۰ - \frac{\pi}{۲}(\frac{۷۵۰}{\pi}) = ۳۷۵$$

ب) استادیوم s = مستطیل s + دایره $s \Rightarrow$

$$\text{استادیوم } S = xy + \pi r^۲ = xy + \pi(\frac{x}{۲})^۲$$

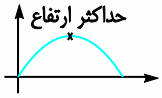
$$\text{استادیوم } S = x(۷۵۰ - \frac{\pi}{۲}x) + \pi\frac{x^۲}{۴} = ۷۵۰x - \frac{\pi}{۲}x^۲ + \frac{\pi}{۴}x^۲$$

$$= ۷۵۰x - \frac{\pi}{۴}x^۲$$

ابعاد مستطیل: $x_S = \frac{-۷۵۰}{۲(-\frac{\pi}{۴})} = \frac{-۷۵۰}{-\frac{\pi}{۲}} = \frac{۱۵۰۰}{\pi}$

$$y_S = ۷۵۰ - \frac{\pi}{۲}(\frac{۱۵۰۰}{\pi}) = ۷۵۰ - ۷۵۰ = ۰$$

۲۸- متوسط



آ) حداکثر ارتفاع توپ زمانی اتفاق می‌افتد که در رأس سهمی قرار داشته باشد پس:

$$y_S = \frac{-\Delta}{۴a} = \frac{-(۱ - ۴(۰))}{۴(-\frac{۱}{۴})} = \frac{-۱}{-۱} = ۱$$

ب) حداکثر مسافت طی شده زمانی اتفاق می‌افتد که توپ دوباره با زمین برخورد کند یعنی:

در زمان شروع $x = ۰ \Rightarrow -\frac{۱}{۴}x^۲ + x = ۰ \Rightarrow x(-\frac{۱}{۴}x + ۱) = ۰$

$$-\frac{۱}{۴}x = -۱ \Rightarrow x = ۴$$

پس از ۴ متر، بیش‌ترین مسافت را طی کرده است.

۲۹- دشوار

مرحله اول:

ابتدا درباره محیط نرده صحبت شده است پس $۲x + y = ۱۰۰ , y = ۱۰۰ - ۲x$ در مرحله دوم درباره‌ی بیش‌ترین مساحت سوال پرسیده است پس:

$$S = xy$$

اما این معادله در طرف دوم برحسب دو مجهول نوشته شده است پس، از اطلاعات مرحله اول استفاده می‌کنیم:

$$S = x(۱۰۰ - ۲x) \Rightarrow S = ۱۰۰x - ۲x^۲$$

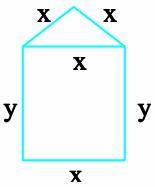
$$x_S = \frac{-b}{۲a} = \frac{-۱۰۰}{۲(-۲)} = \frac{۱۰۰}{۴} = ۲۵$$

چون ابعاد مستطیل خواسته است پس x_S را در رابطه y جای‌گذاری می‌کنیم:

$$y = ۱۰۰ - ۲(۲۵) = ۱۰۰ - ۵۰ = ۵۰$$

۳۰- دشوار

حواستون باشه‌ها! مساحت مثلث متساوی‌الاضلاع از رابطه $\frac{\sqrt{۳}}{۴}a^۲$ به دست می‌آید.



۱) ابتدا درباره محیط پنجره صحبت شده است

که $۳x + ۲y = ۴ \leftarrow y = \frac{۴ - ۳x}{۲}$

سپس درباره حداکثر نوردهی صحبت شده که به مساحت پنجره برمی‌گردد

$$S_{\text{پنجره}} = S_{\text{مستطیل}} + S_{\text{متساوی الاضلاع}}$$

این مساحت چون طرف دوم برحسب x و y نوشته شده است از اطلاعات (۱) استفاده می‌کنیم.

$$S_{\text{پنجره}} = \frac{\sqrt{۳}}{۴}x^۲ + xy$$

$$S = \frac{\sqrt{۳}}{۴}x^۲ + x(\frac{۴ - ۳x}{۲}) \Rightarrow S = \frac{\sqrt{۳}}{۴}x^۲ + ۲x - \frac{۳}{۲}x^۲$$

$$S = (\frac{\sqrt{۳}}{۴} - \frac{۳}{۲})x^۲ + ۲x$$

$x_S = \frac{-b}{۲a}$ این معادل درجه دوم زمانی ماکسیمم مقدار خود را می‌دهد که باشد پس:

$$x_S = \frac{-۲}{۲(\frac{\sqrt{۳}}{۴} - \frac{۳}{۲})} = \frac{-۱}{\frac{\sqrt{۳} - ۶}{۴}} = \frac{-۴}{\sqrt{۳} - ۶} = \frac{۴}{۶ - \sqrt{۳}}$$

و با جای‌گذاری در رابطه y

$$y = ۲ - \frac{۳}{۲}(\frac{۴}{۶ - \sqrt{۳}}) = ۲ - \frac{۶}{۶ - \sqrt{۳}} = \frac{۱۲ - ۲\sqrt{۳} - ۶}{۶ - \sqrt{۳}} = \frac{۶ - ۲\sqrt{۳}}{۶ - \sqrt{۳}}$$

۱- گزینه «۴» متوسط

اگر $x+\frac{۱}{x}=t$ درنظر بگیریم خواهیم داشت:

$$(x+\frac{۱}{x})^۲=(t)^۲ \Rightarrow x^۲+\frac{۱}{x^۲}+۲(x\cdot\frac{۱}{x})=t^۲ \Rightarrow x^۲+\frac{۱}{x^۲}=t^۲-۲$$

پس با جای‌گذاری در معادله خواهیم داشت:

$$t+t^۲-۲=۴ \Rightarrow t^۲+t-۶=۰ \Rightarrow (t+۳)(t-۲)=۰$$

$$t=-۳, t=۲$$

$$x+\frac{۱}{x}=۲ \Rightarrow x=۱$$

$$x+\frac{۱}{x}=-۳ \Rightarrow x^۲+۱+۳x=۰ \Rightarrow x^۲+۳x+۱=۰$$

$\Delta=۹-۴=۵ \Rightarrow$ ۲ ریشه دارد

۲- گزینه «۲» آسان

اگر $x^۲+۲x=t$ درنظر بگیریم

$$t^۲+۱۰t-۳۹=۰ \Rightarrow (t+۱۳)(t-۳)=۰ \Rightarrow t=-۱۳, t=۳$$

$$\xrightarrow{t=۳} x^۲+۲x=۳ \Rightarrow x^۲+۲x-۳=۰ \Rightarrow x=۱, x=-۳$$

$$\xrightarrow{t=-۱۳} x^۲+۲x=-۱۳ \Rightarrow x^۲+۲x+۱۳=۰$$

$\Delta=۴-۴(۱۳) \Rightarrow \Delta=۴-۵۲=-۴۸$. ریشه ندارد.

۳- گزینه «۳» دشوار

حواستون باشه‌ها!

۱) ریشه، صفر کننده معادله است و اگر $x=a$ ریشه $f(x)$ باشد، $f(x)$ بر $x-a$ بخش‌پذیر است.

۲) $\alpha^۲+\beta^۲=s^۲-۲p$

چون یکی از ریشه‌های معادله را $x=۴$ داده است پس در ابتدا آن را صدق می‌دهیم.

$$(۴)^۳-۸(۴)^۲+a(۴)+۴=۰ \Rightarrow ۶۴-۱۲۸+۴a+۴=۰$$

$$\Rightarrow ۴a=۶۰ \Rightarrow a=۱۵$$

پس:

$$\begin{array}{r|l} x^۳-۸x^۲+۱۵x+۴ & x-۴ \\ \hline -x^۳+۴x^۲ & x^۲-۴x-۱ \\ \hline -۴x^۲+۱۵x+۴ & \\ -۴x^۲+۱۶x & \\ \hline -x+۴ & \\ -x+۴ & \\ \hline ۰ & \end{array}$$

پس تجزیه عبارت $(x-۴)(x^۲-۴x-۱)=۰$ خواهد بود با $p=۱, s=۴$

α, β ریشه‌های پرانتز دوم هستند پس

$$\alpha^۲+\beta^۲=s^۲-۲p=۱۶-۲(-۱)=۱۶+۲=۱۸$$

درنتیجه پاسخ $\alpha^۲+\beta^۲+a=۱۸+۱۵=۳۳$

۴- گزینه «۲» دشوار

چون $\sqrt{۳}-\sqrt{۵}$ یک ریشه معادله است پس:

$$x=\sqrt{۳}-\sqrt{۵} \xrightarrow{\text{طرفین به توان ۲}} x^۲=۳+۵-۲\sqrt{۱۵} \Rightarrow x^۲=۸-۲\sqrt{۱۵}$$

$$۲\sqrt{۱۵}=۸-x^۲ \xrightarrow{\text{طرفین به توان ۲}} ۶۰=۶۴+x^۴-۱۶x^۲$$

با مرتب کردن معادله خواهیم داشت:

$$x^۴-۱۶x^۲+۶۴-۶۰=۰ \Rightarrow x^۴-۱۶x^۲+۴=۰$$

درنتیجه $a=-۱۶, b=۴$ خواهد بود و $\frac{a}{b}=\frac{-۱۶}{۴}=-۴$

۵- گزینه «۱» آسان

حواستون باشه‌ها! ۱) در هر معادله‌ای اگر جمع ضرایب صفر باشد یکی از ریشه‌های آن معادله $x=۱$ است.

۲) اگر $f(a)=۰$ باشد $f(x)$ بر $x-a$ بخش‌پذیر است.

چون جمع ضرایب صفر است پس حتماً $x=۱$ یکی از ریشه‌هاست و عبارت بر $x-۱$ بخش‌پذیر است.

$$\begin{array}{r|l} ۳x^۳-۱۱x^۲+۵x+۳ & x-۱ \\ \hline -۳x^۳+۳x^۲ & ۳x^۲-۸x-۳ \\ \hline -۸x^۲+۵x+۳ & \\ +۸x^۲-۸x & \\ \hline -۳x+۳ & \\ +۳x-۳ & \\ \hline ۰ & \end{array}$$

پس تجزیه عبارت $(x-۱)(۳x^۲-۸x-۳)=۰$

$$\underset{\downarrow}{(x-۱)}\ \underset{\downarrow}{(۳x+۱)}\quad \underset{\downarrow}{(x-۳)}$$

$$(x=۱)+(x=-\frac{۱}{۳})+(x=۳)=\frac{۱۱}{۳}$$

۶- گزینه «۱» متوسط

حواستون باشه‌ها! اگر در معادله درجه دو $ax^۲+bx+c=۰$ با شرط $\Delta>۰$ یک ریشه **k** برابر ریشه دیگر باشد

$$\frac{(k+۱)^۲}{k}=\frac{b^۲}{ac}$$

$$\frac{(۲+۱)^۲}{۲}=\frac{۳^۲}{m^۲-m} \Rightarrow \frac{۹}{۲}=\frac{۹}{m^۲-m} \Rightarrow m^۲-m-۲=۰$$

$$(m-۲)(m+۱)=۰ \Rightarrow m=۲, m=-۱$$

شرط $\Delta>۰$

$$m=-۱ \Rightarrow -۲x^۲+۳x-۱=۰ \Rightarrow \Delta=۹-۴(۲)=۱>۰$$

$$m=۲ \Rightarrow x^۲+۳x+۲=۰ \Rightarrow \Delta=۹-۴(۲)=۱>۰$$

هر دو مقدار قابل قبول است.

مجموع مقادیر یک است.

۷- گزینه «۳» آسان

حواستون باشه‌ها! در سهمی‌ها زمانی که رأس سهمی داده شده باشد

$$y=a(x-x_S)^۲+y_S$$

چون در شکل رأس سهمی $\begin{bmatrix}۰\\۴\end{bmatrix}$ داده شده است پس $y=ax^۲+۴$

با جای‌گذاری نقطه $\begin{bmatrix}۱\\۲\end{bmatrix}$ در این معادله می‌توان **a** را یافت پس:

$$۲=a+۴ \Rightarrow -۲=a$$

پس $y=-۲x^۲+۴$ درنتیجه $c=۴, b=۰, a=-۲$

$$۲a-b+c=۲(-۲)-۰+۴=۰$$

۸- گزینه «۲» متوسط

در مرحله اول چون طول پاره‌خط **AB** داده شده است پس $x_B-x_A=۶$

در مرحله دوم چون x_S سهمی عدد ۲ داده شده است و می‌دانیم x_S وسط دو ریشه سهمی قرار دارد پس:

$$\frac{x_A+x_B}{۲}=۲ \Rightarrow x_A+x_B=۴$$

از نتایج به دست آمده در مرحله اول و دوم خواهیم داشت:

$$\begin{cases}x_B-x_A=۶\\x_B+x_A=۴\end{cases}$$

$$۲x_B=۱۰ \Rightarrow x_B=۵, x_A=-۱$$

در نتیجه ریشه‌های این سهمی -۱ و ۵ است پس می‌توان معادله سهمی نوشت:

$$y=a(x-۵)(x+۱) \xrightarrow[\text{جایگذاری}\ \begin{bmatrix}۲\\۳\end{bmatrix}]{} ۳=a(۲-۵)(۲+۱)$$

$$۳=a(-۳)(۳) \Rightarrow a=\frac{-۱}{۳}$$

در نتیجه معادله سهمی $y=-\frac{۱}{۳}(x-۵)(x+۱)$

پس $y=-\frac{۱}{۳}x^۲+\frac{۴}{۳}x+\frac{۵}{۳}$

$$b+c=\frac{۴}{۳}+\frac{۵}{۳}=\frac{۹}{۳}=۳$$

۹- گزینه «۲» دشوار

ابتدا با توجه به شکل باید معادله سهمی را بنویسیم. چون محل برخورد با محور **y**ها را داده است پس $c=۴$ و همچنین $y_S=-۳$, $\begin{bmatrix}۵\\۴\end{bmatrix}$ در معادله سهمی صدق می‌کند پس $y=ax^۲+bx+c$

$$y=ax^۲+bx+۴ \Rightarrow ۴=۲۵a+۵b+۴ \Rightarrow ۰=۲۵a+۵b$$

$$-۵b=۲۵a \Rightarrow b=-۵a \Rightarrow b^۲=۲۵a^۲ \quad (*)$$

از طرفی $y_S=-۳$ پس

$$-\frac{\Delta}{۴a}=-۳ \Rightarrow \frac{b^۲-۴(۴a)}{۴a}=۳ \Rightarrow ۲۵a^۲-۱۶a=۱۲a \Rightarrow ۲۵a^۲-۲۸a=۰$$

$$a(۲۵a-۲۸)=۰ \Rightarrow a=۰, a=\frac{۲۸}{۲۵}$$

یا جای‌گذاری در عبارت آسان

$$b^۲=۲۵\times\frac{۲۸^۲}{۲۵^۲}=\frac{۲۸^۲}{۲۵} \Rightarrow b=\frac{۲۸}{۵}$$

پس معادله‌ی سهمی به‌صورت $y=\frac{۲۸}{۲۵}x^۲+\frac{۲۸}{۵}x+۴$ است:

$$s=-۵, p=\frac{۵}{۷}$$

حالا ما معادله سهمی می‌خواهیم که ریشه‌های آن $\frac{۱}{\alpha}, \frac{۱}{\beta}$ باشد از رابطه $x^۲-sx+p=۰$

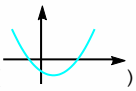
$$\text{جدید } s=\frac{۱}{\alpha}+\frac{۱}{\beta}=\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}=\frac{-۵}{\frac{۵}{۷}}=-۷$$

$$\text{جدید } p=(\frac{۱}{\alpha})(\frac{۱}{\beta})=\frac{۱}{\alpha\beta}=\frac{۱}{\frac{۵}{۷}}=\frac{۷}{۵}$$

پس معادلهٔ سهمی به‌صورت $x^۲+۷x+\frac{۷}{۵}=۰$ و یا مرتب شده آن

$$۵x^۲+۳۵x+۷=۰$$

۱۰- گزینه «۳» دشوار

مرحله اول سوال به تعیین علامت سهمی برمی‌گردد () پس یعنی ۲− و ۴ ریشه‌های سهمی هستند و دهنه سهمی به سمت بالاست. از طرفی چون عرض از مبدأ آن با سهمی داده شده یکی است پس $\begin{bmatrix}0\\5\end{bmatrix}$ در معادله صدق می‌کند. با استفاده از این اطلاعات داریم:

$$y=a(x-4)(x+2)\Rightarrow 5=a(0-4)(0+2)$$

$$5=a(-4)(2)\Rightarrow 5=-8a\Rightarrow -\frac{5}{8}=a$$

در نتیجه معادله سهمی $y=\frac{-5}{8}(x-4)(x+2)$

$$y=-\frac{5}{8}x^2+\frac{5}{4}x+5$$

مرحله آخر مفهوم خط مماس در رأس سهمی است که به معنای y_S است پس:

$$y_S=\frac{-\Delta}{4a}\Rightarrow y_S=\frac{45}{8}\Rightarrow y-\frac{45}{8}=0\Rightarrow 8y-45=0$$

۱۱- گزینه «۲» دشوار

در مرحله اول با توجه به معادله $3x^2-6x-2=0$ داریم:

$$s=\frac{\alpha}{3}+\frac{\beta}{3}=\frac{6}{3}\Rightarrow\frac{\alpha+\beta}{3}=\frac{6}{3}\Rightarrow\alpha+\beta=6$$

$$p=(\frac{\alpha}{3})(\frac{\beta}{3})=-\frac{2}{3}\Rightarrow\frac{\alpha\beta}{9}=-\frac{2}{3}\Rightarrow\frac{\alpha\beta}{9}=-\frac{2}{3}\Rightarrow\alpha\beta=-6$$

در مرحله دوم با توجه به ریشه‌های $3\beta-1, 3\alpha-1$ ریشه‌های $x^2-sx+p=0$ را می‌سازیم:

$$s=3\alpha-1+3\beta-1=3(\alpha+\beta)-2=3(6)-2=16$$

$$p=(3\alpha-1)(3\beta-1)=9\alpha\beta-3\alpha-3\beta+1=9(-6)-3(6)+1=$$

$$=-54-18+1=-71$$

پس معادله سهمی به‌صورت $x^2-16x-71=0$ است درنتیجه:

$$c=-71, b=-16$$

$$c-b=-71+16=-55$$

۱۲- گزینه «۳» متوسط

حواستون باشه‌ها! ۱) $|\alpha-\beta|=\sqrt{s^2-4p}$

۲) ریشه‌ها در معادله صدق می‌کند پس:

$$\alpha^2+3\alpha=1\xrightarrow[\alpha\neq 0]{\text{در }\alpha\text{ ضرب شود}}\alpha^3+3\alpha^2=\alpha$$

$$\beta^2+3\beta=1\xrightarrow{\text{در }\beta\text{ ضرب شود}}\beta^3+3\beta^2=\beta$$

با جای‌گذاری این دو عبارت در صورت سوال داریم:

$$(\alpha-1)(\beta+1)=m-2$$

با توجه به $x^2+3x-1=0$ داریم $p=-1, s=-3$

$$\alpha\beta+\alpha-\beta-1=m-2$$

$$p\pm\sqrt{s^2-4p}-1=m-2\Rightarrow -1\pm\sqrt{9+4}-1=m-2\Rightarrow\pm\sqrt{13}=m$$

۱۳- گزینه «۱» متوسط

حواستون باشه‌ها! ۱) چون $a=c$ پس ریشه‌ها معکوس یکدیگرند $\alpha=\frac{1}{\beta}$

۲) ریشه در معادله صدق ممی‌کند.

$$2(\frac{1}{\beta})^3\beta-5\beta=\frac{2}{\beta^2}-5\beta$$

$$2\alpha^2(\alpha\beta)-5\beta\xrightarrow{p=\alpha\beta=1}2\alpha^2-5\beta\xrightarrow{2\alpha^2=-5\alpha-2}-5\alpha-2-5\beta$$

$$-5(\alpha+\beta)-2\xrightarrow{s=\alpha+\beta=-\frac{5}{2}}-5(-\frac{5}{2})-2=\frac{25}{2}-2=\frac{21}{2}$$

۱۴- گزینه «۲» دشوار

در این تیپ سوالات کم‌ترین توان را به‌عنوان **t** بگیرید.

(با توجه به توان‌ها عبارت x^2+x مثبت در نظر گرفته شده است.)

$$(x^2+x)^{\frac{1}{6}}=t\Rightarrow((x^2+x)^{\frac{1}{6}})^2=t^2\Rightarrow(x^2+x)^{\frac{1}{3}}=t^2$$

$$((x^2+x)^{\frac{1}{6}})^3=t^3\Rightarrow(x^2+x)^{\frac{1}{2}}=t^3$$

درنتیجه:

$$t^3-t^2-6t=0\Rightarrow t(t^2-t-6)=0\Rightarrow t(t-3)(t+2)=0$$

$$t=0\Rightarrow(x^2+x)^{\frac{1}{6}}=0\Rightarrow s=-1$$

$$t=3\Rightarrow(x^2+x)^{\frac{1}{6}}=3\Rightarrow x^2+x=3^6$$

$$\Rightarrow x^2+x-3^6=0\Rightarrow s=-1$$

$$t=-2\Rightarrow(x^2+x)^{\frac{1}{6}}=-2$$ ریشه ندارد

پس مجموع ریشه‌های این معادله (-2) است.

۱۵- گزینه «۲» آسان

حواستون باشه‌ها! بیش‌ترین مقدار سهمی $y_S=\frac{-\Delta}{4a}$ است.

$$y_S=-\frac{\Delta}{4a}=0\Rightarrow\Delta=0\Rightarrow b^2-4ac=0$$

$$16-4(m^2-3m)=0\Rightarrow m^2-3m-4=0\Rightarrow m=-1, m=4$$

max

چون سهمی زمانی که ( ) دهنه رو به پایین داشته باشد بیش‌ترین مقدار را دارد پس $m=-1$ قابل قبول است.

۱۶- گزینه «۳» آسان

حواستون باشه‌ها! معادله درجه ۴ زمانی دو ریشه حقیقی دارد که $p<0$ یا $\Delta=0$ و $-\frac{b}{2a}>0$ باشد.

$$p<0 \Rightarrow \frac{c}{a}<0 \Rightarrow \frac{m-1}{2m}<0$$

x		0		1	
	+	∞	−	0	+

$$m\in(0,1)$$

۱۷- گزینه «۳» آسان

حواستون باشه‌ها! معادله نیم مجذوری زمانی دو ریشه حقیقی دارد که $\begin{cases}\Delta>0\\ s>0\\ p>0\end{cases}$

$$1)\ s>0 \Rightarrow \frac{+2m}{2}>0 \Rightarrow m>0$$

$$2)\ p>0 \Rightarrow \frac{c}{a}>0 \Rightarrow \frac{\frac{m}{2}-\frac{1}{8}}{2}>0 \Rightarrow \frac{m}{2}>\frac{1}{8} \Rightarrow m>\frac{1}{4}$$

$$3)\ \Delta>0 \Rightarrow 4m^2-4(m-\frac{1}{4})>0 \Rightarrow 4m^2-4m+1>0 \quad \text{همواره برقرار}$$

$$\Rightarrow (2m-1)^2>0$$

اشتراک بین این سه شرط جواب مسئله است. $m>\frac{1}{4}$

۱۸- گزینه «۴» آسان

حواستون باشه‌ها! معادله نیم مجذوری زمانی یک ریشه حقیقی دارد که $p<0$ و یا $\Delta=0$ و $-\frac{b}{2a}>0$ باشد.

$$p<0 \Rightarrow \frac{c}{a}<0 \Rightarrow \frac{-m-6}{m-2}<0$$

x		-۶		۲	
	−		+		−

$$m<-6 \text{ یا } m>2$$

۱۹- گزینه «۲» آسان

حواستون باشه‌ها! شرط آن که سهمی همواره بالای محور xها باشد $\begin{cases}a>0\\ \Delta<0\end{cases}$

$$1)\ a>0$$

$$2)\ \Delta<0 \Rightarrow 18-4(2a^2+\frac{5}{2}a)<0 \Rightarrow 9-4a^2-5a<0$$

$$-4a^2-5a+9<0$$

$$a=1,\ a=-\frac{9}{4}$$

		$-\frac{9}{4}$		1	
	−		+		−

$$(-\infty,-\frac{9}{4})\cup(1,+\infty)$$

از اشتراک شرط اول و دوم داریم: $(1,+\infty)$

۲۰- گزینه «۲» دشوار

حواستون باشه‌ها! اگر $f(x),g(x)$ با هم برخورد داشته باشند پس از $f(x)=g(x)$ داریم:

آ) ۲ محل برخورد دارند $\Delta>0$

ب) ۱ محل برخورد دارند $\Delta=0$

پ) محل برخورد ندارند $\Delta<0$

در مرحله اول $y=x^2, y=ax-a$ را مساوی یکدیگر قرار می‌دهیم و $\Delta=0$

$$x^2-ax+a=0$$

$$\Delta=a^2-4a=0 \Rightarrow a(a-4)=0 \Rightarrow a=0 \text{ غ ق ق},\ a=4$$

در مرحله دوم در معادله داده شده $a=4$ را قرار می‌دهیم:

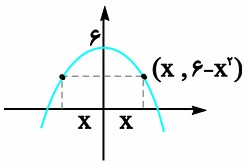
$$2x^2-4x+2=0$$

$$\Delta=16-4(4)=16-16=0$$

پس معادله یک جواب برای x دارد.

۲۱- گزینه «۴» دشوار

اول شکل رو بکشیم که بیشتر متوجه سوال بشویم...



پس مستطیل موردنظر دارای طول $2x$ و عرض $6-x^2$ است درنتیجه محیط آن:

$$p=2 \text{ (عرض + طول)}$$

$$p=2(2x+6-x^2)$$

$$p=2(-x^2+2x+6)=-2x^2+4x+12$$

چون سوال ماکزیمم محیط را پرسیده است پس $p_s=\frac{-\Delta}{4a}$

$$p_s=\frac{-[16-4(-24)]}{-8}=\frac{16+96}{8}=\frac{112}{8}=14$$

۲۲- گزینه «۱» آسان

اگر طول قاعده را x و ارتفاع وارد بر آن را y درنظر بگیریم در نتیجه با فرض

$$x+y=8 \Rightarrow x+y=8 \Rightarrow y=8-x$$

حالا چون درباره مساحت مثلث صحبت کرده پس:

$$S=\frac{xy}{2} \Rightarrow S=\frac{x(8-x)}{2} \Rightarrow S=4x-\frac{1}{2}x^2$$

بیش ترین مساحت یعنی $S_s=-\frac{\Delta}{4a}$

$$S_s=\frac{-[16-4(0)]}{4(-\frac{1}{2})}=\frac{-16}{-2}=8$$

روش دوم: هرگاه مجموع دو مقدار برابر مقداری ثابت باشد بیش‌ترین حاصل‌ضرب زمانی اتفاق می‌افتد که هر کدام نصف مقدار ثابت باشند.

$x+y=۸$

پس $x=۴, y=۴$

$S=\frac{۴\times ۴}{۲}=۸$

۲۳- گزینه «۲» متوسط

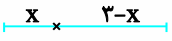
حواستون باشه‌ها! اگر مجموع دو عبارت مقداری ثابت شود حاصل‌ضرب آن‌ها زمانی بیش‌ترین مقدار می‌شود که هر کدام نصف عدد ثابت باشند پس:

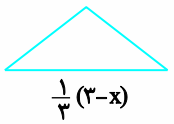
$$۲x+۳y=۱۲ \xrightarrow[\text{طبق نکته}]{\text{پس}} \begin{cases} ۲x=۶ \Rightarrow x=۳ \\ ۳y=۶ \Rightarrow y=۲ \end{cases}$$

پس بیش‌ترین حاصل‌ضرب این دو عدد $xy=۶$ است.

۲۴- گزینه «۳» دشوار

در ابتدا پاره‌خطی به طول ۳ cm را از نقطه‌ای برش می‌دهیم.



با هر قسمت چون مثلث متساوی‌الاضلاع درست می‌کنیم پس (

) خواهیم داشت.

از آنجا که می‌دانیم مساحت مثلث متساوی‌الاضلاع از رابطه $\frac{\sqrt{۳}}{۴}a^۲$ به دست می‌آید مجموع مساحت این مثلث

$$S=\frac{\sqrt{۳}}{۴}(\frac{۱}{۳}x)^۲+\frac{\sqrt{۳}}{۴}[\frac{۱}{۳}(۳-x)]^۲=\frac{\sqrt{۳}}{۴}\times\frac{۱}{۹}x^۲+\frac{\sqrt{۳}}{۴}\times\frac{۱}{۹}(۹-۶x+x^۲)$$
$$=\frac{\sqrt{۳}}{۱۸}x^۲-\frac{\sqrt{۳}}{۶}x+\frac{\sqrt{۳}}{۴}$$

بیش ترین این عبارت در $-\frac{\Delta}{۴a}$ اتفاق می‌افتد پس:

$$\frac{-[\frac{۳}{۳۶}-۴(\frac{\sqrt{۳}}{۱۸}\times\frac{\sqrt{۳}}{۴})]}{۴(\frac{\sqrt{۳}}{۱۸})}=\frac{-[\frac{۱}{۱۲}-\frac{۱}{۶}]}{\frac{۲\sqrt{۳}}{۹}}=\frac{+\frac{۱}{۱۲}}{\frac{۲\sqrt{۳}}{۹}}=\frac{۹}{۲۴\sqrt{۳}}$$
$$=\frac{۳}{۸\sqrt{۳}}\times\frac{\sqrt{۳}}{\sqrt{۳}}=\frac{\sqrt{۳}}{۸}$$

۲۵- گزینه «۱» متوسط

حواستون باشه‌ها! در معادله درجه دوم $ax^۲+bx+c=۰$

$a=$ دهنه سهمی

$b=$ محل x_S [و یا شیب سهمی در محور yها]

پس **b** دهنه سهمی را نشان می‌دهد پس $b>۰$

$-a$ شیب محل برخورد با محور yها است $-a>۰$ پس $a<۰$

درباره $c+۲$ چون محل برخورد با محور yها منفی است پس $c+۲<۰$ و $c<-۲$ است.

۲۶- گزینه «۳» متوسط

حواستون باشه‌ها! از سال دهم می‌دانیم که معادلات درجه ۲ زمانی ۲ ریشه حقیقی متمایز دارند که $\Delta>۰$.

پس با توجه به این که در این معادله درجه ۲، $a=۲m-۱, b=۶, c=m-۲$ هست پس:

$\Delta=b^۲-۴ac>۰$

$\Delta=۳۶-۴(۲m^۲-۵m+۲)=۳۶-۸m^۲+۲۰m-۸$

$=-۸m^۲+۲۰m+۲۸>۰$

که در این مرحله با توجه به نامعادله بودن عبارت باید از تعیین علامت استفاده کنیم، ابتدا ریشه‌ها را به دست می‌آوریم:

$m=-۱, m=\frac{۲۸}{۸}=\frac{۷}{۲}$

x	$-\infty$	-۱		$\frac{۷}{۲}$	$+\infty$
	-		+		-
			ج		

$-۱<m<۳/۵$

البته که گزینه‌ها با توجه به $۲m-۱\neq۰$ نوشته شده است.

۲۷- گزینه «۱» متوسط

اول بیایید قسمت دوم سوال را معنی کنیم. «مجموع ریشه‌ها با معکوس حاصل‌ضرب آن دو ریشه برابر است».

$s=\frac{۱}{p}$

$\frac{-۲m+۱}{۳}=\frac{۳}{۲-m} \Rightarrow (-۲m+۱)(۲-m)=۹$

$\Rightarrow ۲m^۲-۵m-۷=۰ \Rightarrow (۲m-۷)(m+۱)=۰$

$۲m-۷=۰ \Rightarrow m=\frac{۷}{۲}, \Delta>۰$

$m+۱=۰ \Rightarrow m=-۱, \Delta<۰$

چون $m=-۱$ دلتا را منفی می‌کند پس قابل قبول نیست.

۲۸- گزینه «۱» متوسط

حواستون باشه‌ها! نکته اول سوال به ریاضی دهم مربوط می‌شه. اگر دو نقطه دارای **y** یکسان باشند در سهمی، x_S از میانگین **x**های دو نقطه به دست می‌آید. پس:

$(۰,۵), (-۲,۵) \Rightarrow x_S=\frac{۰+(-۲)}{۲}=\frac{-۲}{۲}=-۱$

نکته دو سوال مربوط می‌شه به نقطه $(۰,۵)$ که چون $x=۰$ هست پس $y=۵$ عرض از مبدأ سهمی است پس $c=۵$

و در آخر این اطلاعات را در $y=ax^۲+bx+c$ جای‌گذاری می‌کنیم و متوجه می‌شویم که:

$y=ax^۲+bx+۵ \xrightarrow{(۱,۱۱)} ۱۱=a+b+۵ \Rightarrow ۶=a+b$

همچنین چون $x_S=-۱$ پس $\frac{-b}{۲a}=-۱$ و در نتیجه $b=۲a$. از این دو اطلاعات داریم: $۶=a+۲a \xrightarrow{a+b=۶} ۶=۳a \Rightarrow a=۳, b=۶$

پس:

$y=۳x^۲+۶x+۵$

و در نهایت با جای‌گذاری گزینه‌ها در این معادله سهمی به گزینه ۱ می‌رسیم.

۲۹- گزینه «۴» دشوار

حواستون باشه‌ها! از کنکور ۱۴۰۰ به بعد اعداد عجیب و غریب که دیدید اصلاً تعجب نکنید.

قسمت اول سوال از روش **t** می‌خواهیم استفاده کنیم:

$$x^۲=t \Rightarrow t^۲-۷t-۵=۰$$

$$\Delta=۴۹-۴(-۵)=۴۹+۲۰=۶۹$$

$$t_{\text{ریشه}}=\frac{۷\pm\sqrt{۶۹}}{۲}$$

$$x^۲=\frac{۷+\sqrt{۶۹}}{۲}\Rightarrow\begin{cases}x=\sqrt{\frac{۷+\sqrt{۶۹}}{۲}}\\ x=-\sqrt{\frac{۷+\sqrt{۶۹}}{۲}}\end{cases}$$

$$s=۰$$

$$p=(\sqrt{\frac{۷+\sqrt{۶۹}}{۲}})(-\sqrt{\frac{۷+\sqrt{۶۹}}{۲}})=-\frac{۷+\sqrt{۶۹}}{۲},\ p^۲=\frac{۴۹+۶۹+۱۴\sqrt{۶۹}}{۴}$$

$$۲p^۲=۵۹+۷\sqrt{۶۹}$$

۳۰- گزینه «۱» دشوار

$$x^۲+x-۵=۰ \Rightarrow s=-۱,\ p=-۵$$

خب حالا بریم یه ایده داشته باشیم برای ساختن ریشه‌های جدید:

اگر معادله را مرتب کنیم خواهیم داشت:

$$x^۲+x=۵$$

$$x(x+۱)=۵\xrightarrow[\text{با شرط } x\neq۰]{\text{طرفین تقسیم بر } x}(x+۱)=\frac{۵}{x}\xrightarrow{\text{طرفین معکوس}}\frac{۱}{x+۱}=\frac{x}{۵}$$

$$\xrightarrow[\text{به توان ۳}]{\text{طرفین}}\frac{۱}{(x+۱)^۳}=\frac{x^۳}{۱۲۵}$$

پس باید معادله درجه دومی $(x^۲-sx+p=۰)$ بنویسیم که ریشه‌های آن $\frac{x_۱^۳}{۱۲۵},\frac{x_۲^۳}{۱۲۵}$ باشد پس:

$$\text{جدید } s=\frac{x_۱^۳+x_۲^۳}{۱۲۵}=\frac{s^۳-۳ps}{۱۲۵}=\frac{(-۱)^۳-۳(۵)}{۱۲۵}=\frac{-۱-۱۵}{۱۲۵}=\frac{-۱۶}{۱۲۵}$$

$$\text{جدید } p=\frac{(x_۱x_۲)^۳}{(۱۲۵)^۲}=\frac{p^۳}{(۱۲۵)^۲}=\frac{(-۵)^۳}{(۱۲۵)^۲}=\frac{-۱۲۵}{(۱۲۵)^۲}=-\frac{۱}{۱۲۵}$$

$$x^۲-sx+p=۰ \Rightarrow x^۲+\frac{۱۶}{۱۲۵}x-\frac{۱}{۱۲۵}=۰$$

$$\Rightarrow ۱۲۵x^۲+۱۶x-۱=۰$$

۳۱- گزینه «۴» دشوار

بارها گفتیم که از کنکور ۱۴۰۰ به بعد منتظر محاسبات عجیب و غریب باشید! اول عبارت را مرتب کنید:

$$(\sqrt[۳]{x^۲}+\frac{۱}{\sqrt[۳]{x^۲}}+۱)(\sqrt[۳]{x^۲}-۱)=۲\sqrt[۳]{x}$$

$$\sqrt[۳]{x^۴}-\cancel{\sqrt[۳]{x^۲}}+۱-\frac{۱}{\sqrt[۳]{x^۲}}+\cancel{\sqrt[۳]{x^۲}}-۱=۲\sqrt[۳]{x}$$

$$x\sqrt[۳]{x}-\frac{۱}{\sqrt[۳]{x^۲}}-۲\sqrt[۳]{x}=۰$$

$$(x-۲)\sqrt[۳]{x}=\frac{۱}{\sqrt[۳]{x^۲}}\xrightarrow{\text{طرفین وسطین}}(x-۲)x=۱\Rightarrow x^۲-۲x-۱=۰$$

حالا از رابطه $s=\frac{-b}{a}$ مجموع ریشه‌ها را به دست آوریم:

$$s=-\frac{b}{a}=-\frac{(-۲)}{۱}=۲$$

۳۲- گزینه «۱» متوسط

اولین نکته این که مقدار تابع یعنی $y=-\frac{\Delta}{۴a}$ پس:

$$۲=\frac{-(b^۲-۴ac)}{۴a}\Rightarrow ۲=\frac{-(۱۴۴-۴(۵m^۲-m))}{۴m}$$

$$۸m=-۱۴۴+۴(۵m^۲-m)\Rightarrow ۸m=-۱۴۴+۲۰m^۲-۴m$$

$$۰=۲۰m^۲-۱۲m-۱۴۴\Rightarrow ۰=۵m^۲-۳m-۳۶\Rightarrow(۵m+۱۲)(m-۳)=۰$$

$$m=-\frac{۱۲}{۵},\ m=۳$$

نکته دوم این که چون گفته کم‌ترین مقدار پس دهنه سهمی باید ب سمت بالا باشه پس **m** باید مثبت باشه درنتیجه:

$$y=۳x^۲-۱۲x+۱۴$$

نکته سوم این که معادله محور تقارن همون معادله $x_s=-\frac{b}{۲a}$ است

$$\text{پس } x_s=\frac{۱۲}{۶}=۲$$

۳۳- گزینه «۱» دشوار

این سوال سال ۱۴۰۱ بچه‌ها رو خیلی اذیت کرد!

$$*\begin{cases}\alpha^۲+\beta^۲=S^۲-۲P\\ \alpha+\beta=S\\ |\alpha-\beta|=\sqrt{S^۲-۴P}\end{cases}\xrightarrow{\alpha<\beta\Rightarrow\alpha-\beta<۰}\alpha-\beta=-\sqrt{S^۲-۴P}$$

$$۳\alpha^۲+۲\beta^۲=۱۲\sqrt{۲}+۸۵\Rightarrow ۲/۵\alpha^۲+۲/۵\beta^۲+۰/۵\alpha^۲-۰/۵\alpha^۲-۰/۵\beta^۲$$

$$=۱۲\sqrt{۲}+۸۵$$

$$۲/۵(\alpha^۲+۲\beta^۲)+۰/۵(\alpha^۲-\beta^۲)=۱۲\sqrt{۲}+۸۵$$

$$۲/۵(\alpha^۲+\beta^۲)+۰/۵(\alpha-\beta)(\alpha+\beta)=۱۲\sqrt{۲}+۸۵$$

$$۲/۵(S^۲-۲P)+۰/۵(S)(-\sqrt{S^۲-۴P})=۱۲\sqrt{۲}+۸۵$$

$$\xrightarrow[P=a]{S=-۶}۲/۵(۳۶-۲a)+۰/۵(-۶)(-\sqrt{۳۶-۴a})=۱۲\sqrt{۲}+۸۵$$

$$۹۰-۵a+۳\sqrt{۳۶-۴a}=۱۲\sqrt{۲}+۸۵$$

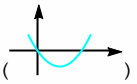
جای گذاری گزینه‌ها:

$$۱)\ a=۱:۹۰-۵+۳\sqrt{۳۲}=۱۲\sqrt{۲}+۸۵$$

$$۸۵+۱۲\sqrt{۲}=۱۲\sqrt{۲}+۸۵\ \checkmark$$

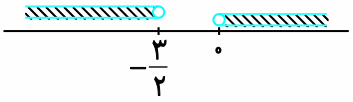
۳۴- گزینه «۱» متوسط

نکته اول: در معادله سهمی وقتی $c=0$ است پس سهمی از مبدأ مختصات می‌گذره.

نکته دوم: سهمی که از مبدأ مختصات بگذرد و از ناحیه سوم نگذرد به‌صورت () خواهد بود پس $a>0, b<0, c=0$ است و همچنین $\Delta>0$.

$$(1)\ a>0 \quad (2)\ 3+2a<0 \quad (3)\ b^2-4ac>0 \Rightarrow (3+2a)^2-0>0$$

با توجه به شرط (۱) و(۲) داریم:



در نتیجه شرط اول و دوم هیچ اشتراکی ندارد پس هیچ مقدار **a** جواب سوال است.

۳۵- گزینه «۳» متوسط

نکته سوال: اگر یک ریشه معادله درجه دو **k** برابر ریشه دیگری باشد: $\frac{b^2}{ac}=\frac{(k+1)^2}{k}$

در نتیجه:

$$\frac{a^2}{12}=\frac{(3+1)^2}{3} \Rightarrow \frac{a^2}{12}=\frac{16}{3} \Rightarrow a^2=2^6 \Rightarrow a=\pm 8$$

پس اختلاف این دو مقدار ۱۶ واحد است.

$$|-8-8|=16$$

۳۶- گزینه «۴» دشوار

اول **x** و **y** رأس سهمی را به دست آورید:

$$x_S=\frac{-b}{2a}=\frac{4}{2k}=\frac{2}{k}$$

$$y_S=\frac{-\Delta}{4a}=\frac{-b^2+4ac}{4a}=\frac{-16+4(-6k)}{4k}=\frac{-16-24k}{4k}=\frac{-4-6k}{k}$$

حال این **x** و **y** را در معادله خط جای‌گذاری می‌کنیم:

$$\frac{-4-6k}{k}=-4\left(\frac{2}{k}\right)-4$$

$$\frac{-4-6k}{k}=\frac{-8}{k}-4 \Rightarrow \frac{-4-6k}{k}=\frac{-8-4k}{k}$$

$$\Rightarrow -2k=-4 \Rightarrow k=2$$

پس از رابطهٔ $y_S=\frac{-4-6k}{k}$:

$$y_S=\frac{-4-12}{2}=\frac{-16}{2}=-8$$

۳۷- گزینه «۳» دشوار

نکته سوال: حواستون باشه هر موقع ریشه‌های مشترک را خواستند باید $y_1=y_2$ پس:

$$x^2+2x-3m=x^2+6x+m \Rightarrow -4m=4x \Rightarrow -m=x$$

پس ریشه مشترک $-m$ است.

$$m^2-6m+m=0 \Rightarrow m^2-5m=0 \Rightarrow m(m-5)=0 \Rightarrow m=0, m=5$$

اگر $m=0$ را درنظر بگیریم دو معادله به‌صورت $x^2+6x=0$ پس ریشه‌های آن $x=-6$ و $x=0$ و اگر در معادله دیگر قرار دهیم $x^2+2x=0$ که $x=0, x=-2$ که اختلاف ریشه های غیرمشترک ۴ واحد است.

و اگر $m=5$ را درنظر بگیریم $x^2+6x+5=0$ که ریشه های آن $x=-1, x=-5$

و اگر در معادله دیگر قرار دهیم $x^2+2x-15=0$ که ریشه های آن $x=-5, x=3$

در حالت دوم هم اختلاف ریشه های غیرمشترک ۴ واحد است.

۳۸- گزینه «۳» متوسط

نکته اول سوال این که محور تقارن دو سهمی مشترک هستند پس x_S در دو سهمی را مساوی قرار می‌دهیم پس:

$$x_S=-\frac{b}{2a} \Rightarrow \frac{-a}{2}=-1 \Rightarrow a=2$$

نکته دوم سوال این هست که دو نقطه با عرض یکسان یعنی $y=1$ در هر دو معادله صدق می‌کند و **x**های یکسان تولید می‌کند پس:

$$x^2+2x-2=1 \Rightarrow x^2+2x=3$$

$$\text{و } -x^2-2x+b=1 \Rightarrow -(x^2+2x)+b=1$$

$$\xrightarrow[x^2+2x=3]{} -3+b=1 \Rightarrow b=4$$

$$ab=8 \text{ پس}$$

۳۹- گزینه «۳» دشوار

نکته اول سوال دو نقطه با عرض‌های یکسان هست پس: $x_S=\frac{-5+3}{2}$

نکته دوم نقطه رأس سهمی به مختصات $(-1,1)$ داده شده پس با توجه به معادلهٔ $y=a(x-x_S)^2+y_S$ خواهیم داشت: $y=a(x+1)^2+1$ که با توجه به اتحاد مربع کامل در $y=ax^2+2ax+a+1$ نتیجه $p=\frac{a+1}{a}$, $s=\frac{-2a}{a}$

نکته سوم این که در سوال $\alpha^۲+\beta^۲$ را که می‌دانیم با $s^۲-۲p$ برابر است داده پس:

$$s^۲-۲p=۵ \Rightarrow ۴-۲(\frac{a+۱}{a})=۵ \Rightarrow ۴a-۲a-۲-۵a=۰$$
$$\Rightarrow -۲=۳a \Rightarrow a=-\frac{۲}{۳}$$

نکته چهارم: محل برخورد سهمی با محور **y**ها، همان **c** است پس: $c=a+۱=-\frac{۲}{۳}+۱=\frac{۱}{۳}$

۴۰- گزینه «۴» دشوار

در مرحله اول از معادله $ax^۲-ax-b=۰$ خواهیم داشت:

$$s=\alpha+\beta=۱$$
$$p=\alpha\beta=-\frac{b}{a}$$

همچنین از آن جایی که $\alpha=۱-\beta$ با ضرب β در طرفین خواهیم داشت $\alpha\beta=\beta(۱-\beta)$ پس: $p=-\frac{b}{a}=\beta(۱-\beta)$

حالا می‌رویم سر اطلاعات دوم و ابتدا کار $۴۰\beta^۲$ را به $۲۰\beta^۲+۲۰\beta^۲$ تبدیل می‌کنیم پس:

$$۲۰\beta^۲+۲۰\alpha^۲-۲۰\beta^۲-۲۰\beta^۲=۱۷ \Rightarrow ۲۰(\alpha^۲+\beta^۲)-۲۰\beta(\beta-۱)=۱۷$$
$$۲۰(s^۲-۲p)-۲۰(\frac{b}{a})=۱۷ \Rightarrow ۲۰(۱+۲\frac{b}{a})-۲۰\frac{b}{a}=۱۷$$
$$۲۰+۴۰\frac{b}{a}-۲۰\frac{b}{a}=۱۷ \Rightarrow ۲۰\frac{b}{a}=-۳$$
$$\frac{b}{a}=-\frac{۳}{۲۰} \xrightarrow{\text{اختلاف ریشه ها}} \sqrt{s^۲-۴p}=\sqrt{۱-۴(\frac{۳}{۲۰})}=\sqrt{\frac{۸}{۲۰}}=\frac{۲}{\sqrt{۵}}$$

۱- آسان

آ) برای حل معادلات کسری باید کسرها رو یکی کنیم، یادت باشه که راه حل یکی کردن کسرها مخرج مشترک گرفتنه، پس به مخرج کسرها نگاه کن و ببین ک.م.م (کوچک‌ترین مضرب مشترک) بین مخرج‌ها چی هست به عبارتی ببین چه عبارتی رو به‌عنوان مخرج کسری که بر همه مخرج‌ها بخش‌پذیر باشه می‌توان در نظر گرفت. اینجا چون مخرج کسر اول به مخرج کسر دوم بخش‌پذیر هست، همون میشه ک.م.م بین مخرج‌ها:

$$\frac{۱}{(x-۲)^۲}+\frac{۲(x-۲)}{(x-۲)(x-۲)} \Rightarrow \frac{۱+۲x-۴}{(x-۲)^۲}=۳ \Rightarrow \frac{۲x-۳}{x^۲-۴x+۴}=\frac{۳}{۱}$$

حالا می‌توانم طرفین وسطین کنم. راه دیگه این بود که ۳ روهم به سمت چپ بیارم و مخرج مشترک با کسرها بگیرم.

$$۳x^۲-۱۲x+۱۲=۲x-۳ \Rightarrow ۳x^۲-۱۴x+۱۵=۰$$
$$\Rightarrow (x-۳)(۳x-۵)=۰ \Rightarrow \begin{cases} x=۳ \text{ ق ق} \\ x=\frac{۵}{۳} \text{ ق ق} \end{cases}$$

برای قسمت (آ) از تغییر متغیر هم می‌توان استفاده کرد:

$$\frac{۱}{(x-۲)}=t$$
$$t^{۲+۲t=۳} \Rightarrow t^۲+۲t-۳=۰ \Rightarrow \begin{cases} t=۱ \Rightarrow x=۳ \\ t=-۳ \Rightarrow x=\frac{۵}{۳} \end{cases}$$

هر دو جواب قابل قبول هستند چون هیچ مخرجی رو صفر نمی‌کنند.

ب) سه تا مخرج داریم، که بین دوتای اون، عبارت مشترک داریم پس بیا همه رو بیاریم یک طرف و ک.م.م بگیریم:

$$\frac{۳}{x+۲}+\frac{۲}{x}-\frac{۴x-۴}{x^۲-۴}=۰$$

مخرج ها $\begin{cases} x+۲ \\ x \\ x^۲-۴=(x-۲)(x+۲) \end{cases}$ $\Rightarrow$ ک.م.م $=x(x-۲)(x+۲)$ یا $x(x^۲-۴)$

حالا صورت هر کسر رو در عبارتی ضرب می‌کنیم که مخرج کسرش اون عبارت رو نسبت به ک.م.م کم داشته باشه (دقیقا شبیه مخرج مشترک کسرهای عددی)

$$\frac{۳x(x-۲)+۲(x^۲-۴)-(۴x-۴)(x)}{x(x^۲-۴)}=۰$$

می‌دانیم کسری برابر صفر هست که صورت آن صفر باشه پس دیگه با مخرج کسر کار نداریم پس:

$$x^۲-۲x-۸=۰ \Rightarrow (x=۴)(x+۲)=۰ \Rightarrow \begin{cases} x=۴ \\ x=-۲ \end{cases}$$

یه نکته مهم رو همین‌جا یاد بگیر: هر جوابی که از حل معادله کسری به دست میاد ممکنه قابل قبول نباشه.

اون‌هایی قابل قبول هستند که مخرج هیچ کسری و صفر نکنند پس یادت نره حتما چک کنی:

$x=-۲ \Rightarrow$ مخرج کسر اول و سوم رو صفر میکنه $\Rightarrow$ غ ق ق

$x=۴ \Rightarrow$ مخرج هیچ کسری و صفر نمیکنه $\Rightarrow$ ق ق

پس فقط جواب معادله $x=۴$ است.

پ) باز هم شبیه قسمت (ب) عمل می‌کنیم:

$$\frac{۲x}{x^۲-۱}+\frac{۲}{x+۱}-\frac{۲-x}{x^۲-x}=۰$$

مخرج ها $\begin{cases}(x-۱)(x+۱)\\ x+۱\\ x(x-۱)\end{cases} \Rightarrow$ ک.م.م $=x(x^۲-۱)$

$$\frac{۲x(x)+۲x(x-۱)-(۲-x)(x+۱)}{x(x^۲-۱)}=۰$$

$$\Rightarrow ۲x^۲+۲x^۲-۲x+x^۲-x-۲=۰ \Rightarrow ۵x^۲-۳x-۲=۰$$

$$\xrightarrow{\text{جمع ضرائب}} x=۱, x=-\frac{۲}{۵}$$

$x=۱$ ریشه‌ی مخرج کسر اول و سوم است پس (غ ق ق) است اما $x=-\frac{۲}{۵}$ قابل قبول است.

ت) باز هم اول همه رو بیارید یک طرف و مخرج مشترک بگیر فقط قبلش حواست باشه که $y^۲-۹=(y-۳)(y+۳)$ اما توی کسر آخر $(۳-y)$ داریم پس همون اول قرینه کن و منفی رو توی کسر تاثیر بده:

$$\frac{y+۲}{y+۳}-\frac{y^۲}{y^۲-۹}-۱-\frac{y-۱}{y-۳}=۰$$

$$\Rightarrow (y+۲)(y-۳)-y^۲-(y^۲-۹)-(y-۱)(y+۳)=۰$$

$$\Rightarrow -۲y^۲-۳y+۶=۰ \Rightarrow \Delta=۵۷ \Rightarrow y=\frac{۳\pm\sqrt{۵۷}}{-۴}=\frac{-۳\pm\sqrt{۵۷}}{۴}$$

هر دو جواب قابل قبول هستند زیرا ریشه هیچ مخرجی از کسرهای معادله نیستند.

ث)

$$\frac{۱}{x}+\frac{۱}{x-۲}-۵=۰ \Rightarrow \frac{x-۲+x-۵x(x-۲)}{x(x-۲)}=۰$$

$$\Rightarrow ۲x-۲-۵x^۲+۱۰x=۰ \Rightarrow -۵x^۲+۱۲x-۲=۰$$

$$\Rightarrow ۵x^۲-۱۲x+۲=۰ \Rightarrow \Delta=۱۰۴$$

$$\Rightarrow x=\frac{۱۲\pm۲\sqrt{۲۶}}{۱۰}=\frac{۶\pm\sqrt{۲۶}}{۵}$$

هر دو جواب قایل قبول هستند.

ج) حواست هست که مخرج دوتا کسر یکی هست؟!

$$\frac{۲x}{x-۳}+\frac{x+۱}{x+۴}-\frac{x-۱}{x-۳}=۰ \Rightarrow \frac{۲x-x+۱}{x-۳}+\frac{x+۱}{x+۴}=۰$$

$$\Rightarrow \frac{(x+۱)(x+۴)+(x+۱)(x-۳)}{(x-۳)(x+۴)}=۰ \Rightarrow ۲x^۲+۳x+۱=۰$$

$$\Rightarrow x=-۱, x=-\frac{۱}{۲}$$

هر دو جواب قایل قبول هستند.

ج) اگر یکم دقت کنی می‌بینی که مخرج کسر سمت راستی از ضرب دوتا مخرج کسرهای سمت چپی به دست میاد پس همون رو به عنوان مخرج مشترک در نظر بگیر:

$$\frac{x(x-۱)+۳(۲x-۳)+۳x(۱)}{۲x^۲-۵x+۳}=۰ \Rightarrow x^۲-x+۶x-۹+۳x=۰$$

$$\Rightarrow x^۲+۸x-۹=۰ \Rightarrow \begin{cases}x=۱ \text{ غ ق}\\ x=-۹ \text{ ق ق}\end{cases} \Rightarrow x=-۹$$

۲- متوسط

آ) سوال اینه: آیا میشه تو معادلات کسری، صورت و مخرج رو به یک عبارت جبری ساده کرد؟ و پاسخ این هست که بله میشه ساده کرد و چون می‌دونیم در معادلات کسری مخرج باید مخالف صفر باشد و بنابراین قابلیت ساده کردن رو داره:

$$\frac{۲x\,\cancel{(x-۴)}}{\cancel{x-۴}}=x^۲+x-۱۲ \Rightarrow ۲x=x^۲+x-۱۲ \Rightarrow x^۲-x-۱۲=۰$$

$$\Rightarrow (x+۳)(x-۴)=۰ \Rightarrow x=-۳ \text{ ق ق}, x=۴ \text{ غ ق ق}$$

ب) تو این قسمت هم سوال که پیش میاد اینه که آیا میشه از طرفین یک معادله (حالا کسری یا غیرکسری) یک عبارت جبری رو ساده کرد؟ و پاسخ اینه که میشه ساده کرد و فقط یک شرط داره اونم اینه که ریشه آن عبارت (اگر ریشه داشت) هم یک جواب معادله هستش:

$$\frac{\cancel{x+۳}}{x-۱}=\frac{(x-۳)\cancel{(x+۳)}}{۲} \Rightarrow \frac{۱}{x-۲}=\frac{x-۳}{۲}, x+۳=۰$$

$$\Rightarrow x=-۳ \quad \text{ق ق (ریشه مخرج نیست)}$$

$$\xrightarrow{\text{طرفین وسطین}} x^۲-۵x+۶=۲ \Rightarrow x^۲-۵x+۴=۰$$

$$\Rightarrow x=۱ \text{ ق ق}, x=۴ \text{ غ ق ق}$$

۳- آسان

اگر $x=۲$ یک جواب برای معادله هست معنی این هستش که در معادله صدق می‌کنه:

$$x=۲ \Rightarrow \frac{۲}{۲}+\frac{۲k}{۱}=۵ \Rightarrow ۲k=۴ \Rightarrow k=۲$$

حالا $\mathbf{k}$ رو در معادله جایگزین کنیم و بریم سراغ محاسبه ریشه‌ی دیگر:

$$\frac{۲}{x}+\frac{۲x}{x-۱}=۵$$

می‌دونی یک از روش‌های دیگر حل معادله گویا اینه که همه عبارت‌ها رو در همون ک.م.م ضرب کنی؟

مثلا اینجا همه رو در $x(x-۱)$ ضرب کن:

$$۲(x-۱)+۲x(x)-۵x(x-۱)=۰$$

$$\Rightarrow ۲x-۲+۲x^۲-۵x^۲+۵x=۰ \Rightarrow -۳x^۲+۷x-۲=۰$$

$$\Rightarrow ۳x^۲-۷x+۲=۰ \Rightarrow (۳x-۱)(x-۲)=۰ \Rightarrow x=\frac{۱}{۳} \text{ ق ق}, x=۲ \text{ ق ق}$$

جواب ۲ رو که خود سوال داده بود پس جواب دیگر $(x=\frac{۱}{۳})$ است.

۴- متوسط

اول کار بریم صورت و مخرج کسر اول رو به ۲ ساده کنیم:

$$\frac{x}{x+3}+\frac{3-x}{x-1}=\frac{ax+b}{x^2+2x-3}$$

حالا اگه یه کم دقت کنیم می‌بینیم که مخرج کسر سمت راست تساوی دو ضرب مخرج‌های سمت چپ تساوی به دست میاد پس دو کسر سمت چپ رو هم مخرج کنیم:

$$\frac{x^2-x\cancel{x^2}+9}{(x+3)(x-1)}=\frac{ax+b}{x^2+2x-3}\Rightarrow\frac{-x+9}{x^2+2x-3}=\frac{ax+b}{x^2+2x-3}$$

از اونجایی که می‌دونیم کسر با مخرج‌های مساوی داریم، بنابراین زمانی معادله بی‌شمار جواب داره که صورت‌ها همواره برابر باشند (فارغ از اینکه مقدار x چی هست!) بنابراین a باید مساوی -1 یعنی ضریب x باشه و b برابر با ۹ باشه پس:

$$a=-1\ ,\ b=9$$

۵- متوسط

اگه بخواد این معادله جواب نداشته باشه پس به ازای هیچ مقداری از x نباید جوابی به ما بدهد، با طرفین وسطین کردن معادله داریم:

$$mx-m=2x+1$$

با مقایسه جمله به جمله‌ی سمت چپ و راست، باید گفت که برای این که معادله جواب نداشته باشه لازم هست که مقدار m برابر ۲ بشه. چرا؟

$$x(m-2)=m+1\Rightarrow x=\frac{m+1}{m-2}$$

و اینکه زمانی فاقد معنی است (بی‌معنی است) که مخرج صفر بشه یعنی m برابر ۲ بشه پس $m=2$

۶- آسان

برای حل مسائلی از این قبیل لازم هست اول مسئله رو با دقت بخونی تا ببینی دقیقا موضوع بر سر چی هست و بعد سه مورد رو در جدول در نظر بگیری، دو مورد تک تک افراد یا موضوعات مساله هست در مورد سوم افراد باهم یا موضوعات همزمان هست مثلا تو این مساله نقاش اول، نقاش دوم و هر دو باهم سه مورد جدول هستند. صحبت از اتمام یک کار هست و زمان روز هستش پس اول تعداد روزها رو مشخص می‌کنیم و بعد مقدار کاری که هر سه مورد در یک واحد زمانی (یک روز) رو کار می‌کنند در نظر می‌گیریم:

و معادله می‌نویسم و حل می‌کنیم:

	تعداد روزها	مقدار کار در یک روز
نقاش اول	$t-15$	$\frac{1}{t-15}$
نقاش دوم	t	$\frac{1}{t}$
باهم	۴	$\frac{1}{4}$

$$\frac{1}{t-15}+\frac{1}{t}=\frac{1}{4}\Rightarrow 4t+4t-60=t^2-15t$$

$$\Rightarrow t^2-23t+60=0\Rightarrow (t-20)(t-3)=0$$

$$\Rightarrow\begin{cases}t=3 & \text{غ ق ق}\\ t=20 & \text{ق ق}\end{cases}\quad \text{چون } t-15 \text{ را منفی می کند.}$$

پس نقاش اول در ۵ روز و نقاش دوم در ۲۰ روز به تنهایی کار انجام می‌دهند.

۷- آسان

مساله شبیه سوال ۶ هست با این تفاوت که به جای مدت زمان کار کردن، صحبت از سرعت کار هست و اصول حل سوال همون هست که در سوال ۶ داریم:

فرض کردیم سرعت کار ماشین **B**، دو برابر سرعت کار ماشین **A** باشه پس تعداد ساعتی که ماشین **A** صرف انجام کار می‌کنه دو برابر همین زمان برای ماشین **B** هست.

	تعداد ساعت	مقدار کار در یک ساعت
ماشین **A**	$2t$	$\frac{1}{2t}$
ماشین **B**	t	$\frac{1}{t}$
باهم **A , B**	۴	$\frac{1}{4}$

$$\Rightarrow \frac{1}{2t}+\frac{1}{t}=\frac{1}{4}\xrightarrow{\times 4t} 2+4=t\Rightarrow t=6$$

$$\Rightarrow 2t=12$$

ماشین **B** در ۶ ساعت کار را تمام می‌کند

ماشین **A** کار رو در ۱۲ ساعت تموم می‌کنه.

۸- متوسط

اگر سرعت حرکت کشتی رو V در نظر بگیریم، از فیزیک می‌دونی که $V=\frac{x}{t}$ و بنابراین $t=\frac{x}{V}$ مدت زمان رفت برابر $\frac{144}{V}$ هست اما طبق توضیحات مساله مدت زمان برگشت برابر $\frac{144}{V-8}$ است پس از ۲ ساعت توقف و با در نظر گرفتن اینکه مجموع مدت زمان سفر رفت و برگشت ۱۷است داریم:

$$\frac{144}{V}+\frac{144}{V-8}+2=17\Rightarrow 144(V-8+V)=15V(V-8)$$

$$\Rightarrow 288V-1152=15V^2-120V\Rightarrow 15V^2-408V+1152=0$$

$$\Delta=(-408)^2-4(15)(1152)=97344\Rightarrow V=\frac{408\pm 312}{30}\Rightarrow$$

$$\begin{cases}V=24 & \text{ق ق}\Rightarrow \text{سرعت حرکت کشتی در جهت آب ۲۴ کیلومتر بر ساعت است}\\ V=3/2 & \text{غ ق ق}\Rightarrow \text{زیرا سرعت در خلا جهت جریان آب ۸ کیلومتر کمتر است و غیرممکن است}\end{cases}$$

۹- متوسط

خب این مسئله رو به راحتی با تناسب حل می‌کنیم. پس بیا اول ببینیم تو آب نمکی، که کارگر درست کرده چقدر نمک وجود دارد و بعد نسبت نمک به محلول رو مقایسه کنیم. ۲۰۰ کیلوگرم آب نمک ۴ درصدی داریم:

مقدار نمک: $\frac{۴}{۱۰۰}\times ۲۰۰ = ۸\ kg$

پس نسبت نمک به محلول اولیه $\frac{۸}{۲۰۰}$ هست، ۵ کیلوگرم نمک موجود داریم، که اضافه می‌کنیم و فرض کنیم به مقدار x باید از محلول تبخیر کنیم، پس نسبت نمک محلول می‌شه:

$$\frac{۸+۵}{۲۰۰+۵-x}$$

(حواست باشه، که درسته ۵ کیلوگرم نمک اضافه کردیم اما به هرحال به مقدار وزن کل محلول هم ۵ کیلو اضافه شده پس ۵ روهم در صورت و هم مخرج اضافه کن!) حالا قرار هست این نسبت به ۷ درصد برسه پس:

$$\frac{۱۳}{۲۰۵-x}=\frac{۷}{۱۰۰} \Rightarrow ۱۴۳۵-۷x=۱۳۰۰ \Rightarrow ۷x=۱۳۵ \Rightarrow x\cong ۱۹/۳$$

پس کارگر باید تقریبا ۱۹/۳ کیلوگرم آب را تبخیر کند.

۱۰- متوسط

این مساله هم شبیه به مساله قبل هست فقط باید حواست به مجهول‌ها باشه:

مقدار حل شونده در A $=\frac{۵۰}{۱۰۰}\times(۳n+۱۰)=\frac{۱}{۲}(۳n+۱۰)=\frac{۳}{۲}n+۵$:

مقدار حل شونده در ظرف B $=\frac{n}{۱۰۰}\times ۵۰=\frac{n}{۲}$

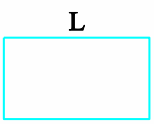
$$\Rightarrow \frac{\frac{۳}{۲}n+۵+\frac{n}{۲}+۷n+\frac{۵}{۲}}{۳n+۱۰+۵۰+۷n+\frac{۵}{۲}}=\frac{۶۰}{۱۰۰}\left(\frac{\text{حل شونده}}{\text{محلول}}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{۹n+\frac{۱۵}{۲}}{۱۰n+\frac{۱۲۵}{۲}}=\frac{۶}{۱۰} \Rightarrow ۹۰n+۷۵=۶۰n+۳۷۵$$

$$\Rightarrow ۳۰n=۳۰۰ \Rightarrow n=۱۰$$

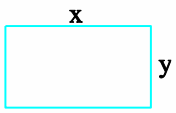
۱۱- آسان

حتما می‌دونی که به مستطیلی که طول و عرض اون، متناسب با نسبت طلایی باشه، مستطیل طلایی می‌گوییم. معنی این تناسب این هست که نسبت طول به عرض، برابر با نسبت مجموع طول و عرض به طول باشه، به عبارتی:



$$\frac{L}{\omega}=\frac{\omega+L}{L}$$

حالا در این مساله، طول و عرض زمین ورزشی متناسب با نسبت طلایی هستند پس:



$$\frac{x}{y}=\frac{x+y}{x}$$

از طرفی محیط برابر ۴۴ هست یعنی:

$x+y=۷۲$ پس $۲(x+y)=۱۴۴$

و به عبارتی $y=۷۲-x$ با جایگذاری در تناسب داریم:

$$\frac{x}{۷۲-x}=\frac{۷۲}{x} \Rightarrow x^۲+۷۲x-(۷۲)^۲=۰$$

$$\Rightarrow x=\frac{-۷۲\pm\sqrt{۵\times ۷۲^۲}}{۲}=\frac{-۷۲\pm\sqrt{۵}\times ۷۲}{۲}$$

$$\Rightarrow x=\frac{-۷۲+۷۲\sqrt{۵}}{۲}=۳۶\sqrt{۵}-۳۶ \text{ ,منفی غیر قابل قبول است}$$

$$y=۷۲-(۳۶\sqrt{۵}-۳۶)=۱۰۸-۳۶\sqrt{۵}$$

۱۲- متوسط

فرض کنیم پدربزرگ تعداد n اسباب بازی با قیمت x تومان گرفته پس $nx=۱۲۰۰۰۰$ یعنی:

$$n=\frac{۱۲۰۰۰۰}{x}\ (۱)$$

اگر برای هر اسباب بازی هزار تومان تخفیف بگیرد یعنی $x-۱۰۰۰$، تعداد اسباب بازی‌ها به $(n+۴)$ می‌رسد:

$$n+۴=\frac{۱۲۰۰۰۰}{x-۱۰۰۰} \Rightarrow n=\frac{۱۲۰۰۰۰}{x-۱۰۰۰}-۴\ (۲)$$

با مقایسه (۱) و (۲) داریم:

$$\frac{۱۲۰۰۰۰}{x}=\frac{۱۲۰۰۰۰}{x-۱۰۰۰}-۴ \Rightarrow \frac{۱۲۰۰۰۰x-۱۲۰۰۰۰x+۱۲۰۰۰۰۰۰}{x(x-۱۰۰۰)}=۴$$

$$\xrightarrow{\div ۴} ۳۰۰۰۰۰۰=x^۲-۱۰۰۰x \Rightarrow x^۲-۱۰۰۰x-۳۰۰۰۰۰۰=۰$$

$$\Rightarrow (x-۶۰۰۰)(x+۵۰۰۰)=۰ \Rightarrow x=۶۰۰۰ \text{ یا } x=-۵۰۰۰ \text{ غ ق ق}$$

۱۳- آسان

از آنجایی که میانگین کل آزمون‌های آرمان رو داریم پس تعداد کل آزمون‌ها و تعداد کل امتیازات رو پیدا می‌کنیم:

اگر تعداد آزمون‌هایی که ۹ گرفته رو n در نظر بگیریم پس تعداد کل آزمون‌ها $(n+۵)$ هست

از طرفی تعداد کل امتیازات برابر جمع ۳۶ با $۹n$ (تعداد آزمون‌های ۹ امتیازی ضربدر امتیازش) است یعنی $۹n+۳۶$ پس داریم:

$$\frac{۳۶+۹n}{۵+n}=۸ \Rightarrow ۳۶+۹n=۸n+۴۰ \Rightarrow n=۴$$

جواب قابل قبول است پس آرمان در چهار آزمون متوالی امتیاز ۹ گرفته است.

۱۴- متوسط

اول اینو بگم که برای حل معادلات گنگ (رادیکالی)، راه حل، توان رسانی هست حتی گاهی نیاز هست دوبار توان رسانی رو انجام بدیم، تنها نکته‌ای که این راه حل داره اینه که توان رسانی گاهی جواب‌های اضافی تولید می‌کنه، به همین دلیل باید جواب‌ها رو توی معادله صدق بدی (جایگذاری کنی) چون هم ممکنه زیر رادیکال رو منفی کنن هم عبارت جلوی رادیکال رو.

آ) $\sqrt{x+2}=x-4 \xrightarrow{\text{توان ۲}} x+2=(x-4)^2$

$\Rightarrow x+2=x^2-8x+16$

$\Rightarrow {}^{2}-9x+14=0 \Rightarrow (x-2)(x-7)=0 \Rightarrow x=2, x=7$

حالا جواب‌ها و امتحان می‌کنیم:

$x=2 \Rightarrow \sqrt{2+2}=2-4 \Rightarrow$ غ ق ق (منفی)

$x=7 \Rightarrow \sqrt{7+2}=7-4 \Rightarrow 3=3$ ق ق

ب) $2\sqrt{x}=\sqrt{3x+4} \xrightarrow{\text{توان ۲}} 4x=3x+4 \Rightarrow x=4$ ق ق

پ) از اونجایی که می‌دونیم برای حل معادله‌ی رادیکالی لازم هست زیر رادیکال نامنفی باشه پس می‌دونیم $x\geq 0$ و بنابراین می‌تونیم با کمک اتحاد برای حاصل، مزدوج بنویسیم:

$1-x=(1-\sqrt{x})(1+\sqrt{x})$

در این صورت طبق نکته‌ای که در پاسخ سوال ۲ اومده بود داریم:

$\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}=(1-\sqrt{x})(1+\sqrt{x})$

(یادت نره این معادله رو هم در نظر بگیری!)

$\Rightarrow \frac{1}{1+\sqrt{x}}=1+\sqrt{x}$ یا $1-\sqrt{x}=0$

$\begin{cases} 1-\sqrt{x}=0 \Rightarrow \sqrt{x}=1 \Rightarrow x=1 \text{ ق ق} \\ (1+\sqrt{x})^2=1 \Rightarrow 1+2\sqrt{x}+x=1 \\ \Rightarrow \sqrt{x}(2+\sqrt{x})=0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \text{ ق ق} \\ \sqrt{x}=-2 \text{ غ ق ق} \end{cases} \end{cases}$

پس $x=0$ و $x=1$ جواب‌های مسئله هستند.

ت) یک معادله‌ی گویا و رادیکالی باهم داریم. اول مخرج مشترک بگیریم:

$(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-2)=x-2$

$\Rightarrow 5(\sqrt{x}-2)-2(x-2)+1(\sqrt{x}+2)=0 \Rightarrow 6\sqrt{x}-2x-4=0$

$\Rightarrow 6\sqrt{x}=2x+4 \Rightarrow 3\sqrt{x}=x+2 \Rightarrow 9x=x^2+4x+4$

$\Rightarrow x^2-5x+4=0 \Rightarrow x=1$ (غ ق ق)، $x=4$ (غ ق ق)

ث)

$(\sqrt{x+3}+\sqrt{3x+1})^2=4^2$

$\Rightarrow x+3+3x+1+2\sqrt{(x+3)(3x+1)}=16$

$\Rightarrow 2\sqrt{3x^2+10x+3}=12-4x \Rightarrow \sqrt{3x^2+10x+3}=6-2x$

$\xrightarrow{\text{توان ۲}} 3x^2+10x+3=36-24x+4x^2 \Rightarrow x^2-34x+33=0$

$\Rightarrow \begin{cases} x=1 \Rightarrow \sqrt{4}+\sqrt{4}=4 \Rightarrow \text{ق ق} \\ x=33 \Rightarrow \sqrt{36}+\sqrt{100}=4 \Rightarrow \text{غ ق ق} \end{cases}$

ج) چون سمت راست تساوی عددی نداریم، بهتر است هر کسر رو در یک سمت تساوی نگه داریم و از طرفین وسطین استفاده کنیم:

$\frac{1}{\sqrt{u-3}}=\frac{2}{\sqrt{u}} \Rightarrow 2\sqrt{u-3}=\sqrt{u} \Rightarrow 4(u-3)=u$

$\Rightarrow 4u-12=0 \Rightarrow 3u=12 \Rightarrow u=4$

حواست باشه که $u=4$، هم نباید زیر رادیکال‌ها رو منفی کنه هم نباید مخرج کسرها رو صفر کنه!

$\frac{1}{\sqrt{4-3}}=\frac{2}{\sqrt{4}} \Rightarrow 1=\frac{2}{2} \Rightarrow$ $u=4$ قابل قبول هست.

چ) بهتره رادیکال را تنها کنیم:

$\sqrt{2x^2-5x+2}=x-2$

$\xrightarrow{\text{توان ۲}} 2x^2-5x+2=x^2-4x+4 \Rightarrow x^2-x-2=0 \xrightarrow{a+c=b}$

$\begin{cases} x=-1 \Rightarrow \sqrt{9}=-1-2 \Rightarrow \text{غ ق ق} \\ x=2 \Rightarrow \sqrt{10-10}=2-2 \Rightarrow \text{ق ق} \end{cases} \Rightarrow x=2$

ح)

$\sqrt{m}+\frac{1}{\sqrt{m}}=2$

با در نظر گرفتن شرط $m>0$ (حواست باشه **m** زیر رادیکال و توی مخرج هست)، همه‌ی عبارت‌ها رو در $\sqrt{m}$ ضرب می‌کنیم:

$m+1-2\sqrt{m}=0 \Rightarrow m+1=2\sqrt{m} \Rightarrow m^2+2m+1=4m$

$\Rightarrow m^2-2m+1=0 \Rightarrow (m-1)^2=0 \Rightarrow m=1$ ق ق

راه دوم حل این معادله این هست که می‌دونیم $x+\frac{1}{x}\geq 2$ برای **x**های مثبت همواره برقرار هست و تساوی در حالتی اتفاق می افته که $x=1$ باشه پس:

$\sqrt{m}=1 \Rightarrow m=1$

۱۵- آسان

دقت کن جمع دو رادیکال برابر صفر شده و می‌دونیم رادیکال‌ها عبارت‌های نامنفی هستند پس تنها زمانی این مجموع برابر صفر میشه که هر دو رادیکال مساوی صفر باشند:

$\sqrt{x^2-4}=0 \Rightarrow x^2=4 \Rightarrow x=\pm 2$

$\sqrt{x^2-7x+10}=0 \Rightarrow (x-2)(x-5)=0 \Rightarrow x=2, 5$

که $x=2$ جواب مشترک بین دو معادله است و هر دو رادیکال را صفر می‌کند پس $x=2$ جواب است.

۱۶- متوسط

با توجه به اینکه زیر رادیکال‌ها عبارت‌های درجه ۲ داریم بهتر هست اول تعیین دامنه کنیم و در صورت وجود دامنه، معادله رو حل کنیم:

$$۳-x^۲\geq ۰ \Rightarrow x^۲\leq ۳ \Rightarrow |x|\leq \sqrt{۳} \Rightarrow -\sqrt{۳}\leq x\leq \sqrt{۳}$$

$$x^۲-۲۵\geq ۰ \Rightarrow x^۲\geq ۲۵ \Rightarrow |x|\geq ۵ \Rightarrow x\leq -۵ \text{ u } x\geq ۵$$

همانطوری که می‌بینیم هیچ اشتراکی بین دامنه‌ها وجود ندارد پس هیچ عددی نمیتونه توی هر دو رادیکال به طور همزمان قرار بگیره پس معادله جواب ندارد.

۱۷- دشوار

اول دامنه‌ها را مشخص کنیم:

$$x+۳\geq ۰ \Rightarrow x\geq -۳ \ (۱)$$

$$x-\sqrt{x+۳}\geq ۰ \Rightarrow x\geq \sqrt{x+۳} \Rightarrow x^۲-x-۳\geq ۰$$

$$\Rightarrow x\leq \frac{۱-\sqrt{۱۳}}{۲} \cup x\geq \frac{۱+\sqrt{۱۳}}{۲} \ (۲)$$

از طرفی $x^۲$ و رادیکال هر دو عبارت‌های نامنفی هستند که باهم جمع شده‌اند پس $(x-۱)$ هم لزوما یک عبارت نامنفی است:

$$x-۱\geq ۰ \Rightarrow x\geq ۱ \ (۳)$$

چون دامنه مشترک داریم سراغ حل میرویم: $\xrightarrow{(۱)\cap(۲)\cap(۳)} x\geq \frac{۱+\sqrt{۱۳}}{۲}$

عبارت سمت راست رو در نظر بگیر:

$$\sqrt{x-\sqrt{x+۳}}=-x^۲+x-۱$$

$$\Delta=۱-۴(-۱)(-۱)=-۳<۰$$

در عبارت سمت راست $\Delta<۰$ ، $a<۰$ یعنی مقدار عبارت همواره عددی منفی هست و یک رادیکال نمی‌تونه با عدد منفی برابر بشه پس معادله جواب نداره.

۱۸- آسان

مختصات هر نقطه ای روی محور x باشه به صورت $(x,۰)$ هست. از طرفی یادت هست که فرمول فاصله دو نقطه چی بود؟

$$|AB|=\sqrt{(x_B-x_A)^۲+(y_B-y_A)^۲}$$

$$\Rightarrow \sqrt{(x-۲)^۲+(۰-۳)^۲}=۵ \Rightarrow x^۲-۴x+۴+۹=۲۵$$

$$\Rightarrow x^۲-۴x-۱۲=۰ \Rightarrow (x-۶)(x+۲)=۰ \Rightarrow \begin{cases} x=۶ \\ x=-۲ \end{cases}$$

در نتیجه دو نقطه به صورت $(-۲,۰)$ یا $(۶,۰)$ جواب مساله است.

۱۹- آسان

اول اینکه حواست باشه عدد صحیح خواسته و بعد بیا به صورت معادله آن را بنویسیم:

$$\sqrt{x}-x=\frac{x}{۲} \Rightarrow \sqrt{x}=\frac{۳x}{۲} \Rightarrow x=\frac{۹}{۴}x^۲$$

$$\Rightarrow \frac{۹}{۴}x^۲-x=۰ \Rightarrow x(\frac{۹}{۴}x-۱)=۰ \Rightarrow \begin{cases} x=۰ \text{ ق ق} \\ x=\frac{۴}{۹} \text{ غ ق ق} \end{cases}$$

$\frac{۴}{۹}$ عدد غیر صحیح است.

مساله ۱ جواب دارد.

۲۰- متوسط

آ) اگر عدد را به سمت راست ببریم داریم:

$$\sqrt{t}=-۲$$

اما امکان ندارد که مقدار رادیکالی منفی شود بنابراین ریشه حقیقی ندارد.

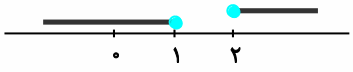
ب) مجموع دو عبارت نامنفی برابر ۱- نمی‌شود بنابراین معادله جواب ندارد.

$$\sqrt{x-۲}+\sqrt{۲x+۳}=-۱$$

پ) اشتراک این مجموعه تهی است بنابراین عددی وجود ندارد که همزمان بتواند در دو رادیکال قرار گیرد پس فاقد جواب حقیقی است

$$۱-x\geq ۰ \Rightarrow ۱\geq x$$

$$x-۲\geq ۰ \Rightarrow x\geq ۲$$



۱- گزینه «۱» دشوار

حواستون باشه‌ها! عبارت $t+\frac{۱}{t}\geq ۲$ خواهد بود اگر t مثبت باشد.

در این سوال کسر اول و آخر معکوس یکدیگرند و $\frac{x^۲-x+۳}{۲x^۲+x+۱}>۰$ است.

پس مجموع آن تنها زمانی برابر ۲ خواهد شد که $\frac{x^۲-x+۳}{۲x^۲+x+۱}=۱$ باشد

پس $\underbrace{\frac{x^۲-x+۳}{۲x^۲+x+۱}+\frac{۲x^۲+x+۱}{x^۲-x+۳}}_{=۲}+\underbrace{\frac{۱}{x^۲+۱}}_{\text{مثبت}}>۲$ در نتیجه طرف اول

تساوی مقداری بیش از دو تولید خواهد کرد و هیچ‌گاه با دو برابر نخواهد بود پس این معادله جواب ندارد.

۲- گزینه «۱» متوسط

حواستون باشه‌ها! در عبارت گویا اگر عبارت داده شده در طرفین ریشه مخرج باشد آن را حساب نمی‌کنیم!

در هر پرانتز مخرج مشترک بگیرید.

$$(\frac{۲x-۶-x-۲}{x-۳})(\frac{x-۸+x+۲}{x-۸})=x^۲-۷$$

$$(\frac{x-۸}{x-۳})(\frac{۲x-۶}{x-۸})=x^۲-۷\Rightarrow(\frac{\cancel{x-۸}}{\cancel{x-۳}})[\frac{۲(\cancel{x-۳})}{\cancel{x-۸}}]=x^۲-۷$$

$$۲=x^۲-۷\Rightarrow ۹=x^۲$$

ق ق $x=-۳<x=+۳$ غ ق ق (ریشه موج)

چون $(x+۸)$ و $(x-۳)$ حاوی ریشهٔ مخرج هستند در ریشه‌ها آن‌ها را حساب نکردیم.

۳- گزینه «۱» متوسط

عبارت $\frac{۴x-۱}{x+۲}=t$ پس:

$$۲t-\frac{۳}{t}-۵=۰\xrightarrow{\times t}۲t^۲-۳-۵t=۰$$

$$۲t^۲-۵t-۳=۰\xrightarrow{\times t}(۲t+۱)(t-۳)=۰$$

$$t=-\frac{۱}{۲},t=۳$$

$$\frac{۴x-۱}{x+۲}=-\frac{۱}{۲}\Rightarrow ۸x-۲=-x-۲\rightarrow ۹x=۰\Rightarrow x=۰$$

$$\frac{۴x-۱}{x+۲}=۳\Rightarrow ۴x-۱=۳x+۶\Rightarrow x=۷$$

پس اختلاف ریشه‌ها ۷ است.

۴- گزینه «۳» دشوار

در ابتدا مدت زمان حل سوالات باهم را به ساعت تبدیل می کنیم، ۲۰ دقیقه معادل $\frac{۲۰}{۶۰}$ یعنی $\frac{۱}{۳}$ ساعت است که اگر ۱ ساعت آن را جمع کنیم $۱+\frac{۱}{۳}=\frac{۴}{۳}$ ساعت است.

اگر حل شاگرد به تنهایی را با $t+۲$ و مدت زمان حل دبیر را به تنهایی را با t نمایش دهیم خواهیم داشت:

$$\frac{۱}{t}+\frac{۱}{t+۲}=\frac{۳}{۴}\Rightarrow\frac{t+۲+t}{t(t+۲)}=\frac{۳}{۴}\Rightarrow\frac{۲t+۲}{t^۲+۲t}=\frac{۳}{۴}$$

$$۳t^۲-۲t-۸=۰\Rightarrow(۳t+۴)(t-۲)=۰\Rightarrow\begin{cases}t=-\frac{۴}{۳}\text{ غ ق ق}\\t=۲\end{cases}$$

پس شاگرد در $t+۲=۴$ ساعت کار را به تنهایی انجام می‌دهد.

۵- گزینه «۲» متوسط

در ابتدا مشخص می‌کنیم در ۴۰۰ کیلوگرم محلول چقدر نمک موجود است پس:

$$۴۰۰\times\frac{۵}{۱۰۰}=۲۰\text{ کیلوگرم}$$

در ادامه ابتدا ۵ کیلوگرم نمک را به محلول اضافه میکنیم که خواهیم داشت $\frac{۲۰+۵}{۴۰۰+۵}$

سپس برای آنکه به غلظت مورد نظر برسیم باید آب تبخیر کنیم پس:

$$\frac{۲۵}{۴۰۵-x}=\frac{۸}{۱۰۰}\Rightarrow ۲۵۰۰=۳۲۴۰-۸x\Rightarrow ۸x=۷۴۰$$

$$x=۹۲/۵\text{ کیلوگرم}$$

۶- گزینه «۱» دشوار

اگر $\sqrt{\frac{x^۲+۱}{x}}=t$ در نظر بگیریم خواهیم داشت:

$$t^۲-۴t-۱۲=۰\Rightarrow(t-۶)(t+۲)=۰$$

$$t=۶,t=-۲$$

$$\sqrt{\frac{x^۲+۱}{x}}=۶\Rightarrow\frac{x^۲+۱}{x}=۳۶\Rightarrow x^۲+۱=۳۶x\Rightarrow x^۲-۳۶x+۱=۰$$

چون در این معادله $\Delta>۰$ و $S>۰$ و $P>۰$ پس این معادله دو ریشه مثبت دارد.

$\sqrt{\frac{x^۲+۱}{x}}=-۲$ ریشه ندارد.

۷- گزینه «۱» دشوار

هر گاه حاصل‌ضرب دو پرانتز صفر شود باید تک تک پرانتزها را مساوی صفر قرار دهیم پس:

$$x^۲-۱=۰\Rightarrow x^۲=۱\Rightarrow x=\pm۱$$

$$x-۳=۰\Rightarrow x=۳$$

حواستون باشه‌ها! زمانی که دو عبارت در هم ضرب می‌شود ریشه مورد قبول ریشه‌ای است که در اشتراک دامنه‌ها قرار داشته باشد و عبارتی را بی‌معنی نکند، پس در اینجا $x=\pm۱$ قابل قبول نیستند چون در دامنه $\sqrt{x-۳}$ صدق نمی‌کنند.

۸- گزینه «۲» دشوار

عبارت رادیکال اول و دوم را به‌صورت اتحاد مربع کامل می‌نویسم پس:

$$\sqrt{(\sqrt{x-۳}+۲)^۲}+\sqrt{(\sqrt{x-۳}-۲)^۲}=۸$$

$$|\sqrt{x-۳}+۲|+|\sqrt{x-۳}-۲|=۸$$

قدرمطلق اول چون مجموع دو عبارت مثبت است پس عبارتی است مثبت:

با حل معادله قدرمطلقی داریم:

$$\sqrt{x-۳}+۲+|\sqrt{x-۳}-۲|=۸\Rightarrow\begin{cases}\sqrt{x-۳}-۲\geq۰\Rightarrow x\geq۷\ (I)\\\text{یا}\\\sqrt{x-۳}-۲<۰\Rightarrow x<۷\ (II)\end{cases}$$

$$(I):\sqrt{x-۳}+۲+\sqrt{x-۳}-۲=۸\Rightarrow x=۱۹\ \checkmark$$

$$(II):\sqrt{x-۳}+۲-\sqrt{x-۳}+۲=۸\Rightarrow ۴\neq۸$$

پس معادله در کل $x=۱۹$ ریشه دارد.

۹- گزینه «۳» دشوار

حواستون باشه‌ها! هر گاه حاصل جمع چند عبارت مثبت صفر باشد قطعا تک تک آن عبارت‌ها صفر بوده است. جواب‌های نهایی باید در اشتراک دامنه‌ها باشد.

$$x^۳-۱=۰ \Rightarrow x^۳=۱ \Rightarrow x=۱$$

$$x^۲-۳x+۲=۰ \Rightarrow (x-۲)(x-۱)=۰ \Rightarrow x=۲, x=۱$$

جواب مشترک $x=۱$ است. پس معادله یک جواب دارد.

۱۰- گزینه «۱» متوسط

حواستون باشه‌ها! وقتی از معادلات رادیکالی صحبت می‌کنیم اگر رادیکال‌ها در دامنه خود اشتراک نداشته باشند آن معادله قطعا جواب ندارد پس:

$$۱-x\geq ۰ \Rightarrow ۱\geq x$$

$$۲x-۲\geq ۰ \Rightarrow x\geq ۱$$

از اشتراک دامنه‌ها $x=۱$ تنها ریشه ممکن می‌تواند باشد اما با صدق $x=۱$ در معادله خواهیم داشت:

$$\sqrt{۰+۱}=۰+۰ \Rightarrow ۱=۰$$

پس $x=۱$ در معادله صدق نمی‌کند در نتیجه این معادله جواب ندارد.

۱۱- گزینه «۱» دشوار

هر یک از عبارت‌ها باید صفر باشند:

$$x^۳+۵x^۲-۱۰x-۸=۰ \Rightarrow (x^۳-۸)+(۵x^۲-۱۰x)=۰$$

$$(x-۲)(x^۲+۲x+۴)+۵x(x-۲)=۰ \Rightarrow (x-۲)(x^۲+۲x+۴+۵x)=۰$$

$$(x-۲)(x^۲+۷x+۴)=۰ \Rightarrow x=۲, x=\frac{-۷\pm\sqrt{۳۳}}{۲}$$

$$x^۲+x-۶=۰ \Rightarrow (x+۳)(x-۲)=۰ \Rightarrow x=-۳ \quad x=۲$$

اشتراک پاسخ‌ها جواب مسئله است پس تنها $x=۲$ هر دو رادیکال را صفر می‌کند.

۱۲- گزینه «۴» دشوار

با چک کردن دامنه‌ها داریم:

$$x-۴\geq ۰ \Rightarrow x\geq ۴$$

$$۵-x\geq ۰ \Rightarrow ۵\geq x$$

$$x-۶\geq ۰ \Rightarrow x\geq ۶$$

که این سه دامنه اشتراکی ندارند پس جواب تهی است.

۱۳- گزینه «۴» آسان

جون $x=۴$ در معادله صدق می‌کند پس:

$$۴+a=\sqrt{۲۰-۱۶} \Rightarrow ۴+a=\sqrt{۴}$$

$$۴+a=۲ \Rightarrow a=-۲$$

پس معادله به‌صورت $x-۲=\sqrt{۵x-x^۲}$ با حل معادله گنگ داریم:

$$x^۲-۴x+۴=۵x-x^۲ \Rightarrow ۲x^۲-۹x+۴=۰ \Rightarrow (۲x-۱)(x-۴)=۰$$

$$x=\frac{۱}{۲}, x=۴$$

که این جواب در معادله صدق نمی‌کند پس معادله جواب دیگری ندارد.

۱۴- گزینه «۳» دشوار

با به توان دو رساندن طرفین داریم:

$$\sqrt{۱-\frac{۱۵}{x}}+\sqrt{۱+\frac{۱۵}{x}}=\sqrt{۲}$$

$$۱-\frac{۱۵}{x}+۱+\frac{۱۵}{x}+۲\sqrt{۱-\frac{۲۲۵}{x^۲}}=۲$$

$$\sqrt{۱-\frac{۲۲۵}{x^۲}}=۰ \Rightarrow ۱-\frac{۲۲۵}{x^۲}=۰ \Rightarrow x^۲=۲۲۵ \begin{cases} x=+۱۵ & \text{ق ق} \\ x=-۱۵ & \text{ق ق} \end{cases}$$

۱۵- گزینه «۱» متوسط

ما به دنبال حاصل

$$\sqrt{۶+۵\sqrt{۶+۵\sqrt{۶+\dots}}}=A$$

هستیم پس می‌توانیم:

$$\sqrt{۶+۵\underbrace{\sqrt{۶+۵\sqrt{۶+\dots}}}_{A}}=A$$

$$\sqrt{۶+۵A}=A \Rightarrow ۶+۵A=A^۲ \Rightarrow A^۲-۵A-۶=۰$$

$$(A-۶)(A+۱)=۰$$

$$A=۶, A=-۱$$

چون A حاصل رادیکال است منفی نمی‌تواند باشد پس $A=۶$ قابل قبول است.

۱۶- گزینه «۲» دشوار

ابتدا طرف اول معادله را ساده و گویا می‌کنیم پس:

$$\frac{۹(۲-\sqrt{x})}{۲+\sqrt{x}}\times\frac{۲-\sqrt{x}}{۲-\sqrt{x}}=\frac{۹(۲-\sqrt{x})^۲}{۴-x}$$

حاصل با جای‌گذاری رو طرفین و وسطین داریم:

$$\frac{۹(۲-\sqrt{x})^۲}{۴-x}=۴-x \Rightarrow ۹(۲-\sqrt{x})^۲=(۴-x)^۲$$

از طرفین جذر می‌گیریم:

$$|۳(۲-\sqrt{x})|=|۴-x|$$

$$۶-۳\sqrt{x}=۴-x \Rightarrow x-۳\sqrt{x}+۲=۰ \Rightarrow \sqrt{x}=۱, \sqrt{x}=۲$$

ق ق $x=۱, x=۴$ ق ق

$$۶-۳\sqrt{x}=-۴+x \Rightarrow x+۳\sqrt{x}-۱۰=۰ \Rightarrow (\sqrt{x}+۵)(\sqrt{x}-۲)=۰$$

غ ق ق $\sqrt{x}=-۵, \sqrt{x}=۲$

۱۷- گزینه «۲» آسان

با توجه به این که عبارت‌ها مزدوج هستند داریم:

$$\sqrt{x+۳}-\sqrt{x-۷}=A$$

$$\sqrt{x+۳}+\sqrt{x-۷}=۲۰$$

با ضرب طرفین در یکدیگر داریم:

$$(\sqrt{x+۳}-\sqrt{x-۷})(\sqrt{x+۳}+\sqrt{x-۷})=۲۰A$$

$$x+۳-x+۷=۲۰A \Rightarrow ۱۰=۲۰A \Rightarrow \frac{۱}{۲}=A$$

۱۸- گزینه «۴» متوسط

ابتدا شرط‌های معادلات گنگ را بررسی کنیم:

$$۱)۲a^۲+۴a\geq ۰ \Rightarrow ۲a(a+۲)\geq ۰ \Rightarrow$$

x	$-\infty$	-۲	۰	$+\infty$
	+	−	+	

$$\Rightarrow a\leq -۲ \text{ یا } a\geq ۰$$

$$۲)۲-۳a\geq ۰ \Rightarrow ۲\geq ۳a \Rightarrow \frac{۲}{۳}\geq a$$

اشتراک این جواب همواره $۰\leq a\leq \frac{۲}{۳}$ خواهد بود.

حال طرفین معادله را به توان ۲ می‌رسانیم:

$$\sqrt{۲a^۲+۴a}=۲-۳a \Rightarrow ۲a^۲+۴a=۴+۹a^۲-۱۲a$$

$$۰=۷a^۲-۱۶a+۴ \Rightarrow ۰=(۷a-۲)(a-۲) \Rightarrow a=\frac{۲}{۷}, a=۲$$

چون $\frac{۲}{۷}$ در شرط دامنه صدق می‌کند پس قابل قبول است در نتیجه:

$$\frac{a+۱}{a}=\frac{\frac{۲}{۷}+۱}{\frac{۲}{۷}}=\frac{\frac{۹}{۷}}{\frac{۲}{۷}}=\frac{۹}{۲}=۴/۵$$

۱۹- گزینه «۳» دشوار

با توجه به سوال، سرعت قایق موتوری در آب را که به تنهایی $۱۰۰\frac{\text{متر}}{\text{دقیقه}}$ است پس در جهت رودخانه این سرعت به $۱۰۰+V$ و در خلاف جهت رودخانه این سرعت به $۱۰۰-V$ می‌رسد که در V در آن سرعت آب رودخانه است. از طرفی چون اختلاف زمان رفت و برگشت ۵ دقیقه است پس:

$$t_۲-t_۱=۵ \xrightarrow[t=\frac{x}{V}]{} \frac{x_۲}{V_۲}-\frac{x_۱}{V_۱}=۵ \Rightarrow \frac{۱۲۰۰}{۱۰۰-V}-\frac{۱۲۰۰}{۱۰۰+V}=۵$$

در این مرحله با رد گزینه می‌توان به جواب رسید مثلا اگر گزینه ۳ را در این عبارت جایگزین کنیم خواهیم داشت $V=۲۰$ ولی اگر بخواهیم سوال را با مخرج مشترک حل کنیم خواهیم داشت:

$$۱۲۰۰(\frac{۱}{۱۰۰-V}-\frac{۱}{۱۰۰+V})=۵$$

$$\frac{۱}{۱۰۰-V}-\frac{۱}{۱۰۰+V}=\frac{۵}{۱۲۰۰} \Rightarrow \frac{۱۰۰+V-۱۰۰+V}{۱۰۰۰۰-V^۲}=\frac{۱}{۲۴۰}$$

$$\Rightarrow \frac{۲V}{۱۰۰۰۰-V^۲}=\frac{۱}{۲۴۰}$$

$$V^۲+۴۸۰V-۱۰۰۰۰=۰ \Rightarrow (V-۲۰)(V+۵۰۰)=۰ \begin{cases} V=۲۰ & \text{ق ق} \\ V=-۵۰۰ & \text{غ ق ق} \end{cases}$$

۲۰- گزینه «۴» آسان

اگر در نظر بگیریم که بهروز کار را در t ساعت انجام داده است فرهاد چون ۹ ساعت آن را دیرتر انجام داده است پس ساعت انجام کار فرهاد $t+۹$ خواهد بود. پس:

$$\text{مخرج مشترک}=\frac{۱}{t}+\frac{۱}{t+۹}=\frac{۱}{۲۰} \Rightarrow \frac{t+۹+t}{t(t+۹)}=\frac{۱}{۲۰}$$

$$\text{طرفین وسطین}=\frac{۲t+۹}{t^۲+۹t}=\frac{۱}{۲۰}$$

$$t^۲+۹t=۴۰t+۱۸۰ \Rightarrow t^۲-۳۱t-۱۸۰=۰$$

$$(t-۳۶)(t+۵)=۰ \Rightarrow t=۳۶ \text{ ق ق}$$

چون زمان منفی نمی‌شود $t=-۵$ قابل قبول نیست.

۲۱- گزینه «۲» دشوار

حواستون باشه‌ها! این سوال احتمالا شما رو اذیت کرده!

در طرف اول مخرج مشترک بگیرید و در طرف دوم مخرج رو ساده کنید:

$$\frac{۳\sqrt{x+۱}-\sqrt{x^۲-۱}-\sqrt{x^۲-۱}-۳\sqrt{x+۱}}{۹-x+۱}=\sqrt{x-۱}$$

$$\frac{-۲\sqrt{x^۲-۱}}{۱۰-x}=\sqrt{x-۱} \xrightarrow[\text{شرط دامنه رادیکال ها این هست که } x>۱]{\sqrt{x^۲-۱}=\sqrt{x-۱}\sqrt{x+۱}} \frac{-۲\sqrt{x+۱}}{۱۰-x}=۱$$

پس می‌توان $\sqrt{x-۱}\neq ۰$ را از طرفین ساده کرد

شرط دامنه رادیکال‌ها این است که $x>۱$ پس می‌توان $\sqrt{x-۱}\neq ۰$ را از طرفین ساده کرد

$$\xrightarrow{\text{طرفین وسطین}} -۲\sqrt{x+۱}=۱۰-x$$

$$\xrightarrow[x\geq ۱۰ \text{ باشد}]{\text{به خاطر شرط رادیکال}} ۴(x+۱)=۱۰۰-۲۰x+x^۲$$

$$۴x+۴=۱۰۰-۲۰x+x^۲ \Rightarrow ۰=x^۲-۲۴x+۹۶$$

$$\Delta=(-۲۴)^۲-۴(۹۶)=۱۹۲$$

$$\text{ریشه}=\frac{۲۴\pm ۸\sqrt{۳}}{۲}=۱۲\pm ۴\sqrt{۳}$$

حواستون باشه‌ها! $۱۲-۴\sqrt{۳}$ بخاطر کوچک‌تر باز ۱۰ بودن قابل قبول نیست.

۲۲- گزینه «۳» دشوار

حواستون باشه‌ها! این سوال در اصل برای کتاب دهم فصل سوم هست ولی چون ایده جالبی داشت بهتر دیدیم از چشم شما هم دور نماند.

اول اطلاعات مسئله رو مخرج مشترک بگیریم و ساده کنیم:

$$\frac{a^۳-۱+a^۳+۱}{a^۶-۱}=۲$$

$$\frac{۲a^۳}{a^۶-۱}=۲ \xrightarrow{\text{طرفین وسطین}} ۲a^۶-۲=۲a^۳$$

$$\xrightarrow{\text{مرتب}} ۲a^۶-۲a^۳-۲=۰ \xrightarrow{\text{ساده}} a^۶=a^۳+۱$$

حالا عبارتی که خواسته شده رو به صورت زیر ساده می‌کنیم:

$$\frac{1}{(a^3+1)-\sqrt{a^3}}+\frac{1}{(a^3+1)+\sqrt{a^3}}=\frac{a^3+1+\sqrt{a^3}+a^3+1-\sqrt{a^3}}{(a^3+1)^2-a^3}$$

$$=\frac{2a^3+2}{a^6+2a^3+1-a^3}=\frac{2a^3+2}{a^6+a^3+1}$$

$$\xrightarrow{a^6=a^3+1\ \text{چون}}\frac{2a^3+2}{a^6+1+a^3+1}=\frac{2a^3+2}{2a^3+2}=1$$

و در آخر ۱ به توان هر عددی همچنان ۱ است.

۲۳- گزینه «۴» متوسط

حواستون باشه‌ها! شرط آن که معادلات گنگ جواب حقیقی قابل قبول داشته باشند آن است که

≥ 0 زیر رادیکال باشد

$$1)\ 2x-3\geq 0 \Rightarrow x\geq\frac{3}{2}$$

$$2)\ x+\sqrt{x-2}\geq 0\Rightarrow\sqrt{x-2}\geq -x\Rightarrow x-2\geq x^2\Rightarrow 0\geq x^2-x+2$$

ریشه ندارد و همواره مثبت است پس جواب تهی خواهد بود.

$$3)\ 2-x\geq 0 \Rightarrow 2\geq x$$

$$4)\ x-2\geq 0 \Rightarrow x\geq 2$$

این چهار شرط با توجه به شرط دوم که تهی است اشتراک ندارند پس این معادله دارای جواب نیست.

۲۴- گزینه «۴» آسان

تمامی کسرها را در یک طرف جمع کرده و مخرج مشترک بگیریم.

$$\frac{1}{x+2}-\frac{x^2-9x-2}{x^3+8}-\frac{6x}{x^2-2x+4}=0$$

$$\frac{1}{x+2}-\frac{x^2-9x-2}{(x+2)(x^2-2x+4)}-\frac{6x}{x^2-2x+4}=0$$

$$\frac{x^2-2x+4-x^2+9x+2-6x^2-12x}{(x+2)(x^2-2x+4)}=0$$

$$6x^2+5x-6=0\Rightarrow(2x+3)(3x-2)=0\Rightarrow x=-\frac{3}{2},\ x=\frac{2}{3}$$

یک ریشه مثبت دارد.

۲۵- گزینه «۴» متوسط

حواستون باشه‌ها! هر موقع از مستطیل طلایی صحبت کردن با توجه به تمرین کتاب درسی رابطه زیر در ذهن باید بیاد

$$\frac{\text{طول}}{\text{عرض}}=\frac{\text{طول+ عرض}}{\text{طول}}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

در مرحله اول: اگر طول مستطیل را ℓ و عرض مستطیل را ω درنظر بگیریم $\frac{\ell}{\omega}=\frac{5}{4}$ است.

در مرحله دوم به طول مستطیل x اضافه می‌شود تا مستطیل طلایی شود پس

$$\frac{\ell+x}{\omega}=\frac{\ell+x+\omega}{\ell+x}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

با جای‌گذاری رابطهٔ مرحله اول $(\omega=\frac{4}{5}\ell)$ در رابطه به دست آمده در مرحله دوم $(\frac{\ell+x}{\omega}=\frac{1+\sqrt{5}}{2})$ خواهیم داشت

$$\frac{\ell+x}{\frac{4}{5}\ell}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}\xrightarrow{\text{طرفین وسطین}}\frac{\ell+x}{\ell}=\frac{4}{10}(1+\sqrt{5})=0/4(1+\sqrt{5})$$

چون نسبت مساحت مستطیل طلایی $(S=(\ell+x)(\omega))$ را به مساحت مستطیل اولیه $(S=\ell\omega)$ خواسته است پس $\frac{\ell+x}{\ell}$ جواب مسئله است.

۲۶- گزینه «۳» متوسط

حواستون باشه‌ها! حل این سوال به روش‌های مختلفی انجام می‌شه ما به انتخاب، یک روش رو براتون گذاشتیم.

اول بیایید مخرج مشترک طرف اول عبارت رو بگیرید.

$$\frac{(1-x)^2+x^2}{[x(1-x)]^2}=\frac{160}{9}$$

صورت کسر اتحاد مربع کامل را باز کنید و در مخرج دو عبارت را در هم ضرب کنید:

$$\frac{1+x^2-2x+x^2}{(x-x^2)^2}=\frac{160}{9}\Rightarrow\frac{2x^2-2x+1}{(x-x^2)^2}=\frac{160}{9}$$

$$\Rightarrow\frac{2(x^2-x)+1}{(x-x^2)^2}=\frac{160}{9}$$

حالا $x^2-x=t$ درنظر بگیرید.

$$\frac{2t+1}{t^2}=\frac{160}{9}\xrightarrow{\text{طرفین وسطین}}18t+9=160t^2$$

$$160t^2-18t-9=0$$

$$(16t+3)(10t-3)=0\ \Rightarrow\ t_1=-\frac{3}{16},\ t_2=\frac{3}{10}$$

$$x^2-x+\frac{3}{16}=0\ \Rightarrow\ 16x^2-16x+3=0$$

$$\Rightarrow\Delta=16^2-4(-48)=64\ \text{مثبت}\ \Rightarrow\ s=1\quad(1)$$

$$x^2-x-\frac{3}{10}=0\ \Rightarrow\ 10x^2-10x-3=0$$

$$\Rightarrow\Delta=100-4(-30)=100+120=220\ \text{مثبت}\ \Rightarrow\ s=1\quad(2)$$

$$\xrightarrow{\text{از (1) و (2)}}S_1+S_2=2$$

۱- آسان

آ) با کمی دقت می‌بینیم که عبارت زیر رادیکال به فرم اتحاد مربع هستش:

یادت میاد از سال دهم که $\sqrt{a^۴+۲a^۲+۱}=\sqrt{(a^۲+۱)^۲}$

وقتی رادیکال دارای فرجه زوج برابر با توان زوج عبارت زیر رادیکال باشه داخل قدرمطلق اونو بیرون بیاریم:

$=|a^۲+۱|$

عبارت $a^۲+۱$ همواره مثبت هست پس: $=a^۲+۱$

ب) از سال‌های پیش می‌دونیم که عبارت زیر رادیکال رو باید به فرم مربع کامل دربیاریم:

$$۷-۴\sqrt{۳}=\overset{۴+۳}{۷}-۲(۲)(\sqrt{۳})=(۲)^۲+(\sqrt{۳})^۲-۲(۲)(\sqrt{۳})$$

$$=(۲-\sqrt{۳})^۲ \Rightarrow \sqrt{۷-۴\sqrt{۳}}=\sqrt{(۲-\sqrt{۳})^۲}=|\underbrace{۲-\sqrt{۳}}_{+}|=۲-\sqrt{۳}$$

۲- آسان

برای حل معادله قدرمطلقی لازم هست ابتدا قدرمطلق رو تنها کنیم:

$$۳|x+۱|-۲=۴ \Rightarrow ۳|x+۱|=۶ \Rightarrow |x+۱|=۲$$

حالا حواست باشه که:

اگر $|x|=a$، آن‌گاه $x=\pm a$. (چون قدرمطلق هر دو، برابر **a** میشه!) پس داریم:

$x+۱=\pm ۲$

با هر دو عدد معادله رو حل می‌کنیم و جواب‌ها رو به دست می‌آریم:

$$\begin{cases} x+۱=-۲ \Rightarrow x=-۳ \\ x+۱=۲ \Rightarrow x=۱ \end{cases}$$

۳- آسان

شبیه حل معادله، برای حل نامعادله قدرمطلق هم باید اول قدرمطلق تنها بشه:

$$|۲x|+۱\geq ۳ \Rightarrow |۲x|\geq ۲$$

حالا از سال دهم یادت بیاد که اگر $|x|\geq a$ باشه $(a>۰)$، جواب به‌صورت $x\geq a$ یا $x\leq -a$ درمیاد پس:

$$\left.\begin{array}{l} ۲x\geq ۲ \Rightarrow x\geq ۱ \\ \text{یا} \\ ۲x\leq -۲ \Rightarrow x\leq -۱ \end{array}\right\} \Rightarrow \text{مجموعه جواب}=(-\infty,-۱]\cup[۱,+\infty)$$

۴- آسان

کاری به این نداریم که **a** و **b** چی هستند به هرحال به همون صورت قبل، نامعادله قدرمطلق رو حل می‌کنیم:

$$|x+۱|+a<b \Rightarrow |x+۱|<b-a$$

$$\Rightarrow -(b-a)\leq x+۱<b-a \Rightarrow a-b-۱<x<b-a-۱$$

$$\Rightarrow \text{مجموعه جواب}=(\underbrace{a-b-۱}_{n},\underbrace{b-a-۱}_{m})$$

$$\Rightarrow m+n=\cancel{b}-\cancel{a}-۱+\cancel{a}-\cancel{b}-۱=-۲$$

۵- آسان

یادت بیاد که نامعادله قدرمطلقی که مجموعه جوابش به‌صورت (a,b) باشد به‌صورت $|x-\frac{a+b}{۲}|<\frac{b-a}{۲}$ هستش پس داریم:

$$\frac{a+b}{۲}=\frac{-۳+۷}{۲}=۲$$

$$\frac{b-a}{۲}=\frac{۷-(-۳)}{۲}=۵$$

و می‌توان نوشت:

$|x-۲|<۵$

حواست باشه که اگه بازه به‌صورت $(-\infty,a)\cup(b,+\infty)$ بود، نامعادله به فرم $|x-\frac{a+b}{۲}|>\frac{b-a}{۲}$ نوشته می‌شد.

۶- متوسط

خب معادله به فرم‌های معادله درجه ۲ هست با یه تغییر متغیر ریز!

$$۳x^۲+|x|-۴=۰ \Rightarrow ۳|x|^۲+|x|-۴=۰$$

حالا با تغییر متغیر $t=|x|$ داریم:

$۳t^۲+t-۴=۰$

و می‌دونی که چون $a+b+c=۰$ پس $t=۱, t=\frac{c}{a}=\frac{-۴}{۳}$ هست با جای‌گذاری $t=|x|$ داریم:

$$|x|=۱ \Rightarrow x=\pm ۱$$

$|x|=-\frac{۴}{۳} \Rightarrow$ این معادله جواب نداره چون قدرمطلق هیچ وقت منفی نمیشه.

۷- متوسط

جواب معادله $|f(x)|=|g(x)|$ به صورت $f(x)=\pm g(x)$ هست پس:

$۳x+۲=\pm(۴x-۴)$

هر کدام را جداگانه حل می‌کنیم:

$$۳x+۲=۴x-۴ \Rightarrow x=۶$$

یا

$$۳x+۲=-۴x+۴ \Rightarrow ۷x=۲ \Rightarrow x=\frac{۲}{۷}$$

هر دو جواب قابل قبول است.

۸- آسان

می‌دونی که برای حل معادله رادیکالی باید دو طرف رو به توان ۲ برسونی پس:

$$|x+1|^2=(\sqrt{x-2})^2$$

$$\Rightarrow x^2+2x+1=x-2 \Rightarrow x^2+x+3=0$$

$$\Delta=1-12=-11<0 \Rightarrow$$ معادله جواب ندارد

۹- متوسط

می‌دونی که زیر رادیکال نمی‌تونه منفی باشه پس لازمه که عبارت زیر رادیکال رو بزرگ‌تر یا مساوی صفر قرار بدیم:

$$|x|-4\geq 0$$

$$\Rightarrow |x|\geq 4 \Rightarrow x\geq 4 \text{ یا } x\leq -4$$

از طرفی مخرج کسر نباید صفر بشه پس بیا بریم سراغ مخرج کسر:

خب واضحه که مخرج به‌صورت یک عبارت مثبت اومده (قدرمطلق نامنفی هست که ضریب ۲ گرفته و با ۱ جمع شده پس همواره مثبت هستش) و بنابراین هیچ وقت صفر نمیشه. پس جواب همون بازه $(-\infty,-4]\cup[4,+\infty)$ هست.

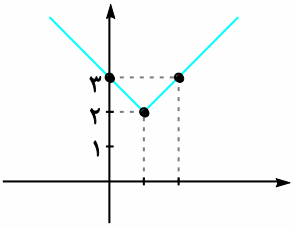
۱۰- متوسط

آ) از سال دهم می‌دونم که میشه این نمودار رو به کمک انتقال رسم کرد اما برای رسم دقیق لازم هست قدرمطلق رو تعیین علامت کنیم:

$$|x-1|=\begin{cases}x-1 & x\geq 1\\ -x+1 & x<1\end{cases}$$

بنابراین با اضافه کردن ۲ داریم: $y=\begin{cases}x+1 & x\geq 1 \quad (1)\\ 3-x & x<1 \quad (2)\end{cases}$

با مقداردهی به این دو تابع خطی با توجه به بازه مربوطه داریم:

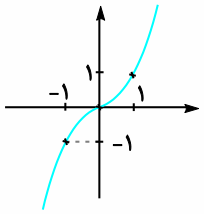


$$y=\begin{cases}x+1 & x\geq 1\\ 3-x & x<1\end{cases} \quad \begin{array}{c|cc}x & 1 & 2\\ y & 2 & 3\end{array} \quad \begin{array}{c|cc}x & 1 & 0\\ y & 2 & 3\end{array}$$

ب) باز هم با توجه به ریشه عبارت داخل قدرمطلق، تابع رو به‌صورت دو ضابطه‌ای می‌نویسیم:

$$f(x)=x|x|=\begin{cases}x^2 & x\geq 0 \quad (1)\\ -x^2 & x<0 \quad (2)\end{cases}$$

حواست باشه که نمودار به فرم منحنی (بخش‌هایی از سهمی) هست.

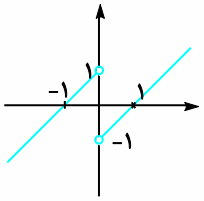


$$(1)\ \begin{array}{c|cc}x & 0 & 1\\ y & 0 & 1\end{array} \quad (2)\ \begin{array}{c|cc}x & -1 & 0\\ y & -1 & 0\end{array}$$

پ) از آن جایی که $|x|=\begin{cases}x & x\geq 0\\ -x & x<0\end{cases}$ پس داریم:

$$y=\begin{cases}x-1 & x>0 \quad (1)\\ x+1 & x<0 \quad (2)\end{cases}$$

حواست باشه‌ها! چون $|x|$ توی مخرج کسر هست پس x نمی‌تونه صفر باشه و علامت مساوی رو برای صفر درنظر نمی‌گیریم. نقطه‌یابی می‌کنیم و رسم رو انجام می‌دهیم:



$$(1)\ \begin{array}{c|cc}x & 0 & 1\\ y & -1 & 0\end{array} \quad (2)\ \begin{array}{c|cc}x & -1 & 0\\ y & 0 & 1\end{array}$$

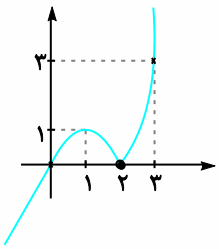
ت) ریشه‌ی عبارت داخل قدرمطلق $x=2$ هست پس:

$$|x-2|=\begin{cases}x-2 & x\geq 2\\ -x+2 & x<2\end{cases}$$

و بنابراین:

$$x|x-2|=\begin{cases}x^2-2x & x\geq 2 \quad (1)\\ -x^2+2x & x<2 \quad (2)\end{cases}$$

برای رسم فقط به یک نکته خیلی مهم توجه کن که توی سهمی‌ها حتماً مختصات رأس سهمی رو به دست بیاری



$$(1): x_A=\frac{-b}{2a}=\frac{2}{2}=1 \quad \begin{array}{c|cc}x & 2 & 3\\ y & 0 & 3\end{array}$$

اما $x=1$ در بازه نیست پس با خیال راحت عدد بده.

$$(2): x_A=1 \Rightarrow y_A=1\ (1<2) \Rightarrow \begin{array}{c|cc}x & a & 2\\ y & a & 10\end{array}$$

۱۱- دشوار

یادت بمونه که نمودار تابع‌های به فرمول $y=|x-a|+|x-b|$ به‌صورت «گلدانی» در میاد یعنی این طوری: ( )، کف گلدان خط $y=|b-a|$ هست و دو خط شیب دار، یا شیب‌های قرینه هم هستند. گوشه‌ها در $x=a$, $x=b$ هستند.

اما برای رسم دقیق سه بازه به‌صورت‌های زیر در نظر می‌گیریم:

$x+۱=۰ \Rightarrow x=-۱$

$x-۳=۰ \Rightarrow x=۳$

۱) کمتر از ریشه کوچک‌تر (هر دو منفی)

$x<-۱ \Rightarrow y=-x-۱-x+۳=-۲x+۲$

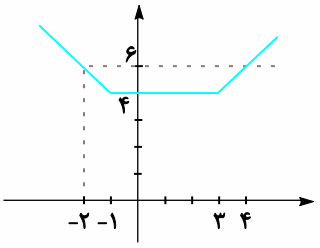
۲) بین دو ریشه (اونی که ریشه کوچک‌تر داره مثبت میشه اون یکی منفی)

کف گلدان ۴ $-۱\le x\le ۳ \Rightarrow y=x+۱-x+۳=۴$

۳) بیشتر از ریشه بزرگتر (هر دو مثبت)

$x>۳ \Rightarrow y=x+۱+x-۳=۲x-۲$

با عددهی به دو خط به دست آمده، نمودار را رسم می‌کنیم:



$y(۴)=۶$

$y(-۲)=۶$

۱۲- دشوار

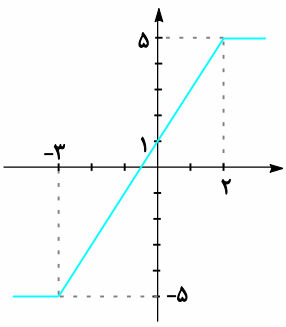
نمودار این تابع هم به نمودار «آبشاری» و یا سرسره‌ای معروف هست و به‌صورت یا درمیاد. بازه بندی شبیه سوال ۱۱ انجام میشه:

$x+۳=۰ \Rightarrow x=-۳$, $x-۲=۰ \Rightarrow x=۲$

۱) $x<-۳ \Rightarrow y=-x-۳+x-۲=-۵$

۲) $-۳\le x\le ۲ \Rightarrow y=x+۳+x-۲=۲x+۱$

۳) $x>۲ \Rightarrow y=x+۳-x+۲=۵$

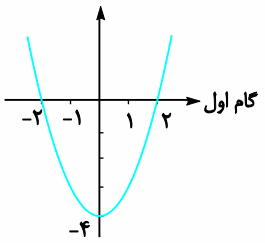


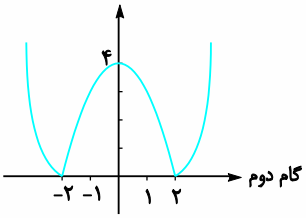
۱۳- دشوار

یادت بمونه که اگر بدونی نمودار $y=f(x)$ رو چطور رسم کنی، می‌تونی نمودار تابع $y=|f(x)|$ رو به این صورت از روی اون رسم کنی.

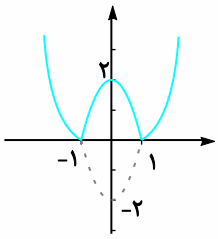
بخش‌هایی از نمودار که زیر محور **x**ها هست رو حذف کرده و به بالای محور **x**ها قرینه می‌کنیم.

آ) اول نمودار $x^۲-۴$ رو رسم می‌کنیم (می‌تونی سهمی $y=x^۲$ رو به‌اندازه ۴ واحد به پایین منتقل کنی) و بعد قدرمطلق رو درنظر می‌گیریم:





ب)



$y=|۲x^۲-۲|$

$y=۲x^۲-۲$

$x_A=\frac{-۰}{۴}=۰ \Rightarrow y_A=-۲$

x	-۱	۰	۱
y	۰	-۲	۰

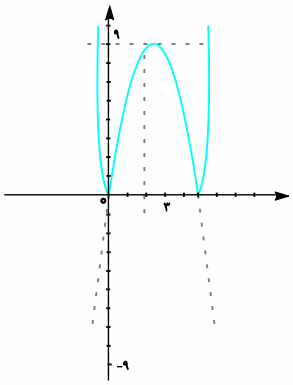
پ)

$y=|۶x-x^۲|$

$y=۶x-x^۲$ $\quad ۶x-x^۲=۰ \Rightarrow x(۶-x)=۰$

$\Rightarrow$ صفرهای تابع: $x=۰$ یا $x=۶$

$\Rightarrow x_A=\frac{۰+۶}{۲}=۳ \Rightarrow y_A=۹$



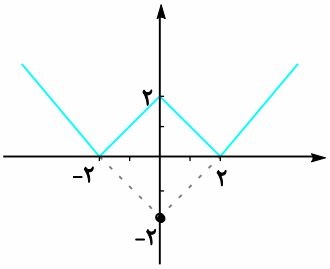
ت)

$y=||x|-۲|$

$y=|x|-۲$

می‌دونیم نمودار تابع $y=|x|$ به‌صورت ( ) هستش و می‌تونیم با انتقال ۲ $y=|x|-۲$ رو رسم کنیم اما برای رسم دقیق عددهی رو هم انجام می‌دیم:

x	−۲	۰	۲
y	۰	−۲	۰

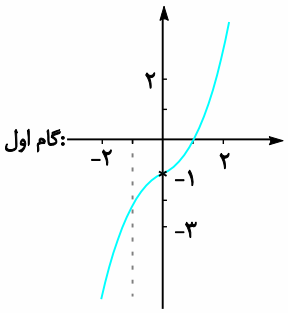


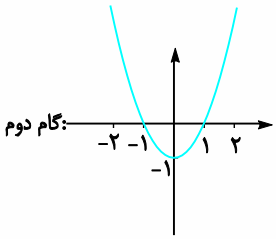
۱۴- دشوار

اگر این تابع رو با تابع $f(x)=۲x^۳-۱$ مقایسه کنیم می‌بینیم که تابع داده شده، $f(|x|)$ هست.

برای رسم تابع $f(|x|)$ اول نمودار $f(x)$ رو رسم می‌کنیم و بعد بخش‌هایی از نمودار که سمت چپ محور y هست رو حذف کرده و نمودار سمت راست محور y رو به سمت چپ هم قرینه می‌کنیم. (چون رفتار f روی xهای منفی شبیه رفتارش روی xهای مثبت هست.)

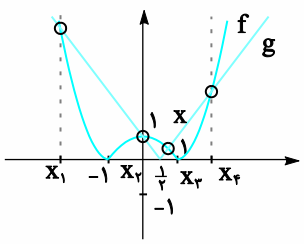
x	−۱	۰	۱
y	−۳	−۱	۱





۱۵- دشوار

برای حل معادله به روش هندسی، سمت چپ نمودار رو به‌عنوان تابع f و سمت راست نمودار رو به‌عنوان تابع g درنظر می‌گیریم. هر دو تابع رو در یک، دستگاه مختصات رسم می‌کنیم، محل‌های برخورد دو تابع جواب‌های معادلهٔ $f(x)=g(x)$ است.



$f(x)=|x^۲-۱|$

$g(x)=|۲x-۱|$

روش جبری:

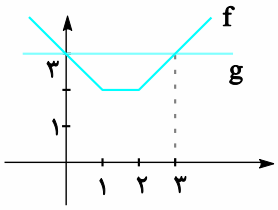
$|x^۲-۱|=|۲x-۱|\Rightarrow$

$$\begin{cases} x^۲-۱=۲x-۱ \Rightarrow x^۲-۲x=۰ \Rightarrow x=۰ \text{ یا } x=۲ \\ x^۲-۱=-۲x+۱ \Rightarrow x^۲+۲x-۲=۰ \Rightarrow x=\dfrac{-۲\pm ۲\sqrt{۳}}{۲}=-۱\pm\sqrt{۳} \end{cases}$$

۱۶- متوسط

$f(x)=|x-۱|+|x-۲|$ $\quad a=۱, b=۲$

کف گلدان : $y=|۲-۱|=۱$



$g(x)=۳$

از روی نمودار مشخص هست که جواب‌های معادله $x=۰, x=۳$ هست. با

روش جبری هم داریم:

۱) $x<۱ \Rightarrow -x+۱-x+۲=۳ \Rightarrow -۲x+۳=۳$

$\Rightarrow -۲x=۰ \Rightarrow x=۰$ ق ق

۲) $۱\le x\le ۲ \Rightarrow x-۱-x+۲=۳ \Rightarrow ۱=۳$ غ ق ق

۳) $x>۲ \Rightarrow x-۱+x-۲=۳ \Rightarrow ۲x-۳=۳$

$\Rightarrow ۲x=۶ \Rightarrow x=۳$ ق ق

حواست باشه که جواب‌ها رو در بازه مربوط به خودش صدق بدی.

۱۷- متوسط

$\sqrt{x+۱}-|x-۲|=۰$

ابتدا دامنه عبارت رادیکالی رو به دست میاریم:

$x+۱\ge ۰ \Rightarrow x\ge -۱$

قدرمطلق رو به سمت راست منتقل می‌کنیم و به توان ۲ می‌رسونیم:

$\sqrt{x+۱}=|x-۲| \Rightarrow x+۱=x^۲-۴x+۴$

$\Rightarrow x^۲-۵x+۳=۰ \Rightarrow \Delta=۱۳ \Rightarrow x=\dfrac{۵\pm\sqrt{۱۳}}{۲}$

با توجه به این که جواب‌های به دست آمده هر دو در بازه دامنه هستند پس هر دو قابل قبول‌اند.

۱۸- دشوار

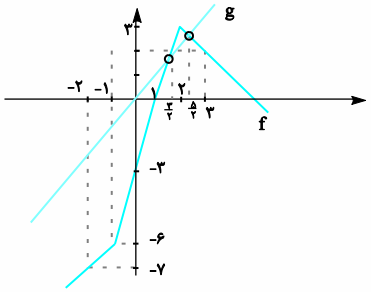
حل نامعادله به روش هندسی شبیه حل معادله به این روش هست، با این تفاوت که پس از یافتن ریشه‌ها، مجموعه نامعادله $f(x)<g(x)$، بازه‌ای است که نمودار $\mathbf{f}$ پایین‌تر از نمودار $\mathbf{g}$ قرار بگیره.

$$f(x)=|x+1|-|2x-4| \Rightarrow x=-1, x=2$$

$$x<-1 \Rightarrow y=-x-1+2x-4=x-5$$

$$-1\le x\le 2 \Rightarrow y=x+1+2x-4=3x-3$$

$$x>2 \Rightarrow y=x+1-2x+4=-x+5$$



$$g(x)=x$$

همان طور که از روی شکل مشخص هست، دو برخورد روی دو بخش نمودار $\mathbf{f}$ داریم، پس با برخورد دادن تک تک نمودارها با خط $y=x$، محل‌های برخورد رو پیدا می‌کنیم:

(از روی نمودار هم دیدیم که خط‌ها موازی هم هستند.) فاقد جواب $\Rightarrow x-5=x$

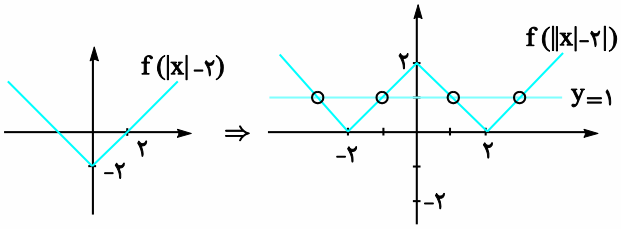
$$3x-3=x \Rightarrow 2x=3 \Rightarrow x=\frac{3}{2}$$

$$-x+5=x \Rightarrow 2x=5 \Rightarrow x=\frac{5}{2}$$

حالا باید ببینیم کجاها، نمودار $\mathbf{f}$ پایین‌تر از $\mathbf{g}$ قرار گرفته که به‌صورت زیر هست:

$$(-\infty,\frac{3}{2})\cup(\frac{5}{2},+\infty)$$

۱۹- دشوار



از روی نمودار پیداست که چهار جواب برای معادله داریم. با حدس می‌توان گفت:

$$x=1 \Rightarrow |1-2|\overset{?}{=}1 \qquad x=3 \Rightarrow |3-2|\overset{?}{=}1$$

$$x=-1 \Rightarrow |1-2|\overset{?}{=}1 \qquad x=-3 \Rightarrow |3-2|\overset{?}{=}1$$

با روش جبری:

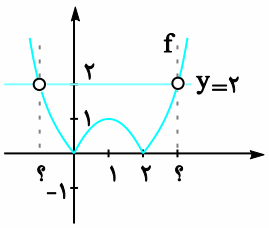
$$||x|-2|=1 \Rightarrow \begin{cases} |x|-2=1 \Rightarrow |x|=3 \Rightarrow x=\pm 3 \\ |x|-2=-1 \Rightarrow |x|=1 \Rightarrow x=\pm 1 \end{cases}$$

۲۰- متوسط

$$y=x^2-2x \Rightarrow x^2-2x=0 \Rightarrow x(x-2)=0$$

$$\Rightarrow x=0,2 \qquad x_A=\frac{0+2}{2}=1 \Rightarrow y_A=-1$$

	۰	۱	۲
	۰	−۱	۰



امتحان کردن: $x=3 \Rightarrow |9-6|\overset{?}{=}2\times \qquad x=-1 \Rightarrow |1+2|\overset{?}{=}2\times$

روش جبری:

$$|x^2-2x|=2 \Rightarrow$$

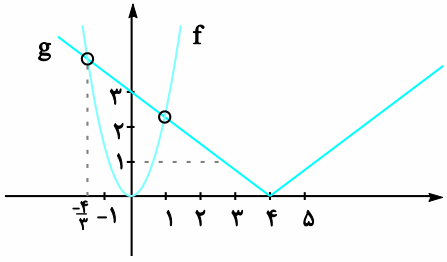
$$\begin{cases} x^2-2x=2 \Rightarrow x^2-2x-2=0 \\ \Rightarrow \Delta=\sqrt{12} \Rightarrow x=\frac{2\pm\sqrt{12}}{2} \Rightarrow x=1\pm\sqrt{3} \text{ جواب های معادله} \\ x^2-2x=-2 \Rightarrow x^2-2x+2=0 \\ \Rightarrow \Delta=4-8<0 \Rightarrow \text{جواب ندارد} \end{cases}$$

۲۱- دشوار

$$f(x)=3x^2 \quad , \quad g(x)=|x-4|$$

منظور سوال، بازه‌ای است که نمودار تابع $\mathbf{f}$ پایین‌تر یا مساوی نمودار $\mathbf{g}$ باشد:

$$f\le g$$



x	−۱	۰	۱
f	۳	۰	۳

x	۳	۴	۵
g	۱	۰	۱

مجموعه جواب $=[-\frac{4}{3},1]$

$$f(x)=g(x) \Rightarrow \begin{cases} 3x^2=x-4 \text{ غ ق ق} \\ 3x^2=-x+4 \Rightarrow 3x^2+x-4=0 \Rightarrow x=1,-\frac{4}{3} \end{cases}$$

۲۲- متوسط

عدد دلخواه را x فرض می‌کنیم، فاصله دو عدد دلخواه را با قدرمطلق تفاضل آن‌ها نشان می‌دهیم پس داریم:

$$|x-2|+|x+1|=4$$
$$\downarrow \quad x=2 \qquad \downarrow \quad x=-1$$

۱) $x\le -1 \Rightarrow -x+2-x-1=4 \Rightarrow -2x=3 \Rightarrow x=-\frac{3}{2}$

۲) $-1\le x\le 2 \Rightarrow -x+2+x+1=4$ غ ق ق

۳) $x\ge 2 \Rightarrow x-2+x+1=4 \Rightarrow 2x=5 \Rightarrow x=\frac{5}{2}$

این دو عدد $\frac{5}{2}, -\frac{3}{2}$ هستند.

۲۳- آسان

نقطه موردنظر روی محور طول است پس به فرم $(x, 0)$ است و نقاط دیگر هم روی محور x هستند پس کافی است قدرمطلق تفاضل طول‌های آن‌ها را مقایسه کنیم:

$$|x+1|+|x-3|=6$$
$$\downarrow \quad x=-1 \qquad \downarrow \quad x=3$$

$x<-1 \Rightarrow -x-1-x+3=6 \Rightarrow -2x=4 \Rightarrow x=-2$

$-1\le x\le 3 \Rightarrow x+1-x+3=6$ غ ق ق

$x>3 \Rightarrow x+1+x-3=6 \Rightarrow 2x=8 \Rightarrow x=4$

این نقاط $x=4, x=-2$ روی محور طول‌ها هستند.

۲۴- متوسط

در مثلثی به اضلاع a, b, c، طبق نامساوی مثلثی داریم:

$$a+b>c, a+c>b, b+c>a$$

پس:

$|a+b+c|=a+b+c$ (طول عددی مثبت است)

$|a-b-c|=|a-(b+c)|=-a+b+c$

$|a-b+c|=|a+c-b|=a+c-b$

$|a+b-c|=a+b-c$

با جای‌گذاری داریم:

$$a+b+c+a-b-c-a-c+b-a-b+c=0$$

۲۵- دشوار

آ) دو حالت را درنظر می‌گیریم:

$$\left.\begin{array}{l} a\ge 0 \Rightarrow |a|=a \Rightarrow a\le |a| \\ a<0 \Rightarrow |a|=-a \Rightarrow a\le |a| \end{array}\right\} \Rightarrow a\le |a| \quad (\text{تساوی رخ می دهد})$$

$$\left.\begin{array}{l} a\ge 0 \Rightarrow |a|=a \Rightarrow -|a|\le a \\ a<0 \Rightarrow |a|=-a \Rightarrow -|a|=a \Rightarrow |a|\le a \end{array}\right\} \Rightarrow -|a|\le a \quad (\text{تساوی})$$

ب) طبق قسمت (آ) داریم:

$$\left.\begin{array}{l} -|a|\le a\le |a| \\ -|b|\le b\le |b| \end{array}\right. \xrightarrow{+} -|a|-|b|\le a+b\le |a|+|b|$$

پ) طبق قسمت (ب) داریم:

$$-(|a|+|b|)\le a+b\le |a|+|b|$$
$$\Rightarrow |a+b|\le |a|+|b|$$

۲۶- آسان

آ) $|x-3|=7 \Rightarrow x-3=\pm 7 \Rightarrow x=-4, 10$

ب) $2|x-6|=4 \Rightarrow |x-6|=2 \Rightarrow x-6=\pm 2 \Rightarrow x=4, 8$

$|x-(-3)|\ge 2 \Rightarrow |x+3|\ge 2 \Rightarrow$

$x+3\le -2 \cup x+3\ge 2 \Rightarrow x\le -5 \cup x\ge -1$

۲۷- متوسط

با طرفین وسطین کردن داریم:

آ) $2-x=|x-3|, x\ne 3$

$2-x\ge 0 \Rightarrow x\le 2$

$$\Rightarrow \begin{cases} x-3=2-x \Rightarrow 2x=5 \Rightarrow x=\frac{5}{2} & \text{ق ق غ} \\ x-3=x-2 \Rightarrow -3=-2 & \text{غ ق ق} \end{cases}$$

(در بازه دامنه نیست) معادله فاقد جواب است.

ب) $\sqrt{x^2-2x+1}=\sqrt{(x-1)^2}=|x-1|$

$$\Rightarrow |x-1|=2x+1 \Rightarrow \begin{cases} x-1=2x+1 \Rightarrow x=-2 & \text{غ ق ق} \\ x-1=-2x-1 \Rightarrow 3x=0 \Rightarrow x=0 & \text{ق ق} \end{cases}$$

$2x+1\ge 0 \Rightarrow x\ge -\frac{1}{2}$

۲۸- آسان

$|x-7|=3 \Rightarrow x-7=\pm 3$

$\Rightarrow x=4, 10$

۲۹- متوسط

$3x-2=x-4 \Rightarrow 2x=-2 \Rightarrow x=-1$

یا

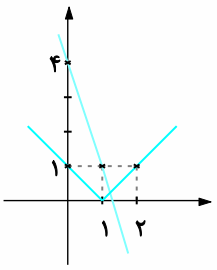
$3x-2=-x+4 \Rightarrow 4x=6 \Rightarrow x=\frac{3}{2}$

هر دو جواب قابل قبول است.

۳۰- متوسط

$$|x-1|=4-3x \Rightarrow \begin{cases} x-1=4-3x \Rightarrow 4x=5 \Rightarrow x=\frac{5}{4} & \text{ق ق} \\ x-1=3x-4 \Rightarrow 2x=3 \Rightarrow x=\frac{3}{2} & \text{غ ق ق} \end{cases}$$

$(4-3x>0 \Rightarrow x<\frac{4}{3})$



$f(x)=|x-1| \Rightarrow$ ریشه: $x=1$

x	۰	۱	۲
y	۱	۰	۱

$g(x)=-4-3x$

x	۰	۱
y	۴	۱

۱- گزینه «۱» آسان

از سال دهم می‌دانیم که در نامعادلات قدرمطلقی، قدرمطلق کوچک‌تر از عبارتی منفی نمی‌تواند باشد پس در گزینه اول که $|x+۳| \le -۱$ است مجموعه جواب تهی خواهد بود.

۲- گزینه «۲» متوسط

در نامعادله قدرمطلقی $|x-a|>b$، ریشه داخل قدرمطلق مرکز و **b** شعاع جواب‌های ما خواهد بود.

به بررسی گزینه‌ها می‌پردازیم:

۱) مرکز این قدرمطلق $(-\frac{۱}{۲})$ است پس نمی‌تواند جواب مسئله باشد.

۲) مرکز قدرمطلق $\frac{۱}{۲}$ است و قدرمطلق همواره مثبت است پس تمام اعداد حقیقی جواب مسئله به جز $x=\frac{۱}{۲}$ که حاصل قدرمطلق را صفر می‌کند.

۳) قدرمطلق هیچ‌گاه منفی نخواهد شد پس این گزینه جواب تهی دارد و تنها به‌ازای $x=\frac{۱}{۲}$ صفر خواهد شد.

۴) در این گزینه مجموعه جواب $\mathbb{R}$ است و همواره برقرار است.

۳- گزینه «۱» دشوار

حواستون باشه‌ها در نامعادلات اگر از مثبت بودن عبارتی در هر دو طرف نامعادله مطمئن بودیم می‌توان آن‌ها را از طرفین ساده کرد. پس:

$$|x-۲||x^۲+۲x+۴|<x^۲+۲x+۴$$

چون عبارت $x^۲+۲x+۴$ دارای Δ منفی است و ضریب $x^۲$ آن مثبت است. پس عبارتی است همواره مثبت که می‌توان آن را از طرفین ساده کرد پس:

$$|x-۲|<۱ \Rightarrow -۱<x-۲<۱ \Rightarrow ۱<x<۳$$

۴- گزینه «۱» متوسط

در نامعادلات قدرمطلقی از بسط قدرمطلق استفاده می‌کنیم:

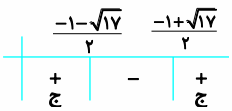
$$x \ge ۰ : (x-۲)(x)<۳x-۴ \Rightarrow x^۲-۲x-۳x+۴<۰$$

$$\Rightarrow x^۲-۵x+۴<۰ \Rightarrow x \in (۱,۴)$$

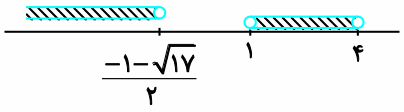
$$x<۰ : (x-۲)(-x)<۳x-۴ \Rightarrow -x^۲+۲x<۳x-۴ \Rightarrow ۰<x^۲+x-۴$$

$$\Delta = ۱-۴(-۴) = ۱+۱۶ = ۱۷$$

$$\text{ریشه} = \frac{-۱ \pm \sqrt{۱۷}}{۲}$$



$(-\infty, \frac{-۱-\sqrt{۱۷}}{۲}) \cup (\frac{-۱+\sqrt{۱۷}}{۲}, +\infty)$ که فقط بازه منفی آن قابل قبول است با توجه به $x<۰$



از اجتماع شرط اول و دوم $(-\infty, \frac{-۱-\sqrt{۱۷}}{۲}) \cup (۱,۴)$ خواهیم داشت که $(۱,۴)$ در گزینه‌ها هست.

۵- گزینه «۴» دشوار

با توجه به نکته سوال ۳، مخرج‌ها همواره مثبت هستند پس می‌توان آنها را از طرفین ساده کرد پس:

$$|۴x+۵|>۳ \Rightarrow ۴x+۵>۳ \text{ یا } ۴x+۵<-۳$$

$$۴x>-۲ \text{ یا } ۴x<-۸$$

$$x>-\frac{۱}{۲} \text{ یا } x<-۲$$

$$(-\frac{۱}{۲}, +\infty) \text{ یا } (-\infty, -۲)$$

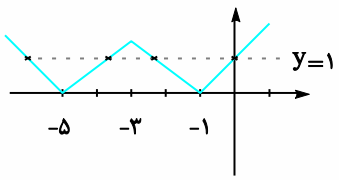
پس مجموعه جواب به‌صورت $\mathbb{R}-[-۲, -\frac{۱}{۲}]$ است

درنتیجه $a=-۲, b=-\frac{۱}{۲}$ است پس: $a+b=-۲+(-\frac{۱}{۲})=-\frac{۵}{۲}$

۶- گزینه «۲» متوسط

حل این تیپ از تست‌ها راه حل مختلفی دارد که ما به دو روش از آنها می‌پردازیم:

راه اول: شکل را رسم کنید.



که با توجه به گزینه‌ها گزینه ۲ جواب است.

راه دوم: می‌توان از خاصیت‌های قدرمطلق استفاده کرد:

$$-۱<|x+۳|-۲<۱\Rightarrow ۱<|x+۳|<۳$$

$$۱<|x+۳| \text{ و } |x+۳|<۳$$

$$x+۳>۱ \text{ یا } x+۳<-۱ \text{ و } -۳<x+۳<۳$$

$$x>-۲ \text{ یا } x<-۴ \text{ و } -۶<x<۰$$

از اشتراک دوباره به وجود آمده داریم $(-۶,-۴)\cup(-۲,۰)$

۷- گزینه «۲» متوسط

با توجه به نامساوی مثلث در کتاب درسی گزینه ۲ نادرست است.

با جای‌گذاری مقادیر مختلف به رد گزینه‌ها هم می‌توان رسید.

گزینه ۲: اگر $a=-۲, b=۴$ درنظر بگیریم

$$|-۲|-|-۴|\geq|-۲-۴|$$

$$۲-۴\geq۶$$

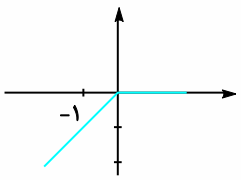
نادرست $-۲\geq۶$

۸- گزینه «۴» دشوار

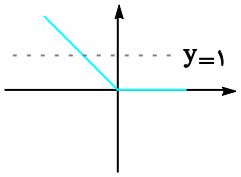
حواستون باشه‌ها!برای یافتن تعداد ریشه‌ها یک معادله روش هندسی بسیار مناسب است.

اگر $y_۱=|x-|x||$ درنظر بگیریم و $y_۲=۱$ را درنظر بگیریم محل برخورد این دو نمودار جواب معادله است.

$|f(x)|$: به معنای رسم $f(x)$ و سپس منتقل کردن قسمت‌های منفی شکل به بالای محور **x**هاست پس:



$$x-|x|=\begin{cases}۰ & x\geq۰\\ ۲x & x<۰\end{cases}$$



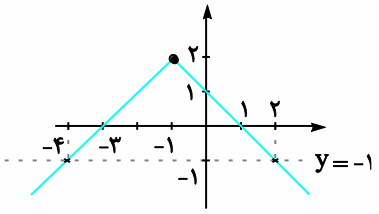
محل برخورد $y_۱$ و $y_۲$ تنها یک نقطه در قسمت **x**های منفی است پس یک ریشه منفی دارد.

۹- گزینه «۱» متوسط

ابتدا نمودار $y=-|x+۱|+۲$ را رسم می‌کنیم که با توجه به سال دهم $y=-|x|$ را یک واحد به سمت چپ و ۲ واحد به سمت بالا انتقال داده‌ایم.

محل برخورد شاخه‌های قدرمطلق با $y=-۱$ را به دست می‌آوریم:

$$-x-۱+۲=-۱ \Rightarrow x=۲$$



مساحت ناحیه محدود مثلثی است به ارتفاع ۳ و قاعده ۶ واحد است پس مساحت مثلث:

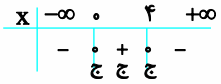
$$S=\frac{۶\times۳}{۲}=۹$$

۱۰- گزینه «۳» دشوار

با مرتب کردن معادله خواهیم داشت:

$$|۴x-x^۲|=۴x-x^۲$$

از ویژگی‌های قدرمطلق این را داریم که اگر عبارت خودش از قدرمطلق خارج شود به معنای مثبت بودن عبارت است پس:



$$۴x-x^۲\geq۰\Rightarrow x(۴-x)=۰$$

$$x=۰, x=۴$$

پس یعنی در بازه $[۰,۴]$ بی‌شمار ریشه دارد.

۱۱- گزینه «۴» آسان

حواستون باشه‌ها! برای یافتن تعداد جواب‌های معادله به‌صورت $|x-a|+|x-b|=k$ می‌توان از دستور زیر استفاده کرد:

۱) اگر $|a-b|>k$ معادله جواب ندارد.

۲) اگر $|a-b|<k$ معادله دو جواب دارد

۳) اگر $|a-b|=k$ باشد معادله بی‌شمار جواب دارد پس:

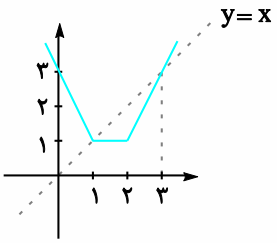
$$\underset{a=-۱}{|x+۱|}+\underset{b=۲}{|x-۲|}=\underset{k=۳}{۳}$$

$$|a-b|=|-۱-۲|=۳=۳$$

پس معادله بی‌شمار جواب دارد.

۱۲- گزینه «۴» دشوار

ابتدا به روش هندسی نمودار $y=|x-1|+|x-2|$ و $y=x$ را رسم می‌کنیم و سپس از روی نمودار محدوده‌ای که نمودار گلدانی از نیمساز ناحیه اول و سوم بالاتر بود را به عنوان جواب اعلام می‌کنیم.



محل برخورد دو نمودار $x=1$ و دومین محل برخورد در $x>2$ پس:

$$x-1+x-2=x \Rightarrow 2x-3=x \Rightarrow x=3$$

در نتیجه در بازه $(-\infty,1)\cup(3,+\infty)$ نمودار گلدانی بالاتر از نیمساز است.

۱۳- گزینه «۱» دشوار

حواستون باشه‌ها! در نامساوی مثلث زمانی $|a+b|=|a|+|b|$ خواهد بود که $ab\geq 0$ یعنی **a** و **b** هم علامت باشند.

با کمی نگاه دقیق‌تر به عبارت‌ها متوجه می‌شویم:

$$|\underbrace{x^2+4x+9}_{a}+\underbrace{2x-3}_{b}|=|\underbrace{x^2+4x+9}_{a}|+|\underbrace{2x-3}_{b}|$$

چون عبارت x^2+4x+9 دارای Δ منفی است و ضریب x^2 مثبت است. همواره مثبت است پس: $|a|=a$.

در نتیجه $ab\geq 0$ پس:

$$\underbrace{(x^2+4x+9)}_{\text{همواره مثبت}}(2x-3)\geq 0$$

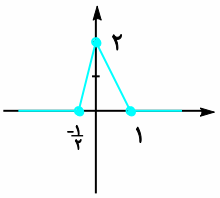
$$2x-3\geq 0 \Rightarrow x\geq \frac{3}{2}$$

۱۴- گزینه «۲» دشوار

حواستون باشه‌ها! ریشه‌های داخل قدرمطلق نقاط شکست نمودار است پس می‌توان با توجه به نقاط شکست نمودار را رسم کرد.

$$|1-x|+|2x+1|-3|x|>0$$

$$\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix}-\frac{1}{2}\\0\end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix}0\\2\end{bmatrix}$$



حال قسمت‌هایی از نمودار که بالای محور **x**ها است جواب مسئله است که $-\frac{1}{2}<x<1$ است.

۱۵- گزینه «۱» دشوار

ابتدا دامنه عبارت را به دست می‌آوریم:

$$\sqrt{x}-|x|=0 \Rightarrow \sqrt{x}=x \Rightarrow x=x^2 \Rightarrow x^2-x=0$$

$$x(x-1)=0 \Rightarrow x=0, x=1 \Rightarrow D:\mathbb{R}-\{0,1\}, x\geq 0$$

از اشتراک دو قسمت برای دامنه خواهیم داشت:

$$D:(0,+\infty)-\{1\}$$

حال با طرفین وسط عبارت ادامه می‌دهیم:

$$1-|x|=2\sqrt{x}-2|x| \Rightarrow 1-2\sqrt{x}=-|x|$$

با بسط قدرمطلق داریم:

$$x\geq 0: 1-2\sqrt{x}=-x \Rightarrow x-2\sqrt{x}+1=0 \Rightarrow (\sqrt{x}-1)^2=0$$

$$\Rightarrow \sqrt{x}=1 \Rightarrow x=1 \text{ غ ق ق}$$

$$x<0: 1-2\sqrt{x}=x \Rightarrow x+2\sqrt{x}-1=0 \Rightarrow \Delta=4-4(-1)=8$$

$$\sqrt{x}=\frac{-2\pm 2\sqrt{2}}{2}$$

$$\sqrt{x}=-1+\sqrt{2} \Rightarrow x=3-2\sqrt{2}$$

$$\sqrt{x}=-1-\sqrt{2} \Rightarrow x=3+2\sqrt{2}$$

با شرط $x<0$ هر دو جواب غیرقابل قبول است. توجه داشته باشید که $x=1$ چون در دامنه عبارت نیست قابل قبول نیست.

۱۶- گزینه «۱» متوسط

نمودار گلدانی به‌صورت $|x-a|+|x-b|=k$ زمانی بی‌شمار جواب دارد که $|a-b|=k$ باشد.

ابتدا از ضریب **x** در قدرمطلق‌ها فاکتور می‌گیریم:

$$3(|x-\frac{1}{3}|+|x+\frac{5}{3}|)=6k \Rightarrow |x-\frac{1}{3}|+|x+\frac{5}{3}|=2k$$

$$a=\frac{1}{3} \qquad b=-\frac{5}{3}$$

$$|\frac{1}{3}+\frac{5}{3}|=2k \Rightarrow 2=2k \Rightarrow 1=k$$

۱۷- گزینه «۱» متوسط

با توجه به نمودار $f(x)$ آن را تعیین علامت می‌کنیم.

x		-۱	
f(x)	+	۰	+

پس $f(x)$ همواره مثبت است و تنها در $x=-1$ صفر می‌شود. حال به بررسی ضابطه $g(x)$ می‌پردازیم:

$$g(x)=\frac{f(x)}{|f(x)|} \Rightarrow D_g:\mathbb{R}-\{f(x)=0\} \Rightarrow D_g=\mathbb{R}-\{-1\}$$

$$g(x)=\frac{f(x)}{|f(x)|} \xrightarrow[\text{مثبت است ژس}]{\text{چون f همواره}} g(x)=\frac{f(x)}{f(x)}=1$$

پس نمودار $g(x)=1$ با دامنه $\mathbb{R}-\{1\}$ است.

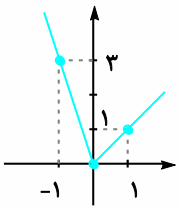
۱۸- گزینه «۲» دشوار

با تعیین علامت قدرمطلق عبارت را ساده کنید:

$$x \geq 0 : f(x) = |x - |x - x|| = |x| = x \quad \begin{array}{c|cc} x & 0 & 1 \\ \hline y & 0 & 1 \end{array}$$

$$x < 0 : f(x) = |x - |2x|| = |3x| = -3x \quad \begin{array}{c|cc} x & 0 & -1 \\ \hline y & 0 & 3 \end{array}$$

با استفاده از نقطه دهی به رسم نمودار می‌پردازیم:



۱۹- گزینه «۲» دشوار

در ابتدا چون x خروجی قدرمطلق است پس $x > 0$ با این شرط شروع به بسط قدرمطلق می‌کنیم:

$$||x-4|-3x| = x$$

حال با استفاده از ویژگی‌های قدرمطلق این معادله را دوباره حل می‌کنیم:

$$|x-4|-3x = x \Rightarrow |x-4| = 4x$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x-4 = 4x \Rightarrow -4 = 3x \Rightarrow -\frac{4}{3} = x \text{ غ ق ق} \\ x-4 = -4x \Rightarrow -4 = -5x \Rightarrow x = \frac{4}{5} \text{ ق ق} \end{cases}$$

$$|x-4|-3x = -x \Rightarrow |x-4| = 2x$$

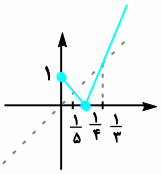
$$\Rightarrow \begin{cases} x-4 = 2x \Rightarrow -4 = x \text{ غ ق ق} \\ x-4 = -2x \Rightarrow -4 = -3x \Rightarrow x = \frac{4}{3} \text{ ق ق} \end{cases}$$

پس معادله دو جواب حقیقی دارد.

۲۰- گزینه «۱» متوسط

با مرتب کردن معادله به $|4x-1| > x$ خواهیم رسید. ابتدا نمودار $y_1 = |4x-1|$ و $y_2 = x$ را رسم می‌کنیم سپس قسمت‌هایی که $y_2 = x$ بالاتر از قدرمطلق بود را به‌عنوان جواب مسئله اعلام می‌کنیم.

محل برخورد دو نمودار را از $|4x-1| = x$ به دست می‌آوریم:



$$4x-1 = x \Rightarrow 3x = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{3}$$

$$4x-1 = -x \Rightarrow 5x = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{5}$$

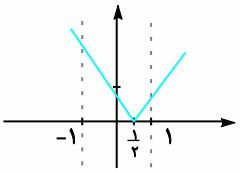
پس جواب مسئله $(\frac{1}{5}, \frac{1}{3})$ است درنتیجه $a = \frac{1}{5}, b = \frac{1}{3}$

$$5a + 3b = 5(\frac{1}{5}) + 3(\frac{1}{3}) = 1 + 1 = 2$$

۲۱- گزینه «۳» متوسط

با رسم نمودار $f(x) = |2x-1|$ خواهیم داشت: $x = -1, x = 1$

با توجه به شکل دو مثلث قائم‌الزاویه خواهیم داشت:



که مثلث کوچک تر دارای قاعده $\frac{1}{2}$ و ارتفاع

$$2(1) - 1 = 2 - 1 = 1$$

و مثلث بزرگ تر دارای قاعده $\frac{3}{2}$ و ارتفاع

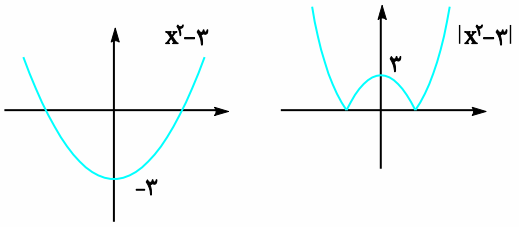
$$-2x + 1 = -2(-1) + 1 = 3$$

پس:

$$S_1 + S_2 = \frac{\frac{1}{2} \times 1}{2} + \frac{\frac{3}{2} \times 3}{2} = \frac{1}{4} + \frac{9}{4} = \frac{10}{4} = \frac{5}{2}$$

۲۲- گزینه «۳» آسان

نمودار $|f(x)|$ بدان معناست که ابتدا $f(x)$ را رسم می‌کنیم سپس هر قسمت از شکل که زیر محور xها است را قرینه به سمت بالای محور xها می‌کنیم.



۲۳- گزینه «۳» آسان

حواستون باشه‌ها! کم ترین مقدار نمودار گلدانی در $|a-b|$ اتفاق می‌افتد پس:

$$y = |x-3| + |x-a|$$

(۳ و a)

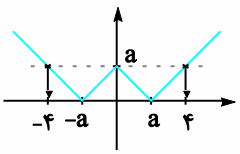
پس $|3-a| = 6$

$$3-a = 6 \Rightarrow 3-6 = a \Rightarrow a = -3$$

$$3-a = -6 \Rightarrow 3+6 = a \Rightarrow a = 9$$

۲۴- گزینه «۲» دشوار

ابتدا به طور حدودی نمودار $y = ||x|-a|$ را رسم می‌کنیم و با نمودار $y = 3$ آن را قطع می‌دهیم تا دارای سه جواب شود.



با توجه به شکل نقطه $(4, a)$ در معادله فوق صدق می‌کند پس:

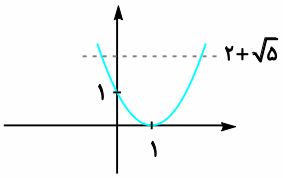
$$a = ||4|-a| \Rightarrow a = |4-a| \Rightarrow 4-a = a \Rightarrow 4 = 2a \Rightarrow 2 = a$$

۲۵- گزینه «۳» متوسط

طرف اول و دوم را به صورت اتحاد مربع کامل می‌نویسیم:

$$\sqrt{(۲+\sqrt{۵})^۲}=(x-۱)^۲ \Rightarrow ۲+\sqrt{۵}=(x-۱)^۲$$

حال با استفاده از روش هندسی تعداد جواب‌های معادله را به دست می‌آوریم:



پس معادله ۲ جواب دارد.

۲۶- گزینه «۳» متوسط

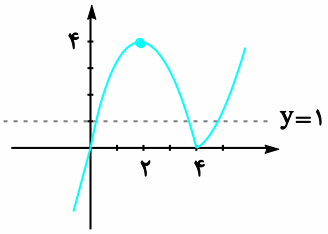
حاصل‌ضرب عددی در فاصله خودش از ۴ برابر $x|x-۴|$ خواهد بود پس:

$$x|x-۴|=۱$$

با توجه به روش هندسی خواهیم داشت:

$$x \geq ۴ : x(x-۴)$$

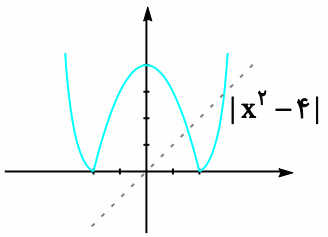
$$x < ۴ : -x(x-۴)$$



این معادله سه محل برخورد دارد پس سه عدد حقیقی این ویژگی را خواهند داشت.

۲۷- گزینه «۲» دشوار

با توجه بازه بندی قدرمطلق و رسم شکل داریم:

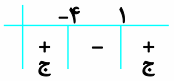


جاهایی که قدرمطلق پایین‌تر از $۳x$ قرار دارد در قسمت مثبت اتفاق افتاده است پس:

$$۰ \leq x < ۲ : -x^۲+۴ \leq ۳x \Rightarrow ۰ \leq x^۲+۳x-۴$$

شکل $(-\infty,-۴]\cup[۱,+\infty)$ جواب کل: $[۱,۲)$

$$x \geq ۲ : x^۲-۴ \leq ۳x \Rightarrow x^۲-۳x-۴ \leq ۰$$



جواب کل: $[۲,۴]$

از اجتماع دو جواب به $[۱,۴]$ می‌رسیم پس:

$$a=۲, b=۴ \Rightarrow ۱+۱۶=۱۷$$

۲۸- گزینه «۲» دشوار

$$|x^۲-۱|+۳|x-۱| \leq |x-۱||x-۲|$$

$$|x-۱||x-۱|+۳|x-۱|-|x-۱||x-۲| \leq ۰$$

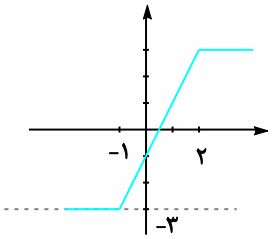
$$|x-۱|(|x-۱|+۳-|x-۲|) \leq ۰$$

چون $|x-۱|$ مثبت است پس $|x+۱|+۳-|x-۲|$ باید منفی باشد.

$$|x+۱|-|x-۲| \leq -۳$$

$$\begin{bmatrix}-۱\\-۳\end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix}۲\\۳\end{bmatrix}$$

با توجه به شکل قسمت اول



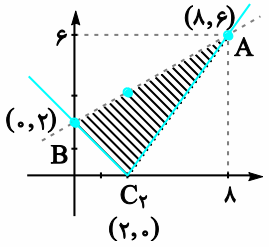
۲۹- گزینه «۴» دشوار

ابتدا نمودار $y=\sqrt{x^۲-۴x+۴}$ را رسم می‌کنیم.

$$y=\sqrt{x^۲-۴x+۴} \Rightarrow y=\sqrt{(x-۲)^۲}$$

$$y=|x-۲|$$

حالا مساحت ناحیه محدود $y=\frac{۱}{۲}x+۲, y=|x-۲|$ خواسته شده پس:



چون دو خط **AC** و **BC** دارای شیب‌های قرینه و معکوس یکدیگرند پس مثلث **ABC** قائم الزاویه است درنتیجه مساحت:

$$S=\frac{AC \times BC}{۲}$$

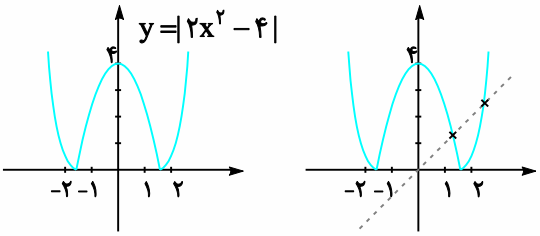
$$AC=\sqrt{۳۶+۳۶}=۶\sqrt{۲} \qquad S=\frac{۶\sqrt{۲} \times ۲\sqrt{۲}}{۲}=۱۲$$

$$BC=\sqrt{۴+۴}=۲\sqrt{۲}$$

۳۰- گزینه «۱» دشوار

با توجه به تعریف $|f(x)|$ می‌توان شکل $y=|۲x^۲-۴|$ را رسم کرد سپس نواحی که $|۲x^۲-۴|<۲x$ است به عنوان جواب اعلام کرد.

$|f(x)|$ به معنای آن است که ابتدا $f(x)$ را رسم کنیم سپس قسمت‌های زیر محور **x**ها را به بالای محور **x**ها منتقل کنیم پس:



محل برخورد شکل در $x_۱=۱, x_۲=۲$ است پس بازه $(۱,۲)$ جواب مسئله است پس:

$$b-a=۲-۱=۱$$

۱- آسان

حواستون باشه‌ها!

۱) فرمول معادله خط به‌صورت $y=ax+b$ و یا $y-y_۰=m(x-x_۰)$ است.

۲) محل تلاقی به معنای حل دستگاه و یا جای‌گذاری است.

۳) شرط موازی بودن دو خط برابر بودن شیب‌ها و شرط عمود بودن دو خط قرینه و معکوس بودن شیب‌هااست.

ابتدا محل تلاقی خط $۲y=x-۲$ و محور **x**ها را به دست می‌آوریم.

$$y=۰ \Rightarrow ۲(۰)=x-۲=۰ \Rightarrow x=۲$$

پس نقطهٔ $\begin{bmatrix}۲\\۰\end{bmatrix}$ در معادلهٔ خط جدید صدق می‌کند و با خط $۳y=x+۲$ موازی است پس شیب‌های برابر دارند . شیب خط $۳y=x+۲$ برابر $\frac{۱}{۳}$ است پس:

$$y-۰=\frac{۱}{۳}(x-۲) \Rightarrow y=\frac{۱}{۳}x-\frac{۲}{۳}$$

۲- آسان

ابتدا فرمول معادله خط $y-y_۱=m(x-x_۱)$ را می‌نویسیم. شرط عمود بودن دو خط قرینه و معکوس بودن شیب‌هاست پس:

$$\text{شیب}=\frac{-(-۳)}{۲}=\frac{۳}{۲} \quad \text{شیب}=\frac{-(\text{ضریب } x)}{\text{ضریب } y}$$

نقطهٔ موردنظر با $x=۲$ را در معادله خط $y+۲x=۳$ جای‌گذاری می‌کنیم تا $y=-۱$ به دست آید:

$$y-(-۱)=\frac{۳}{۲}(x-۲) \Rightarrow y+۱=\frac{۳}{۲}x-۳ \Rightarrow y=\frac{۳}{۲}x-۴$$

۳- دشوار

آ) با مشخص کردن نوع مثلث داریم: [طول اضلاع و شیب‌ها را بیابید]

$$AB=\sqrt{(۵-۲)^۲+(۴-۰)^۲}=\sqrt{۹+۱۶}=\sqrt{۲۵}=۵$$

$$AC=\sqrt{(۲+۲)^۲+(۰-۳)^۲}=\sqrt{۱۶+۹}=\sqrt{۲۵}=۵$$

$$BC=\sqrt{(-۲-۵)^۲+(۳-۴)^۲}=\sqrt{۴۹+۱}=\sqrt{۵۰}=۵\sqrt{۲}$$

چون $۵\sqrt{۲}$ از بقیه اضلاع بزرگ‌تر است و رابطه فیثاغورس بین اضلاع برقرار است پس مثلث قائم‌الزاویه متساوی‌الساقین است.

ب) چون مثلث قائم‌الزاویه متساوی‌الساقین است پس:

$$\text{محیط}=۵+۵+۵\sqrt{۲}=۱۰+۵\sqrt{۲}$$

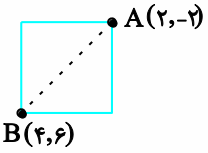
$$\text{مساحت}=\frac{۵\times۵}{۲}=\frac{۲۵}{۲}$$

۴- متوسط

حواستون باشه‌ها! برای به‌دست‌آوردن فاصلهٔ دو نقطه $A(x_۱,y_۱)$ و $B(x_۲,y_۲)$ از رابطهٔ $AB=\sqrt{(x_۱-x_۲)^۲+(y_۱-y_۲)^۲}$ استفاده می‌کنیم.

پس:

۲ رأس مقابل در مربع به‌صورت شکل مقابل است.



فاصله **AB** قطر مربع را می‌دهد و می‌دانیم (طول ضلع) $\times$ $(\sqrt{۲})$ = قطر

$$\text{قطر } AB=\sqrt{(۴-۲)^۲+(۶-(-۲))^۲}=\sqrt{۴+۶۴}=\sqrt{۶۸}=۲\sqrt{۱۷}$$

پس طول ضلع مربع $\frac{۲\sqrt{۱۷}}{\sqrt{۲}}$ خواهد بود درنتیجه مساحت مربع:

$$S=(۲\sqrt{\frac{۱۷}{۲}})^۲=۴\times\frac{۱۷}{۲}=۳۴$$

۵- آسان

فاصله نقطه‌ای روی دایره تا مرکز دایره را شعاع دایره می‌نامند پس:

$$r=\sqrt{(۲-۱)^۲+(-۳-۲)^۲}=\sqrt{۱+۲۵}=\sqrt{۲۶}$$

۶- دشوار

حواستون باشه‌ها!

نقاط روی نیمساز ربع اول و سوم از رابطهٔ $y=x$ پیروی می‌کنند پس نقاط به‌صورت (α,α).

فاصله (α,α) تا $(۰,۳)$ را برابر ۴ قرار می‌دهیم:

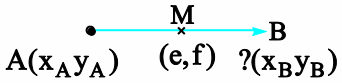
$$\sqrt{(\alpha-۰)^۲+(\alpha-۳)^۲}=۴\Rightarrow \alpha^۲+\alpha^۲-۶\alpha+۹=۱۶$$

$$\Rightarrow ۲\alpha^۲-۶\alpha-۷=۰$$

مجموع طول‌های خواسته شده بنا به معادلات درجه ۲ از رابطهٔ $\frac{-b}{a}$ به دست می‌آید پس $\frac{-(-۶)}{۲}=۳$.

۷- آسان

حواستون باشه‌ها! بنا به فرمول یافتن نقطه وسط پاره‌خط اگر



تصویر $x_B=۲e-x_A$

تصویر $y_B=۲F-y_A$

پس بنا به فرمول داریم:

تصویر $x=۲(۲)-۳=۱$

تصویر $y=۲(۱)-(-۱)=۳$

پس نقطهٔ تصویر (۳ و ۱) است.

۸- دشوار

اگر نقطه‌ای روی خط $y=۲x$ باشد یعنی نقاطی به‌صورت $(\alpha,۲\alpha)$ خواهد بود حالا فاصلهٔ این نقطه از مبدأ مختصات و نقطهٔ $A(۲,۴)$ می‌یابیم:

$$\sqrt{(\alpha-۰)^۲+(۲\alpha-۰)^۲}+\sqrt{(\alpha-۲)^۲+(۲\alpha-۴)^۲}=۵$$

$$\sqrt{\alpha^۲+۴\alpha^۲}+\sqrt{\alpha^۲-۴\alpha+۴+۴\alpha^۲-۱۶\alpha+۱۶}=۵$$

$$\sqrt{۵\alpha^۲}+\sqrt{۵\alpha^۲-۲۰\alpha+۲۰}=۵\Rightarrow \sqrt{۵}|\alpha|+\sqrt{۵}|\alpha-۲|=۵$$

با توجه به بسط قدرمطلق‌ها داریم:

$$\alpha<۰:-\sqrt{۵}\alpha-\sqrt{۵}\alpha+۲\sqrt{۵}=۵\Rightarrow -۲\sqrt{۵}\alpha=۵-۲\sqrt{۵}$$

$$\Rightarrow \alpha=\frac{۵-۲\sqrt{۵}}{-۲\sqrt{۵}}$$

$$۰\le\alpha\le۲:\sqrt{۵}\alpha-\sqrt{۵}\alpha+۲\sqrt{۵}=۵\ \Rightarrow\ ۲\sqrt{۵}\neq۵$$ جواب ندارد.

$$\alpha>۲:\sqrt{۵}\alpha+\sqrt{۵}\alpha-۲\sqrt{۵}=۵\Rightarrow ۲\sqrt{۵}\alpha=۵+۲\sqrt{۵}\Rightarrow\alpha=\frac{۵+۲\sqrt{۵}}{۲\sqrt{۵}}$$

۹- آسان

حواستون باشه‌ها! با توجه به تمرین کتاب درسی اگر **A**، **B**، **C**، **D** چهار رأس متوازی‌الضلاع باشد داریم:

$$x_A+x_C=x_B+x_D$$

$$y_A+y_C=y_B+y_D$$

ابتدا رأس **D** را پیدا می‌کنیم:

$$x_A+x_C=x_B+x_D\ \Rightarrow\ ۳+۴=۲+x_D\ \Rightarrow\ ۵=x_D$$

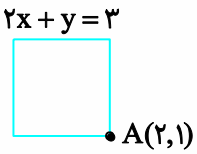
$$y_A+y_C=y_B+y_D\ \Rightarrow\ ۱+(-۲)=۰+y_D\ \Rightarrow\ =-۱$$

حال فاصله نقطهٔ **B** و **D** را پیدا می‌کنیم:

$$BD=\sqrt{(۲-۵)^۲+(۰+۱)^۲}\Rightarrow BD=\sqrt{۹+۱}=\sqrt{۱۰}$$

۱۰- متوسط

چون نقطهٔ داده شده در خط صدق نمی‌کند پس روی ضلع قرار ندارد و در نتیجه



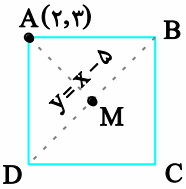
فاصلهٔ نقطهٔ **A** تا خط $۲x+y-۳=۰$ طول ضلع مربع است پس:

$$\text{طول ضلع}=\frac{|۲(۲)+۱-۳|}{\sqrt{۴+۱}}=\frac{۲}{\sqrt{۵}}$$

$$S=(\frac{۲}{\sqrt{۵}})^۲=\frac{۴}{۵}$$

۱۱- دشوار

با توجه به این که نقطه در خط صدق نمی‌کند پس ابتدا معادله خط **AM** را به دست می‌آوریم. چون شیب **AM** قرینه و معکوس قطر است پس شیب **AM** (۱-) است.



$$y-y_۰=m(x-x_۰)\Rightarrow y-۳=-۱(x-۲)$$

$$y-۳=-x+۲\Rightarrow y=-x+۵$$

محل برخورد **AM** و قطر **BD** جواب مسئله است.

$$\begin{cases}y+x=۵\\ y-x=-۵\end{cases}$$

$$۲y=۰\ \Rightarrow\ y=۰,x=۵$$

$$M(۵,۰)$$

۱۲- متوسط

با استفاده از فاصله نقطه از خط داریم: $A(۱,۲)$ و $ax+۴y-۱=۰$

$$\frac{|a+۸-۱|}{\sqrt{a^۲+۱۶}}=۲ \Rightarrow \frac{|a+۷|}{\sqrt{a^۲+۱۶}}=۲ \Rightarrow |a+۷|=۲\sqrt{a^۲+۱۶}$$

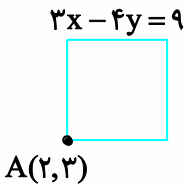
$$a^۲+۱۴a+۴۹=۴(a^۲+۱۶) \Rightarrow a^۲+۱۴a+۴۹=۴a^۲+۶۴$$

$$۳a^۲-۱۴a+۱۵=۰ \Rightarrow (۳a-۵)(a-۳)=۰$$

$$\downarrow \quad \downarrow$$
$$a=\frac{۵}{۳} \quad a=۳$$

۱۳- آسان

چون نقطهٔ **A** در ضلع داده شده صدق نمی‌کند پس:



پس فاصلهٔ **A** تا خط $۳x-۴y=۹$ طول ضلع مربع را می‌دهد پس:

$$۳x-۴y-۹=۰$$

$$\text{طول ضلع}=\frac{|۳(۲)-۴(۳)-۹|}{\sqrt{۹+۱۶}}=\frac{|۶-۱۲-۹|}{\sqrt{۲۵}}=\frac{۱۵}{۵}=۳$$

پس مساحت مربع $S=۳^۲=۹$

۱۴- متوسط

حواستون باشه‌ها! عمودمنصف دارای دو ویژگی عمود بودن (شیب‌های قرینه و معکوس) و میانه بودن پاره‌خط است.

$$\text{شیب } AB=\frac{-۳-۱۵}{۰-۶}=\frac{-۱۸}{-۶}=۳$$

پس شیب عمودمنصف $-\frac{۱}{۳}$ خواهد بود.

$$\text{وسط پاره‌خط } AB: (\frac{۰+۶}{۲},\frac{-۳+۱۵}{۲})=(۳,۶)=M$$

پس معادلهٔ عمودمنصف:

$$y-y_۰=m(x-x_۰) \Rightarrow y-۶=-\frac{۱}{۳}(x-۳) \Rightarrow y-۶=-\frac{۱}{۳}x+۱$$

از صدق دادن نقطهٔ **P** در معادله متوجه می‌شویم:

$$y=-\frac{۱}{۳}x+۷ \Rightarrow ۱۱=-\frac{۱}{۳}(-۱۲)+۷=۴+۷=۱۱$$

نقطه **p** روی خط قرار دارد.

۱۵- متوسط

حواستون باشه‌ها! وقتی حرف از میانه باشه به نقطهٔ وسط پاره‌خط احتیاج داریم.

آ) چون طول میانه خواسته شده ابتدا نقطهٔ **M** پیدا می‌کنیم سپس از فاصلهٔ دو نقطهٔ طول **AM** را پیدا می‌کنیم.

$$M \xrightarrow{\text{وسط BC}} (\frac{۳+۷}{۲},\frac{۱۱+۱}{۲})=(۵,۶)$$

$$\text{فاصله دو نقطه } AM=\sqrt{(۵-۱)^۲+(۶-۹)^۲}=\sqrt{۱۶+۹}=\sqrt{۲۵}=۵$$

ب) معادله میانه به معنای نوشتن معادله خط است پس:

$$\text{شیب } AM=\frac{۶-۹}{۵-۱}=\frac{-۳}{۴}$$

$$y-y_۱=m(x-x_۱) \Rightarrow y-۶=\frac{-۳}{۴}(x-۵) \Rightarrow y-۶=\frac{-۳}{۴}x+\frac{۱۵}{۴}$$

$$y=-\frac{۳}{۴}x+\frac{۳۹}{۴}$$

۱۶- متوسط

آ) مثلث متساوی‌الساقین دو ضلع برابر دارد پس طول اضلاع را به دست می‌آوریم:

$$AB=\sqrt{(-۶+۱)^۲+(-۲-۷)^۲}=\sqrt{۲۵+۸۱}=\sqrt{۱۰۶}$$

$$AC=\sqrt{(۳+۱)^۲+(۳-۷)^۲}=\sqrt{۱۶+۱۶}=۴\sqrt{۲}$$

$$BC=\sqrt{(۳+۶)^۲+(۳+۲)^۲}=\sqrt{۸۱+۲۵}=\sqrt{۱۰۶}$$

پس چون $AB=BC$، مثلث متساوی‌الساقین است.

ب) حواستون باشه‌ها! عمودمنصف و ارتفاع به فاصلهٔ نقطه از خط و شیب‌های قرینه و معکوس مربوط است. عمودمنصف **BC** شیبی قرینه معکوس **BC** خواهد داشت پس:

$$\text{شیب } BC=\frac{-۲-۳}{-۶-۳}=\frac{-۵}{-۹}=\frac{۵}{۹} \xrightarrow[\text{شیب عمودمنصف}]{\text{قرینه و معکوس}} \frac{-۹}{۵}$$

عمودمنصف از وسط ضلع **BC** نیز می‌گذرد پس:

$$\text{وسط } BC: (\frac{-۶+۳}{۲},\frac{۳+(-۲)}{۲})=(\frac{-۳}{۲},\frac{۱}{۲})$$

$$\text{معادله } BC: y-\frac{۱}{۲}=-\frac{۹}{۵}(x+\frac{۳}{۲}) \Rightarrow y=\frac{-۹}{۵}x-\frac{۱۱}{۵}$$

پ) فاصلهٔ نقطه **A** تا خط **BC** را به دست می‌آوریم:

$$AH=\frac{|۷+\frac{۹}{۵}(-۱)+\frac{۱۱}{۵}|}{\sqrt{\frac{۸۱}{۲۵}+۱}}=\frac{\frac{۳۷}{۵}}{\frac{\sqrt{۱۰۶}}{۵}}=\frac{۳۷}{\sqrt{۱۰۶}}$$

۱۷- دشوار

ابتدا برای یافتن **H** معادله خط **AH** و معادله خط **BC** را به دست می‌آوریم تا دستگاه حل کنیم:

معادله خط **BC**:

$$\text{BC شیب}: \frac{-۲-(-۱)}{۸-۱}=\frac{-۱}{۷}, y+۱=\frac{-۱}{۷}(x-۱)$$

$$y+۱=\frac{-۱}{۷}x+\frac{۱}{۷} \Rightarrow y=\frac{-۱}{۷}x-\frac{۶}{۷}$$

معادله خط **AH**:

$$\text{AH شیب}=۷$$

$$y-۲=۷(x-۴) \Rightarrow y=۷x-۲۸+۲ \Rightarrow y=۷x-۲۶$$

دستگاه حل می‌کنیم تا محل برخورد **BC** و **AH** را بیابیم که همان نقطهٔ **H** است.

$$\begin{cases} y=-\frac{۱}{۷}x-\frac{۶}{۷} \\ y=-۷x+۲۶ \end{cases}$$

$$۰=-\frac{۵۰}{۷}x+\frac{۱۷۶}{۷}$$

$$\Rightarrow ۱۷۶=۵۰x \Rightarrow x=\frac{۱۷۶}{۵۰}=\frac{۸۸}{۲۵}\ ,\ y=\frac{۳۴}{۲۵} \quad H(\frac{M}{۲۵},\frac{۳۴}{۲۵})$$

برای یافتن **M** نقطه وسط **BC** را می‌یابیم:

$$M(\frac{۹}{۲},-\frac{۳}{۲})$$

$$MH=\sqrt{(\frac{۸۸}{۲۵}-\frac{۹}{۲})^۲+(\frac{۳۴}{۲۵}+\frac{۳}{۲})^۲}=\sqrt{(\frac{۴۹}{۵۰})^۲+(\frac{۱۴۳}{۵۰})^۲}$$

$$=\sqrt{\frac{۲۲۸۵۰}{۲۵۰۰}}=\sqrt{۹/۱۴}$$

۱۸- متوسط

آ)

$$r=OA=\sqrt{(۲-۴)^۲+(-۲-۱)^۲}=\sqrt{۴+۹}=\sqrt{۱۳}$$

$$\text{وسط } AB=O=(\frac{۶+۲}{۲},\frac{۴+(-۲)}{۲})=(۴,۱)$$

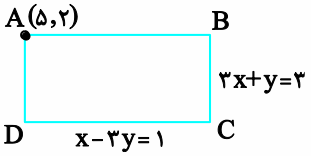
ب) اگر اندازهٔ **OC** به‌اندازهٔ شعاع دایره باشد یعنی **C** روی محیط دایره قرار دارد.

$$OC=\sqrt{(۴-۷)^۲+(۱-۳)^۲}=\sqrt{۹+۴}=\sqrt{۱۳}=r$$

پس **C** روی محیط دایره قرار دارد.

۱۹- متوسط

ابتدا با توجه به شیب دو ضلع متوجه می‌شویم چون قرینه و معکوس یکدیگر هستند پس حتماً ابتدا با حل کردن دستگاه مختصات **C** را می‌یابیم.



$$\begin{cases} ۳x+y=۳ \\ x-۳y=۱ \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{r} ۳x+y=۳ \\ -۳x+۹y=-۳ \\ \hline ۱۰y=۰ \Rightarrow y=۰, x=۱ \end{array}$$

$$C(۱,۰)$$

مختصات محل برخورد قطرها، نقطهٔ وسط قطر **AC** است پس:

$$M=(\frac{۵+۱}{۲},\frac{۰+۲}{۲})$$

$$M=(۳,۱)$$

۲۰- متوسط

حواستون باشه‌ها! این فرمول را حتماً به خاطر بسپارید:

$$\text{فاصله دو خط موازی}=\frac{|C-C'|}{\sqrt{a^۲+b^۲}}$$

اگر $d:=ax+by+c=۰$

$d':ax+by+c'=۰$ باشد.

اثبات: ۱) ابتدا نقطه‌ای از خط $ax+by+c=۰$ درنظر می‌گیریم:

$$(\alpha,-\frac{a}{b}\alpha-\frac{c}{b})$$

۲) فاصلهٔ این نقطه را از خط $ax+by+c'=۰$ به دست می‌آوریم:

$$\frac{|a\alpha+b(-\frac{a}{b}\alpha-\frac{c}{b})+c'|}{\sqrt{a^۲+b^۲}}=\frac{|a\alpha-a\alpha-c+c'|}{\sqrt{a^۲+b^۲}}=\frac{|c'-c|}{\sqrt{a^۲+b^۲}}$$

۲۱- متوسط

با توجه به فرمول به دست آورده در سؤال قبل:

$$\sqrt{۳}y-۳x+۵=۰ \Rightarrow \sqrt{۳}y-۳x+۵=۰$$

$$y-\sqrt{۳}x+۱=۰ \xrightarrow{\times\sqrt{۳}} \sqrt{۳}y-۳x+\sqrt{۳}=۰$$

$$\frac{|۵-\sqrt{۳}|}{\sqrt{(\sqrt{۳})^۲+(-۳)^۲}}=\frac{|۵-\sqrt{۳}|}{\sqrt{۳+۹}}=\frac{۵-\sqrt{۳}}{\sqrt{۱۲}}=\frac{۵-\sqrt{۳}}{۲\sqrt{۳}}$$

۲۲- آسان

نقطهٔ روی خط $y=x+۱$ به‌صورت $(\alpha,\alpha+۱)$ است.

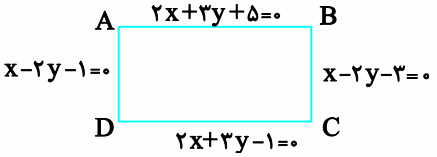
$$\frac{|۲\alpha-\alpha-۱+۳|}{\sqrt{۴+۱}}=\sqrt{۵} \Rightarrow \frac{|\alpha+۲|}{\sqrt{۵}}=\sqrt{۵} \Rightarrow |\alpha+۲|=۵$$

$$\alpha+۲=۵ \Rightarrow \alpha=۳$$

$$\alpha+۲=-۵ \Rightarrow \alpha=-۷$$

۲۳- متوسط

با توجه به شیب‌های خطوط داریم:



ابتدا فاصله دو ضلع موازی **AB** و **DC** را می‌یابیم:

$$BC = AD = \frac{|۵-(-۱)|}{\sqrt{۴+۹}} = \frac{۶}{\sqrt{۱۳}}$$

سپس فاصله دو ضلع موازی **BC** و **AD** را می‌یابیم:

$$AB = DC = \frac{|-۱-(-۳)|}{\sqrt{۱+۴}} = \frac{۲}{\sqrt{۵}}$$

$$\text{محیط} = ۲(\frac{۶}{\sqrt{۱۳}} + \frac{۲}{\sqrt{۵}})$$

۲۴- متوسط

فاصلهٔ مرکز دایره از خطوط مماس برابر شعاع دایره است پس درنتیجه با یکدیگر برابر است فاصلهٔ $(-۱,۴)$ تا خط $۳x+۴y+۲=۰$

$$\frac{|۳(-۱)+۴(۴)+۲|}{\sqrt{۹+۱۶}} = \frac{|-۳+۱۶+۲|}{\sqrt{۲۵}} = \frac{۱۵}{۵} = ۳$$

فاصله $(-۱,۴)$ تا خط $۵x-۱۲y-k=۰$

$$\frac{|۵(-۱)-۱۲(۴)-k|}{\sqrt{۲۵+۱۴۴}} = \frac{|-۵-۴۸-k|}{\sqrt{۱۶۹}} = \frac{|-۵۳-k|}{۱۳}$$

$$\frac{|-۵۳-k|}{۱۳} = ۳ \Rightarrow |-۵۳-k| = ۳۹ \begin{cases} -۵۳-k=۳۹ \\ -۵۳-۳۹=k \Rightarrow -۹۲=k \\ -۵۳-k=-۳۹ \\ -۵۳+۳۹=k \Rightarrow ۱۴=k \end{cases}$$

۲۵- متوسط

آ) محل برخورد سهمی با محور **x**ها یعنی $y=۰$

$$x^۲-۸x-۲۰=۰ \Rightarrow (x-۱۰)(x+۲)=۰$$

$$x=۱۰ \quad x=-۲$$

ب) طول **AB** فاصله **x**های به دست آورده :

$$|x_B - x_A| = |۱۰-(-۲)| = ۱۲$$

پ) بیش‌ترین ضخامت در y_S به دست می‌آید:

$$y_S = \frac{-\Delta}{۴a} = \frac{-(۶۴+۸۰)}{۴} = \frac{-۱۴۴}{۴} = -۳۶$$

پس بیش‌ترین ضخامت ۳۶ است.

۲۶- دشوار

ابتدا شیب خط $ax+by+c=۰$ را می‌یابیم که برابر با $(-\frac{a}{b})$ است در نتیجه خط **AH** که عمود بر آن است $(\frac{b}{a})$ است. در نتیجه معادله خط **AH** برابر است با $y-y_۰=\frac{b}{a}(x-x_۰)$ و در نتیجه $\frac{y-y_۰}{b}=\frac{x-x_۰}{a}$ که در آن **H** محل برخورد خط $ax+by+c=۰$ و **AH** است. پس با حل دستگاه خواهیم داشت ⇐

$$a(at+x_۰)+b(bt+y_۰)+c=۰ \Rightarrow t=-\frac{ax_۰+by_۰+c}{a^۲+b^۲}$$

و نوشتن فاصله دو نقطه داریم:

$$AH = \frac{|ax_۰+by_۰+c|}{\sqrt{a^۲+b^۲}}$$

۲۷- دشوار

آ)
$$r = OS = \sqrt{x^۲+۶۴} = ۱۰$$

$$x^۲+۶۴=۱۰۰ \Rightarrow x^۲=۳۶ \Rightarrow x=۶$$

ب)
$$\begin{matrix} P(-۱۰,۰) \\ S(۶,۸) \end{matrix} \Rightarrow \text{شیب } PS = \frac{۸-۰}{۶-(-۱۰)} = \frac{۸}{۱۶} = \frac{۱}{۲}$$

$$Q(۱۰,۰) \Rightarrow \text{شیب } SQ = \frac{۸-۰}{۶-۱۰} = \frac{۸}{-۴} = -۲$$

پ) چون شیب‌های قرینه و معکوس یکدیگرند پس در رأس **S** قائمه است.

۲۸- آسان

فاصله PA و PB را حساب کرده فاصله کمتر جواب مسئله است.

$$p_A = \sqrt{(۵۰-۱۰)^۲+(۳۰+۲۰)^۲} = \sqrt{۱۶۰۰+۲۵۰۰} = \sqrt{۴۱۰۰}$$

$$p_B = \sqrt{(۵۰-۸۰)^۲+(۳۰-۹۰)^۲} = \sqrt{۹۰۰+۳۶۰۰} = \sqrt{۴۵۰۰}$$

چون $PA < PB$ است پس پایگاه **A** مناسب‌تر است.

۲۹- متوسط

۱) ابتدا معادله خط **AM** را می‌یابیم: چون $x-y=۲$ عمود بر **AM** است شیب آن قرینه و معکوس است.

شیب $=-۱, A(۲,۱) \xrightarrow{\text{معادله خط}} y-۱=-۱(x-۲) \Rightarrow y=-x+۳$

محل تلاقی $y=-x+۳$ و $x-y=۲$ نقطهٔ **M** خواهد بود.

$$\begin{matrix} y=\cancel{-x}+۳ \\ y=\cancel{x}-۲ \\ \hline ۲y=۱ \end{matrix}$$

$$y=\frac{۱}{۲} \ , \ x=\frac{۵}{۲}$$

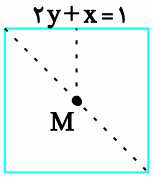
$$M=(\frac{۵}{۲},\frac{۱}{۲})$$

حال قرینهٔ $A(۲,۱)$ را نسبت به $M(\frac{۵}{۲},\frac{۱}{۲})$ پیدا می‌کنیم.

$$\begin{matrix} x=۲(\frac{۵}{۲})-۲=۳ \\ y=۲(\frac{۱}{۲})-۱=۰ \end{matrix} \quad (۳,۰)$$

۳۰- آسان

فاصلهٔ نقطهٔ M تا خط $۲y+x=۱$ نصف طول مربع است پس:



$$\frac{|۲(۴)+۰-۱|}{\sqrt{۴+۱}}=\frac{۷}{\sqrt{۵}}$$

یعنی طول ضلع مربع $\frac{۱۴}{\sqrt{۵}}$ است پس مساحت مربع $S=(\frac{۱۴}{\sqrt{۵}})^۲=\frac{۱۹۶}{۵}$

۱- گزینه «۳» آسان

$x_A=۲n-۳\ ,\ y_A=\frac{۱}{۲}-۳n$

$x_A=۳y_A+۱ \Rightarrow ۲n-۳=۳(\frac{۱}{۲}-۳n)+۱$

$\Rightarrow ۲n-۳=\frac{۳}{۲}-۹n+۱ \Rightarrow ۱۱n=\frac{۱۱}{۲} \Rightarrow n=\frac{۱}{۲}$

$\Rightarrow A(-۲,-۱) \Rightarrow$ A در ربع سوم قرار دارد.

۲- گزینه «۳» آسان

A در ربع دوم است بنابراین x منفی و y مثبت است.

$-۲m<۰ \Rightarrow m>۰\ ,\ ۳x-۱>۰ \Rightarrow m>\frac{۱}{۳} \Rightarrow m>\frac{۱}{۳}$

با توجه به گزینه‌ها تنها، گزینهٔ ۳ می‌تواند جواب باشد اما ادامه با حل آن داریم:

اگر بخواهد فاصلهٔ A تا محورها یکسان باشد یعنی باید قدرمطلق طول و عرض آن برابر باشند:

$$|x|=|y| \Rightarrow \begin{cases} ۳m-۱=-۲m \Rightarrow ۵m=۱ \Rightarrow m=\frac{۱}{۵} \text{ غ ق ق} \\ ۳m-۱=۲m \Rightarrow m=۱ \text{ ق ق} \end{cases}$$

۳- گزینه «۳» آسان

در ربع چهارم طول مثبت و عرض منفی است.

$$\begin{matrix} m+۲>۰ \Rightarrow m>-۲ \\ ۲m+۱<۰ \Rightarrow m<-\frac{۱}{۲} \end{matrix} \xrightarrow{\cap} -۲<m<\frac{-۱}{۲}$$

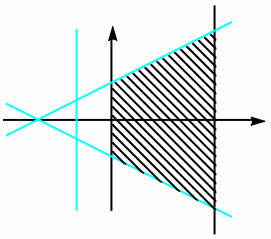
۴- گزینه «۲» آسان

طول نقطهٔ M متشکل از یک عبارت نامنفی و یک عدد مثبت است پس همواره مثبت است. پس تا این جا نواحی ۲ و ۳ حذف هستند.

اما در مورد علامت $n^۲-۱$ نمی‌توان نظری داد یعنی ممکن است مثبت، منفی یا صفر باشد طبق گفتهٔ سؤال روی مرز است پس $n^۲-۱=۰$ ، $n=\pm ۱$ است و نقطهٔ روی مرز نواحی ۱ و ۴ قرار دارد.

۵- گزینه «۳» آسان

با کمی دقت در معادله‌های خطوط می‌بینیم که دو خط $x=-۱$ و $x=۲$ موازی هم هستند اما دو خط دیگر با شیب‌های $\frac{۲}{۳}$ و $-\frac{۲}{۳}$ ارتباط خاصی با هم ندارند. چهارضلعی که فقط دو ضلع موازی دارد ذوزنقه است.



۶- گزینه «۴» متوسط

دو خط $y=۳x$ و $y+x=۴$ دو خط با شیب‌های ۳ و ۱- هستند. محل تقاطع این دو خط، یک رأس مثلث را به ما می‌دهد:

$$\begin{cases} x+y=۴ \\ ۳x-y=۰ \end{cases} \Rightarrow ۴x=۴$$

$\Rightarrow x=۱\ \ y=۳(۱)=۳ \Rightarrow A(۱,۳)$

از آن جایی که ضلع سوم محور xهااست پس فاصلهٔ A تا محور x، ارتفاع مثلث رو به ما می‌دهد که همون عرض A هست پس $AH=۳$.

محل برخورد در خط با محور x رو هم به دست بیاریم:

$$\begin{matrix} y=۰ \Rightarrow ۳x=۰ \Rightarrow x=۰ \\ y=۰ \Rightarrow x=۴ \end{matrix} \Rightarrow BC=۴-۰=۴ \Rightarrow S=\frac{۱}{۲}BC\times AH$$

$=\frac{۱}{۲}\times ۴\times ۳=۶$

۷- گزینه «۴» آسان

$AB=\sqrt{(۲+۱)^۲+(۳+۱)^۲}=\sqrt{۹+۱۶}=۵$

$S=\text{طول}\times\text{عرض} \Rightarrow ۱۵=۵\times x \Rightarrow x=۳$

پس طول مستطیل ۵ و عرض آن ۳ هست.

۸- گزینه «۱» دشوار

$$\begin{cases} y=0 \\ \sqrt{3}y=x \end{cases} \Rightarrow x=0 \Rightarrow A(0,0)$$

$$\begin{cases} y=0 \\ y+\sqrt{3}x=3\sqrt{3} \end{cases} \Rightarrow \sqrt{3}x=3\sqrt{3} \Rightarrow x=3 \Rightarrow B(3,0)$$

$$\begin{cases} \sqrt{3}y=x \\ y+\sqrt{3}x=3\sqrt{3} \end{cases} \Rightarrow y+\sqrt{3}(\sqrt{3}y)=3\sqrt{3} \Rightarrow y+3y=3\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow 4y=3\sqrt{3} \Rightarrow y=\frac{3\sqrt{3}}{4}$$

$$\Rightarrow x=\sqrt{3}(3\frac{\sqrt{3}}{4})=\frac{9}{4} \Rightarrow C(\frac{9}{4},\frac{3\sqrt{3}}{4})$$

$$AB=3$$

$$AC=\sqrt{\frac{36}{16}+\frac{27}{16}}=\sqrt{\frac{63}{16}}=\frac{\sqrt{63}}{4}$$

$$BC=\sqrt{(3-\frac{9}{4})^2+\frac{27}{16}}=\sqrt{\frac{9}{16}+\frac{27}{16}}=\sqrt{\frac{36}{16}}=\frac{6}{4}=\frac{3}{2}$$

طول ضلع **AB** از همه بیشتر است که برابر ۳ است.

۹- گزینه «۲» متوسط

چون نقطهٔ **C** روی خط $y=2x+1$ است پس مختصات آن $C(x,2x+1)$ است:

$$AC=5 \Rightarrow \sqrt{(x-2)^2+(2x+1)^2}=5$$

$$\Rightarrow x^2-4x+4+4+4x^2+4x+1=25 \Rightarrow 5x^2=20 \Rightarrow x^2=4$$

$$\Rightarrow x=\pm 2 \Rightarrow \begin{cases} C_1(2,5) \\ \text{یا} \\ C_2(-2,-3) \end{cases}$$

$$OC_1=\sqrt{4+25}=\sqrt{29}$$

$$OC_2=\sqrt{4+9}=\sqrt{13}$$

پس $\sqrt{29}$ بزرگ‌تر است.

حواست باشه فاصله نقطه $A(x_A y_A)$ از مبدأ $\sqrt{x_A^2+y_A^2}$ است.

۱۰- گزینه «۳» متوسط

$$AB=\sqrt{(2+\sqrt{2}-2)^2+(4-5)^2}=\sqrt{2+1}=\sqrt{3}$$

$$AC=\sqrt{(3-2)^2+(5+\sqrt{2}-5)^2}=\sqrt{1+2}=\sqrt{3}$$

$$BC=\sqrt{(3-2-\sqrt{2})^2+(5+\sqrt{2}-4)^2}=\sqrt{(1-\sqrt{2})^2+(1+\sqrt{2})^2}$$

$$=\sqrt{1+2-2\sqrt{2}+1+2+2\sqrt{2}}=\sqrt{6}$$

از برابری $AB=AC$ نتیجه می‌گیریم مثلث متساوی‌الساقین است، اما از آن جایی که درگزینه‌ها قائم‌الزاویه اومده پس بررسی می‌کنیم رابطه فیثاغورس برقرار هست یا نه **BC** بزرگ‌ترین ضلع هست پس ممکنه وتر باشه.

$$(\sqrt{6})^2 \overset{?}{=} (\sqrt{3})^2+(\sqrt{3})^2 \Rightarrow 6 \overset{?}{=} 3+3 \quad \checkmark$$

متساوی‌الساقین قائم‌الزاویه است.

۱۱- گزینه «۳» آسان

$A(-2,0)$, $B(x,y)$, $O(0,0)$

$$AB=\sqrt{(x+2)^2+y^2}$$

$$AO=\sqrt{(-2)^2+(0)^2}=\sqrt{4}=2$$

$$BO=\sqrt{x^2+y^2}$$

شرط متساوی‌الضلاع بودن یک مثلث این هست که هر سه ضلع مساوی باشند:

$$\sqrt{(x+2)^2+y^2}=2 \Rightarrow x^2+4x+4+y^2=4 \quad (1)$$

$$\sqrt{x^2+y^2}=2 \Rightarrow x^2+y^2=4 \quad (2)$$

(۲) را در (۱) جاگذاری می‌کنیم:

$$4x+4+4=4$$

$$\Rightarrow 4x=-4 \Rightarrow x=-1 \xrightarrow{(2)} 1+y^2=4 \Rightarrow y^2=3 \Rightarrow y=\pm\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow B(-1,\sqrt{3}) \text{ یا } B(-1,-\sqrt{3})$$ در گزینه‌ها نیست.

۱۲- گزینه «۱» آسان

مختصات **M** به‌صورت $(x,4x+2)$ نوشته می‌شود.

$$MA=MB \Rightarrow \sqrt{(x-0)^2+(4x+2-1)^2}=\sqrt{(x-0)^2+(4x+4-4)^2}$$

$$\xrightarrow{\text{توان ۲}} x^2+16x^2+8x+1=x^2+16x^2$$

$$\Rightarrow 8x+1=0 \Rightarrow x=\frac{-1}{8}$$

۱۳- گزینه «۴» آسان

میانهٔ وارد بر ضلع **BC** همان میانه‌ای است که از رأس **A** به وسط **BC** وصل شده. پس ابتدا **M** وسط **BC** رو پیدا می‌کنیم و بعد طول **AM** رو به دست بیاریم.

$$M\begin{vmatrix} \frac{x_B+x_C}{2} \\ \frac{y_B+y_C}{2} \end{vmatrix} \Rightarrow M\begin{vmatrix} \frac{2+0}{2}=1 \\ \frac{1+5}{2}=3 \end{vmatrix} \Rightarrow M(1,3)$$

$$AM=\sqrt{(1+1)^2+(3-0)^2}=\sqrt{4+9}=\sqrt{13}$$

۱۴- گزینه «۴» متوسط

نقاط **A** و **B** نیز روی خط قرار دارند و $C(x,x-2)$ نقطهٔ **C** از **A** و **B** به یک فاصله است بنابراین **C** وسط پاره‌خط **AB** است یعنی:

$$x_C=\frac{x_A+x_B}{2}=\frac{7-1}{2}=3$$

$$y_C=\frac{y_A+y_B}{2}=\frac{5-3}{2}=1$$

$$\Rightarrow C(3,1)$$

عرض نقطهٔ **C** برابر ۱ است.

۱۵- گزینه «۴» دشوار

اگر شیب‌های این دو خط را m و m' بنامیم:

$$m+m'=۱$$

از طرفی می‌دانیم که دو خط عمود بر هم دارای شیب‌های عکس و قرینهٔ هم هستند و $mm'=-۱$ پس می‌شه گفت: $S=۱\ ,\ p=-۱$

$$m^۲-Sm+p=۰ \Rightarrow m^۲-m-۱=۰ \Rightarrow m=\frac{۱\pm\sqrt{۵}}{۲}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y=\frac{۱+\sqrt{۵}}{۲}x+b \\ y=\frac{۱-\sqrt{۵}}{۲}x+b' \end{cases}$$

با شیب منفی کار داریم پس معادلهٔ دوم را در نظر گرفته و A را در آن قرار می‌دهیم:

$$\frac{۱-\sqrt{۵}}{۲}(۲)+b'=۱ \Rightarrow ۱-\sqrt{۵}+b'=۱ \Rightarrow b'=\sqrt{۵}$$ (عرض از مبدأ)

۱۶- گزینه «۲» دشوار

شیب خط برابر $-\frac{۳}{۴}$ هستش پس شیب MH برابر $\frac{۴}{۳}$ هست که میشه:

$$H(x,y) \Rightarrow \frac{y-۲}{x-۱}=\frac{۴}{۳}$$

$$\Rightarrow ۳y-۶=۴x-۴ \Rightarrow ۴x-۳y+۲=۰$$

از طرفی H نقطه‌ای روی خط هست پس در معادله صدق می‌کنه:

$$\begin{matrix} ۴\times \\ ۳\times \end{matrix}\begin{cases} ۴x-۳y=-۲ \\ ۳x+۴y=۳۶ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ۱۶x-۱۲y=-۸ \\ ۹x+۱۲y=۱۰۸ \end{cases}$$

$$۲۵x=۱۰۰ \Rightarrow x=۴$$

$$\xrightarrow{\text{معادله اول}} ۱۶-۳y=-۲ \Rightarrow ۱۶+۲=۳y=۱۸$$

$$\Rightarrow y=۶ \Rightarrow H(۴,۶)$$

البته خواسته سؤال فقط $x=۴$ است.

۱۷- گزینه «۲» متوسط

$$x=۲y-۱ \xrightarrow{y=۲} x=۳ \Rightarrow A(۳,۲)$$

شیب خط $x=۲y-۱$ برابر $\frac{۱}{۲}$ است پس شیب AB برابر ۲- است اگر فرض کنیم $B(x,y)$ باشد:

$$m_{AB}=\frac{y-۲}{x-۳}$$

$$\frac{y-۲}{x-۳}=-۲ \Rightarrow y-۲=-۲x+۶ \Rightarrow ۲x+y=۸$$

از طرفی B روی خط $y=۲x$ قرار دارد پس:

$$۲x+y=۸ \xrightarrow{y=۲x} ۲x+۲x=۸ \Rightarrow ۴x=۸ \Rightarrow x=۲ \Rightarrow B(۲,۴)$$

$$\Rightarrow AB=\sqrt{(۲-۳)^۲+(۴-۲)^۲}=\sqrt{۱+۴}=\sqrt{۵}$$

۱۸- گزینه «۳» آسان

اگر خط d عمودمنصف پاره‌خط AB باشد، آن‌گاه هم بر آن عمود است یعنی شیب آن عکس و قرینهٔ شیب AB است هم از وسط آن یعنی M می‌گذرد:

$$M\left(\frac{۳-۱}{۲},\frac{۴+۰}{۲}\right)=(۱,۲)$$

$$m_{AB}=\frac{۴-۰}{۳-(-۱)}=\frac{۴}{۴}=۱ \Rightarrow m_d=-۱$$

$$\Rightarrow y-y_۰=m_d(x-x_۰)$$

$$\Rightarrow y-۲=-۱(x-۱) \Rightarrow y=-x+۱+۲$$

$$\Rightarrow y=-x+۳ \quad \text{یا} \quad x+y=۳$$

۱۹- گزینه «۲» آسان

$$\begin{matrix} AB: \\ AC: \end{matrix}\begin{cases} x+۲y=۳ \\ ۲x-y=۱ \end{cases} \Rightarrow A(۲,-۱)$$

برای محاسبهٔ طول ارتفاع AH کافیه فاصلهٔ A رو از BC به دست بیاریم.

$$AH=\frac{|ax_۰+by_۰+c|}{\sqrt{a^۲+b^۲}}=\frac{|۱(۱)+۱(۱)-۴|}{\sqrt{۱^۲+۱^۲}}=\frac{۲}{\sqrt{۲}}=\sqrt{۲}$$

۲۰- گزینه «۱» دشوار

قاعده را AC و ارتفاع BH درنظر می‌گیریم:

$$AC=\sqrt{(-۲-۱)^۲+(۲-۱)^۲}=\sqrt{۹+۱}=\sqrt{۱۰}$$

فاصله نقطهٔ B از قاعده $=BH$

بنابراین اول معادلهٔ خط AC رو می‌نویسیم:

$$m_{AC}=\frac{۲-۱}{-۲-۱}=\frac{-۱}{۳}$$

حالا با نقطهٔ A، m_{AC} معادله می‌نویسیم:

$$y-۱=\frac{-۱}{۳}(x-۱)$$

$$\Rightarrow y=\frac{-۱}{۳}x+\frac{۱}{۳}+۱ \Rightarrow y=\frac{-۱}{۳}x+\frac{۴}{۳} \xrightarrow{\times ۳} ۳y=-x+۴$$

$$\Rightarrow x+۳y-۴=۰ \Rightarrow BH=\frac{|۴+۳-۴|}{\sqrt{۱+۹}}=\frac{۳}{\sqrt{۱۰}}$$ جای‌گذاری B در معادله

$$\Rightarrow \delta=\frac{۱}{۲}AC\times BH=\frac{۱}{۲}\times\sqrt{۱۰}\times\frac{۳}{\sqrt{۱۰}}=\frac{۳}{۲}=۱/۵$$

توجه: راه‌حل تستی دیگری در تست شمارهٔ ۳۱ آورده شده که با داشتن مختصات سه رأس یک مثلث بتونیم مساحت رو پیدا کنیم. حتماً بهش سر بزن که خیلی جذابه!

۲۱- گزینه «۱» دشوار

$$d_1: \begin{cases} x+y=1 \\ x-y=3 \end{cases} \Rightarrow A(2,-1)$$

$$d_1: \begin{cases} x+y=1 \\ 2x+y=-1 \end{cases} \Rightarrow B(-2,2)$$

$$d_2: \begin{cases} x-y=3 \\ 2x+y=-1 \end{cases} \Rightarrow C(\frac{2}{3},\frac{-7}{3})$$

$$AC=\sqrt{(\frac{2}{3}-2)^2+(-\frac{7}{3}+1)^2}=\sqrt{\frac{16}{9}+\frac{16}{9}}=\sqrt{\frac{32}{9}}=\frac{4}{3}\sqrt{2}$$

معادله AC: $m_{AC}=\frac{-\frac{7}{3}-(-1)}{\frac{2}{3}-2}=\frac{-\frac{4}{3}}{-\frac{4}{3}}=1 \Rightarrow y+1=x-2$

$$\text{ارتفاع } BH=\frac{|-2-3-3|}{\sqrt{1+1}}=\frac{8}{\sqrt{2}} \Rightarrow S=\frac{1}{2}\times\frac{4}{3}\sqrt{2}\times\frac{8}{\sqrt{2}}=\frac{16}{3}$$

۲۲- گزینه «۱» دشوار

پس فرض می‌کنیم مختصات نقطه به‌صورت $(x,-\frac{x}{2})$ باشد:

خط $y=x$ را به فرم استاندارد فاصلهٔ نقطه از خط می‌نویسیم:

$$x-y=0 \Rightarrow \text{فاصله}=\frac{|x-(\frac{-x}{2})|}{\sqrt{1+1}}=2\sqrt{5}$$

$$\Rightarrow |\frac{3x}{2}|=2\sqrt{10} \Rightarrow \frac{3x}{2}=\pm 2\sqrt{10}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{3x}{2}=2\sqrt{10} \Rightarrow 3x=4\sqrt{10} \Rightarrow x=\frac{4\sqrt{10}}{3} \Rightarrow A(\frac{4\sqrt{10}}{3},\frac{-2\sqrt{10}}{3}) \\ \frac{3x}{2}=-2\sqrt{10} \Rightarrow x=\frac{-4\sqrt{10}}{3} \Rightarrow B(\frac{-4\sqrt{10}}{3},\frac{2\sqrt{10}}{3}) \end{cases}$$

$$\Rightarrow AB=\sqrt{(\frac{8\sqrt{10}}{3})^2+(\frac{4\sqrt{10}}{3})^2}=\frac{\sqrt{10}}{3}\times\sqrt{80}=\frac{20\sqrt{2}}{3}$$

$$CH=\frac{|1(0)+2(3)|}{\sqrt{1^2+2^2}}=\frac{6}{\sqrt{5}} \Rightarrow S=\frac{1}{2}\times\frac{20\sqrt{2}}{3}\times\frac{6}{\sqrt{5}}=\frac{20\sqrt{10}}{5}=4\sqrt{10}$$

۲۳- گزینه «۲» متوسط

نقطه بر خط $y=x-1$ را به‌صورت $A(x,x-1)$ درنظر می‌گیریم:

$$AH=\frac{|2x-3(x-1)-5|}{\sqrt{4+9}}=\frac{|2x-3x+3-5|}{\sqrt{13}}=\frac{|-x-2|}{\sqrt{13}}$$

فاصله برابر $\sqrt{13}$ شده پس داریم:

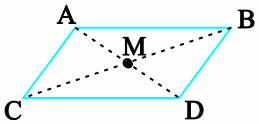
$$\frac{|x+2|}{\sqrt{13}}=\sqrt{13}$$

$$\Rightarrow |x+2|=13 \Rightarrow \begin{cases} x+2=13 \Rightarrow x=11 \\ x+2=-13 \Rightarrow x=-15 \end{cases}$$

۲۴- گزینه «۳» متوسط

تو این مدل سؤال‌ها اول چک می‌کنیم **A** در دو خط داده شده صدق می‌کنه یا نقطه‌ای خارج از این دو ضلع است؟

$A(7,6)$ در هیچ کدوم از خطوط صدق نمی‌کنه پس **A** خارج از دو خط هست. پس معادلهٔ خطوط داده شده مربوط به **BC** و **DC** هست.



$$\begin{cases} 2y-3x=11 \\ 3y+4x=8 \end{cases} \Rightarrow x=-1, y=4$$

بنابراین:

$$A\begin{vmatrix}7\\6\end{vmatrix}, C\begin{vmatrix}-1\\4\end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow \text{M وسط AC} \begin{vmatrix}\frac{7-1}{2}\\ \frac{6+4}{2}\end{vmatrix} \Rightarrow M(3,5)$$

۲۵- گزینه «۳» آسان

مختصات نقطهٔ **A** رو با برخورد دادن **AB** و **AC** پیدا می‌کنیم و بعد به کمک شیب **BC**، شیب‌خط **AH** به دست می‌آوریم و معادله می‌نویسیم:

$$AB: \begin{cases} 2y-x=3 \\ AC: y-2x=-3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2y-x=3 \\ -2y+4x=6 \end{cases}$$

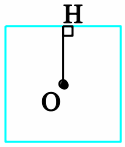
$$3x=9 \Rightarrow x=3 \Rightarrow y=3 \Rightarrow A\begin{vmatrix}3\\3\end{vmatrix}$$

$$m_{BC}=\frac{-3}{2} \Rightarrow M_{AH}=\frac{2}{3}$$

$$AH: y-3=\frac{2}{3}(x-3) \xrightarrow{\times 3} 3y-9=2x-6 \Rightarrow 3y-2x=3$$

۲۶- گزینه «۴» متوسط

معادله رو به فرم استاندارد بنویسیم:



$$x-2y+5=0$$

$$OH=\frac{|3+2+5|}{\sqrt{1+4}}=\frac{10}{\sqrt{5}} \Rightarrow \text{طول ضلع}=\frac{20}{\sqrt{5}}$$

$$\Rightarrow S=(\frac{20}{\sqrt{5}})^2=\frac{400}{5}=80$$

۲۷- گزینه «۱» دشوار

معادلهٔ خط به فرم استاندارد به‌صورت $mx-۲y+b=۰$ هست و از طرفی (۱,۲) نقطه‌ای از خط است پس در معادله صدق می‌دهیم:

$$m(1)-۲(۲)+b=۰ \Rightarrow m+b=۴ \quad (۱)$$

فاصلهٔ $O(۰,۰)$ تا خط رو به دست بیاریم:

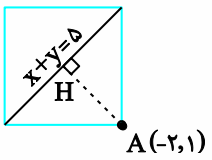
$$OH=|\Rightarrow \frac{|b|}{\sqrt{m^۲+۴}}=|\Rightarrow \sqrt{m^۲+۴}=|b| \xrightarrow{\text{توان ۲}} m^۲+۴=b^۲$$

$$\Rightarrow b^۲-m^۲=۴ \Rightarrow \underbrace{(b-m)}_{۴}(b+m)=۴ \xrightarrow{(۱)} b-m=۱$$

$$\Rightarrow \begin{cases} b+m=۴ \\ b-m=۱ \end{cases} \Rightarrow ۲b=۵ \Rightarrow b=\frac{۵}{۲} \xrightarrow{\text{اولی}} \frac{۵}{۲}+m=۴ \Rightarrow m=۴-\frac{۵}{۲}=\frac{۳}{۲}$$

۲۸- گزینه «۴» متوسط

می‌دانیم که در مربع قطرها هم بر همدیگر عمودند و هم یکدیگر را نصف می‌کنند. پس فاصلهٔ رأس **A** تا قطر رو به دست میاریم:



$$AH=\frac{|-۲+۱-۵|}{\sqrt{۱+۱}}=\frac{۶}{\sqrt{۲}}=\frac{۶\sqrt{۲}}{۲}=۳\sqrt{۲}$$

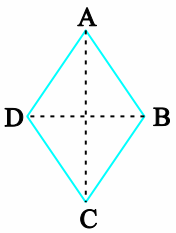
AH نصف یک قطر است پس طول قطر دو برابر **AH** است یعنی: $۶\sqrt{۲}$

۲۹- گزینه «۱» متوسط

حواست باشه اگه خود سؤال ترتیب اسم‌گذاری رأس‌های یک چندضلعی رو بهت نداد، خودت به ترتیب به‌صورت ساعتگرد یا پادساعتگرد اسم‌گذاری کنی پس **ABCD** اسم لوزی ما هست.

لوزی یک نوع متوازی‌الضلاع هست پس ویژگی رئوس متوازی‌الضلاع رو داره:

اسم‌گذاری کنی پس **ABCD** اسم لوزی ما هست.



$$x_A+x_C=x_B+x_D \Rightarrow ۶+۶=۵+x_D \Rightarrow x_D=۷$$

$$y_A+y_C=y_B+y_D \Rightarrow ۲+۸=۵+y_D \Rightarrow y_D=۵$$

$$\Rightarrow D(۷,۵) \quad AC \overset{\text{هم طول}}{=} |۸-۲|=۶ \quad BD \overset{\text{هم عرض}}{=} |۷-۵|=۲$$

$$\Rightarrow S_{\text{لوزی}}=\frac{۱}{۲}(\text{حاصل ضرب قطرها})=\frac{۱}{۲}\times ۶\times ۲=۶$$

۳۰- گزینه «۳» دشوار

برای محاسبهٔ مختصات محل تلاقی میانه‌های یک مثلث کافیه بین **x**ها و **y**ها سه رأس میانگین بگیری:

$$G\left(\frac{x_A+x_B+x_C}{۳},\frac{y_A+y_B+y_C}{۳}\right)=(۲,۰)$$

$$\Rightarrow GM=\sqrt{(۲+۱)^۲+(۰-۱)^۲}=\sqrt{۹+۱}=\sqrt{۱۰}$$

۳۱- گزینه «۲» دشوار

برای محاسبهٔ مساحت یک مثلث با داشتن مختصات سه رأس **A** و **B** و **C** از فرمول زیر استفاده می‌کنیم:

$$S=\frac{۱}{۲}\begin{vmatrix} x_A & y_A \\ x_A & y_A \\ x_A & y_A \\ x_A & y_A \end{vmatrix}=\frac{۱}{۲}|(①+②+③)-(④+⑤+⑥)|$$

در این سؤال داریم:

$$S=\frac{۱}{۲}\begin{vmatrix} ۲ & ۰ \\ ۴ & -۱ \\ ۰ & -۳ \\ ۲ & ۰ \end{vmatrix}=\frac{۱}{۲}|\underbrace{(-۲-۱۲+۰)}_{-۱۴}-\underbrace{(۰+۰-۶)}_{-۶}|=\frac{۱}{۲}|-۸|=\frac{۸}{۲}=۴$$

۳۲- گزینه «۳» دشوار

طبق فرمولی که توی تست ۳۱ داشتیم، مساحت مثلث $\overset{\Delta}{MNP}$ را به دست می‌آوریم:

$$S_{MNP}=\frac{۱}{۲}\begin{vmatrix} ۲ & ۳ \\ ۳ & ۴ \\ ۱ & -۲ \\ ۲ & ۳ \end{vmatrix}=\frac{۱}{۲}|\underbrace{(۸-۶+۳)}_{۵}-\underbrace{(۹+۴-۴)}_{۹}|=\frac{۱}{۲}(۴)=۲$$

از طرفی مثلثی که رئوسش نقاط میانی یک مثلث دیگر باشند، مساحتش $\frac{۱}{۴}$ مساحت مثلث اصلی است پس:

$$S_{ABC}=۴S_{MNP}=۴(۲)=۸$$

۳۳- گزینه «۱» دشوار

ابتدا برای یافتن رأس **B** دستگاه بین خطوط **AB** و **BC** می‌نویسیم:

$$\begin{cases} y+۲x=۷ \\ ۲y-۷x=-۱۹ \end{cases} \xrightarrow{\times -۲} \begin{array}{r} -۲y-۴x=-۱۴ \\ ۲y-۷x=-۱۹ \\ \hline -۱۱x=-۳۳ \end{array}$$

$$x=۳ \quad , \quad y=۱ \quad , \quad B(۳,۱)$$

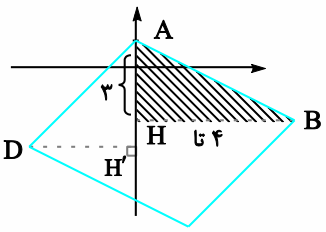
حال فاصله رأس **B** از خط **AC** طول ارتفاع **BH** را به ما می‌دهد:

$$BH=\frac{|۴-۹-۱۷|}{\sqrt{۱۶+۹}}=\frac{۲۲}{۵}=۴/۴$$

۳۴- گزینه «۳» دشوار

با استفاده از موقعیت نقاط روی دستگاه مختصات:

چون دو مثلث **ABH** و ADH' هم‌نهشت هستند پس:



$$DH' = AH = ۳ \Rightarrow x_D = -۳$$

۳۵- گزینه «۴» متوسط

با توجه به فرمول نقطه از خط در مثلث **ABC**، باید فاصلهٔ نقطهٔ **A** تا خط **BC** را به دست آوریم پس ابتدا معادله **BC** را می‌نویسیم:

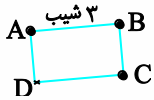
$$\text{BC شیب} = \frac{y_C - y_B}{x_C - x_B} = \frac{-۲-۳}{۲-۷} = \frac{-۵}{-۵} = ۱$$

معادله خط $y - y_۰ = m(x - x_۰) \Rightarrow y - ۳ = ۱(x - ۷) \Rightarrow y - x + ۴ = ۰$ BC

$\text{BC از A فاصله } d = AH = \frac{|ae + bf + c|}{\sqrt{a^۲ + b^۲}}$ پس $\Rightarrow \frac{|۵ - ۱ + ۴|}{\sqrt{۱^۲ + (-۱)^۲}} = \frac{۸}{\sqrt{۲}}$

گویا کردن جواب نهایی $\frac{۸}{\sqrt{۲}} \times \frac{\sqrt{۲}}{\sqrt{۲}} = \frac{۸\sqrt{۲}}{۲} = ۴\sqrt{۲}$

۳۶- گزینه «۳» دشوار



با توجه به ابتدا معادله خط **AB** را می‌نویسیم:

$A(۲,۴)$ شیب $= ۳$

$y - ۴ = ۳(x - ۲) \Rightarrow y - ۴ = ۳x - ۶ \Rightarrow y = ۳x - ۲$

چون ضلع **BC** بر ضلع **AB** عمود است پس شیب‌های آن قرینه و معکوس یکدیگرند پس شیب $BC = -\frac{۱}{۳}$

$C(-۳,-۱)$

$y + ۱ = -\frac{۱}{۳}(x + ۳) \Rightarrow y = -\frac{۱}{۳}x - ۲$

حال اگر فاصله نقطهٔ **C** از ضلع **AB** را به دست آوریم طول ضلع **BC** حساب می‌شود پس:

$y - ۳x + ۲ = ۰ \ , \ C(-۳,-۱) \Rightarrow BC = \frac{|-۱ + ۹ + ۲|}{\sqrt{۱ + ۹}}$

$= \frac{۱۰}{\sqrt{۱۰}} \times \frac{\sqrt{۱۰}}{\sqrt{۱۰}} = \frac{۱۰\sqrt{۱۰}}{۱۰} = \sqrt{۱۰}$

از طرفی با حل دستگاه معادلات خط **BC** و **AB** می‌توان مختصات **B** را به دست آورد پس:

$۳x - ۲ = \frac{-۱}{۳}x - ۲$

$x = ۰, y = -۲ \quad B(۰,-۲) \Rightarrow AB = \sqrt{۴ + ۳۶} = \sqrt{۴۰} = ۲\sqrt{۱۰}$

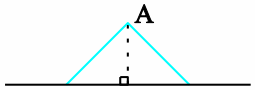
پس محیط مستطیل (عرض + طول)۲

$۲(\sqrt{۱۰} + ۲\sqrt{۱۰}) = ۲(۳\sqrt{۱۰}) = ۶\sqrt{۱۰}$

۳۷- گزینه «۲» دشوار

محیط مثلث مورد سؤال $\sqrt{۲۷۰} = ۳\sqrt{۳۰}$ است پس طول هر ضلع آن $\sqrt{۳۰}$ خواهد بود.

و از طرفی می‌دانیم در مثلث متساوی‌الضلاع ارتفاع $= (\text{ضلع})(\frac{\sqrt{۳}}{۲})$ است یعنی:



$۳x - y = ۵$

$AH = \frac{\sqrt{۳}}{۲} \times \sqrt{۳۰} = \frac{\sqrt{۹۰}}{۲}$

فاصله نقطهٔ **A** تا خط $۳x - y = ۵$ برابر $\frac{\sqrt{۹۰}}{۲}$ است. پس با نوشتن معادله خط **AH** نقطهٔ **A** را به صورت پارامتری نوشته و فاصلهٔ آن را از خط $۳x - y = ۵$ برابر $\frac{\sqrt{۹۰}}{۲}$ قرار می‌دهیم:

$\text{AH معادله خط : شیب } = \frac{-۱}{۳}$

$H = (۲,۱)$

$y - ۱ = \frac{-۱}{۳}(x - ۲) \Rightarrow y - ۱ = \frac{-۱}{۳}x + \frac{۲}{۳}$

$\Rightarrow y = -\frac{۱}{۳}x + \frac{۵}{۳} \xrightarrow{\text{A نقطه}} (\alpha, \frac{۵ - \alpha}{۳})$

$AH : \frac{|۳\alpha - \frac{۵ - \alpha}{۳} - ۵|}{\sqrt{۹ + ۱}} = \frac{\sqrt{۹۰}}{۲} \Rightarrow (\alpha - ۲)^۲ = \frac{۸۱}{۴}$

$\Rightarrow \alpha - ۲ = \pm\frac{۹}{۲} \Rightarrow \alpha = \frac{۱۳}{۲}$

۳۸- گزینه «۱» متوسط

نقطهٔ **A** به‌صورت $(x, -x + a)$ است فاصله **AB** و **AC** را می‌نویسیم:

$\sqrt{(x+۳)^۲ + (-x + a - ۲)^۲} = \sqrt{۲a} \Rightarrow ۲x^۲ + (۱۰ - ۲a)x + (a - ۲)^۲ = ۲۰$

$\sqrt{(x+۱)^۲ + (-x + a - ۴)^۲} = ۵ \Rightarrow ۲x^۲ + (۱۰ - ۲a)x + (a - ۴)^۲ = ۲۴$

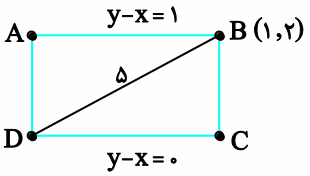
$۲۰ - (a - ۲)^۲ = ۲۴ - (a - ۴)^۲$

$۲۰ - (a^۲ - ۴a + ۴) = ۲۴ - (a^۲ - ۸a + ۱۶)$

$۲۰ - a^۲ + ۴a - ۴ = ۲۴ - a^۲ + ۸a - ۱۶ \Rightarrow ۸ = ۴a \Rightarrow ۲ = a$

۳۹- گزینه «۲» دشوار

در ابتدا چون دو ضلع مقابل مستطیل داده شده است پس شیب دو خط با هم برابر هستند پس توجه کنید $a=-1$ نمی‌تواند اتفاق بیفتد چون در جای‌گذاری نقطهٔ (۲و۱) روی رأس صدق نمی‌کند پس معادلات ضلع به‌صورت مقابل خواهد بود.



با استفاده از فاصله نقطه از خط طول ضلع **BC** را به دست می‌آوریم پس:

$$BC=\frac{|۲-۱|}{\sqrt{۱+۱}}=\frac{۱}{\sqrt{۲}}$$

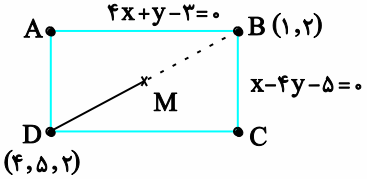
حال با استفاده از فیثاغورس در مثلث **BCD** داریم:

$$BD^۲=BC^۲+DC^۲$$

$$۵^۲=(\frac{۱}{\sqrt{۲}})^۲+DC^۲\Rightarrow ۲۵=\frac{۱}{۲}+DC^۲\Rightarrow ۲۵-\frac{۱}{۲}=DC^۲\Rightarrow \frac{۴۹}{۲}=DC^۲$$

$$DC=\frac{۷}{\sqrt{۲}}\xrightarrow{\text{درنتیجه مساحت مستطیل}}S=BC\times DC=\frac{۱}{\sqrt{۲}}\times\frac{۷}{\sqrt{۲}}=\frac{۷}{۲}=۳/۵$$

۴۰- گزینه «۱» دشوار



بیش‌ترین فاصله **M** از اضلاع، فاصلهٔ نقطهٔ **M** تا ضلع **BC** خواهد بود پس می‌توان با محاسبه طول‌های مستطیل و نصف کردن آن‌ها به بیش‌ترین فاصله **M** از اضلاع رسید پس ابتدا فاصله **D** تا خط **BC** را محاسبه می‌کنیم تا طول ضلع **DC** حساب شود.

$$DC=\frac{|۴/۵-۸-۵|}{\sqrt{۱+۱۶}}=\frac{۸/۵}{\sqrt{۱۷}}=\frac{\frac{۱۷}{۲}}{\sqrt{۱۷}}=\frac{۱۷}{۲\sqrt{۱۷}}$$

با گویا کردن جواب و نصف کردن آن به جواب مسئله می‌رسیم:

$$\frac{۱۷}{۲\sqrt{۱۷}}\times\frac{\sqrt{۱۷}}{\sqrt{۱۷}}=\frac{\cancel{۱۷}\sqrt{۱۷}}{۲\times\cancel{۱۷}}=\frac{\sqrt{۱۷}}{۲}\xrightarrow{\text{نصف}}\frac{\sqrt{۱۷}}{۴}$$

$$AD=\frac{|۴(۴/۵)+۲-۳|}{\sqrt{۱۶+۱}}=\frac{۱۷}{\sqrt{۱۷}}\times\frac{\sqrt{۱۷}}{\sqrt{۱۷}}=\sqrt{۱۷}\xrightarrow{\text{نصف}}\frac{\sqrt{۱۷}}{۲}$$

۱- آسان

با توجه به کتاب یازدهم نقطهٔ اول با ۴۹ نقطهٔ دیگر پاره‌خط تشکیل می‌دهد نقطهٔ دوم با ۴۸ نقطهٔ دیگر و به همین صورت ادامه دارد پس تعداد پاره‌خط های تولید شده:

$$۴۹+۴۸+\cdots+۱=\xrightarrow{\text{با توجه به مجموع اعداد طبیعی}}\frac{n(n+۱)}{۲}$$

$$\frac{۴۹\times۵۰}{۲}=۴۹\times۲۵=۱۲۲۵$$

۲- متوسط

در فرمول S_n در دنباله‌های حسابی می‌دانیم که $S_۱=a_۱$ پس:

$$S_۱=\frac{۳(۱)^۲}{۲}+\frac{۷(۱)}{۲}=\frac{۳}{۲}+\frac{۷}{۲}=\frac{۱۰}{۲}=۵=a_۱$$

همچنین می‌دانیم $S_۲=a_۱+a_۲$ پس:

$$S_۲=\frac{۳(۲)^۲}{۲}+\frac{۷(۲)}{۲}=۶+۷=۱۳=a_۱+a_۲$$

$$۱۳=۵+a_۲\Rightarrow ۸=a_۲$$

با توجه به اطلاعات دنباله ۵,۸,... در فرمول جمله عمومی $a_n=a_۱+(n-۱)d$ داریم:

$$a_n=۵+(n-۱)(۳)\Rightarrow a_n=۵+۳n-۳\Rightarrow a_n=۳n+۲$$

۳- متوسط

$$a_۱+a_۳=۱\Rightarrow a_۱+a_۱q^۲=۱\Rightarrow a_۱(۱+q^۲)=۱\Rightarrow a_۱=\frac{۱}{۱+q^۲}\quad (*)$$

$$S_۴=۳\Rightarrow a_۱\frac{۱-q^۴}{۱-q}=۳\xrightarrow{\text{با توجه به }*}$$

$$\frac{۱}{\cancel{۱+q^۲}}\times\frac{(۱-q^۲)\cancel{(۱+q^۲)}}{۱-q}=۳\Rightarrow\frac{\cancel{(۱-q)}(۱+q)}{\cancel{۱-q}}=۳$$

$$۱+q=۳\Rightarrow q=۲$$

با جای‌گذاری $q=۲$ در * پس $a_۱=\frac{۱}{۱+۴}=\frac{۱}{۵}$

$$S_۶=\frac{۱}{۵}\times\frac{۱-۲^۶}{۱-۲}$$

$$S_۶=\frac{۱}{۵}\times\frac{۱-۶۴}{-۱}=\frac{-۶۳}{-۵}=\frac{۶۳}{۵}$$

۴- آسان

صفر تابع یعنی عددی که اگر در معادله صدق کند آن را صفر کند.

$$۵^۳-a(۵)^۲-۸(۵)-۱۰=۰\Rightarrow ۱۲۵-۲۵a-۴۰-۱۰=۰$$
$$۷۵=۲۵a\Rightarrow ۳=a$$

با جای‌گذاری **a** در معادله $F(x)=x^۳-۳x^۲-۸x-۱۰$ چون $x=۵$ یک ریشه آن است پس در نتیجه تجزیه عبارت $(x-۵)(x^۲+۲x+۲)=۰$

$$x-۵=۰\ \Rightarrow\ x=۵$$

ریشه ندارد.

$$x^۲+۲x+۲=۰\ \Rightarrow\ \Delta=۴-۴(۲)=-۴$$

$$\begin{array}{r|l} x^۳-۳x^۲-۸x-۱۰ & x-۵ \\ \hline x^۳+۵x^۲ & x^۲+۲x+۲ \\ \hline ۲x^۲-۸x-۱۰ & \\ ۲x^۲+۱۰x & \\ \hline ۲x-۱۰ & \\ ۲x-۱۰ & \\ \hline ۰ & \end{array}$$

۵- متوسط

با توجه به معادله داده شده: $P=\frac{c}{a}=۱$ و $S=\frac{-b}{a}=۴$

$$\text{آ})\ \frac{\alpha^۳+\alpha^۲+\beta^۳+\beta^۲}{(\alpha+۱)(\beta+۱)}=\frac{\alpha^۳+\beta^۳+\alpha^۲+\beta^۲}{\alpha\beta+\alpha+\beta+۱}$$
$$=\frac{S^۳-۳PS+S^۲-۲P}{P+S+۱}$$
$$=\frac{۴^۳-۳(۴)+۱۶-۲}{۱+۴+۱}=\frac{۶۴-۱۲+۱۶-۲}{۵}=\frac{۶۶}{۵}$$

$$\text{ب})\ \sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}=A\xrightarrow{\text{طرفین توان ۲}}\alpha+\beta+۲\sqrt{\alpha\beta}=A^۲$$
$$S+۲\sqrt{P}=A^۲\Rightarrow\sqrt{S+۲\sqrt{P}}=A\Rightarrow\sqrt{۴+۲}=A\Rightarrow\sqrt{۶}=A$$

۶- آسان

برای نوشتن معادله درجه ۲ از رابطه $x^۲-Sx+p=۰$ استفاده می‌کنیم:

$$S=۳-\sqrt{۲}+۳+\sqrt{۲}=۶$$
$$P=(۳-\sqrt{۲})(۳+\sqrt{۲})=۹-۲=۷$$

پس معادله $x^۲-۶x+۷=۰$ است.

۷- متوسط

با توجه به معادله سهمی $y=a(x-\alpha)(x-\beta)$ و ریشه‌های مشخص شده در شکل ۱- و ۲

$$y=a(x-(-۱))(x-۲)$$
$$y=a(x+۱)(x-۲)\xrightarrow[\text{و جایگذاری آن در معادله}]{\text{با استفاده از نقطه }\begin{bmatrix}۰\\-۱\end{bmatrix}}-۱=a(۰+۱)(۰-۲)$$
$$-۱=-۲a\ \Rightarrow\ a=\frac{۱}{۲}$$

پس ضابطه سهمی $y=\frac{۱}{۲}(x+۱)(x-۲)\Rightarrow y=\frac{۱}{۲}x^۲-\frac{۱}{۲}x-۱$

۸- دشوار

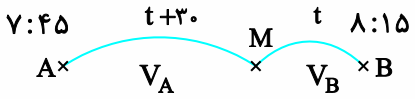
حواستون باشه‌ها! ایده حل این سؤال را در ذهن نگه دارید.

$$x^۲-x-۵\sqrt{x^۲-x+۵}+۹=۰$$
$$x^۲-x+۵-۵\sqrt{x^۲-x+۵}+۴=۰\xrightarrow{x^۲-x+۵=t}$$
$$t-۵\sqrt{t}+۴=۰\xrightarrow{\text{جمع ضرایب صفر است}}\sqrt{t}=۱,\sqrt{t}=۴$$
$$t=۱,t=۱۶$$
$$\xrightarrow{t=۱}x^۲-x+۵=۱\Rightarrow x^۲-x+۴=۰$$

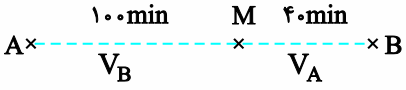
$\Delta=۱-۴(۴)\Rightarrow\Delta=-۱۵$ ریشه ندارد.

$$\xrightarrow{t=۱۶}x^۲-x+۵=۱۶\Rightarrow x^۲-x-۱۱=۰$$
$$\Delta=۱-۴(-۱۱)\Rightarrow\Delta=۱+۴۴=۴۵$$
$$\text{ریشه}=\frac{۱\pm\sqrt{۴۵}}{۲}$$

۹- دشوار



قطار **A** چون ۷:۴۵ شروع به حرکت کرده است در رسیدن به **M** که نقطهٔ برخورد دو قطار است ۳۰ دقیقه بیشتر حرکت کرده است.



حالا در شکل دوم با توجه به صورت سؤال قطار M / iA، ۴۰ دقیقه طول می‌کشد تا به **B** برسد و قطار **B** ۱۰۰ دقیقه طول می‌کشد که از **M** به **A** برسد. با توجه به رابطه $x=Vt$، مسافت طی شده از **A** تا **M** در دو شکل برابر است پس $(V_A)(t+۳۰)=۱۰۰V_B$ همچنین طول مسافت طی شده در رسیدن **B** تا **M** نیز با یکدیگر برابر است پس $(V_A)(۴۰)=tV_B$ از تقسیم دو رابطه به دست آمده داریم.

$$\frac{V_A(t+۳۰)}{V_A(۴۰)}=\frac{۱۰۰V_B}{tV_B}\ \Rightarrow\ \frac{t+۳۰}{۴۰}=\frac{۱۰۰}{t}\ \Rightarrow\ t^۲+۳۰t-۴۰۰۰=۰$$
$$(t+۸۰)(t-۵۰)=۰$$
$$t=-۸۰\ \text{غ ق ق}\qquad t=۵۰\ \text{ق ق}$$

پس اگر از سمت **B** به مسئله نگاه کنیم از ساعت ۸:۱۵ اگر ۵۰ دقیقه جلو بیاییم ساعت ۹:۰۵ خواهد بود و همچنین اگر از سمت **A** به مسئله نگاه کنیم از ساعت ۷:۴۵ اگر $t+۳۰=۸۰$ دقیقه جلو بیاییم ۹:۰۵ خواهد بود.

۱۰- دشوار

ابتدا باید بفهمیم در محلول ۲۰۰ گرم چای ۴ درصدی چقدر شکر موجود بوده است.

$$\text{شکر گرم } ۸ = ۲۰۰ \times \frac{۴}{۱۰۰}$$

حالا با توجه به فرمول غلظت:

$$\text{غلظت و تبخیر شدن آب برای رسیدن به محلول} = \frac{\text{حل شونده}}{\text{حلال}}$$

۷ درصدی: $\frac{۷}{۱۰۰} = \frac{۸}{۲۰۰-x} \Rightarrow ۱۴۰۰ - ۷x = ۸۰۰$

$$۶۰۰ = ۷x \Rightarrow x = \frac{۶۰۰}{۷}$$

۱۱- متوسط

با توجه به ریشه‌های داخل قدرمطلق $x=-۴$ و $x=\frac{۱}{۴}$ و تعیین علامت قدرمطلق‌ها

غ ق ق $x < -۴ \Rightarrow -x-۴-۴x+۱ = ۸x \Rightarrow -۱۳x = ۳ \Rightarrow x = \frac{-۳}{۱۳}$

چون در بازهٔ $x<-۴$ قرار ندارد.

غ ق ق $-۴ \le x \le \frac{۱}{۴} \Rightarrow x+۴-۴x+۱ = ۸x \Rightarrow -۱۱x = -۵ \Rightarrow x = \frac{۵}{۱۱}$

چون در بازهٔ $x \le \frac{۱}{۴}$ -۴ قرار ندارد.

ق ق $x > \frac{۱}{۴} \Rightarrow x+۴+۴x-۱ = ۸x \Rightarrow -۳x = -۳ \Rightarrow x = ۱$

پس معادله ۱ ریشه دارد.

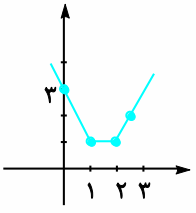
۱۲- متوسط

ابتدا با استفاده از تعیین علامت قدرمطلق‌ها آن را به تابع چند ضابطه‌ای تبدیل می‌کنیم:

$$x < ۱ \Rightarrow -x+۱-x+۲ \Rightarrow y = -۲x+۳$$

$$۱ \le x \le ۲ \Rightarrow \cancel{x}-۱\cancel{-x}+۲ \Rightarrow y = ۱$$

$$x \ge ۲ \Rightarrow x-۱+x-۲ \Rightarrow y = ۲x-۳$$



۱۳- دشوار

آ)

$$AB = \sqrt{(-۱-۳)^۲ + (۳-۰)^۲} = \sqrt{۱۶+۹} = \sqrt{۲۵} = ۵$$

$$AC = \sqrt{(۱+۱)^۲ + (۲-۳)^۲} = \sqrt{۴+۱} = \sqrt{۵}$$

$$BC = \sqrt{(۱-۳^۲) + (۲-۰)^۲} = \sqrt{۴+۴} = ۲\sqrt{۲}$$

ب) **M** میانه **BC** است پس نقطهٔ وسط پاره‌خط **BC**، **M** خواهد بود.

$$M = (\frac{۱+۲}{۲}, \frac{۰+۲}{۲}) = (۲,۱)$$

H نقطهٔ برخورد ارتفاع با ضلع **BC** است پس ابتدا معادله خط **AH** را نوشته و با **BC** دستگاه حل می‌کنیم:

$$\text{شیب } BC = \frac{۰-۲}{۳-۱} = \frac{-۲}{۲} = -۱ \xrightarrow{\text{قرینه و معکوس}} ۱$$

$y-۰ = -۱(x-۳)$ معادله خط BC و $y-۳ = ۱(x+۱) \Rightarrow y = x+۴$

معادله خط AH

$$y = -x+۳$$

$$\begin{cases} y = \cancel{x}+۴ \\ y = \cancel{-x}+۳ \end{cases}$$

$$۲y = ۷ \Rightarrow y = \frac{۷}{۲}\ ,\ x = -\frac{۱}{۲}$$

$$H = (-\frac{۱}{۲}, \frac{۷}{۲})$$

$$MH = \sqrt{(۲+\frac{۱}{۲})^۲ + (۱-\frac{۷}{۲})^۲} = \sqrt{\frac{۲۵}{۴} + \frac{۲۵}{۴}} = \frac{۵}{۲}\sqrt{۲}$$

۱۴- متوسط

برای یافتن معادله ابتدا فاصلهٔ نقطهٔ **A** تا خط **BC** را به‌عنوان اندازهٔ ارتفاع و فاصلهٔ دو نقطه **B** و **C** را به‌عنوان اندازه قاعده می‌یابیم.

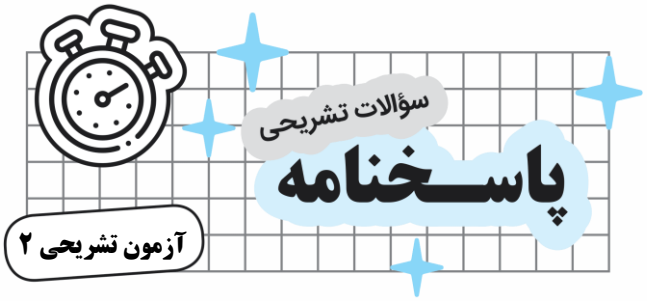
معادله خط BC: $\frac{۰-۲}{۳-۱} = \frac{-۲}{۲} = -۱$

$$y-۰ = -۱(x-۳) \Rightarrow y = -x+۳ \Rightarrow y+x-۳ = ۰$$

$$\text{فاصله A تا BC} = AH = \frac{|۳-۱-۳|}{\sqrt{۱+۱}} = \frac{۱}{\sqrt{۲}}$$

$$BC = \sqrt{(۳-۱)^۲ + (۰-۲)^۲} = \sqrt{۴+۴} = ۲\sqrt{۲}$$

$$۸ = \frac{۲\sqrt{۲} \times \frac{۱}{\sqrt{۲}}}{۲} = ۱$$



۱- متوسط

اولین عدد سه رقمی که باقی‌مانده آن بر ۹ برابر ۲ است عدد ۱۰۱ است پس جملهٔ بعدی دنباله ۱۱۰ خواهد بود. درنتیجه دنبالهٔ حاصل:

$$۱۰۱+۱۱۰+۱۱۹+...+۹۹۲=$$

ابتدا تعداد جملات این دنباله را حساب می‌کنیم پس:

$$n=\frac{\text{جمله اول - جمله آخر}}{\text{قدر نسبت}}+۱$$

در نتیجه مجموع ۱۰۰ جملهٔ اول دنباله را خواهیم خواست پس:

$$S_{۱۰۰}=\frac{۱۰۰}{۲}[۱۰۱+۹۹۲]=۵۴۶۵۰$$

۲- متوسط

شدت تابش پس از عبور از لایه اول $\frac{۱}{۲}$ و پس از عبور از لایه دوم $\frac{۱}{۴}$ می‌شود

در نتیجه دنباله هندسی روبه‌رو را خواهیم داشت:

$$\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۴}+...$$

$$S_n=a_۱\frac{۱-q^n}{۱-q}=\frac{۱}{۲}\frac{۱-(\frac{۱}{۲})^n}{۱-\frac{۱}{۲}}=\frac{\frac{۱}{۲}}{\frac{۱}{۲}}\frac{۱-(\frac{۱}{۲})^n}{\frac{۱}{۲}}=۱-(\frac{۱}{۲})^n$$

حال با توجه به صورت سؤال مجموع این تابش‌ها باید ۹۸ درصد کاهش یابد پس:

$$۱-(\frac{۱}{۲})^n\geq\frac{۹۸}{۱۰۰}\Rightarrow\frac{۱}{۲^n}\leq\frac{۲}{۱۰۰}\Rightarrow ۲^n\geq ۵۰ \xrightarrow[\text{مختلف}]{\text{با آزمایش اعداد}} n=۶$$

۳- آسان

ابتدا $x^۲-۱$ برابر با t درنظر می‌گیریم:

$$x^۲-۱=t\Rightarrow t^۲-t-۶=۰\Rightarrow(t-۳)(t+۲)=۰$$

$$t=۳\xrightarrow{t=x^۲-۱}x^۲-۱=۳\Rightarrow x^۲=۴\Rightarrow x=\pm ۲$$

$$t=-۲\xrightarrow{t=x^۲-۱}x^۲-۱=-۲\Rightarrow x^۲=-۱$$

حاصل عبارت توان زوج منفی نمی‌تواند باشد پس این معادله ریشه ندارد.

در نتیجه صفرهای تابع تنها $x=\pm ۲$ خواهد بود.

۴- متوسط

با توجه به ارتباط بین ریشه‌ها $\alpha=۲\beta-۱$

حالا S و P را از روی معادله به دست می‌آوریم و در آن‌ها به‌جای $\alpha=۲\beta-۱$ قرار می‌دهیم:

$$S=\frac{-b}{a}=\frac{-(-۱)}{۴}=\alpha+\beta\Rightarrow\frac{-۱}{۴}=۲\beta-۱+\beta\Rightarrow\frac{۳}{۴}=۳\beta\Rightarrow\beta=\frac{۱}{۴}$$

با جای‌گذاری β در $\alpha=۲\beta-۱$ داریم: $\alpha=۲(\frac{۱}{۴})-۱=-\frac{۱}{۲}$

$$P=\frac{c}{a}=\frac{\frac{۱}{m}}{۴}=\alpha\beta\Rightarrow\frac{۱}{۴m}=(-\frac{۱}{۲})(\frac{۱}{۴})\Rightarrow\frac{۱}{۴m}=\frac{-۱}{۸}$$

$$\Rightarrow -۴m=۸\Rightarrow m=-۲$$

۵- متوسط

ابتدا تمام کسرها را در مخرج مشترک آن‌ها ضرب می‌کنیم.

$$\frac{۲x}{x-۲}-\frac{۶}{۱}=\frac{۲}{x}\xrightarrow{\times(x)(x-۲)}$$

$$(x)(x-۲)(\frac{۲x}{x-۲}-\frac{۶}{۱})=(x)(x-۲)(\frac{۲}{x})$$

$$۲x^۲-۶x^۲+۱۲x=۲x-۴$$

$$۴x^۲-۱۰x-۴=۰\Rightarrow ۲x^۲-۵x-۲=۰$$

چون حاصل جمع ریشه را خواسته است پس: $S=\frac{-b}{a}=\frac{۵}{۲}$

۶- آسان

شید اول در $\frac{۱}{۳}$ ساعت، شید دوم در $\frac{۱}{۴}$ ساعت و شید سوم در ۱ ساعت استخر را پر می‌کنند.

پس:

$$\frac{۱}{۳}+\frac{۱}{۴}+\frac{۱}{x}=\frac{۳}{۴}\Rightarrow\frac{۴x}{۱۲x}$$

$$\Rightarrow\frac{۴x+۳x+۱۲}{۱۲x}=\frac{۳}{۴}$$

$$\frac{۷x+۱۲}{۱۲x}=\frac{۳}{۴}\Rightarrow ۲۸x+۴۸=۳۶x\Rightarrow ۴۸=۸x\Rightarrow ۶=x$$

۷- دشوار

اگر $\sqrt{x}=t$ را در نظر بگیریم آن‌گاه $x=t^۲$ خواهد بود. پس:

$$\frac{۴-t}{۲-t^۲}=۲+t\xrightarrow{\text{طرفین وسطین}}۴-t=(۲+t)(۲-t^۲)$$

$$t^۳-۳t+۲t^۲=۰\Rightarrow t(t^۲+۲t-۳)=۰\Rightarrow t(t+۳)(t-۱)=۰$$

$$t=۰\Rightarrow\sqrt{x}=۰\Rightarrow x=۰$$

$$t+۳=۰\Rightarrow t=-۳\Rightarrow\sqrt{x}=-۳$$ ریشه ندارد.

$$t-۱=۰\Rightarrow t=۱\Rightarrow\sqrt{x}=۱\Rightarrow x=۱$$ پس معادله دو ریشه دارد.

۸- آسان

حواستون باشه‌ها! اگر زیر رادیکال جمع و تفریق داشتید حتماً آن را به مربع کامل تبدیل کنید:

$$\sqrt{۶-۲\sqrt{۵}}=\sqrt{(\sqrt{۵}-۱)^۲}=|\sqrt{۵}-۱|=\sqrt{۵}-۱$$

۹- متوسط

می‌توان طرفین معادله را به توان ۲ رساند.

$$|x+۲|=۳-۲x\Rightarrow x^۲+۴x+۴=۹+۴x^۲-۱۲x$$

$$۰=۳x^۲-۱۶x+۵\Rightarrow ۰=(۳x-۱)(x-۵)\Rightarrow x=\frac{۱}{۳},\ x=۵$$

$x=۵$ چون طرف دوم معادله را منفی می‌کند. غ ق ق است.

$x=\frac{۱}{۳}$ چون در معادله صدق می‌کند ق ق است.

۱۰- آسان

میانه **AM** وارد بر ضلع **BC** به وسط ضلع **BC** وارد می‌شود پس ابتدا وسط **BC** را تعیین می‌کنیم.

$$M=(\frac{۴+۷}{۲},\frac{۳+۲}{۲})=(\frac{۱۱}{۲},\frac{۵}{۲})$$

فاصلهٔ دو نقطه **A** و **M** را می‌یابیم.

$$AM=\sqrt{(\frac{۱۱}{۲}+۵)^۲+(\frac{۵}{۲}-۰)^۲}$$

$$AM=\sqrt{(\frac{۲۱}{۲})^۲+(\frac{۵}{۲})^۲}=\sqrt{\frac{۴۴۱}{۴}+\frac{۲۵}{۴}}=\sqrt{\frac{۴۶۶}{۴}}=\sqrt{۱۱۶/۵}$$

۱۱- آسان

ابتدا محل برخورد دو خط را با استفاده از دستگاه به دست می‌آوریم:

$$\begin{cases} y-\cancel{x}=۷ \\ ۲y+\cancel{x}=۱۷ \end{cases}$$

$$۳y=۲۴$$

$$y=۸, x=۱$$

حال فاصلهٔ نقطهٔ $(۱,۸)$ را از خط $y-۲x-۱=۰$ به دست می‌آوریم:

$$d=\frac{|۸-۲(۱)-۱|}{\sqrt{۴+۱}}=\frac{۵}{\sqrt{۵}}$$

۱۲- متوسط

محل برخورد میانه مثلث مرکز ثقل مثلث خواهد بود پس:

$$G=(\frac{۳+۰-۴}{۳},\frac{۱+۳+۰}{۳})=(\frac{-۱}{۳},\frac{۴}{۳})$$

در مرحله بعد معادله خط **AC** را باید پیدا کنیم:

$$AC\ \text{شیب}=\frac{۰-۱}{-۴-۳}=\frac{۰-۱}{-۴-۳}=\frac{-۱}{-۷}=\frac{۱}{۷}$$

$$AC\ \text{معادله خط}\ y-۰=\frac{۱}{۷}(x+۴)\Rightarrow y=\frac{۱}{۷}x+\frac{۴}{۷}\Rightarrow ۷y-x-۴=۰$$

حال فاصلهٔ نقطه **G** با خط **AC** را به دست می‌آوریم:

$$d=\frac{|۷(\frac{۴}{۳})-(-\frac{۱}{۳})-۴۱|}{\sqrt{۴۹+۱}}=\frac{|\frac{۲۸}{۳}+\frac{۱}{۳}-۴|}{\sqrt{۵۰}}=\frac{\frac{۱۷}{۳}}{\sqrt{۵۰}}=\frac{۱۷}{۳\sqrt{۵۰}}$$

۱۳- دشوار

آ)

$$G=(\frac{۴+(-۲)+۱}{۳},\frac{۱+(-۲)+۴}{۳})=(۱,۱)$$

ب) AM معادلهٔ میانه $\Rightarrow M=(\frac{-۲+۴}{۲},\frac{۱+(-۲)}{۲})=(۱,\frac{-۱}{۲})$

AM معادلهٔ: $x=۱$

معادله ارتفاع **BH**

AC شیب $=\frac{۴-۱}{۱-۴}=\frac{۳}{-۳}=-۱\xrightarrow[\text{قرینه و معکوس}]{\text{شیب BH}} m_{BH}=۱$

BH معادله: $y+۲=۱(x-۲)\Rightarrow y=x-۴$

D محل تلاقی BH و AM است پس دستگاه حل می‌کنیم

$y=۱-۴\Rightarrow y=-۳$

$D(+۱,-۳)$

پ)

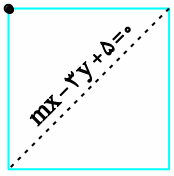
$$x_A+x_C=x_B+x_{D'}\Rightarrow ۱+۱=-۲+x_{D'}\Rightarrow ۴=x_{D'}$$

$$y_A+y_C=y_B+y_{D'}\Rightarrow ۴+۱=-۲+y_{D'}\Rightarrow ۷=y_{D'}$$

$$BD'=\sqrt{(-۲-۴)^۲+(-۲-۷)^۲}=\sqrt{۳۶+۸۱}=\sqrt{۱۱۷}$$

۱۴- دشوار

A (۱,۲)



فاصلهٔ رأس **A** تا قطر به‌اندازهٔ نصف قطر مربع خواهد بود.

$$\text{نصف قطر}=\frac{|m(۱)-۳(۲)+۵۱|}{\sqrt{m^۲+۹}}=\frac{|m+۱|}{\sqrt{m^۲+۹}}\xrightarrow{\text{کل قطر}}\frac{۲|m+۱|}{\sqrt{m^۲+۹}}$$

رابطه قطر مربع و مساحت مربع از رابطه $(\sqrt{۲})(\text{طول ضلع})=$ قطر و درنتیجه

$$\text{مساحت}=(\frac{\text{قطر}}{\sqrt{۲}})^۲=\frac{(\text{قطر})^۲}{۲}$$

$$\frac{(\frac{۲|m+۱|}{\sqrt{m^۲+۹}})^۲}{۲}=۲\Rightarrow\frac{۴(m^۲+۲m+۱)}{m^۲+۹}=۴$$

$$\Rightarrow \cancel{m^۲}+۲m+۱=\cancel{m^۲}+۹\Rightarrow ۲m=۸\Rightarrow m=۴$$

۱- گزینه «۱» آسان

$-۳,۴,۱۱,۱۸,۲۵,۳۲$

$۲,۷,۱۲,۱۷,۲۲,۲۷,۳۲$

اولین جملهٔ مشترک بین دو دنباله ۳۲ هست.

$$\begin{matrix} d_۱ = ۷ \\ d_۲ = ۵ \end{matrix} \Rightarrow [۵,۷] = ۳۵$$

پس دنبالهٔ جملات مشترک به‌صورت دنباله‌ای با جمله اول ۳۲ و قدرنسبت ۳۵ است.

$$\Rightarrow a_n = a_۱ + (n-۱)d = ۳۲ + (n-۱)(۳۵) = ۳۵n - ۳$$

برای یافتن تعداد جملات کمتر از ۲۰۰:

$$۳۵n - ۳ < ۲۰۰$$

$$\Rightarrow ۳۵n < ۲۰۳ \Rightarrow n < \frac{۲۰۳}{۳۵} \Rightarrow n < ۵/۸$$

پس **n** برابر ۵ است (**n** عدد طبیعی است.)

۲- گزینه «۲» آسان

$$S_۶ = ۲۸S_۳ \Rightarrow \frac{a_۱(۱-q^۶)}{۱-q} = ۲۸ \times \frac{a_۱(۱-q^۳)}{۱-q}$$

$$\Rightarrow (۱-q^۳)(۱+q^۳) = ۲۸(۱-q^۳) \Rightarrow ۱+q^۳ = ۲۸ \Rightarrow q^۳ = ۲۷ \Rightarrow q = ۳$$

$$\frac{a_۵}{a_۲} = \frac{a_۱q^۴}{a_۱q} = q^۳ = ۲۷$$

۳- گزینه «۴» آسان

دنباله حسابی با $a_۱ = ۳$ و $d = ۶$ است پس:

$$S_n = \frac{n}{۲}[۲a_۱ + (n-۱)d] = \frac{n}{۲}[۶ + ۶(n-۱)]$$

$$= ۳n + ۳n^۲ - ۳n = ۳n^۲$$

$$۳n^۲ < ۳۶۵ \Rightarrow n^۲ > ۱۲۱/۷ \xrightarrow{n\ \text{طبیعی}} n > ۱۱$$

پس حداقل باید ۱۲ جمله را جمع کنیم.

۴- گزینه «۲» متوسط

می‌توان هر جمله را به صورت:

$$۳ + ۳۳ + ۳۳۳ + \ldots + \underbrace{۳\ldots۳}_{۲۰\ \text{بار}}$$

$$\downarrow$$

$$\frac{۱۰-۱}{۳} + \frac{۱۰^۲-۱}{۳} + \frac{۱۰^۳-۱}{۳} + \ldots + \frac{۱۰^{۲۰}-۱}{۳}$$

$$\frac{۱}{۳}[۱۰-۱+۱۰^۲-۱+۱۰^۳-۱+\ldots+۱۰^{۲۰}-۱]$$

$$\frac{۱}{۳}[\underbrace{۱۰+۱۰^۲+۱۰^۳+\ldots+۱۰^{۲۰}}_{\text{مجموع دنباله هندسی}} - ۲۰]$$

$$\frac{۱}{۳}[۱۰\frac{۱۰^{۲۰}-۱}{۱۰-۱} - ۲۰] = \frac{۱}{۳}[\frac{۱۰^{۲۱}-۱۰}{۹} - ۲۰] = \frac{۱}{۳}[\frac{۱۰^{۲۱}-۱۰-۱۸۰}{۹}] =$$

$$\frac{۱}{۳}[\frac{۱۰^{۲۱}-۱۹۰}{۹}] = \frac{۱۰^{۲۱}-۱۹۰}{۲۷}$$

۵- گزینه «۲» متوسط

با جمع کردن دو رابطه داریم:

$$\begin{matrix} a_۱ + a_۲ + a_۳ + a_۴ = ۳ + \sqrt{۵} \\ a_{۱۰۰} + a_{۹۹} + a_{۹۸} + a_{۹۷} = ۱۷ - \sqrt{۵} \end{matrix}$$

$$(a_۱ + a_{۱۰۰}) + (a_۲ + a_{۹۹}) + (a_۳ + a_{۹۸}) + (a_۴ + a_{۹۷}) = ۲۰$$

طبق قانون اندیس‌ها که اگر $p+q = m+n$ آن‌گاه:

$$a_m + a_n = a_p + a_q$$

$$۴(a_۱ + a_{۱۰۰}) = ۲۰ \Rightarrow a_۱ + a_{۱۰۰} = ۵$$

$$S_{۱۰۰} = \frac{۱۰۰}{۲}(a_۱ + a_{۱۰۰}) = ۵۰ \times ۵ = ۲۵۰$$

۶- گزینه «۳» آسان

قبلاً گفتیم که طول اضلاع چنین مثلثی به‌صورت $۳d$، $۴d$، $۵d$ هستند که $۵d$ طول وتر است. پس وتر مضربی از ۵ است.

اگر به گزینه‌ها دقت کنیم تنها گزینه‌ای که می‌تواند جواب باشد گزینه ۳ است.

۷- گزینهٔ «۲» متوسط

دو ریشهٔ قرینه داره پس اولاً دو ریشه داره یعنی $\Delta > ۰$ و دوماً قرینه هستند.

این یعنی این که $p < ۰$ و $S = ۰$ نتیجهٔ $S = ۰$ یعنی $b = ۰$ زیرا $S = \frac{-b}{a}$ هستش. پس:

$$m^۳ - ۴m = ۰ \Rightarrow m(m^۲ - ۴) = ۰ \Rightarrow m = ۰, \pm ۲ \quad (۱)$$

$$p < ۰ \Rightarrow \frac{m+۳}{m} < ۰ \Rightarrow -۳ < m < ۰ \quad (۲)$$

$$\Delta > ۰ \Rightarrow b^۲ - ۴ac > ۰ \xrightarrow{b=۰} -۴ac > ۰ \Rightarrow ac < ۰$$

که همان معنی $p < ۰$ را دارد که در قسمت ۲ حل شد.

از بین اعدادی که برای **m** به دست آمدند تنها $m = -۲$ شرط (۲) را دارد پس فقط یک مقدار برای **m** داریم.

۸- گزینهٔ «۲» متوسط

دو ریشه مختلف‌العلامت یعنی $p<0, \Delta>0$

$$1)\ \Delta>0 \Rightarrow 25-4m(m+1)>0 \Rightarrow 25-4m^2-4m>0$$

$$\Rightarrow 4m^2+4m-25<0$$

$$\Delta=416 \Rightarrow m=\frac{-4\pm\sqrt{416}}{8}=\frac{-4\pm4\sqrt{26}}{8}$$

$$\Rightarrow \frac{-1-\sqrt{26}}{2}<m<\frac{-1+\sqrt{26}}{2}$$

$$2)\ p<0 \Rightarrow \frac{m}{m+1}<0 \Rightarrow -1<m<0$$

اشتراک ۱ و ۲ همان بازهٔ $-1<m<0$ است.

۹- گزینهٔ «۲» متوسط

با درنظر گرفتن تغییر متغیر $t=x^2-4x$ داریم:

$$t-\frac{20}{t}-1=0 \xrightarrow{xt} t^2-t-20=0 \Rightarrow (t-5)(t+4)=0 \Rightarrow t=5,-4$$

$$1)\ t=5 \Rightarrow x^2-4x=5 \Rightarrow x^2-4x-5=0$$

$$\Rightarrow (x-5)(x+1)=0 \Rightarrow x=-1,\ 5$$

$$x^2-4x=-4 \Rightarrow x^2-4x+4=0 \Rightarrow (x-2)^2=0 \Rightarrow x=2$$

۱۰- گزینهٔ «۲» دشوار

$$x=2 \xrightarrow{\text{جاگذاری}} 2(4a-7)=2 \Rightarrow 4a-7=1$$

$$\Rightarrow 4a=8 \Rightarrow a=2$$

$$\Rightarrow x(2x^2-x-5)=2 \Rightarrow 2x^3-x^2-5x-2=0$$

یکی از جواب‌ها $x=2$ است پس معادله بر $(x-2)$ بخش‌پذیر است. با تقسیم بر این عامل بقیهٔ جملات را به دست می‌آوریم:

$$\begin{array}{r|l} 2x^3-x^2-5x-2 & x-2 \\ \hline 2x^3-4x^2 & 2x^2+3x+1 \\ \hline 3x^2-5x & \\ 3x^2+6x & \\ \hline x-2 & \\ x-2 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

$$\Rightarrow 2x^2+3x+1=0$$

$$\text{مجموع دوریشه}=-\frac{b}{a}=-\frac{3}{2}$$

۱۱- گزینهٔ «۲» متوسط

$$5x^2+3x-2=0 \Rightarrow S=\frac{-3}{5}, P=\frac{-2}{5}$$

$$4x^2-kx+25=0,\ S'=\frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{\beta^2}=\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha^2\beta^2}=\frac{S^2-2P}{P^2}$$

$$=\frac{\frac{9}{25}+\frac{4}{5}}{\frac{4}{25}}=\frac{\frac{29}{25}}{\frac{4}{25}}=\frac{29}{4}$$

$$\Rightarrow \frac{-b}{a}=\frac{29}{4} \Rightarrow \frac{k}{4}=\frac{29}{4} \Rightarrow k=29$$

۱۲- گزینه «۱» متوسط

می‌دانیم که α و β ریشه‌های معادله هستند پس در معادله صدق می‌کنند.

$$x^2-2x-4=0 \Rightarrow \alpha^2-2\alpha-4=0 \Rightarrow \alpha^2-2\alpha-4=0$$

$$\Rightarrow \alpha^2-4=2\alpha$$

$$(\alpha^2-4)^2+4\beta^2=(2\alpha)^2+4\beta^2=4\alpha^2+4\beta^2=4(\alpha^2+\beta^2)$$

$$=4(S^2-2P)=4(4+8)=48$$

$$S=2,\ P=-4$$

۱۳- گزینه ۴ آسان

اگر بخواهیم نمودار همواره بالای محور xها باشد پس باید $\Delta<0$، $a>0$ باشد.

$$a>0 \Rightarrow 1-a>0 \Rightarrow a<1 \quad (1)$$

$$\Delta<0 \Rightarrow 24-4(1-a)(-a)<0$$

$$\Rightarrow 24+4a-4a^2<0 \Rightarrow 4a^2-4a-24<0$$

$$\Rightarrow a^2-a-6<0 \Rightarrow -2<a<3 \quad (2)$$

$$\xrightarrow{1\cap2} -2<a<1$$

۱۴- گزینه ۳ متوسط

محور x را در نقطه‌ای به طول ۲ قطع می‌کند پس $(2,0)$ نقطه‌ای از نمودار است:

$$f(2)=0 \Rightarrow 16-20-2+m=0$$

$$\Rightarrow m=6 \Rightarrow f(x)=2x^3-5x^2-x+6$$

$$\begin{array}{r|l} 2x^3-5x^2-x+6 & x-2 \\ \hline 2x^3\pm4x^2 & 2x^2-x-3 \\ \hline \mp x^2-x+6 & \\ \pm x^2\mp 2x & \\ \hline -3x+6 & \\ -3x+6 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

$$2x^2-x-3=0 \xrightarrow{a+c=b} \begin{cases} x=-1 \\ x=\frac{-c}{a}=\frac{3}{2} \end{cases}$$

۱۵- گزینه «۱» دشوار

کسر اول و کسر سوم معکوس هم هستند با تغییر متغیر داریم:

$$t=\frac{x^2-x+3}{2x^2+x+1} \Rightarrow t+\frac{1}{t}=2-\frac{1}{x^2+1}$$

می‌دانیم که $\frac{1}{x^2+1}$ همواره عددی مثبت است و بنابراین $2-\frac{1}{x^2+1}$ همواره عددی کوچکتر از ۲ است. درصورتی‌که داریم:

$$t+\frac{1}{t}\geq 2 \quad \text{یا} \quad t+\frac{1}{t}\leq -2$$

پس این معادله جواب ندارد.

۱۶- گزینه «۱» متوسط

با تغییر متغیر حل می‌کنیم:

$$t = x^۲ + ۴x + ۳$$

$$t = \sqrt{t+۲} \xrightarrow{\text{توان ۲}} t^۲ = t + ۲ \Rightarrow t^۲ - t - ۲ = ۰$$

$$\xrightarrow{a+c=b}$$

$$t = -۱ \ , \ t = -\frac{c}{a} = \frac{+۲}{۱} = ۲$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x^۲ + ۴x + ۳ = -۱ \\ x^۲ + ۴x + ۵ = ۲ \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} x^۲ + ۴x + ۴ = ۰ \Rightarrow (x+۲)^۲ = ۰ \Rightarrow x = -۲ \\ x^۲ + ۴x + ۳ = ۰ \Rightarrow P = \frac{c}{a} = ۳ \end{matrix}$$

ضرب هر سه ریشه $= -۲ \times ۳ = -۶$

۱۷- گزینه «۴» متوسط

با در نظر گرفتن $\mathbf{t}$ به‌صورت: $t = x^۲ - ۳x + ۲$ می‌بینیم که داریم:

$$|t| = -t$$

این رابطه در صورتی صحیح است که $\mathbf{t}$ عددی نامثبت باشد یعنی:

$$t \le ۰ \Rightarrow x^۲ - ۳x + ۲ \le ۰ \Rightarrow (x-۱)(x-۲) \le ۰ \Rightarrow ۱ \le x \le ۲$$

بی‌شمار عدد حقیقی دارد.

۱۸- گزینه «۳» آسان

$$d = \frac{|C - C'|}{\sqrt{a^۲ + b^۲}} = \frac{|۱ - (-۱)|}{\sqrt{۵^۲ + ۱۲^۲}} = \frac{۲}{۱۳}$$

۱۹- گزینه «۳» دشوار

$$\frac{۹(۲ - \sqrt{x})}{۲ + \sqrt{x}} = ۴ - x$$

از آن جایی که می‌دونیم $\mathbf{x}$ زیر رادیکال قرار گرفته پس $x \ge ۰$ و بنابراین میشه عبارت سمت راست رو تجزیه کرد.

$$۴ - x = (۲ - \sqrt{x})(۲ + \sqrt{x}) \Rightarrow \frac{۹(۲ - \sqrt{x})}{۲ + \sqrt{x}} = (۲ - \sqrt{x})(۲ + \sqrt{x})$$

با شرط $۲ - \sqrt{x} = ۰$، ساده می‌کنیم:

$$۲ - \sqrt{x} = ۰ \Rightarrow ۲ = \sqrt{x} \Rightarrow x = ۴$$

$$(۲ + \sqrt{x})^۲ = ۹ \Rightarrow ۴ + x + ۴\sqrt{x} = ۹ \Rightarrow x + ۴\sqrt{x} - ۵ = ۰$$

$$t = \sqrt{x} \Rightarrow t^۲ + ۴t - ۵ = ۰ \Rightarrow \begin{cases} t = -۵ \text{ غ‌ق‌ق} \\ t = ۱ \Rightarrow \sqrt{x} = ۱ \Rightarrow x = ۱ \end{cases}$$

۲۰- گزینه «۱» دشوار

$$G\left(\frac{x_۱ + x_۲ + x_۳}{۳}, \frac{y_۱ + y_۲ + y_۳}{۳}\right)$$

$$= \left(\frac{۰ + ۱ + (-۲)}{۳}, \frac{۳ + ۲ + ۱}{۳}\right) = \left(\frac{-۱}{۳}, ۲\right)$$

۱- گزینه «۱»

مجموع جملات صورت درواقع مجموع جملات یک دنباله هندسی با $a_۱ = ۱$ و $r = t$ هست $(n = ۱۲)$

مخرج مجموع جملات یک دنباله هندسی با $a_۱ = ۱$ و $r = t^۳$ هست. $(n = ۴)$

$$\Rightarrow \frac{۱ + t + \ldots + t^{۱۱}}{۱ + t^۳ + t^۶ + t^۹} = \frac{\frac{۱(۱ - t^{۱۲})}{۱ - t}}{\frac{۱(۱ - (t^۳)^۴)}{۱ - t^۳}} = \frac{\frac{۱ - t^{۱۲}}{۱ - t}}{\frac{۱ - t^{۱۲}}{۱ - t^۳}} = \frac{۱ - t^۳}{۱ - t}$$

$$= \frac{(۱ - t)(۱ + t + t^۲)}{۱ - t} = ۱ + t + t^۲ = t^۲ + t + \frac{۱}{۴} - \frac{۱}{۴} + ۱$$

$$= (t + \frac{۱}{۲})^۲ + \frac{۳}{۴} \xrightarrow{t = \frac{\sqrt{۵} - ۱}{۲} \Rightarrow t + \frac{۱}{۲} = \frac{\sqrt{۵}}{۲}} = (\frac{\sqrt{۵}}{۲})^۲ + \frac{۳}{۴}$$

$$= \frac{۵}{۴} + \frac{۳}{۴} = \frac{۸}{۴} = ۲$$

۲- گزینه «۲»

$$\frac{a_۱ a_۲ a_۳}{(a_۴)^۳} = ۶۴ \Rightarrow \frac{a_۱ \times a_۱ r \times a_۱ r^۲}{(a_۱ r^۳)^۳} = ۶۴$$

$$\Rightarrow \frac{a_۱^۳ \times r^۳}{a_۱^۳ \times r^۹} = ۶۴ \Rightarrow \frac{۱}{r^۶} = ۶۴ \Rightarrow r^۶ = \frac{۱}{۶۴} \Rightarrow r = \frac{۱}{۲}$$

$$\frac{S_۶}{a_۱} = \frac{a_۱ \frac{۱ - r^۶}{۱ - r}}{a_۱} = \frac{۱ - \frac{۱}{۶۴}}{۱ - \frac{۱}{۲}} = \frac{\frac{۶۳}{۶۴}}{\frac{۱}{۲}} = \frac{۶۳}{۶۴}$$

۳- گزینه «۱»

$$S = (۹۸^۲ - ۹۷^۲) + (۹۶^۲ - ۹۵^۲) + \ldots + (۲^۲ - ۱)$$

حالا به کمک اتحاد مزدوج هر پرانتز رو تجزیه می‌کنیم:

$$S = \underbrace{(۹۸ - ۹۷)}_{۱}(۹۸ + ۹۷) + \underbrace{(۹۶ - ۹۵)}_{۱}(۹۶ + ۹۵) + \ldots + \underbrace{(۲ - ۱)}_{۱}(۲ + ۱)$$

$$S = ۹۸ + ۹۷ + ۹۶ + ۹۵ + \ldots + ۲ + ۱$$

که این مجموع، جمع ۹۸ جمله از یک دنباله حسابی با $a_۱ = ۱$ و $d = ۱$ است:

$$S_n = \frac{n(n+۱)}{۲} \Rightarrow S_{۹۸} = \frac{۹۸(۹۹)}{۲} = ۴۸۵۱$$

۴- گزینه «۲»

می‌دانیم دو دنبالهٔ حسابی $d=a_۲-a_۱ \Rightarrow d=p-۱-۱-۲p=-p-۲$

$$\frac{۸}{۲}[۲(۱+۲p)+۷(-p-۲)]=۶۰$$

$$\Rightarrow \not۴[۲+۴p-۷p-۱۴]=\frac{۶۰}{۱۵} \Rightarrow -۳p-۱۲=۱۵$$

$$\Rightarrow -۳p=۲۷ \Rightarrow p=-۹$$

$$\Rightarrow d=-(-۹)-۲=۹-۲=۷$$

۵- گزینه «۱»

دنبالـه حسـابی داریـم بـا اطلاعـاتِ $d=۹۰$ و $a_۱=۸۰۰$ کـه $S_{۲۰}$ را از مـا می‌خواهد:

$$S_{۲۰}=\frac{۲۰}{۲}[۲(۸۰۰)+۱۹(۹۰)]=۱۰[۱۶۰۰+۱۷۱۰]=۱۰(۳۳۱۰)=۳۳۱۰۰$$

۶- گزینه «۴»

$$x^۲-۲x-۱=۰ \Rightarrow \begin{cases}\alpha+\beta=۲\to s\\ \alpha\beta=-۱\to p\end{cases}$$

$$\frac{\alpha^۳-\beta^۳}{\alpha^۲-\beta^۲}=\frac{\cancel{(\alpha-\beta)}(\alpha^۲+\alpha\beta+\beta^۲)}{\cancel{(\alpha-\beta)}(\alpha+\beta)}=\frac{\alpha^۲+\beta^۲+\alpha\beta}{\alpha+\beta}$$

$$=\frac{S^۲-۲P+P}{S}=\frac{S^۲-P}{S}=\frac{۴+۱}{۲}=\frac{۵}{۲}$$

۷- گزینه «۴»

α در معادله صدق می‌کنه پس:

$$\alpha^۲-\alpha-۳=۰$$

$$\alpha^۳-\frac{۲۷}{\alpha^۳}=\frac{\alpha^۶-۲۷}{\alpha^۳}=\frac{(\alpha^۲)^۳-۳^۳}{\alpha^۳}$$

$$\underline{\underline{\text{اتحاد چاق و لاغر}}} \quad \frac{(\alpha^۲-۳)(\alpha^۴+۳\alpha^۲+۹)}{\alpha^۳}$$

از معادله: $\alpha^۲-۳=\alpha$ و $\alpha^۲=\alpha+۳$

$$=\frac{\cancel{\alpha}[\alpha^۲(\alpha^۲+۳)+۹]}{\cancel{\alpha^۴}\,\alpha^۲}=\frac{(\alpha+۳)(\alpha+۶)+۹}{\alpha^۲}=\frac{\alpha^۲+۹\alpha+۱۸+۹}{\alpha^۲}$$

$$=\frac{\alpha^۲+۹\alpha+۲۷}{\alpha^۲}=\frac{\alpha^۲+۹(\alpha+۳)}{\alpha^۲}=\frac{\alpha^۲+۹\alpha^۲}{\alpha^۲}=\frac{۱۰\alpha^۲}{\alpha^۲}=۱۰$$

۸- گزینه «۲»

اگر کمی دقت کنیم می‌بینیم که $x=۱$ در معادلهٔ درجه سه صدق می‌کنه.

$$x=۱ \Rightarrow \not۱+\not a-\not۱+۴-\not a=۴ \quad \checkmark$$

پس $(x-۱)$ یک عامل برای عبارت است.

$$\begin{array}{r|l} x^۳+(a-۱)x^۲+(۴-a)x-۴ & x-۱ \\ \hline \cancel{x^۳}\pm x^۲ & x^۲+ax+۴ \\ \cancel{ax^۲}+(۴-a)x & \\ \cancel{ax^۲}\pm ax & \\ \hline ۴x-۴ & \end{array}$$

حالا این عبارت باید دو ریشه حقیقی متمایز مثبت داشته باشد. پس:

$$\Delta>۰ \Rightarrow a^۲-۱۶>۰ \Rightarrow a^۲>۱۶ \Rightarrow |a|>۴ \Rightarrow a<-۴ \cup a>۴ \quad (۱)$$

$$S>۰ \Rightarrow \frac{-a}{۱}>۰ \Rightarrow a<۰ \quad (۲)$$

$$p>۰ \quad \checkmark \xrightarrow{۱\cap ۲} a<-۴$$

۹- گزینه «۱»

اگر نمودار بخواد بر محور **x**ها مماس بشه باید $\Delta=۰$ باشه، بـه عبـارتی بایـد از $y=۰$، دو ریشه برابر (ریشه تکراری) به دست بیاد.

$$y=۰ \Rightarrow \begin{cases}۳-\frac{x}{m}=۰ \Rightarrow \frac{x}{m}=۳ \Rightarrow x=۳m\\ mx-۱=۰ \Rightarrow mx=۱ \Rightarrow x=\frac{۱}{m}\end{cases}$$

$$\Rightarrow ۳m=\frac{۱}{m} \Rightarrow ۳m^۲=۱ \Rightarrow m^۲=\frac{۱}{۳} \Rightarrow \pm\sqrt{\frac{۱}{۳}}$$

پس دو جواب برای **m** داریم.

۱۰- گزینه «۲»

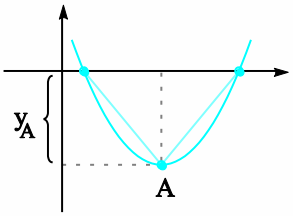
$$y=x^۲+۲mx \Rightarrow x_A=\frac{-b}{۲a}=\frac{-۲m}{۲}=-m$$

$$y_A=(-m)^۲+۲m(-m)=m^۲-۲m^۲=-m^۲ \Rightarrow \Delta\begin{vmatrix}-m\\ -m^۲\end{vmatrix}$$

تلاقی با محور **x**ها یعنی $y=۰$ پس:

$$x^۲+۲mx=۰ \Rightarrow x(x+۲m)=۰ \Rightarrow x=۰ \text{ یا } x=-۲m$$

از آن جـا کـه رأس سـهمی دقیقـاً وسـط ریشـه‌هااسـت پـس مثلـث حاصـل، متساوی‌الساقین است و $h=|y_A|$ و طول قاعده برابر $|x_۲-x_۱|$ است.



$$h=|-m^۲|=m^۲ \Rightarrow S=\frac{۱}{۲}(m^۲)|-۲m-۰|$$

$$\Rightarrow \frac{۱}{\not۲}m^۲(+\not m)=۸ \Rightarrow m^۳=۸ \Rightarrow m=۲$$

۱۱- گزینه «۲»

سمت چپ معادله رو مخرج مشترک می‌گیریم:

$$\frac{۳x+۲x+۴}{x+۲}=\frac{۲}{۱+ax} \Rightarrow \frac{۵x+۴}{x+۲}=\frac{۲}{۱+ax}$$

حالا طرفین وسطین کنیم:

$$(۵x+۴)(۱+ax)=۲(x+۲)$$

$$۵x+۵ax^۲+۴+۴ax=۲x+۴ \Rightarrow ۵ax^۲+(۴a+۵)x=۲x$$

$$\Rightarrow ۵ax^۲+(۴a+۳)x=۰ \Rightarrow x(۵ax+۴a+۳)=۰$$

همان طور که مشخص است $x=۰$ یک ریشه برای معادله است و چون می‌خواهیم معادله فقط یک جواب داشته باشد پس سراغ داخل پرانتز می‌رویم:

حالت اول: $a=۰$ درنتیجه داخل پرانتز به ۳ تبدیل می‌شود که ریشه ندارد.

حالت دوم: $۴a+۳=۰$ و درنتیجه $a=-\frac{۳}{۴}$ که در این صورت عبارت به $۵ax$ تبدیل می‌شود که باز هم ریشه آن $x=۰$ است. پس دو مقدار برای **a** داریم.

۱۲- گزینه «۳»

یازده کیلوگرم رنگ با غلظت ۴۰٪ داریم پس ۴/۴ حل‌شونده داریم زیرا:

$$۱۱\times\frac{۴۰}{۱۰۰}=۴/۴$$

به همین ترتیب چهار کیلوگرم رنگ با غلظت ۷۰٪ یعنی وجود ۲/۸ حل‌شونده محلول نهایی ۲/۸+۴/۴ حل شونده دارد یعنی ۷/۲ حل شونده از طرفی محلول نهایی ۱۵=۴+۱۱ کیلوگرم است و اگر مقدار تبخیر شده را **x** فرض کنیم داریم:

$$\frac{۷/۲}{۱۵-x}=\frac{۵۰}{۱۰۰} \Rightarrow \frac{۷/۲}{۱۵-x}=\frac{۱}{۲} \Rightarrow ۱۵-x=۱۴/۴ \Rightarrow ۰/۶=x$$

۱۳- گزینه «۲»

$$\sqrt{x^۳+۵x^۲-۱۰x-۸}+\sqrt{x^۲+x-۶}=۰$$

تعادل این معادله، مجموع دو رادیکال با فرجه زوج برابر با صفر شده است. می‌دونیم که رادیکال همواره نامنفی هست. و اگر جمع دو رادیکال نامنفی برابر صفر شده، معنی اون این هست که هر دو رادیکال برابر صفر هستند و معادله در صورتی دارای جواب هست که هر دو رادیکال هم زمان صفر بشن.

صفرهای رادیکال دوم رو به دست میاریم ببینیم آیا هیچ کدوم رادیکال اول رو صفر می‌کنند یا خیر؟

$$x^۲+x-۶=۰ \Rightarrow (x+۳)(x-۲)=۰ \Rightarrow x=۲, x=-۳$$

$$\begin{matrix} x=۲ \Rightarrow ۸+۲۰-۲۰-۸=۰ & \checkmark \\ x=-۳ \Rightarrow -۲۷+۴۵+۳۰-۸\neq ۰ & \end{matrix} \Rightarrow$$ پس تنها جواب معادله $x=۲$ است.

۱۴- گزینه «۱»

بین دو کسر سمت چپی مخرج مشترک می‌گیریم:

$$\frac{x^۲+\sqrt{x}+x^۲-\sqrt{x}}{x^۴-x}=\frac{۴}{x^۲+x+۱} \Rightarrow \frac{۲x^۲}{x(x^۳-۱)}=\frac{۴}{x^۲+x+۱}$$

$$\Rightarrow \frac{۲x^۲}{x(x-۱)(x^۲+x+۱)}=\frac{۴}{x^۲+x+۱}$$

جملات $x^۲+x+۱$ را از مخرج‌های کسرها ساده می‌کنیم و می‌دانیم فاقد ریشه $(\Delta<۰)$ و همواره مثبت هستند.

$$\Rightarrow ۲x^۲=۴x^۲-۴x \Rightarrow ۲x^۲-۴x=۰ \Rightarrow ۲x(x-۴)=۰ \Rightarrow \begin{cases} x=۰ \text{ غ ق ق} \\ x=۴ \end{cases}$$

یک ریشه دارد.

۱۵- گزینه «۳»

با طرفین وسطین کردن داریم:

$$۱-|x|=۲\sqrt{x}-۲|x|$$

$$\Rightarrow ۱+|x|=۲\sqrt{x} \xrightarrow{\text{توان ۲}} ۱+۲|x|+x^۲=۴x$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x\geq ۰ \Rightarrow ۱+۲x+x^۲-۴x=۰ \Rightarrow x^۲-۲x+۱=۰ \Rightarrow \\ (x-۱)^۲=۰ \Rightarrow x=۱ \text{ غ ق ق} \\ x<۰ \Rightarrow ۱-۲x+x^۲-۴x=۰ \Rightarrow \\ x^۲-۶x+۱=۰ \xrightarrow{\Delta=۳۲} x=\frac{۶\pm\sqrt{۳۲}}{۲} \Rightarrow \text{دو ریشه} \end{cases}$$

۱۶- گزینه «۳»

$$|۲x-۳|\geq\sqrt{x}$$

یادت باشه: دو نامعادله، اگر طرفین نامعادله مثبت باشند، می‌تونیم به توان ۲ برسونیم.

$$|۲x-۳|^۲\geq(\sqrt{x})^۲ \Rightarrow ۴x^۲-۱۲x+۹\geq x$$

$$\Rightarrow ۴x^۲-۱۳x+۹\geq ۰ \Rightarrow x=۱, x=\frac{۹}{۴}$$

$$\Rightarrow x\leq ۱ \cup x\geq\frac{۹}{۴}$$

از طرفی **x** زیر رادیکال هست پس $x\geq ۰$

اشتراک این دو مجموعه به‌صورت $۰\leq x\leq ۱ \cup x\geq\frac{۹}{۴}$ هست.

۱۷- گزینه «۱»

با کمک تغییر متغیر $t=x-\sqrt{x}$ داریم:

$$t^۲-\frac{۱۱}{۱۰}t+\frac{۱}{۱۰}=۰ \xrightarrow{\times ۱۰} ۱۰t^۲-۱۱t+۱=۰$$

$$\xrightarrow{a+b+c=۰} t=۱, t=\frac{c}{a}=\frac{۱}{۱۰}$$

$$\begin{cases} x-\sqrt{x}=۱ \Rightarrow x-۱=\sqrt{x} \Rightarrow x^۲-۲x+۱=x \Rightarrow x^۲-۳x+۱=۰ \\ x-\sqrt{x}=\frac{۱}{۱۰} \Rightarrow x-\frac{۱}{۱۰}=\sqrt{x} \Rightarrow x^۲-\frac{۱}{۵}x+\frac{۱}{۱۰۰}=x \end{cases}$$

هر دو قابل قبول $x=\frac{۳\pm\sqrt{۵}}{۲}$

$$\Rightarrow x^۲-\frac{۶}{۵}x+\frac{۱}{۱۰۰}=۰ \xrightarrow{\times ۱۰۰} ۱۰۰x^۲-۱۲۰x+۱=۰ \Rightarrow \Delta>۰$$

دو ریشه غیرصفر دارد پس هر دو قابل‌قبول هستند.

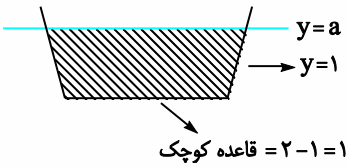
پس معادله چهار جواب حقیقی دارد.

۱۸- گزینه «۲»

$y=a$ نمودار تابع را که به شکل گلدانی هست در دو نقطه قطع کرده است

بنابراین مقدار **a** از کف گلدان بزرگ‌تر است.

کف گلدان: $y=|۱-۲|=۱$



رد گزینه ۴ $\Rightarrow a>۱ \Rightarrow$

برای محاسبه طول قاعده بزرگ لازم است خط $y=a$ را با خطوط گلدان برخورد دهیم.

$$x<۱ \Rightarrow y=-x+۱-x+۲=-۲x+۳$$

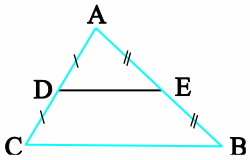
$$-۲x+۳=a \Rightarrow -۲x=a-۳ \Rightarrow x=\frac{۳-a}{۲}$$

$$x>۲ \Rightarrow y=x-۱+x-۲=۲x-۳ \Rightarrow ۲x-۳=a \Rightarrow x=\frac{a+۳}{۲}$$

$$\text{طول قاعده بزرگ}=\frac{a+۳}{۲}-\frac{۳-a}{۲}=\frac{a+\cancel{۳}-\cancel{۳}+a}{۲}=\frac{۲a}{۲}=a$$

$$\Rightarrow S=\frac{۱}{۲}(۱+a)(a-۱)=۴ \Rightarrow a^۲-۱=۸ \Rightarrow a^۲=۹ \Rightarrow a=۳$$

۱۹- گزینه «۲»



طبق قضیهٔ تالس جزء به کل داریم:

$$\frac{AD}{AC}=\frac{AE}{AB}=\frac{DE}{BC}$$

و از آن جایی که **D**، **E** وسط دو ضلع **AC**، **AB** هستند پس $\frac{AE}{AB}, \frac{AD}{AC}$ برابر $\frac{۱}{۲}$ است. پس:

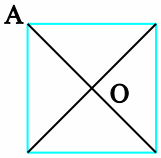
$$\frac{DE}{BC}=\frac{۱}{۲} \Rightarrow DE=\frac{۱}{۲}BC$$

$$BC=\sqrt{(-۲-۱)^۲+(۱-۲)^۲}=\sqrt{۹+۱}=\sqrt{۱۰} \Rightarrow DE=\frac{\sqrt{۱۰}}{۲}$$ و

۲۰- گزینه «۳»

$$OA=\sqrt{(۳+۱)^۲+(۱-۴)^۲}=\sqrt{۱۶+۹}=۵$$

$$\Rightarrow \text{قطر مربع}=۵\times ۲=۱۰$$



اگر **a** طول ضلع مربع باشد، طول قطر $a\sqrt{۲}$ است پس:

$$a\sqrt{۲}=۱۰ \Rightarrow a=\frac{۱۰}{\sqrt{۲}} \Rightarrow S=\frac{۱۰۰}{۲}=۵۰$$