اصلاحیه

✍ فصل سوم – آزمون پلاس – سؤال ۱۷ – گزینه «۳» صحیح است.

پاسخنامه
سؤالات تشریحی

بخش ۱

۱- آسان

تابع $y=a^x$ رو نمایی می‌گوییم که دارای دو شرط $a>۰$ و $a\neq ۱$ باشه.

همین دو شرط رو برای این تابع **f** هم درنظر می‌گیریم:

$$f(x)=(۲a-۳)^x \Rightarrow (۱)\ ۲a-۳>۰ \Rightarrow ۲a>۳ \Rightarrow a>\frac{۳}{۲} \quad (۱)$$

$$(۲)\ ۲a-۳\neq ۱ \Rightarrow ۲a\neq ۴ \Rightarrow a\neq ۲\ (۲)$$

$$\xrightarrow{(۱)\cap(۲)} a\in(\frac{۳}{۲},+\infty)-\{۲\}$$

۲- آسان

با توجه به نکتهٔ سؤال اول:

$$۲a-۳>۰$$

$$\Rightarrow ۲a>۳ \Rightarrow a>\frac{۳}{۲}, ۲a-۳\neq ۱ \Rightarrow a\neq ۲$$

اما باید دقت کنیم که ضریب $(a^۲-۲a-۳)$ به‌ازای هیچ مقادیری از این بازه صفر نشود پس ریشه‌هاشو پیدا می‌کنیم:

$$a^۲-۲a-۳=۰ \xrightarrow{a+c=b} \begin{cases} a=-۱ \\ a=۳ \end{cases}$$

که $a=۳$ در بازه هست و باید از بازه حذف شود:

$$a\in(\frac{۳}{۲},+\infty)-\{۲,۳\}$$

حواست باشه که اگه ضریب صفر بشه تابع دیگه از حالت نمایی به تابع ثابت صفر تبدیل میشه!

۳- آسان

برای راحتی کار می‌تونی با معکوس کردن پایه، توان **x** رو قرینه کنی تا مثبت بشه:

$$f(x)=(\frac{۲a-۱}{۳})^{-x}=(\frac{۳}{۲a-۱})^x$$

با توجه به این‌که پایه نمی‌تونه نامثبت و یا برابر ۱ بشه پس:

$$\left.\begin{array}{l} \frac{۳}{۲a-۱}>۰ \xrightarrow{۳>۰} ۲a-۱>۰ \Rightarrow a>\frac{۱}{۲} \\ \frac{۳}{۲a-۱}\neq ۱ \Rightarrow ۲a-۱\neq ۳ \Rightarrow ۲a\neq ۴ \Rightarrow a\neq ۲ \end{array}\right\} \Rightarrow a\in(\frac{۱}{۲},+\infty)-\{۲\}$$

۴- آسان

تابع نمایی $y=a^x$ در صورتی صعودی هست که $a>۱$ پس:

$$۲a^۲-a>۱ \Rightarrow \underbrace{۲a^۲-a-۱>۰}_{a+b+c=۰\Rightarrow \begin{cases} a=+۱ \\ a=\frac{-۱}{۲} \end{cases}} \Rightarrow a<\frac{-۱}{۲} \cup a>۱$$

یادت باشه:

تابع $y=a^x$ به ازای $۰<a<۱$ نزولی و به ازای $a>۱$ صعودی هست.

۵- دشوار

فرم کلی تابع‌نمایی به‌صورت زیر هست:

$$f(x)=ka^x$$

اما برای درک ضرایب لازم به فرم جواب‌ها در جدول توجه کنیم:

آ)

x	۰	۱	۲	۳	x
y	۳	۱۵ ↓ ۳×۵	۷۵ ↓ ۳×۵^۲	۳۷۵ ↓ ۳×۵^۳	۳×۵^x

$$\Rightarrow f(x)=۳\times ۵^x$$

با بررسی و مقایسهٔ هر مقدار با **x** مربوط به اون داریم:

ب)

۰	۱	۲	۳	۴
۴ ↓ $۳(۲^۰)+۱$	۷ ↓ $۳(۲^۱)+۱$	۱۳ ↓ $۳(۲^۲)+۱$	۲۵ ↓ $۳(۲^۳)+۱$	۴۹ ↓ $۳(۲^۴)+۱$

$$f(x)=۳(۲^x)+۱$$

۶- آسان

آ) درست ـ توابع نمایی همواره یک‌به‌یک و وارون‌پذیر هستند.

ب) نادرست ـ شرط تعریف شدن توابع نمایی، مثبت بودن و مخالف ۱ بودن عدد پایه هست. همچنین درصورتی‌که ضریب **K** وجود دارد برای جلوگیری از تبدیل شدن به عدد ثابت باید $K\neq ۰$ باشد. پس نادرست است.

پ) درست ـ برد توابع نمایی با **k** مثبت، $\mathbb{R}^+$ هست پس اگر **k** منفی شود، برد به R^- تبدیل می‌شود.

ت) نادرست ـ نمودار $y=ka^x$، کنار محور **x** رسم می‌شود و با کاهش یا افزایش **x** در حالت‌های متفاوت به محور **x** نزدیک‌تر می‌شود اما هیچ‌گاه به آن نمی‌رسد (به اصطلاح محور **x** مجانب افقی آن است.) پس هیچ‌گاه نقطه تماسی نخواهد داشت و بنابراین مماس نمی‌شود.

۷- متوسط

آ) R^+ یا $(۰,+\infty)$

ب) $\mathbb{R}$، $\mathbb{R}^+$

پ) ۱، مجانب افقی آن‌هاست یعنی نمودار تا کنار آن پائین می‌آید و خیلی نزدیک می‌شود، اما با آن برخورد نمی‌کند.

ت) هستند، یک

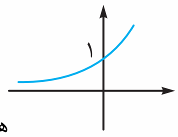
ث) ۱

ج) سه تا، دو برخورد در ناحیه اول و یک برخورد در ناحیه دوم است.

۸- متوسط

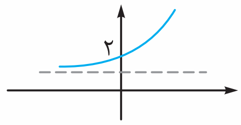
برای توابع نمایی، محدودیتی برای جاگذاری **x** نداریم پس دامنه کل اعداد حقیقی هست. به برد توابع توجه کنیم:

آ) تابع $y = a^x$ در حالتی که $a > ۱$، بالای محور **x** و به‌صورت صعودی به فرم کلی



هست پس $\mathbb{R} = (۰,+\infty)$.

ب) حالا اگه نمودار $y = ۲^x$ رو یک واحد به بالا منتقل کنیم، نمودار به فرم



درمیاد پس: $\mathbb{R} = (۱,+\infty)$

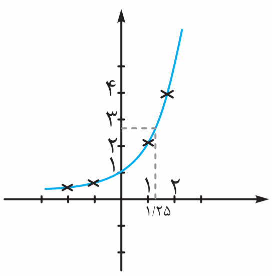
پ) به همین ترتیب $\mathbb{R} = (-۱,+\infty)$

۹- متوسط

برای حل این سؤال به نمودارهای دقیق دو تابع $y = ۲^x$ و $y = ۳^x$ نیاز داریم.

برای رسم هر تابع نمایی از ۵ نقطه اصلی کمک بگیر:

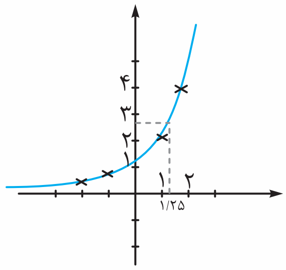
x	۲^x
-۲	$\frac{۱}{۴}$
-۱	$\frac{۱}{۲}$
۰	۱
۱	۲
۲	۴



از روی نمودار مشخص هست که مقدار **y** به‌ازای $x = ۱/۲۵$ تقریباً ۲/۵ به دست می‌آید.

با ماشین حساب: $۲^{۱/۲۵} \cong ۲/۳۷$

x	۳^x
-۲	$\frac{۱}{۹}$
-۱	$\frac{۱}{۳}$
۰	۰
۱	۳
۲	۹



ماشین حساب: $۳^{۱-\sqrt{۲}} = ۳^{۱-۱/۴} = ۳^{-۰/۶} = \frac{۱}{۳^{۰/۶}} \cong ۰/۶۳$

ماشین حساب: $۳^{\frac{۳}{۲}} = ۳^{۱/۵} \cong ۵/۱۹$

۱۰- آسان

مقدار تقریبی $\sqrt{۱۰}$ برابر ۳/۱ هست و از اون‌جایی که تابع‌نمایی $y = ۳^x$ تابعی اکیداً صعودی هست پس کافیه سه عدد بین ۲/۵ تا ۳/۱ در نظر بگیریم تا اگر در توان ۳ هم قرار بگیرند بین $۳^{۲/۵}$ تا $۳^{\sqrt{۱۰}}$ باشند:

مثلاً $۳^{۲/۷}$ و $۳^{\sqrt{۸}}$ و $۳^۳$.

۱۱- متوسط

حواست باشه که تابع $y = a^x$ به‌ازای $a > ۱$ صعودی هست و با افزایش **x** مقدارش افزایش پیدا می‌کنه و توی نامعادله، علامت نامعادله تغییر نمی‌کنه. اما تابع $y = a^x$ به‌ازای $۰ < a < ۱$ نزولی هست و با افزایش **x** مقدارش کاهش پیدا می‌کنه و توی نامعادله علامت نامعادله تغییر می‌کنه.

آ) $۲^{\sqrt{۲}} = ۲^{۱/۴} < ۲^{۲/۵} \qquad (۱/۴ < ۲/۵)$

ب) اگر پایه‌ها یکی نباشند ناچار به محاسبه هستیم: $۲۹/۴ = ۵^{۲/۱} < ۴^۳ = ۶۴$

پ) $-۳ < -۱ \xrightarrow{\frac{۱}{۵}<۱} (\frac{۱}{۵})^{-۳} > (\frac{۱}{۵})^{-۱}$ یا $۵^۳ > ۵^۱$

ت) $(۱/۷)^{۰/۴} \bigcirc (۰/۴)^{۱/۲} \Rightarrow ۱/۲۴ > ۰/۳۳$

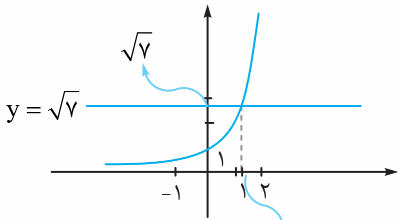
۱۲- متوسط

می‌دونیم که $\sqrt{۷}$ عددی بین ۲ تا ۳ هست و بنابراین:

$$۲ < ۲^x < ۳ \Rightarrow ۲^۱ < ۲^x < ۳ < ۲^۲$$

و با توجه به صعودی بودن تابع $y = ۲^x$ پس: $۱ < x < ۲$

برای حل این سؤال از نمودار هم می‌تونی استفاده کنی:



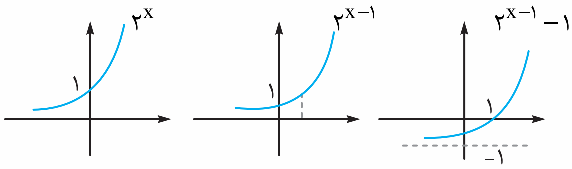
$$\begin{cases} y = ۲^x \\ y = \sqrt{۷} \cong ۲/۶ \end{cases}$$

۱۳- متوسط

آ)

$y = ۲^{x-۱} - ۱$

۱ واحد به راست   ۱ واحد به پائین

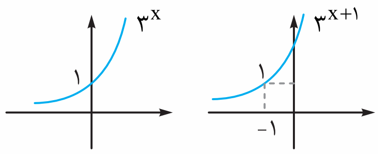


(۱) (۲) (۳)

ب)

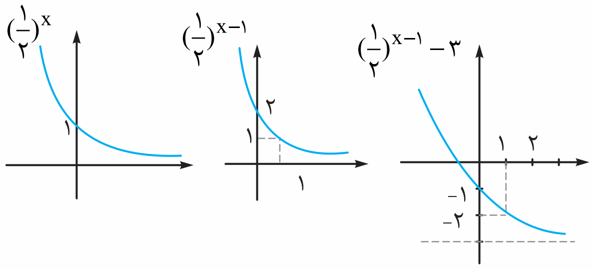
$y = ۳^{x+۱}$

۱ واحد به چپ



(۱) (۲)

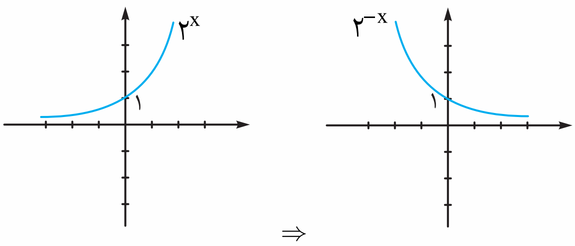
پ) $y = -۳ + ۲^{۱-x} = (\frac{۱}{۲})^{x-۱} - ۳$



(۱) (۲) (۳)

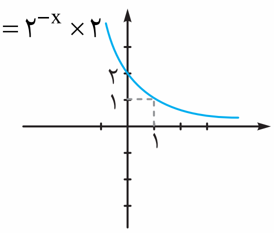
۱۴- دشوار

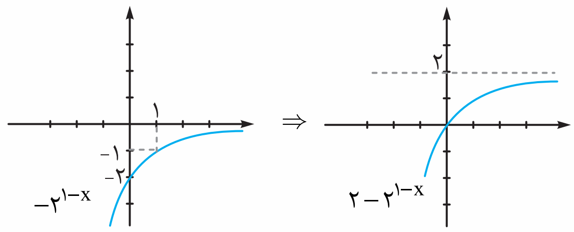
آ) $y = ۲ - ۲^{۱-x}$



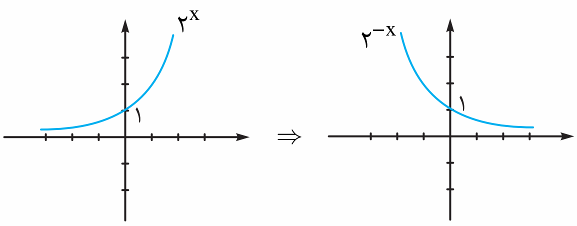
$\Rightarrow$
قرینه نسبت به محور y

$\Rightarrow$
یک واحد به چپ

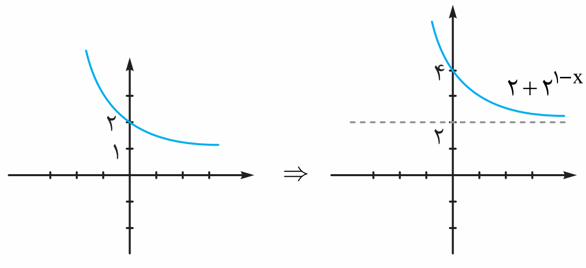




ب) $y = ۲ + ۲^{۱-x}$



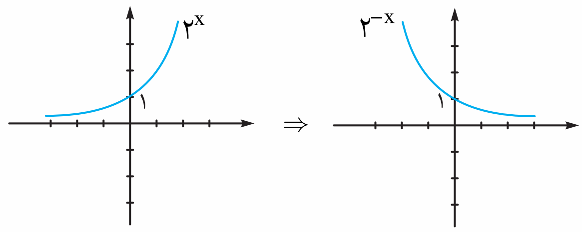
(۱) (۲)



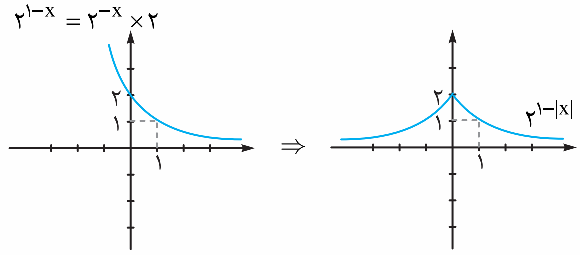
(۳) (۴)

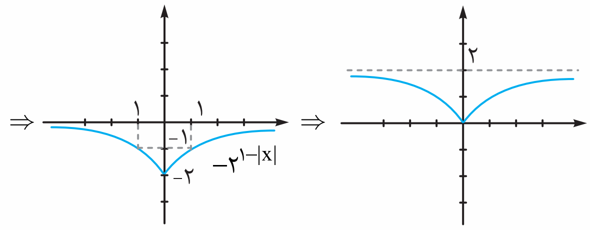
$$۲^{۱-x}=۲^{-x}\times ۲$$

پ) $y=۲-۲^{۱-|x|}$

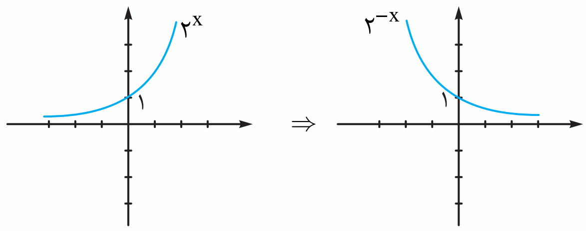


$$۲^{۱-x}=۲^{-x}\times ۲$$

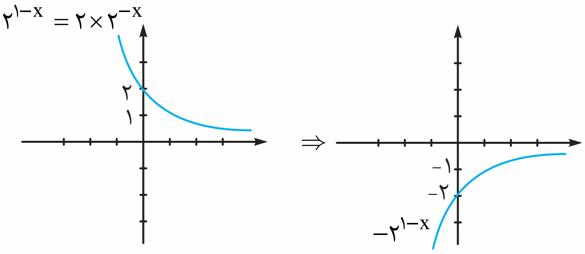


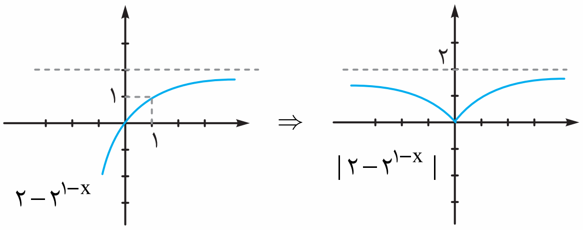


ت) $y=|۲-۲^{۱-x}|$



$$۲^{۱-x}=۲\times ۲^{-x}$$





یادآوری انتقال‌ها: $(k>۰)$

جابه‌جایی به بالا : $f(x)+k$

جابه‌جایی به پایین : $f(x)-k$

انتقال به چپ : $f(x+k)$

انتقال به راست : $f(x-k)$

قرینه نسبت به محور **y** : $f(-x)$

قرینه نسبت به محور **x** : $-f(x)$

حـذف بخـش سـمت چـپ : $f(|x|)$ محور **y** و قرینه کـردن بخـش سـمت راست با نگه داشتن خود بخش.

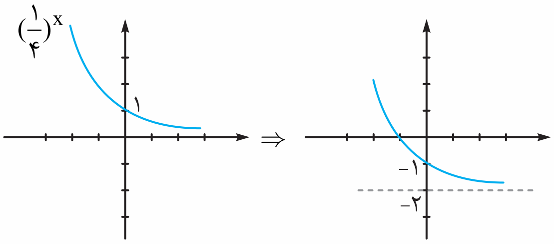
حذف بخش زیرمحـور **x** و قرینه به بالای محور **x** : $|f(x)|$

۱۵- متوسط

محدودیتی برای **x** نداریم و دامنه برابر کل اعداد حقیقی است:

$$y=۴^{-x}-۲$$
$$D=\mathbb{R}$$

برای تعیین برد، هم می‌تونی نمودار رسم کنی هم به‌صورت جبری بـه دسـتش بیاری:



(۱) (۲)

جبری: $۴^{-x}=(\frac{۱}{۴})^{x}$

$$(\frac{۱}{۴})^{x}>۰\Rightarrow(\frac{۱}{۴})^{x}-۲>-۲\Rightarrow y>-۲\Rightarrow R=(-۲,+\infty)$$

پس $R=(-۲,+\infty)$ این تابع نیز همانند بقیه توابع نمایی معکوس‌پذیر است. زیرا هرخط افقی موازی محور **x** نمودار را حداکثر در یک نقطه قطع می‌کند.

۱۶- متوسط

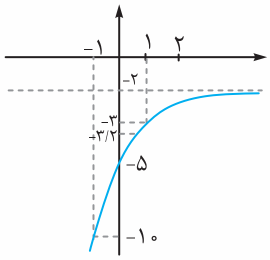
$$g(۰) = -۳\underbrace{(\frac{۲}{۵})^۰}_{۱} - ۲ = -۵ \Rightarrow \text{محل برخورد با محور } y = \begin{bmatrix} ۰ \\ -۵ \end{bmatrix}$$

$$g(۱) = -۳(\frac{۲}{۵}) - ۲ = \frac{-۶}{۵} - ۲ = \frac{-۱۶}{۵} = -۳/۲$$

$$g(-۱) = -۳(\frac{۵}{۲}) - ۲ = \frac{-۱۵}{۲} - ۲ = \frac{-۱۹}{۲} \cong -۱۰$$

$$g(۲) = -۳(\frac{۴}{۲۵}) - ۲ = \frac{-۱۲}{۲۵} - ۲ = \frac{-۶۲}{۲۵}$$

x	-۱	۰	۱
g(x)	-۱۰	-۵	-۳/۲



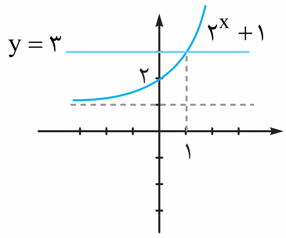
$D = \mathbb{R}$

$$(\frac{۲}{۵})^x > ۰ \Rightarrow -۳(\frac{۲}{۵})^x < ۰ \Rightarrow$$

$$-۳(\frac{۲}{۵})^x - ۲ < -۲ \Rightarrow R = (-\infty, -۲)$$

۱۷- آسان

$$۲^x + ۱ = ۳ \Rightarrow ۲^x = ۲ \Rightarrow x = ۱$$



۱۸- آسان

آ) پس از ۴ دقیقه مقدار **t** برابر ۴ به دست می‌آید:

$$q(t) = ۱۰(\frac{۴}{۵})^t$$

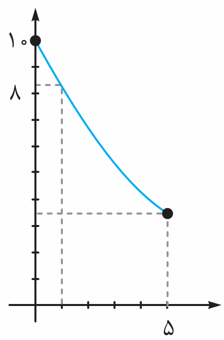
$$\Rightarrow q(۴) = ۱۰(\frac{۴}{۵})^۴ = ۱۰(\frac{۲۵۶}{۶۲۵}) \cong ۴/۱$$

ب)

$$q(t) = ۱۰(\frac{۴}{۵})^t$$

$$۰ \le t \le ۵$$

t	۰	۱	...	۵
q(t)	۱۰	۸		۳/۳



۱۹- متوسط

نیم‌عمر یک ماده یعنی مدت زمانی که آن ماده نسبت بـه مقـدار اولیـهٔ خـود نصف می‌شود. اگر Q با متغیر زمان **t** نشان‌دهندهٔ جرم این نـوع کـربن باشـد داریم:

$$Q(t) = Q_۰ \times (\frac{۱}{۲})^{\frac{t}{T}} = Q_۰ \times ۲^{-\frac{t}{T}}$$

که در آن **T** نشان‌دهندهٔ نیم‌عمر و $Q_۰$ مقدار اولیه است پس:

$$Q(t) = ۱۰ \times ۲^{(\frac{-t}{۵۷۳۰})}$$

حال بعد از گذشت ۳۰۰۰ سال داریم:

$$Q(۳۰۰۰) = ۱۰ \times ۲^{\frac{-۳۰۰۰}{۵۷۳۰}} = ۱۰ \times ۲^{-۰/۵۲} \cong ۰/۶۹ \text{ گرم}$$

به طور کلی در مسائل مربوط به نیم‌عمر یک ماده: $f(t) = f_۰ \times ۲^{-\frac{t}{T}}$

۲۰- دشوار

آ) لایهٔ اول باعث از بین رفتن ۳۰ ٪ ناخالصی‌ها میشه و بنـابراین ۷۰ ٪ یـا ۰/۷ باقی می‌مونه. اگر از دو لایه استفاده کنیم ۰/۷×۰/۷ یعنـی ۰/۴۹ از ناخالصـی باقی می‌مونه. پـس اگـر بـه تعـداد **n** لایـه اسـتفاده شـود، $(۰/۷)^n$ مقـدار از ناخالصی‌ها باقی می‌ماند. حال درصد ناخالصی به‌صورت زیر است:

$$(۰/۷)^n \times ۱۰۰ = (\frac{۷}{۱۰})^n \times ۱۰^۲ = \frac{۷^n}{۱۰^n} \times ۱۰^۲ = \frac{۷^n}{۱۰^{n-۲}} \Rightarrow f(n) = \frac{۷^n}{۱۰^{n-۲}}$$

ب) این فرمول درصد ناخالصی را می‌دهد اما اگر بخواهیم ۹۶ ٪ ناخالصـی‌هـا از بـین بـرود یعنـی درصـد ناخالصـی بایـد کمتـر از ۰/۰۴ یـا ۴٪ باشـد پـس یعنی $f(n) < ۴$

$$\frac{۷^n}{۱۰^{n-۲}} < ۴ \Rightarrow (۰/۷)^n < ۰/۰۴ \Rightarrow$$

$$\begin{cases} n = ۹ \Rightarrow (۰/۷)^۹ \cong ۰/۰۴۰۳ \\ n = ۱۰ \Rightarrow (۰/۷)^{۱۰} \cong ۰/۰۲۸۲ \end{cases} \Rightarrow \text{حداقل ۱۰ لایه لازم است.}$$

۲۱- متوسط

t	۰	۱	۲	۳	...	t
m	۲۰	۴۰	۸۰	۱۶۰		۲۰×۲^t
		↓ ۲۰×۲	↓ ۲۰×۴	↓ ۲۰×۸		

پس $m(t)$ یعنی جرم باکتری بعد از گذشت زمان **t** به‌صورت زیر است:

$m(t) = m_۰ \times ۲^t$ که $m_۰$ جرم اولیه است و **t** زمان برحسب ساعت.

پس: $m(t) = ۲۰ \times ۲^t$

$$m(۳/۵) = ۲۰ \times ۲^{۳/۵} \cong ۲۰ \times ۱۱/۳ \cong ۲۲۶ \text{ گرم}$$

۲۲- آسان

آ) اگر مقدار این توده دارای جرم $m_۰$ باشد، بعد از گذشت ۱ ساعت مقدار آن $۲m_۰$ و بعد از گذشت ۲ ساعت $۴m_۰$ می‌شود یعنی:

$$m(t)=m_۰\times ۲^t \xrightarrow{m_۰=۱۰۰} m(t)=۱۰۰\times ۲^t$$

که در آن **t** زمان برحسب ساعت است.

ب) $t=۲۰ \Rightarrow m(۲۰)=۱۰۰\times ۲^{۲۰}=۱۰۴/۸۵۷/۶۰۰$ میلی‌گرم

۲۳- متوسط

آ) پس از ۸ ساعت یعنی $A(۸)$:

$$A(t)=۱۰(۰/۸)^t \Rightarrow A(۸)=۱۰(۰/۸)^۸ \cong ۱/۷ \text{ میلی‌گرم}$$

ب) عددی که در رابطه به توان **t** رسیده $۰/۸$ است و این یعنی در هر ساعت مقدار دارای باقی‌مانده ۸۰ ٪ مقدار اولیه است و بنابراین در هر ساعت ۲۰ ٪ از بین می‌رود.

روش دیگر تقسیم $\frac{A_۱}{A_۰}$ است: $\frac{A_۱}{A_۰}=\frac{۱۰(۰/۸)}{۱۰}=۰/۸ \Rightarrow ٪۸۰$

که مقدار باقی‌مانده را می‌دهد.

۲۴- توسط

جرم باکتری پس از ۳ ساعت ۷۲۹ برابر جرم اولیه شده یعنی:

$$A_۳=۷۲۹A_۰ \Rightarrow ۷۲۹\cancel{A_۰}=\cancel{A_۰}\times a^۳ \Rightarrow a^۳=۷۲۹ \Rightarrow a=۹$$

۲۵- متوسط

ساعت	۳	۴	۶	t
تعداد سلول ها	۳۲ $\downarrow$ $۲^۵$	۶۴ $\downarrow$ $۲^۶$	?	$۲^{t+۲}$

در مقایسهٔ هر تعداد سلول با ساعت مربوط به خودش می‌بینیم عدد ۲ دارای توان $t+۲$ (دو تا بیشتر از زمان) هست پس در زمان ۶ ساعت $۲^{۶+۲}$ یعنی $۲^۸$ سلول داریم پس تعداد سلول‌ها در ۶ ساعت برابر ۲۵۶ است.

۲۶- دشوار

جدول مربوط به پس‌انداز در چند سال را ببینیم:

سال	۰	۱
پس انداز	۴۰۰۰۰۰	۴۴۸۰۰۰

در سال اول مقدار سودی که تعلق می‌گیرد برابر $۰/۱۲\times ۴۰۰۰۰۰=۴۸۰۰۰$ است و بنابراین مقدار پس‌انداز به‌صورت $۴۰۰۰۰۰+۴۸۰۰۰=۴۴۸۰۰۰$ است به عبارتی $۱/۱۲\times ۴۰۰۰۰۰$ در سال دوم سود به همان پس‌انداز سال قبل تعلق می‌گیرد پس $۱/۱۲\times ۴۴۸۰۰۰=۵۰۱/۷۶۰$ در سال دوم سود به همان پس‌انداز سال قبل تعلق می‌گیرد پس $۱/۱۲\times ۴۴۸۰۰۰=۵۰۱/۷۶۰$ و در سال سوم:

$$۱/۱۲\times ۵۰۱/۷۶۰=۵۶۱۹۷۱/۲$$

اما در حالت کلی مبلغ پس‌انداز در سال **n**ام با رابطهٔ $p(n)=۴۰۰(۱/۱۲)^n$ محاسبه می‌شود. پس:

$$p(۳)=۴۰۰(۱/۱۲)^۳=۵۶۱۹۷۱/۲$$

۲۷- متوسط

برای حل معادلات توانی (نمایی) لازم هست عدد پایه در طرفین مساوی برابر شود تا با مساوی قرار دادن توان‌ها، مجهول پیدا شود.

آ) $۳^{۲x-۳}=۳^۴ \Rightarrow ۲x-۳=۴ \Rightarrow ۲x=۷ \Rightarrow x=\frac{۷}{۲}$

ب) $(۲^۲)^{۲x-۱}=(۲^۳)^{x+۱} \Rightarrow ۲^{۴x-۲}=۲^{۳x+۳}$

$\Rightarrow ۴x-۲=۳x+۳ \Rightarrow x=۵$

پ) $۵^{۳n-۱}=(۵^۳)^{۲n+۱} \Rightarrow ۳n-۱=۶n+۳ \Rightarrow -۴=۳n \Rightarrow n=-\frac{۴}{۳}$

ت) $۲^{۳n-۲}=(۲^{-۵})^۲ \Rightarrow ۳n+۲=-۱۰ \Rightarrow ۳n=-۱۲ \Rightarrow n=-۴$

ث) $۳^{۲x}=۳^{x^۲-۴x} \Rightarrow x^۲-۴x=۲x \Rightarrow x^۲-۶x=۰ \Rightarrow x=۰$ یا $x=۶$

ج) $۲^{۶x+۴}=۲^{-۱۸} \Rightarrow ۶x+۴=-۱۸ \Rightarrow ۶x=-۲۲ \Rightarrow x=-\frac{۱۱}{۳}$

چ) $(\frac{۳}{۵})^{x+۱}=(\frac{۵}{۳})^۲ \Rightarrow (\frac{۳}{۵})^{x+۱}=(\frac{۳}{۵})^{-۲} \Rightarrow x+۱=-۲ \Rightarrow x=-۳$

ح) $\frac{۴^{۳۲}}{۲^۸}=۲^A \Rightarrow \frac{(۲^۲)^{۳۲}}{۲^۸}=۲^A \Rightarrow ۲^{۶۴-۸}=۲^A \Rightarrow A=۵۶$

خ) $(۳^۲)^{x-۱}=((۳^{-۳})^{x-۱})^{۲x+۲}$

$$\Rightarrow ۳^{۲(x-۱)}=۳^{-۳(x-۱)(۲x+۲)} \Rightarrow \overset{۱}{\cancel{۲}}\,\cancel{(x-۱)}=-۳\,\overset{۱}{\cancel{(x-۱)}}\,\cancel{(۲)}(x+۱)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x-۱=۰ \Rightarrow x=۱ \\ -۳x-۳=۱ \Rightarrow -۳x=۴ \Rightarrow x=-\frac{۴}{۳} \end{cases}$$

د) $۲^{۲x}-۲^{x+۳}-۹=۰ \Rightarrow ۲^{۲x}-۲^x\times ۲^۳-۹=۰$

$$\Rightarrow (۲^x)^۲-۸\times ۲^x-۹=۰ \xrightarrow{a+c=b}$$

$$\begin{cases} ۲^x=-۱ & \text{غ ق ق} \\ ۲^x=۹ \end{cases}$$

(امکان نداره ۲ به توان برسه و برابر عدد منفی بشه!)

معادله یک جواب داره و بعداً از لگاریتم یاد می‌گیریم که: $x=\log_۲^۹$

۲۸- دشوار

حفظ کن: $۲^{۱۰}=۱۰۲۴$

آ) $۲^{۴x-۲}>۲^{-۱۰}$

در حل نامعادلات نمایی اگر عدد پایه‌ها مساوی باشند و بزرگ‌تر از ۱ باشند، بدون تغییر علامت نامعادله، توان‌ها را در نامعادله قرار می‌دهیم و حل می‌کنیم:

$$\xrightarrow{۲>۱} ۴x-۲>-۱۰ \Rightarrow ۴x>-۸ \Rightarrow x>-۲$$

ب) $\frac{۱}{\sqrt{۲}+۱}\times\frac{\sqrt{۲}-۱}{\sqrt{۲}-۱}=\frac{\sqrt{۲}-۱}{۲-۱}=\sqrt{۲}-۱$

$$\Rightarrow (\sqrt{۲}-۱)^{۴-۳x}>(\sqrt{۲}-۱)^{x+۲}$$

$$\xrightarrow[\text{علامت عوض میشه}]{۰<\sqrt{۲}-۱\cong ۰/۴<۱} ۴-۳x<x+۲ \Rightarrow ۲<۴x \Rightarrow \frac{۱}{۲}<x$$

در حل نامعادلات نمایی اگر عدد پایه‌ها مساوی و بین صفر و یک باشد، توان‌ها را در نامعادله قرار داده و علامت را عوض می‌کنیم.

پ) $(۲-\sqrt{۳})^{x}<(۷+۴\sqrt{۳})^{x+۲}$

توجه کنیم که:

$$(۲-\sqrt{۳})^{۲}=۴-۴\sqrt{۳}+۳=۷-۴\sqrt{۳}$$

بنابراین داریم:

$$(۲-\sqrt{۳})^{x}<(۲+\sqrt{۳})^{۲x+۴}$$

از طرفی:

$$۲-\sqrt{۳}=(۲-\sqrt{۳})\times\frac{(۲+\sqrt{۳})}{۲+\sqrt{۳}}=\frac{۴-۳}{۲+\sqrt{۳}}=\frac{۱}{۲+\sqrt{۳}}=(۲+\sqrt{۳})^{-۱}$$

پس داریم:

$$(۲+\sqrt{۳})^{-x}<(۲+\sqrt{۳})^{۲x+۴}$$

$$\xrightarrow{۲+\sqrt{۳}>۱} -x<۲x+۴ \Rightarrow -۴<۳x \Rightarrow x>\frac{-۴}{۳}$$

۲۹- دشوار

آ) $\begin{cases} ۰/۲۵=\frac{۲۵}{۱۰۰}=\frac{۱}{۴}=۲^{-۲} \\ ۲\sqrt{۲}=۲\times ۲^{\frac{۱}{۲}}=۲^{\frac{۳}{۲}} \end{cases}$

$$(۲^{-۲})^{x^{۲}-۳x+\frac{۵}{۴}}=۲^{\frac{۳}{۲}} \Rightarrow -۲x^{۲}+۶x-\frac{۵}{۲}=\frac{۳}{۲}$$

$$\Rightarrow -۲x^{۲}+۶x-۴=۰ \xrightarrow{a+b+c=۰} x=۱\,,\,x=۲$$

ب) $۳-۲\sqrt{۲}\times\frac{۳+۲\sqrt{۲}}{۳+۲\sqrt{۲}}=\frac{۹-۸}{۳+۲\sqrt{۲}}=\frac{۱}{۳+۲\sqrt{۲}}=(۳+۲\sqrt{۲})^{-۱}$

$$(۳+۲\sqrt{۲})^{-x}-۵(۳+۲\sqrt{۲})^{x}=۴$$

$$(۳+۲\sqrt{۲})^{x}=t \Rightarrow \frac{۱}{t}-۵t-۴=۰ \xrightarrow{\times t} ۱-۵t^{۲}-۴t=۰$$

$$\Rightarrow -۵t^{۲}-۴t+۱=۰ \xrightarrow{a+c=b} t=-۱ \text{ یا } t=\frac{۱}{۵}$$

$(۳+۲\sqrt{۲})^{x}=\frac{۱}{۵}$ یا $(۳+۲\sqrt{۲})^{x}=-۱$ غیرقابل قبول

معادله یک جواب دارد.

۳۰- دشوار

$$۰/۰۴=\frac{۴}{۱۰۰}=\frac{۱}{۲۵}=۵^{-۲}$$

$$(-۵^{-۲})^{x^{۲}-۳x}<۵^{۴} \xrightarrow[۵>۱]{} -۲x^{۲}+۶x<۴$$

$$\Rightarrow -۲x^{۲}+۶x-۴<۰ \Rightarrow x=۱ \text{ یا } x=۲$$

	۱		۲	
−	۰	+	۰	−

$\Rightarrow x<۱\cup x>۲$

مجموعه جواب $=(-\infty,-۱)\cup(۲,+\infty)$

سؤالات تستی

پاسخنامه

بخش ۱

۱- گزینه «۴» آسان

$$۲^{x}=۷ \xrightarrow{\text{به توان } y} ۲^{xy}=۷^{y} \Rightarrow ۲^{xy}=۵$$

$$\xrightarrow{\text{به توان}} ۸^{xy}=۵^{۳} \Rightarrow ۸^{xy}-۴=۱۲۵-۴=۱۲۱$$

۲- گزینه «۲» آسان

مورد (۱): درست برخورد با محور **y** یعنی $x=۰$ پس:

$\begin{matrix} f(۰)=۲^{۱}-۱=۱ \\ g(۰)=۳^{۱}-۲=۱ \end{matrix} \Rightarrow$ هر دو محور y را به عرض ۱ قطع می‌کنند.

مورد (۲): درست. دامنه هر دو تابع $\mathbb{R}$ است.

مورد (۳): نادرست.

$$f:۲^{۱-x}>۰ \Rightarrow ۲^{۱-x}-۱>-۱ \Rightarrow R_{f}=(-۱,+\infty)$$

$$g:۳^{۱+x}>۰ \Rightarrow ۳^{۱+x}-۲>-۲ \Rightarrow Rg=(-۲,+\infty)$$

مورد (۴): نادرست. در تابع **f** ضریب **x** منفی است پس **f** نزولی است. در تابع **g** ضریب **x** مثبت است پس **g** صعودی است.

۳- گزینه «۳» آسان

با جاگذاری داریم:

$$f(x)=ab^x$$

$$f(0)=\frac{3}{2} \Rightarrow a\underbrace{b^0}_{1}=\frac{3}{2} \Rightarrow a=\frac{3}{2}$$

$$f(-2)=\frac{3}{32} \Rightarrow \frac{3}{2}\times b^{-2}=\frac{3}{32} \Rightarrow \frac{\cancel{3}}{\cancel{2}b^2}=\frac{\cancel{3}}{\underset{16}{\cancel{32}}}$$

$$\Rightarrow b^2=16 \xrightarrow{b>0} b=4$$

$$\Rightarrow f(x)=\frac{3}{2}\times 4^x$$

$$f(\frac{3}{2})=\frac{3}{2}\times 4^{\frac{3}{2}}=\frac{3}{2}\times 2^{\cancel{2}\times\frac{3}{\cancel{2}}}=\frac{3}{2}\times 8=12$$

۴- گزینه «۳» متوسط

$$x=1 \Rightarrow \begin{cases} \text{گزینه ۱} \quad y=2 & \times \\ \text{گزینه ۲} \quad y=2 & \times \\ \text{گزینه ۳} \quad y=\frac{1}{2} & \checkmark \\ \text{گزینه ۴} \quad y=\frac{1}{2} & \checkmark \end{cases}$$

$f(0)=1$ پس حداکثر مقدار تابع ۱ است و گزینه‌های ۱ و ۲ رد می‌شوند.

$$x=-1 \Rightarrow \begin{array}{ll} \text{گ۳}: y=2^{-|-1|}=2^{-1}=\frac{1}{2} & \checkmark \\ \text{گ۴}: y=|2^1|=2 & \times \end{array}$$

پس گزینه ۳ جواب است.

۵- گزینه «۳» متوسط

با جاگذاری داریم:

$$f(x)=a^x+bx^2+c$$

$$f(0)=0 \Rightarrow 1+C=0 \Rightarrow C=-1$$

$$f(1)=0 \Rightarrow a+b-1=0 \Rightarrow a+b=1$$

$$f(-1)=\frac{-3}{2} \Rightarrow \frac{1}{a}+b-1=\frac{-3}{2} \Rightarrow \frac{1}{a}+b=-\frac{1}{2} \xrightarrow{\text{منها}} a-\frac{1}{a}=\frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow 2a^2-2-3a=0 \Rightarrow 2a^2-3a-2=0$$

$$\Rightarrow (2a+1)(a-2)=0 \Rightarrow a=\frac{-1}{2}, a=2 \text{ ق ق} \Rightarrow b=-1$$

$$\Rightarrow a-b+c=2+1-1=2$$

۶- گزینه «۱» متوسط

$y(0)=1-2^{1-0}=1-2=-1 \Rightarrow$ در گزینه‌های ۳ و ۴

$y(1)=1-2^{1-1}=1-2^0=1-1=0 \Rightarrow$ در گزینه ۲

گزینه ۱ صحیح است.

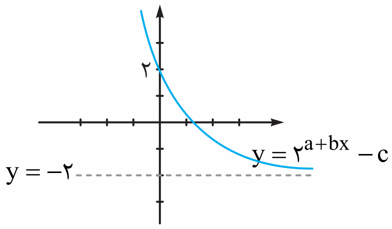
۷- گزینه «۲» آسان

$$5^x+5\times5^x+\underbrace{5^2}_{25}\times5^x+\underbrace{5^3}_{125}\times5^x=3900$$

$$156\times5^x=3900 \Rightarrow 5^x=25 \Rightarrow x=2$$

۸- گزینه «۳» متوسط

اگر نمودار را قبل از اعمال قدرمطلق رسم کنیم با توجه به این کـه تـابع نمـایی است و می‌دونیم قدرمطلق بخش‌های زیر محور **x** رو به بالا قرینه می‌کنه داریم:



از مقایسه با نمودار اصلی $C=2$، زیرا نمودار ۲ واحد به پایین منتقل شده.

از طرف نمودار از $\begin{bmatrix}0\\2\end{bmatrix}$ گذشته پس: $\quad y=2^{a+bx}-2$

$$2^a-2=2 \Rightarrow 2a=4 \Rightarrow a=2 \Rightarrow y=2^{bx+2}-2$$

از طرف نمودار با خط $y=2$ برخورد دارد یعنی ضریب **x** $b=-1$ است (شیب منفی است.) پس:

$$\frac{ac}{b}=\frac{2\times2}{-1}=-4$$

۹- گزینه «۳» آسان

$$x=1 \Rightarrow 3^{A+B}=1 \Rightarrow A+B=0$$

$$x=3 \Rightarrow 3^{3A+B}=9 \Rightarrow 3A+B=2$$

$$\begin{cases}3A+B=2\\A+B=0\end{cases}$$

$$2A=2 \Rightarrow A=1 \Rightarrow 1+B=0 \Rightarrow B=-1 \Rightarrow f(0)=3^{x-1}$$

تلاقی با محور y $\Rightarrow x=0 \Rightarrow f(0)=3^{0-1}=\frac{1}{3}$

۱۰- گزینه «۳» دشوار

$$f(x)=A\times2^{Bx} \quad , \quad y=\frac{5}{4}x$$

$$x=2 \Rightarrow A\times2^{2B}=\frac{5}{\cancel{4}}\times\cancel{2} \Rightarrow A\times2^{2B}=\frac{5}{2}$$

$$x=4 \Rightarrow A\times2^{4B}=\frac{5}{\cancel{4}}\times\cancel{4} \Rightarrow A\times2^{4B}=5$$

از تقسیم طرفین دو رابطه داریم:

$$\frac{\cancel{A}\times2^{4B}}{\cancel{A}\times2^{2B}}=\frac{5}{\frac{5}{2}}$$

$$\Rightarrow 2^{2B}=2 \Rightarrow 2B=1 \Rightarrow B=\frac{1}{2} \Rightarrow A\times2^{2(\frac{1}{2})}=\frac{5}{2}$$

$$\Rightarrow A\times2=\frac{5}{2} \Rightarrow A=\frac{5}{4} \Rightarrow f(x)=\frac{5}{4}\times2^{\frac{1}{2}x}$$

$$f^{-1}(10) \Rightarrow f(x)=10 \Rightarrow \frac{5}{4}\times2^{\frac{x}{2}}=10 \Rightarrow 2^{\frac{x}{2}}=8 \Rightarrow \frac{x}{2}=3 \Rightarrow x=6$$

۱۱- گزینه «۳» — متوسط

$$f(x)=\left(\frac{a-2}{3}\right)^{-x}=\left(\frac{3}{a-2}\right)^{x}$$

با توجه به این که نمودار تابع **f** صعودی هست پس:

$$\frac{3}{a-2}>1 \Rightarrow a-2<3 \Rightarrow a<5$$

از طرفی شیب نمودار **f** نسبت به نمودار $y=3^x$ کمتر است بنابراین:

$$\frac{3}{a-2}<3 \Rightarrow a-2>1 \Rightarrow a>3$$

با اشتراک این دو شرط داریم:

$$3<a<5$$

۱۲- گزینه «۱» — دشوار

$$-3-a(2^x)-(2^{2x})\times 4=0$$

$$\xrightarrow{\text{قرینه}} 4(2^x)^2+a(2^x)+3=0$$

این معادله فقط یک جواب دارد پس: $\Delta=0$

$$a^2-4(4)(3)=0$$

$$a^2=+48 \Rightarrow a=\pm 4\sqrt{3}$$

۱۳- گزینه «۳» — دشوار

$$f(0)=3 \Rightarrow a(1-c)=3 \Rightarrow a-ac=3 \qquad (1)$$

$$f(2)=0 \Rightarrow a(2^{2b}-c)=0 \xrightarrow{a\neq 0} 2^{2b}=c \qquad (2)$$

از طرفی نمودار به‌اندازه ۱ واحد به پایین منتقل شده پس $ac=1$. پس با جاگذاری در (۱) داریم:

$$a-1=3 \Rightarrow a=4 \xrightarrow{ac=1} c=\frac{1}{4}$$

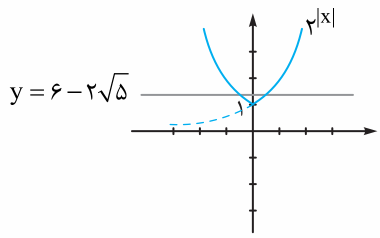
$$\xrightarrow{(2)} 2^{2b}=2^{-2} \Rightarrow 2b=-2 \Rightarrow b=-1$$

$$\Rightarrow abc=4\times(-1)\times\frac{1}{4}=-1$$

۱۴- گزینه «۲» — متوسط

به روش هندسی حل می‌کنیم زیرا جواب دقیق نخواسته و فقط تعداد ریشه‌ها را خواسته.

$$2^{|x|-1}=3-\sqrt{5} \Rightarrow \frac{2^{|x|}}{2}=3-\sqrt{5} \Rightarrow 2^{|x|}=6-2\sqrt{5}$$



حواست باشه که برای رسم $2^{|x|}$ ابتدا نمودار 2^x رو رسم می‌کنیم بعد سمت چپ محور **y** رو پاک کرده سمت راست رو به چپ هم قرینه می‌کنیم.

مقدار حدودی $6-2\sqrt{5}$ برابر ۱/۵۴ هست که این دو نمودار در دو نقطه متقاطع هستند پس تعداد ریشه ۲ است.

۱۵- گزینه «۳» — متوسط

$$9^x-3^{-2x}-\frac{8}{3}=0$$

$$\Rightarrow 3^{2x}-3^{-2x}-\frac{8}{3}=0 \xrightarrow{\times 3^{2x}} 3^{4x}-\frac{8}{3}\times 3^{2x}-1=0$$

$$\xrightarrow{\times 3} 3\times(3^{2x})^2-8\times(3^{2x})-3=0$$

$$\Delta=64+36=100 \Rightarrow 3^{2x}=\frac{8\pm 10}{6}=\begin{cases} 3 & \text{ق ق} \\ -\frac{1}{3} & \text{غ ق ق} \end{cases}$$

$$\Rightarrow 3^{2x}=3 \Rightarrow 2x=1 \Rightarrow x=\frac{1}{2}$$

۱۶- گزینه «۱» — دشوار

$$4^x+2^x-6=0 \Rightarrow (2^x)^2+2^x-6=0$$

$$t=2^x \Rightarrow t^2+t-6=0 \Rightarrow (t+3)(t-2)=0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2^x=-3 & \text{غ ق ق} \\ 2^x=2 & \text{ق ق} \end{cases} \Rightarrow x=1 \Rightarrow \alpha=1$$

$$2^x-x^2=0 \Rightarrow 2^x=x^2$$

می‌دونیم ریشه‌های مثبت این معادله $x=2$ و $x=4$ هستند پس:

$$\beta=2$$
$$\gamma=4$$
$$\alpha\cdot\beta\cdot\gamma=1\times 2\times 4=8$$

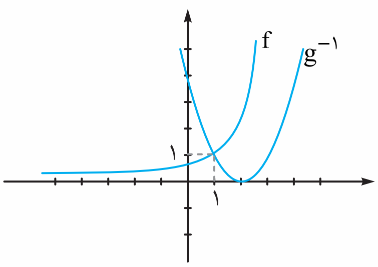
۱۷- گزینه «۳» — دشوار

$$g(x)=-\sqrt{x}+2 \Rightarrow y=-\sqrt{x}+2$$

$$y-2=-\sqrt{x} \xrightarrow{\text{توان ۲}} (y-2)^2=x \Rightarrow g^{-1}(x)=(x-2)^2$$

$$D_{g^{-1}}=(-\infty,2]$$

از رسم کمک بگیریم:



برخورد دو تابع در $x=1$ است.

پس $\alpha=1$

با جاگذاری در **h** داریم:

$$h(x)=3^{-x+1}-27 \Rightarrow 3^{-x+1}-27=0$$

برخورد با محور **x** یعنی $y=0$ پس:

$$3^{-x+1}-27=0$$

$$\Rightarrow 3^{-x+1}=27 \Rightarrow -x+1=3 \Rightarrow 1-3=x \Rightarrow x=-2$$

۱۸- گزینه «۲» — متوسط

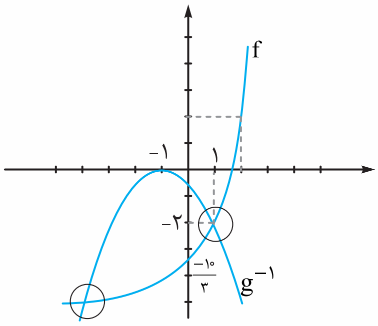
ابتدا وارون نمودار g را پیدا کنیم:

$$y=\sqrt{-x}-1 \Rightarrow y+1=\sqrt{-x} \xrightarrow{\text{توان ۲}} (y+1)^2=-x$$

$$\Rightarrow x=-(y+1)^2 \Rightarrow g^{-1}(x)=-(x+1)^2$$

$$f(x)=g^{-1}(x) \Rightarrow 2\times 3^{x-1}-4=-(x+1)^2$$

فقط تعداد برخوردها رو خواسته پس از رسم کمک می‌گیریم:



f :

x	۰	۱	۲
y	$-\frac{10}{3}$	-2	2

نمودار f و g^{-1} دو برخورد دارند پس ۲ جواب برای معادله داریم.

۱۹- گزینه «۱» — آسان

$$f(x)=2^{x+1}$$

$$2f(x-1)=2\times 2^{(x-1)+1}=2\times 2^x=2^{x+1}=f(x)$$

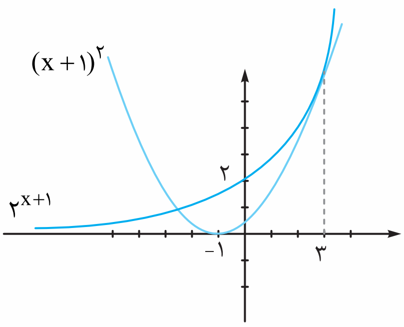
۲۰- گزینه «۲» — دشوار

$$f(x)=\frac{2^{-x}+8}{2^{-x+2}}=\frac{2^{-x}+8}{4\times 2^{-x}}=\frac{\cancel{2^{-x}}}{4\times\cancel{2^{-x}}}+\frac{8}{4\times 2^{-x}}$$

$$\frac{1}{4}+\frac{2}{2^{-x}}=\frac{1}{4}+2^{x+1}$$

$$f(x)=g(x) \Rightarrow (x+1)^2+\cancel{\frac{1}{4}}=\cancel{\frac{1}{4}}+2^{x+1} \Rightarrow (x+1)^2=2^{x+1}$$

پس با برخورد دادن دو تابع $y=(x+1)^2$ و $y=2^{x+1}$ مقدار **A** و **B** را می‌یابیم.



یکی از جواب‌ها در $x=1$ است و جواب دیگر $x=3$.

$$AB=3-1=2$$

۲۱- گزینه «۲» — دشوار

$$4^x+16^x+2^{3x+1}=6 \Rightarrow 2^{2x}+2^{4x}+2\times 2^{3x}=6$$

$$\Rightarrow (2^x)^2+2\times 2^{2x}\times 2^x+(2^{2x})^2=6$$

$$\Rightarrow (2^x+2^{2x})^2=6 \Rightarrow 2^x+2^{2x}=\sqrt{6}$$

$$\xrightarrow{t=2^x} t+t^2=\sqrt{6} \Rightarrow t^2+t-\sqrt{6}=0$$

$$\Rightarrow \Delta=1+4\sqrt{6} \Rightarrow t=\frac{-1\pm\sqrt{1+4\sqrt{6}}=0}{2}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2^x=\dfrac{-1+\sqrt{1+4\sqrt{6}}}{2} \text{ ق ق } \Rightarrow \text{یک ریشه دارد.} \\ 2^x=\dfrac{-1-\sqrt{1+4\sqrt{6}}}{2} \text{ غ ق ق } \Rightarrow \text{مقدار } 2^x \text{ منفی نمی‌شود.} \end{cases}$$

۲۲- گزینه «۳» — دشوار

$$(4+2\sqrt{3})^x<\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right)^{-x^2}$$

$$4+2\sqrt{3}=(1+\sqrt{3})^2 \ , \ \frac{\sqrt{3}-1}{2}\times\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}+1}=\frac{\cancel{3-1}}{\cancel{2}(\sqrt{3}+1)}=\frac{1}{\sqrt{3}+1}$$

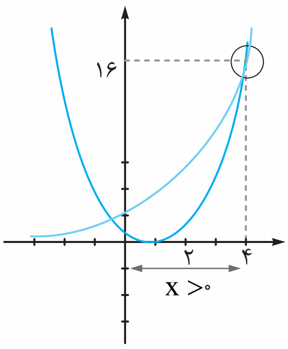
$$\Rightarrow (1+\sqrt{3})^{2x}<(\sqrt{3}+1)^{x^2}$$

عدد پایه یعنی $\sqrt{3}+1$ عددی بزرگ‌تر از ۱ است پس بدون تغییر علامت نامعادله، پایه‌ها را حذف می‌کنیم.

$$2x<x^2 \Rightarrow x^2-2x>0 \Rightarrow x(x-2)>0$$

$$\Rightarrow x<0 \cup x>2$$

۲۳- گزینه «۲» — دشوار



$f(x)=2^x$

x	-۱	۰	۱	...
2^x	$\frac{1}{2}$	۱	۲	...

$g(x)=x^2$

x	-۱	۰	۱	...
x^2	-۱	۰	۱	...

محل‌های برخورد در $x=2$ و $x=4$ است. یعنی نقاط $A\begin{bmatrix}2\\4\end{bmatrix}$ و $B\begin{bmatrix}4\\16\end{bmatrix}$

$$AB=\sqrt{(4-2)^2+(16-4)^2}=\sqrt{4+144}=\sqrt{148}$$

$$=\sqrt{4\times 37}=2\sqrt{37}$$

۲۴- گزینه «۲» — متوسط

نمودار $g(x)=a^x$ خط افقی $y=1$ است پس $a^x=1$ یعنی $a=1$ با جاگذاری در **f** داریم:

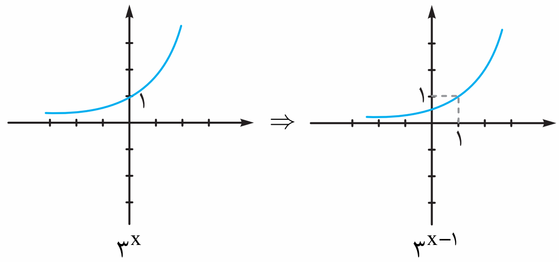
$$f(x)=2(\frac{3}{2})^x$$

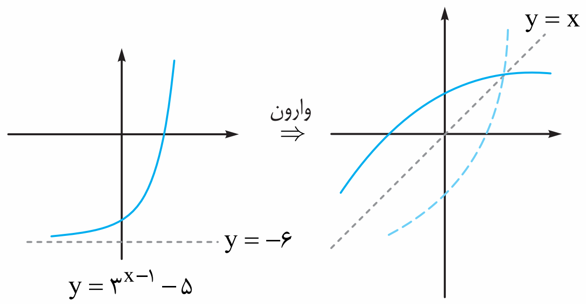
F یک تابع نمایی با پایهٔ بزرگتر از ۱ است پس تابع صعودی است و از طرفی $f(0)=2(\frac{3}{2})^0=2$ پس محل برخورد با محور **y** در $y=2$ است. پس گزینه ۲ صحیح است.

۲۵- گزینه «۴» — متوسط

ابتدا نمودار $f(x)$ را به کمک انتقال رسم می‌کنیم:

$$f(x)=\underset{\text{تاثیر روی برد}}{\frac{3}{5}}(\overset{\text{۱ واحد به راست}}{3^{x-1}}\underset{\text{۵ واحد به پایین}}{-5})$$





تأثیر $\frac{3}{5}$ روی شیب است و ناحیه را عوض نمی‌کند.

نمودار وارون از ناحیه چهارم نمی‌گذرد.

۲۶- گزینه «۱» — متوسط

نمودار گذرنده از مبدأ یعنی $(0,0)$ است پس:

$$2^a-b=0 \Rightarrow 2^a=b$$

از طرفی نمودار ۴ واحد به پایین منتقل شده پس: $b=4$

$$2^a=4 \Rightarrow a=2$$

$$a-b=2-4=-2$$

۲۷- گزینه «۳» — دشوار

$$f(x)=(\frac{2}{3})^{2x-1}\times a^{x-1}=\frac{(\frac{4}{9})^x}{\frac{2}{3}}\times\frac{a^x}{a}$$

$$=\frac{3}{2a}(\frac{4}{9}a)^x$$

تابع نمایی در صورتی نزولی است که عدد پایه بین صفر و یک باشد بنابراین:

$$0<\frac{4}{9}a<1 \Rightarrow 0<a<\frac{9}{4}$$

۲۸- گزینه «۱» — متوسط

$$16^x-33(4^x)+32<0$$

بین دو ریشه جواب است. $(4^x)^2-33(4^x)+32<0 \rightarrow$

$$\xrightarrow{a+b+c=0}\begin{cases}4^x=1\rightarrow x=0\\ 4^x=32 \Rightarrow 2^{2x}=2^5 \Rightarrow 2x=5 \Rightarrow x=\frac{5}{2}\end{cases}$$

$$\Rightarrow 0<x<\frac{5}{2}$$

۲۹- گزینه «۴» — آسان

برای یافتن محل تلاقی دو نمودار، ضابطهٔ تابع آن‌ها را مساوی هم قرار می‌دهیم:

$$(\sqrt{2})^{x+1}+4=2^x \Rightarrow (\sqrt{2})\times(\sqrt{2})^x-(\sqrt{2})^{2x}+4=0$$

$$t=(\sqrt{2})^x \Rightarrow -t^2+\sqrt{2}t+4=0 \Rightarrow \Delta=18$$

$$t=\frac{\sqrt{2}\pm\sqrt{18}}{+2}=\begin{cases}\frac{\sqrt{2}+3\sqrt{2}}{2}=2\sqrt{2} & \text{ق ق}\\ \frac{\sqrt{2}-3\sqrt{2}}{2}=\frac{-2\sqrt{2}}{2}=-\sqrt{2} & \text{غ ق ق}\end{cases}$$

$$\Rightarrow \sqrt{2}^x=2^{\frac{3}{2}} \Rightarrow x=3 \Rightarrow y=2^3=8 \Rightarrow \begin{bmatrix}3\\8\end{bmatrix}\ \text{نقطه تلاقی}$$

$$\text{فاصله از } A=\sqrt{(3-0)^2+(8-4)^2}=\sqrt{9+16}=\sqrt{25}=5$$

۳۰- گزینه «۲» — متوسط

$$(\frac{4}{3})^{-x}\ge(\frac{27}{64})^{2x-1}(\frac{9}{16})^{1-x}$$

$$(\frac{3}{4})^x\ge(\frac{3}{4})^{3(2x-1)}(\frac{3}{4})^{2(1-x)} \Rightarrow (\frac{3}{4})^x\ge(\frac{3}{4})^{6x-3+2-2x}$$

$$\xrightarrow[\text{علامت عوض میشه}]{\frac{3}{4}<1} x\le 4x-1 \Rightarrow 1\le 3x \Rightarrow x\ge\frac{1}{3}$$

۳۱- گزینه «۱» — دشوار

برای یافتن محل تقاطع دو نمودار، ضابطه‌ها را مساوی هم قرار می‌دهیم:

$$3^x + \frac{8}{3} = \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^{2x} \Rightarrow 3^x + \frac{8}{3} = \left(\frac{1}{3}\right)^x$$

$$\Rightarrow 3^x + \frac{8}{3} = 3^{-x} \xrightarrow{\times 3^x} 3^{2x} + \frac{8}{3}\times 3^x = 1$$

$$\xrightarrow{\times 3} 3\times(3^x)^2 + 8\times(3^x) - 3 = 0 \Rightarrow \Delta = 64+36 = 100$$

$$\Rightarrow 3^x = \frac{-8\pm 10}{6} = \begin{cases} \frac{-18}{6} = -3 & \text{غ ق ق} \\ \frac{2}{6} = \frac{1}{3} = 3^{-1} & \text{ق ق} \end{cases}$$

$$3^x = 3^{-1} \Rightarrow x=-1 \Rightarrow y = 3^{-1} + \frac{8}{3} = \frac{1}{3} + \frac{8}{3} = 3 \Rightarrow \text{تقاطع} \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

طول دو نقطه برابر است پس داریم: A فاصله از $= |3-1| = 2$

۳۲- گزینه «۴» — متوسط

دو نمودار در نقطه‌ای به طول ۲ متقاطع‌اند یعنی اگر $x=2$ را در دو تابع جاگذاری کنیم مقدار y آن‌ها برابر می‌شود پس:

$$f(2) = g(2)$$

$$2^{2a+b} = \left(\frac{1}{8}\right)^2 = \left(\frac{1}{2^3}\right)^2 = 2^{-6} \Rightarrow 2a+b = -6$$

$$f(3) = \frac{1}{2} \Rightarrow 2^{3a+b} = 2^{-1} \Rightarrow 3a+b = -1$$

$$\begin{cases} 2a+b = -6 \\ 3a+b = -1 \end{cases}$$

$$a = 5 \xrightarrow{\text{معادله دوم}} 15 + b = -1 \Rightarrow b = -16$$

$$\Rightarrow f(x) = 2^{5x-16}$$

$f^{-1}(16)$ یعنی عددی که مقدار f به ازای آن مساوی ۱۶ شده:

$$2^{5x-16} = 16 = 2^4$$

$$\Rightarrow 5x - 16 = 4 \Rightarrow 5x = 20 \Rightarrow x = 4 \Rightarrow f^{-1}(16) = 4$$

۳۳- گزینه «۳» — آسان

نمودار 3^{-2x} بالاتر از نمودار 2^{-4x} قرار بگیرد یعنی:

$$3^{-2x} > 2^{-4x} \xrightarrow{\text{معکوس}} 3^{2x} < 2^{4x} \Rightarrow 9^x < 16^x$$

اگر $x=-1$، نامعادله برقرار نیست پس هر بازه شامل ۱- حذف است.

یعنی رد گزینه‌های ۲ و ۴.

اگر $x=0$ آن‌گاه نامعادله برقرار نیست پس گزینه ۱ هم رد می‌شود.

پس تنها گزینهٔ ۳ باقی می‌ماند.

۳۴- گزینه «۱» — آسان

$$f(x) = 2^{ax-1}$$

$$f(4) = 2\sqrt{2} \Rightarrow 2^{4a-1} = 2^{\frac{3}{2}} \Rightarrow 4a - 1 = \frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow 4a = \frac{5}{2} \Rightarrow a = \frac{5}{8} \Rightarrow f(x) = 2^{\frac{5}{8}x-1}$$

برای یافتن محل تقاطع، ضابطه‌ها را مساوی هم قرار می‌دهیم:

$$2^{\frac{5}{8}x-1} = 4\sqrt[4]{2} = 2^{\frac{9}{4}}$$

$$\Rightarrow \frac{5}{8}x - 1 = \frac{9}{4} \Rightarrow \frac{5}{\cancel{8}_{2}}x = \frac{13}{\cancel{4}} \Rightarrow x = \frac{26}{5}$$

۳۵- گزینه «۴» — آسان

$$6^{x-1} = \frac{6^x}{6} = \frac{(2\times 3)^x}{6} = \frac{2^x \times 3^x}{6} = \frac{5\times 4}{6} = \frac{20}{6} = \frac{10}{3}$$

۳۶- گزینه «۳» — دشوار

$$f(x) = (2^{-x+3} - 1)^3$$

به مدل تابع f نگاه کنید؛ $y = 2^{-x+3} - 1$ یک تابع نمایی نزولی هست و وقتی به توان ۳ می‌رسه باز هم نزولی باقی می‌مونه (تابع درجه ۳ علامت را حفظ می‌کنه).

در تابع نزولی داریم:

$$f(\text{☺}) < f(\triangle) \Leftrightarrow \text{☺} > \triangle$$

پس اگر طبق اطلاعات مسأله داریم:

$$f(f(x)) < f(2^{-3x})$$

آنگاه داریم:

$$f(x) > 2^{-3x}$$

با جایگذاری f داریم:

$$(2^{-x+3} - 1)^3 > 2^{-3x} \xrightarrow{\text{رادیکال با فرجه سوم بگیریم}} 2^{-x+3} - 1 > 2^{-x}$$

$$\Rightarrow 8\times 2^{-x} - 2^{-x} > 1 \Rightarrow 7\times 2^{-x} > 1 \Rightarrow 2^{-x} > \frac{1}{7} \xrightarrow{\text{معکوس}} 2^x < 7$$

که با توجه به گزینه‌ها تنها گزینه ۳ می‌تواند جواب باشد.

۳۷- گزینه «۲» — دشوار

$$5\times(5^x)^2 - 24(5^x) - 5 < 0$$

$$t = 5^x \Rightarrow 5t^2 - 24t - 5 < 0 \Rightarrow (5t+1)(t-5) < 0 \Rightarrow \frac{-1}{5} < t < 5$$

$$\Rightarrow \underbrace{\frac{-1}{5} < 5^x}_{\text{بدیهی}} < 5 \Rightarrow 5^x < 5^1 \Rightarrow x < 1$$

۳۸- گزینه «۳» آسان

$p(n)=p_{۰}(۱/۲)^{n} \Rightarrow p(۳)=۱۰۰۰۰۰۰(۱/۲)^{۳}=۱۷۲۸۰۰۰$ تومان

حواست باشه اگر سود سالانه یک بانک برابر **r** باشه، مقدار پس‌انداز بعد از یک سال برابر ضرب مقدار اولیه در $(۱+r)$ هستش.

۳۹- گزینه «۳» آسان

تابع مربوط به نیم‌عمر:

$$f(t)=f_{۰}\times ۲^{\frac{-t}{T}}$$

$$f(۲۵۸)=۲۴۰\times ۲^{-\frac{۲۵۸}{۴۳}}=۲۴۰\times ۲^{-۶}=\frac{۲۴۰}{۶۴}=۳/۷۵ \quad \text{میلی گرم}$$

۴۰- گزینه «۳» متوسط

تعداد باکتری‌ها در شروع کشت ۸۰۰ است یعنی $A=۸۰۰$ پس:

$$f(t)=۸۰۰e^{kt}$$

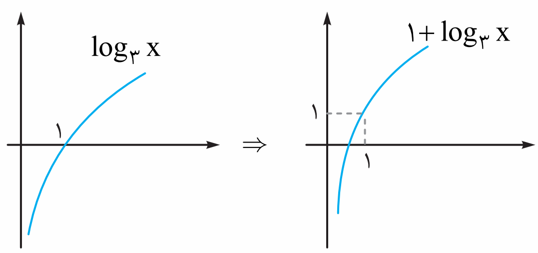
$$f(۲۰)=۳۲۰۰ \Rightarrow ۸۰۰e^{۲۰K}=۳۲۰۰ \Rightarrow e^{۲۰K}=۴$$

$$\Rightarrow e^{۱۰K}=۲$$

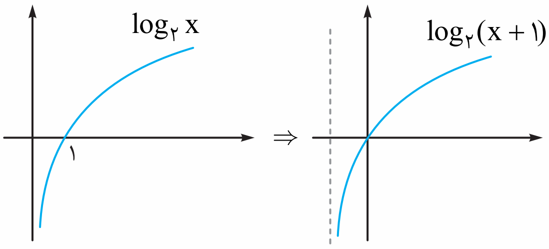
$$f(۳۰)=۸۰۰e^{۳۰K}=۸۰۰e^{۲۰K}\times e^{۱۰k}=۸۰۰\times ۴\times ۲=۶۴۰۰$$

۱- متوسط

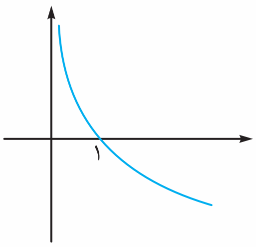
آ) مبنای لگاریتم بزرگ‌تر از ۱ هست پس فرم صعودی لگاریتم رو داره:



ب)

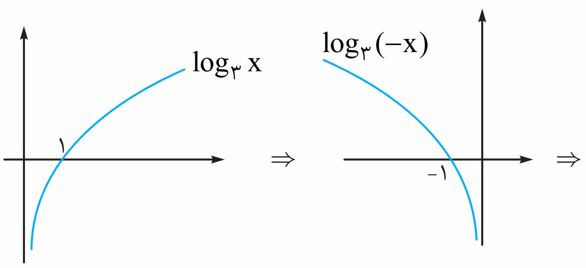


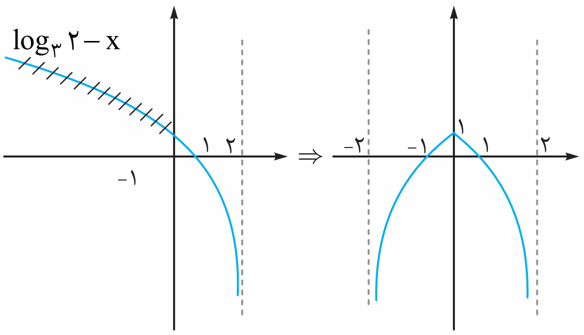
پ) مبنای لگاریتم کمتر از ۱ هست پس فرم نزولی دارد:



۲- دشوار

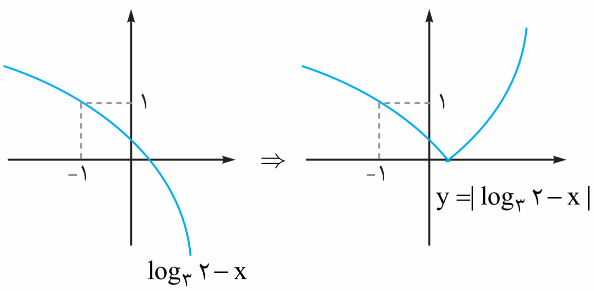
آ) نمودار $y=\log_{۳} ۲-x$ را رسم می‌کنیم سپس تغییرات $|x|$ را اعمال می‌کنیم:





ب) ابتدا نمودار $y=\log_{۳} ۲-x$ را رسم می‌کنیم سپس قدرمطلق را روی نمودار اعمال می‌کنیم:

از سومین نمودار بالا داریم:



۳- آسان

$f(۴۲) = ۳ - ۲\log_۴(\frac{۴۲}{۲} - ۵) = ۳ - ۲\log_۴ ۱۶$

$= ۳ - ۲(۲) = ۳ - ۴ = -۱$

۴- آسان

$f(x) = \log_a x$

$f(\frac{۱}{۲}) = -۴ \Rightarrow \log_a \frac{۱}{۲} = -۴ \xrightarrow{\text{تبدیل به فرم نمایی}} a^{-۴} = \frac{۱}{۲} \Rightarrow (a^۴)^{-۱} = ۲^{-۱}$

$\Rightarrow a^۴ = ۲ \Rightarrow a = \underset{\text{غ ق ق}}{\pm}\sqrt[۴]{۲}$

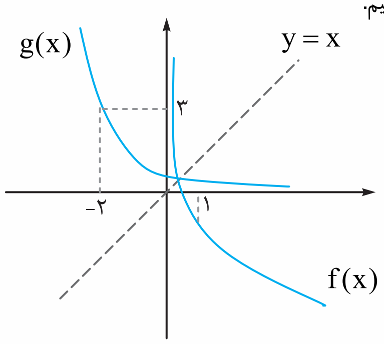
(مبنای لگاریتم منفی نمی شود)

۵- متوسط

$g \Rightarrow y = (\frac{۱}{۳})^{x+۱} \Rightarrow x + ۱ = \log_{\frac{۱}{۳}} y \Rightarrow x = (\log_{\frac{۱}{۳}} y) - ۱$

$\Rightarrow g^{-۱}(x) = (\log_{\frac{۱}{۳}} x) - ۱$

پس نمودار **f** همان نمودار وارون **g** است پس کافیه **g** رو رسم کنیم و سپس نسبت به خط $y = x$ قرینه کنیم.



x	−۲	−۱	۰	۱
y	۳	۱	$\frac{۱}{۳}$	$\frac{۱}{۹}$

$(\log_{\frac{۱}{۳}} ۳) - ۱$ همان $f(۳)$ و به عبارتی $g^{-۱}(۳)$ هست یعنی $g(x) = ۳$ و از روی نمودار واضح هست که به‌ازای $x = -۲$ داریم $g(-۲) = ۳$ یعنی $g^{-۱}(۳) = -۲$.

۶- آسان

آ) $\log_۲ \sqrt[۵]{۲^۴} = \log_۲ ۲^{\frac{۴}{۵}} = \frac{۴}{۵}\underbrace{\log_۲ ۲}_{۱} = \frac{۴}{۵}$

ب) $\log_۳ \frac{۱}{۸۱} = \log_۳ ۳^{-۴} = -۴\underbrace{\log_۳ ۳}_{۱} = -۴$

پ) $\log_{۱۷} ۲۸۹ = \log_{۱۷} ۱۷^۲ = ۲\underbrace{\log_{۱۷} ۱۷}_{۱} = ۲$

یادت باشه: $\log_b a^n = n\log_b a$

۷- متوسط

دامنهٔ تابع لگاریتمی با اشتراک بین این سه شرط تعیین می‌شود:

$y = \log_{\triangle} \bigcirc \Rightarrow \begin{cases} \bigcirc > ۰ \\ \triangle > ۰ \\ \triangle \neq ۱ \end{cases}$

آ) $x + ۲ > ۰ \Rightarrow x > -۲$

$۵ - x > ۰ \Rightarrow x < ۵$

$۵ - x \neq ۱ \Rightarrow x \neq ۴ \Rightarrow D_f = (-۲,۵) - \{۴\}$

ب) $x - ۱ > ۰ \Rightarrow x > ۱$

$۴ - x > ۰ \Rightarrow x < ۴$

$۴ - x \neq ۱ \Rightarrow x \neq ۳ \Rightarrow Dg = (۱,۴) - \{۳\}$

پ) $x^۲ - ۳x + ۲ > ۰ \Rightarrow (x-۲)(x-۱) > ۰ \Rightarrow x < ۱ \cup x > ۲$

$\begin{array}{l} x + ۱ > ۰ \Rightarrow x > -۱ \\ x + ۱ \neq ۱ \Rightarrow x \neq ۰ \end{array} \xrightarrow{\cap} D_h = (-۱,۰) \cup (۰,۱) \cup (۲,+\infty)$

۸- آسان

آ) $\log_{۱۰۲۴} \frac{۱}{۲۵۶} = \log_{۲^{۱۰}} ۲^{-۸} = -\frac{۸}{۱۰}\underbrace{\log_۲ ۲}_{۱} = -\frac{۴}{۵}$

ب) $۳^{\log ۱۰۰۰} = ۳^{\log ۱۰^۳} = ۳^{۳\log ۱۰} = ۳^۳ = ۲۷$

یادت باشه:

$\log_{b^m} a^n = \frac{n}{m}\log_b a$

۹- متوسط

آ) $\log_۴ ۲۵ \times \log_{\sqrt[۳]{۵}} ۱۲۸ = \log_{۲^۲} ۵^۲ \times \log_{۵^{\frac{۱}{۳}}} ۲^۷$

$= \frac{۲}{۲}\log_۲ ۵ \times \frac{۷}{\frac{۱}{۳}}\log_۵ ۲ = \log_۲ ۵ \times ۲۱\log_۵ ۲ = ۲۱\underbrace{\log_۲ ۵ \times \log_۵ ۲}_{۱} = ۲۱$

یادت باشه:

$\log_a^b = \frac{۱}{\log_b^a}$

ب) $\log\frac{۱}{۲} + \log\frac{۲}{۳} + \ldots + \log\frac{n}{n+۱}$

$= \underbrace{\log ۱}_{۰} - \cancel{\log ۲} + \cancel{\log ۲} - \cancel{\log ۳} + \ldots + \cancel{\log n} - \log(n+۱)$

$= -\log(n+۱)$

یادت باشه: $\log\frac{a}{b} = \log a - \log b$

۱۰- دشوار

برای تعیین تعداد ارقام یک عدد کافی است لگاریتم عدد در مبنای ۱۰ را حساب کنیم و در فرمول زیر قرار می‌دهیم:

تعداد رقم‌های عدد a $=[\log_{10}^{a}]+1$

آ) $\log_{10} 2^{400}=400\log 2=400(0/3010)=120/4$

تعداد رقم‌های $2^{400}=[120/4]+1=120+1=121$

ب) $\log_{10} 2^{22}=22\log_{10}2=22(1-\log_{10}5)=22(1-0/7)=6/6$

تعداد رقم‌های $2^{22}=[6/6]+1=6+1=7$

این یه رابطهٔ کاربردیه، یادش بگیر:

$$\log 10=\log(2\times 5)=\log 2+\log 5$$

$$\Rightarrow 1=\log 2+\log 5 \Rightarrow \log 2=1-\log 5 \ , \ \log 5=1-\log 2$$

۱۱- آسان

تو مبحث تابع نمایی گفتیم که مسأله نیمه‌عمر با فرمول زیر حل می‌شه:

$$m(t)=m_0\times 2^{-\frac{t}{T}}$$

با توجه به اطلاعات مسأله: $m(t)=2\times 2^{-\frac{t}{10}}$

آ) $t=2 \Rightarrow m(t)=2\times 2^{-\frac{2}{10}}=2\times 2^{-\frac{1}{5}}=2^{\frac{4}{5}}\approx 1/74$

ب) $m(t)=0/5 \Rightarrow 2\times 2^{-\frac{t}{10}}$

پ) $m(t)=0/5 \Rightarrow 2\times 2^{-\frac{t}{10}}=\frac{1}{2} \Rightarrow 2^{-\frac{t}{10}}=2^{-2}$

$$\Rightarrow \frac{t}{10}=2 \Rightarrow t=20$$

یادت باشه هر زمانی که مجهول در توان باشه میشه از لگاریتم برای حل استفاده کرد. مثلاً توی همین مسأله:

$$\Rightarrow 2^{-\frac{t}{10}}=\frac{1}{4}\Rightarrow -\frac{t}{10}=\log_2\frac{1}{4}=\log_2 2^{-2}=-2\Rightarrow \frac{-t}{10}=-2\Rightarrow t=20$$

۱۲- آسان

$$\log_{\sqrt{b}} a^2b^3=\log_{\sqrt{b}} a^2+\log_{\sqrt{b}} b^3=\frac{2}{\frac{1}{2}}\log_b a+\frac{3}{\frac{1}{2}}\log_b b$$

$$=4(\frac{1}{4})+6(1)=1+6=7$$

۱۳- متوسط

کافیه تشخیص بدیم مقدار هر لگاریتم بین کدام دو عدد صحیح قرار می‌گیره.

$$\log_3 3<\log_3 5<\log_3 9 \Rightarrow 1<\log_3 5<2 \Rightarrow [\log_3 5]=1$$

$$\log_5 1<\log_5 3<\log_5 5 \Rightarrow 0<\log_5 3<1 \Rightarrow [\log_5 3]=0$$

$$[\log_3 5]+[\log_5 3]=1+0=1$$

۱۴- آسان

$$\log 196-\log 175=\log 14^2-\log 7\times 25$$

$$=2[\log 2+\log 7]-[\log 7+\log 5^2]$$

$$=2[0/301+0/845]-[0/845+2(1-0/301)]$$
$$=2/292-2/243=0/049$$

۱۵- دشوار

$$m(t)=20\times 2^{-\frac{t}{100}}$$

$$0/005=20\times 2^{-\frac{t}{100}} \Rightarrow 0/00025=2^{-\frac{t}{100}} \Rightarrow -\frac{t}{100}=\log_2 0/00025$$

حواست باشه که:

$$\frac{25}{100000}=\frac{1}{4000}$$

پس:

$$-\frac{t}{100}=\log_2\frac{1}{4\times 1000}=-(\log_2 4+\log_2 1000)$$

$$\Rightarrow \frac{t}{100}=2+\log_2 10^3=2+3\log_2 10=2+\frac{3}{\log_{10}2}=2+\frac{3}{0/3}$$

$$\Rightarrow \frac{t}{100}=2+10=12 \Rightarrow t=1200$$

۱۶- متوسط

آ) $y=(\frac{1}{2})^{x+1}-1 \Rightarrow y+1=(\frac{1}{2})^{x+1} \Rightarrow y+1=2^{-x-1}$

$$\Rightarrow -x-1=\log_2(y+1) \Rightarrow -x=\log_2(y+1)+1$$

$$\Rightarrow x=-\log_2(y+1)-1 \Rightarrow f^{-1}(x)=-\log_2(x+1)-1$$

ب) $y=24\times 5^{x-1}-1 \Rightarrow y+1=24\times 5^{x-1}$

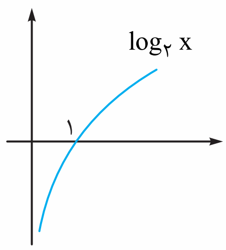
$$\Rightarrow 5^{x-1}=\frac{y+1}{24} \Rightarrow x-1=\log_5\frac{y+1}{24}+1 \Rightarrow x=\log_5(\frac{y+1}{24})+1$$

$$\Rightarrow g^{-1}(x)=1+\log_5\frac{x+1}{24}$$

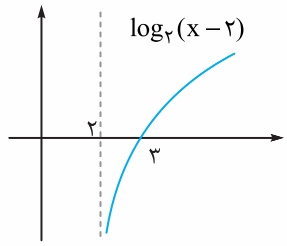
۱۷- متوسط

$$f(x)=\log_{0/5}(x-2)+1=\log_{\frac{1}{2}}(x-2)+1$$

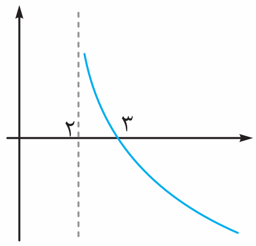
پس به کمک نمودار $y=\log_2 x$ نمودار **f** رو رسم می‌کنیم.



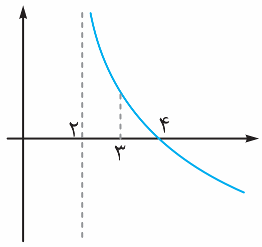
(۱)



(۲)



(۳)



(۴)

۱۸- آسان

محل برخورد نمودار تابع با محور طول‌ها نقطه‌ای با عرض صفر است پس:

$$y=0 \Rightarrow 1+\log_5 x-2=0 \Rightarrow \log_5 x-2=-1$$

$$\Rightarrow x-2=5^{-1} \Rightarrow x-2=\frac{1}{5} \Rightarrow x=2+\frac{1}{5} \Rightarrow x=\frac{11}{5}$$

پس نمودار تابع، محور طول‌ها را در نقطه‌ای به طول $\frac{11}{5}$ و با مختصات $(\frac{11}{5},0)$ قطع می‌کند.

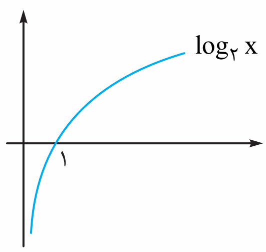
۱۹- آسان

$$A=\log_3 9+\log_3\sqrt{\sqrt[4]{3^5}}-(\log_2 4-\log_2\sqrt[3]{2})$$

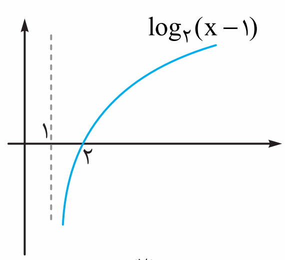
$$=\log_3 3^2+\log_3 3^{\frac{5}{8}}-\log_2 2^2+\log_2 2^{\frac{1}{3}}=\cancel{2}+\frac{5}{8}-\cancel{2}+\frac{1}{3}=\frac{23}{24}$$

۲۰- متوسط

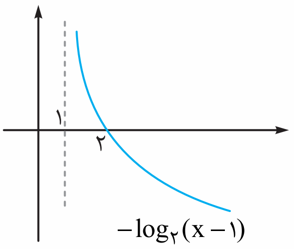
$$y=\log_2\frac{1}{x-1}=-\log_2(x-1)$$



(۱)



(۲)



(۳)

۲۱- آسان

آ) $\log 0/0006=\log 6\times 10^{-4}=\log 2\times 3\times 10^{-4}$

$=\log 2+\log 3+\log 10^{-4}=a+b-4$

$\log 10^n=n$ یادت باشه

ب) $\log 60=\log 2\times 3\times 10=\log 2+\log 3+\log 10=a+b+1$

$\log 10=1$ یادت باشه

۲۲- آسان

$$\log_{25}45=\log_{5^2}5\times 9=\log_{5^2}5+\log_{5^2}3^2$$

$$=\underbrace{\frac{1}{2}\log_5 5}_{1}+\frac{2}{2}\log_5 3=\frac{1}{2}+\log_5 3$$

در مسأله مقدار $\log_5 3$ برابر **a** داده شده است پس:

$$\log_{25}45=\frac{1}{2}+a$$

۲۳- متوسط

در حل معادلات ابتدا دامنهٔ لگاریتم‌ها رو مشخص می‌کنیم:

آ) $\begin{cases} x^2+x>0 \Rightarrow (x<-1)\cup(x>0) \\ x>0 \\ x\neq 1 \\ 7x-5>0 \Rightarrow x>\frac{5}{7} \end{cases} \xrightarrow{\cap} x>\frac{5}{7}\ ,\ x\neq 1$

با داشتن این بازه معادله رو حل می‌کنیم:

$\log_x(x^2+x)=\log_x(7x-5)\Rightarrow x^2+x=7x-5$

$\Rightarrow x^2-6x+5=0$

$\Rightarrow (x-1)(x-5)=0 \Rightarrow x=1$ غ ق ق و $x=5$ ق ق

ب) $x^2-4x-5=0 \Rightarrow x=-1,5 \Rightarrow x=5$ ق ق

پ) $x+1>0\Rightarrow x>-1,\ x^2-x+1>0\Rightarrow \Delta<0, a>0\Rightarrow$ همواره مثبت

$(x+1)(x^2-x+1)=9\xrightarrow{\text{اتحاد چاق و لاغر}}x^3+1=9$

$\Rightarrow x^3=8 \Rightarrow x=2$ ق ق

۲۴- دشوار

آ) طبق قانونی از لگاریتم داریم:

$$a^{\log_x b} = b^{\log_x a}$$

پس داریم:

$$x^{\log ۳} + x^{\log ۳} = ۱۶۲ \Rightarrow ۲x^{\log ۳} = ۱۶۲ \Rightarrow x^{\log ۳} = ۸۱$$

$$\Rightarrow \log_{۱۰} ۳ = \log_x ۸۱ = \log_x ۳^۴ = ۴\log_x ۳$$

حالا ضریب ۴ رو در توان مبنا به صورت معکوس می‌بریم:

$$\log ۳ = \log_{x^{\frac{۱}{۴}}} ۳ \Rightarrow x^{\frac{۱}{۴}} = ۱۰ \Rightarrow x = ۱۰^۴ = ۱۰۰۰۰$$

ب) $۵^{۲+\log_{۲۵} ۳} = x \Rightarrow ۵^۲ \times ۵^{\log_{۵^۲} ۳} = x$

$$\Rightarrow x = ۲۵ \times ۵^{\frac{۱}{۲}\log_۵ ۳} = ۲۵ \times ۵^{\log_۵ \sqrt{۳}} = ۲۵ \times \sqrt{۳} \Rightarrow x = ۲۵\sqrt{۳}$$

یادت باشه که:

$$a^{\log_a x} = x$$

۲۵- آسان

$$\log_x \sqrt{۷} = \frac{-۱}{۲} \Rightarrow x^{-\frac{۱}{۲}} = \sqrt{۷} \Rightarrow \frac{۱}{\sqrt{x}} = \sqrt{۷} \Rightarrow x = \frac{۱}{۷}$$

$$\log_۲ (۱ + \frac{۱}{x}) = \log_۲ ۱ + ۷ = \log_۲ ۸ = ۳$$

۲۶- دشوار

حواست هم به رادیکال باشه هم به لگاریتم:

$$f(x) = \sqrt{\log \frac{۵x - x^۲}{۴}}$$

$$(۱)\ \frac{۵x - x^۲}{۴} > ۰ \Rightarrow ۵x - x^۲ > ۰ \Rightarrow x(۵ - x) > ۰$$

$$\Rightarrow ۰ < x < ۵ \quad (۱)$$

$$(۲)\ \log \frac{۵x - x^۲}{۴} \geq ۰$$

$$\Rightarrow \log \frac{۵x - x^۲}{۴} \geq \log ۱ \xrightarrow{\text{مبنا بزرگتر از ۱}} \frac{۵x - x^۲}{۴} \geq ۱$$

$$\Rightarrow ۵x - x^۲ \geq ۴ \Rightarrow x^۲ - ۵x + ۴ \leq ۰ \Rightarrow (x - ۱)(x - ۴) \leq ۰$$

$$\Rightarrow ۱ \leq x \leq ۴ \quad (۲)$$

$$\xrightarrow{(۱) \cap (۲)} ۱ \leq x \leq ۴ \Rightarrow D_f = [۱, ۴]$$

۲۷- آسان

$$۶۲۵ < ۶۲۶ < ۳۱۲۵ \Rightarrow ۵^۴ < ۶۲۶ < ۵^۵$$

مبنا بزرگتر از ۱ هست پس علامت تغییر نمی‌کنه.

$$\log_۵ ۵^۴ < \log_۵ ۶۲۶ < \log_۵ ۵^۵$$

$$۴ < \log ۶۲۶ < ۵$$

پس بین ۴ و ۵ قرار دارد.

۲۸- متوسط

رابطه رشد جمعیت رو به کمک فرمول $f(t) = f_۰(۱ + r)^t$ به دست میاریم.

ضریب رشد $= ۲\%$ یا $۰/۰۲$

$$f(t) = f_۰(۱ + ۰/۰۲)^t$$

جمعیت دو برابر می‌شود یعنی $f(t) = ۲f_۰$ پس:

$$۲\cancel{f_۰} = \cancel{f_۰}(۱/۰۲)^t \Rightarrow (۱/۰۲)^t = ۲ \Rightarrow t = \log_{۱/۰۲} ۲$$

$$\Rightarrow t = \frac{\log_{۱۰} ۲}{\log_{۱۰} ۱/۰۲} = \frac{۰/۳۰۱}{۰/۰۷۹} = ۳/۸۱$$

یعنی حدود ۳ سال و ۲۹۱ روز زمان لازم هست یا به طور تقریبی ۴ سال.

۲۹- آسان

اگر عدد را **x** فرض کنیم داریم:

$$\log_۹ x - \log_۹ \frac{۱}{x^۲} = ۴/۵$$

$$\log_۹ x + ۲\log_۹ x = ۴/۵ \Rightarrow ۳\log_۹ x = ۱/۵ \Rightarrow \log_۹ x = ۰/۵$$

$$x = ۹^{\frac{۱}{۲}} = \sqrt{۹} = ۳$$

۳۰- دشوار

$x = ۵$ جواب معادله است پس در معادله صدق می‌کند:

$$\log ۱۰ - \frac{۱}{۲}\log ۵ - a = \log ۵ \Rightarrow \log ۱۰ - \log ۵ = \frac{۱}{۲}\log ۵ - a$$

$$\Rightarrow \log \frac{۱۰}{۵} = \log(۵ - a)^{\frac{۱}{۲}} \Rightarrow ۲ = \sqrt{۵ - a}$$

$$\xrightarrow{\text{توان ۲}} ۴ = ۵ - a \Rightarrow a = ۵ - ۴ \Rightarrow a = ۱$$

$$\xrightarrow{\text{جاگذاری در معادله}} \log x + ۵ - \frac{۱}{۲}\log x - ۱ = \log ۵ \Rightarrow \log \frac{x + ۵}{\sqrt{x - ۱}} = \log ۵$$

$$\Rightarrow \frac{x + ۵}{\sqrt{x - ۱}} = ۵ \Rightarrow x + ۵ = ۵\sqrt{x - ۱}$$

$$\xrightarrow{\text{توان ۲}} x^۲ + ۱۰x + ۲۵ = ۲۵x - ۲۵$$

$\Rightarrow x^۲ - ۱۵x + ۵۰ = ۰ \Rightarrow (x - ۱۰)(x - ۵) = ۰ \Rightarrow x = ۱۰$ جواب دیگر

$$\Rightarrow b = ۱۰ \Rightarrow \log b\sqrt{b} = \log ۱۰\sqrt{۱۰} = \log ۱۰^{\frac{۳}{۲}} = \frac{۳}{۲}$$

پاسخنامه

سؤالات تستی

بخش ۲

۱- گزینه «۳» — آسان

$\log a^{۳}b^{۲}c = \log a^{۲}b^{۲}ac = \log a^{۲}b^{۲} + \log ac$

$= ۲\log ab + \log ac = ۲k_{۱} + k_{۳}$

۲- گزینه «۲» — آسان

$$\frac{۳\log ۶ + ۲\log ۸}{\log ۲۴۰۰} = \frac{۳\log ۲\times ۳ + ۲\log ۲^{۳}}{\log ۸\times ۳\times ۱۰۰}$$

$$= \frac{۳(\log ۲ + \log ۳) + ۶\log ۲}{۳\log ۲ + \log ۳ + \log ۱۰^{۲}} = \frac{۹\log ۲ + ۳\log ۳}{۳\log ۲ + \log ۳ + ۲}$$

طبق اطلاعات مسأله داریم:

$\log ۲ + \log ۳ + \log ۲^{۲} = a \Rightarrow ۳\log ۲ + \log ۳ = a$

با جاگذاری در کسر داریم:

$$\frac{۳(۳\log ۲ + \log ۳)}{۳\log ۲ + \log ۳ + ۲} = \frac{۳a}{a+۲}$$

پس گزینه ۲ صحیح است.

۳- گزینه «۲» — دشوار

$$\begin{matrix}\log xy^{۲} = ۲ \\ \log x^{۲}y = ۴\end{matrix} \Rightarrow \log xy^{۲} + \log x^{۲}y = ۶$$

$\Rightarrow \log(xy^{۲})(x^{۲}y) = ۶ \Rightarrow \log x^{۳}y^{۳} = ۶$

$\Rightarrow ۳\log xy = ۶ \Rightarrow \log xy = ۲$

$$\begin{cases}\log xy^{۲} = ۲ \\ \log xy = ۲\end{cases} \Rightarrow \log xy^{۲} - \log xy = ۰ \Rightarrow \log y = ۰$$

$\log xy^{۴} = \log(xy)(y^{۳}) = \log xy + ۳\log y = ۲ + ۳(۰) = ۲$

یادت باشه:

$\log ab = \log a + \log b$

$\log \frac{a}{b} = \log a - \log b$

۴- گزینه «۳» — متوسط

$\log \frac{۴۹}{۹} + \log ۲۰\sqrt{۲۱} = \log ۴۹ - \log ۹ + \log ۲۰ + \log \sqrt{۲۱}$

$= \log ۷^{۲} - \log ۳^{۲} + \log ۲\times ۱۰ + \frac{۱}{۲}\log ۲۱$

$= ۲\log ۷ - ۲\log ۳ + \log ۲ + \log ۱۰ + \frac{۱}{۲}[\log ۳ + \log ۷]$

طبق اطلاعات مسأله:

$\log ۱۴ = b \Rightarrow \log ۲ + \log ۷ = b \Rightarrow \log ۷ = b - \log ۲$

$\log ۶ = a \Rightarrow \log ۲ + \log ۳ = a \Rightarrow \log ۳ = a - \log ۲$

$= ۲b - \cancel{۲\log ۲} - ۲a + \cancel{۲\log ۲} + \cancel{\log ۲} + ۱ + \frac{۱}{۲}a - \cancel{\frac{۱}{۲}\log ۲}$

$+ \frac{b}{۲} - \cancel{\frac{۱}{۲}\log ۲} = \frac{۵}{۲}b - \frac{۳}{۲}a + ۱$

۵- گزینه «۲» — آسان

$\frac{\log a}{۵} = \log x \Rightarrow \log a = ۵\log x = \log x^{۵} \Rightarrow a = x^{۵}$

$\frac{\log b}{۴} = \log x \Rightarrow \log b = ۴\log x = \log x^{۴} \Rightarrow b = x^{۴}$

$\frac{b^{۲}}{a^{۳}} = \frac{x^{۸}}{x^{۱۵}} = x^{-۷} \Rightarrow y = -۷$

۶- گزینه «۲» — متوسط

تعداد رقم‌های عدد برابر است با $[\log ۲^{۲۲}] + ۱$

$= [۲۲\log ۲] + ۱ = [۲۲(۱ - \log ۵)] + ۱$

$= [۲۲(\underbrace{۱ - ۰/۷}_{۰/۳})] + ۱ = [۶/۶] + ۱ = ۶ + ۱ = ۷$

۷- گزینه «۳» — آسان

$$x = ۸\log_{۲} ۲\sqrt{۲} = ۸\log_{۲^{۲}} ۲^{\frac{۳}{۲}} = ۸\left(\frac{\frac{۳}{۲}}{\frac{۲}{۱}}\right)\log_{۲} ۲$$

$= \cancel{۸}^{۲}\left(\frac{۳}{\cancel{۴}}\right)\times ۱ = ۶ \Rightarrow x = ۶$

$\log_{x} ۴(x+۳) = \log_{۶} ۴(۹) = \log_{۶} ۳۶ = ۲$

۸- گزینه «۴» — متوسط

$\log_{۸} ۲\sqrt[۳]{۰/۲۵} = A \Rightarrow A = \log_{۲^{۳}} ۲\times(۰/۲۵)^{\frac{۱}{۳}}$

می‌دونیم: $۰/۲۵ = \frac{۲۵}{۱۰۰} = \frac{۱}{۴} = ۲^{-۲}$

پس:

$A = \log_{۲^{۳}} ۲ + \frac{۱}{۳}\log_{۲^{۳}} ۲^{-۲} = \frac{۱}{۳}\log_{۲} ۲ + \frac{۱}{۳}\times\frac{-۲}{۳}\log_{۲} ۲ = \frac{۱}{۳} - \frac{۲}{۹} = \frac{۱}{۹}$

$\log_{۴}\left(\frac{۱}{A} - ۱\right) = \log_{۴}(۹ - ۱) = \log_{۴} ۸ = \log_{۲^{۲}} ۲^{۳} = \frac{۳}{۲}$

۹- گزینه «۳» — متوسط

$$\log_{\sqrt{9}} 27\sqrt[3]{81}+\log_{7}\frac{1}{49}+\log_{\sqrt[4]{2}} 2\sqrt{2}$$

$$=\log_{3} 27+\log_{3}\sqrt[3]{81}+\log_{7}\frac{1}{49}+\log_{\sqrt[4]{2}} 2^{\frac{3}{2}}$$

$$=3+\frac{4}{3}-2+\frac{\frac{3}{\cancel{2}}}{\frac{1}{\cancel{4}_{2}}}=1+\frac{4}{3}+6=7+\frac{4}{3}=\frac{25}{3}$$

۱۰- گزینه «۱» — دشوار

می‌دونیم دامنهٔ تابع لگاریتمی $y=\log[x]$ مقادیری از x هست که عبارت $[x]$ مثبت بشه پس:

$$[x]>0 \Rightarrow x\geq 1 \Rightarrow D=[1,+\infty)$$

یادآوری:

$$[x]>n \Rightarrow x\geq n+1$$

۱۱- گزینه «۱» — دشوار

تو حل نامعادلات لگاریتمی اول هر دو طرف رو به فرم لگاریتم بنویسیم.

$$\log_{\frac{1}{2}}(\frac{2x+3}{12})>1 \Rightarrow \log_{\frac{1}{2}}(\frac{2x+3}{12})>\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{2}$$

چون مبنا عددی بین ۰ و ۱ هستش پس تابع نزولی هست و با حذف لگاریتم، جهت نامعادله عوض میشه:

$$\frac{2x+3}{\cancel{12}_{6}}<\frac{1}{\cancel{2}_{1}} \Rightarrow 2x+3<6 \Rightarrow 2x<3 \Rightarrow x<\frac{3}{2}$$

از طرفی طبق شرط دامنه داریم:

$$\frac{2x+3}{12}>0 \Rightarrow 2x+3>0 \Rightarrow x>\frac{-3}{2}$$

پس جواب نامعادله بازه $(-\frac{3}{2},\frac{3}{2})$ هست و

$$b-a=\frac{3}{2}-(-\frac{3}{2})=\frac{3}{2}+\frac{3}{2}=\frac{6}{2}=3$$

۱۲- گزینه «۳» — متوسط

$$A=\log_{3}\frac{1}{500}=\log_{3}(500)^{-1}=-\log_{3}500$$

می‌دونیم که: $3^5=243<500<729=3^6$

مبنا یعنی ۳ بزرگ‌تر از ۱ هست پس جهت نامساوی تغییر نمی‌کنه:

$$\log_{3}3^5<\log_{3}500<\log_{3}3^6 \Rightarrow 5<\log_{3}500<6$$

$$\Rightarrow -6<-\log_{3}500<-5$$

حواست باشه وقتی طرفین یک نامساوی رو در منفی ضرب می‌کنی جهت نامساوی عوض می‌شه.

۱۳- گزینه «۱» — آسان

یادآوری اتحادها:

$$(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-1$$

$$A=\log_{\frac{1}{x-1}}(x^3-3x^2+3x-1)=\log_{(x-1)^{-1}}(x-1)^3$$

$$=\frac{3}{-1}\log_{(x-1)}(x-1)=-3$$

۱۴- گزینه «۱» — متوسط

$$[\log_{\sqrt{2}}\sqrt{5}]=[\log_{2^{\frac{1}{2}}}5^{\frac{1}{2}}]=[\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}}\log_{2}5]=[\log_{2}5]$$

$$2^2=4<5<8=2^3 \Rightarrow \log_{2}2^2<\log_{2}5<\log_{2}2^3$$

$$\Rightarrow 2<\log_{2}5<3 \Rightarrow [\log_{2}5]=2$$

۱۵- گزینه «۲» — آسان

$$\frac{\log 2+\log 5+\log 36}{\log 6+\frac{1}{2}}=\frac{\log \overbrace{2\times 5}^{10}+\log 36}{\log 6+\frac{1}{2}}$$

$$=\frac{1+2\log 6}{\log 6+\frac{1}{2}}=\frac{2(\frac{1}{2}+\log 6)}{\frac{1}{2}+\log 6}=2$$

۱۶- گزینه «۳» — دشوار

$$5^{2+\log_{25}3}=5^2\times 5^{\log_{25}3}=25\times 5^{\log_{5^2}3}$$

$$=25\times 5^{\frac{1}{2}\log_{5}3}=25\times 5^{\log_{5}3^{\frac{1}{2}}}=25\times 5^{\log_{5}\sqrt{3}}=25\times\sqrt{3}$$

یادت باشه:

$$a^{\log_a x}=x$$

۱۷- گزینه «۱» — متوسط

یکی از قوانین لگاریتم‌ها این هست:

$$a^{\log_x b}=b^{\log_x a} \Rightarrow a^{\log_x b}-b^{\log_x a}=0$$

۱۸- گزینه «۱» — متوسط

معنی ریاضی جمله این هست:

$$\log_{3}x-\log_{27}(\frac{1}{x})^2=\frac{10}{3} \Rightarrow \log_{3}x-\log_{3^3}x^{-2}=\frac{10}{3}$$

$$\Rightarrow \log_{3}x+\frac{2}{3}\log_{3}x=\frac{10}{3}$$

$$\Rightarrow \frac{5}{3}\log_{3}x=\frac{10}{3} \Rightarrow \log_{3}x=2 \Rightarrow x=3^2=9$$

$$\Rightarrow \log_{9}x^2=\log_{9}9^2=2$$

۱۹–گزینه «۳» متوسط

$\log_5 2x-1+\log_5 3x-5=1$

$\Rightarrow \log_5(2x-1)(3x-5)=1 \Rightarrow (2x-1)(3x-5)=5^1$

$\Rightarrow 6x^2-13x+5=5 \Rightarrow 6x^2-13x=0 \Rightarrow x(6x-13)=0$

$\Rightarrow x=0$ (غ ق ق) یا $x=\frac{13}{6}$ (ق ق)

$\log_2 6x+3=\log_2 6(\frac{13}{6})+3=\log_2 16=4$

۲۰–گزینه «۲» دشوار

$\log_9 x+\log_{x^2} 3=1 \Rightarrow \log_{3^2} x+\frac{1}{\log_3 x^2}=1$

$\Rightarrow \frac{1}{2}\log_3 x+\frac{1}{2\log_3 x}=1 \xrightarrow{\times 2} \log_3 x+\frac{1}{\log_3 x}=2$

می‌دونیم که ☺ $+\frac{1}{☺}\ge 2$ و مساوی زمانی اتفاق می‌افته که ☺ $=1$

پس $\log_3^x=1 \Rightarrow x=3$ ق ق

پس معادله یک ریشه حقیقی دارد.

۲۱–گزینه «۴» دشوار

$f(x)=\sqrt{3-x} \Rightarrow 3-x\ge 0 \Rightarrow x\le 3 \Rightarrow D_f=(-\infty,3]$

$g(x)=\log_2 x^2+2x \Rightarrow x^2+2x>0 \Rightarrow x(x+2)>0 \Rightarrow x<-2 \cup x>0$

$\Rightarrow D_g=(-\infty,-2)\cup(0,+\infty)$

$D_{fog}=\{x\in D_g \mid g(x)\in D_f\}$

$=\{x\in \underbrace{(-\infty,-2)\cup(0,+\infty)}_{I} \mid \log_2 x^2+2x\in(-\infty,3]\}$

$\log_2 x^2+2x\le 3 \Rightarrow x^2+2x\le 8 \Rightarrow x^2+2x-8\le 0$

$\Rightarrow (x+4)(x-2)\le 0 \Rightarrow -4\le x\le 2 \quad (II)$

$\xrightarrow{I\cap II} [-4,-2)\cup(0,2]$

۲۲–گزینه «۱» متوسط

محور xها را در نقطه‌ای به طول ۱- قطع کرده پس: $y=0$

$\log_{\frac{1}{2}}(-a+b)=0 \Rightarrow -a+b=1$

نیمساز ناحیه چهارم را در نقطه‌ای به عرض ۱- قطع کرده پس:

$y=-x \Rightarrow -1=-x \Rightarrow x=1$

$\log_{\frac{1}{2}}(a+b)=-1 \Rightarrow a+b=2$

$$\begin{cases} a+b=2 \\ -a+b=1 \end{cases}$$

$2b=3 \Rightarrow b=\frac{3}{2}$

۲۳– گزینه «۱» دشوار

$ax+b>0 \Rightarrow x>\frac{-b}{a} \xrightarrow{x\in(-\frac{1}{2},+\infty)} \frac{-b}{a}=\frac{-1}{2}$

$\Rightarrow \frac{b}{a}=\frac{1}{2} \Rightarrow a=2b$

$f(4)=2 \Rightarrow \log_3 4a+b=2 \Rightarrow 4a+b=9$

$\Rightarrow 4(2b)+b=9 \Rightarrow b=1 \Rightarrow a=2 \Rightarrow f(x)=\log_3 2x+1$

$f(-\frac{4}{9})=\log_3 2(-\frac{4}{9})+1=\log_3\frac{-8}{9}+1=-2$

۲۴– گزینه «۲» دشوار

ابتدا دامنهٔ دو تابع f و g رو بررسی می‌کنیم:

$f(x)=\log x^2 \Rightarrow x^2>0 \Rightarrow D_f=\mathbb{R}-\{0\}$

$g(x)=2\log x \Rightarrow x>0 \Rightarrow D_g=(0,+\infty)$

دامنه‌ها مساوی نیستند پس گزینه ۳ رد میشه!

$f(x)=\log x^2=2\log x=g(x)\ ,\ x>0$

یعنی به‌ازای $x>0$ یعنی همون دامنهٔ **g**، ضابطه‌ها مساوی هستند. پس **g** بخشی از **f** هست.

۲۵–گزینه «۱» متوسط

$(\log_{12}6)^2+\log_{12}2\times\log_{12}72$

$=(\log_{12}6)^2+(1-\log_{12}6)(\underbrace{\log_{12}12}_{1}+\log_{12}6)$

$=(\log_{12}6)^2+1-(\log_{12}6)^2=1$

۲۶–گزینه «۴» متوسط

ابتدا دامنهٔ لگاریتم‌ها رو مشخص می‌کنیم:

$\log_x x^2+4 \Rightarrow x^2+4>0$ و $x>0\ ,\ x\neq 1$

$\log_x(x^2+4)=1+\log_x 5 \Rightarrow \log_x(x^2+4)-\log_x 5=1$

$\Rightarrow \log_x(\frac{x^2+4}{5})=1$

$\Rightarrow \frac{x^2+4}{5}=x \Rightarrow x^2+4=5x \Rightarrow x^2-5x+4=0$

$\Rightarrow (x-4)(x-1)=0$

$\Rightarrow x=1$ (غ ق ق) یا $x=4$ (ق ق) (در دامنه صدق می‌کند.)

$\log_2 x=\log_2 4=2$

۲۷- گزینه «۱» — دشوار

$x^{\log x-۱}=۱۰۰ \Rightarrow x^{\log x}\times x^{-۱}=۱۰۰$

برای پایین آوردن توان از هر دو طرف لگاریتم می‌گیریم (با فرض این که می‌دانیم $x>۰$ (دامنهٔ لگاریتم))

$\log(x^{\log x}\times x^{-۱})=\log ۱۰۰ \Rightarrow \log x^{\log x}+\log x^{-۱}=۲$

$\Rightarrow \log x\log x-\log x-۲=۰$

$\Rightarrow (\log x)^۲-\log x-۲=۰ \Rightarrow (\log x-۲)(\log x+۱)=۰$

$$\Rightarrow \begin{cases}\log x=۲ \Rightarrow x=۱۰^۲=۱۰۰\\ \log x=-۱ \Rightarrow =۱۰^{-۱}=\frac{۱}{۱۰}\end{cases} \Rightarrow \text{ضرب ریشه ها}=۱۰۰\times\frac{۱}{۱۰}=۱۰$$

۲۸- گزینه «۴» — دشوار

$x^{\log x}=۱۰۰۰x^۲$

مشابه حل تست ۲۷ عمل می‌کنیم و از هر دو طرف لگاریتم می‌گیریم:

$\log x^{\log x}=\log ۱۰۰۰x^۲ \Rightarrow \log x\cdot\log x=\underbrace{\log ۱۰۰۰}_{۳}+\log x^۲$

$\Rightarrow (\log x)^۲-۲(\log x)-۳=۰$

$$(\log-۳)(\log x+۱)=۰ \Rightarrow \begin{cases}\log x=۳ \Rightarrow x=۱۰۰۰\\ \log x=-۱ \Rightarrow x=\frac{۱}{۱۰}\end{cases}$$

حاصلضرب ریشه‌ها برابر است با:

$۱۰۰۰\times\frac{۱}{۱۰}=۱۰۰$

۲۹- گزینه «۱» — آسان

$۶^۳=۲۱۶<۷۲۳<۱۲۹۶=۶^۴$

$\Rightarrow \log_۶ ۶^۳<\log_۶ ۷۲۳<\log_۶ ۶^۴ \Rightarrow ۳<\log_۶ ۷۲۳<۴ \Rightarrow [\log_۶ ۷۲۳]=۳$

۳۰- گزینه «۲» — دشوار

$\log(x^۲-x-۶)-\log(x-۳)=\log(۲x-۵)$

مطابق معمول اول دامنه معادله رو مشخص می‌کنیم:

$x^۲-x-۶>۰ \Rightarrow (x-۳)(x+۲)>۰ \Rightarrow x<-۲\cup x>۳$

$x-۳>۰ \Rightarrow x>۳$

$۲x-۵>۰ \Rightarrow x>\frac{۵}{۲}$

$\xrightarrow{\cap} D=(۳,+\infty)$

حال با توجه به دامنه معادله رو حل می‌کنیم:

$\log\frac{x^۲-x-۶}{x-۳}=\log(۲x-۵) \Rightarrow \frac{x^۲-x-۶}{x-۳}=۲x-۵$

$\Rightarrow x^۲-x-۶=(x-۳)(۲x-۵) \Rightarrow (x-۳)(x+۲)=(x-۳)(۲x-۵)$

$\Rightarrow x-۳=۰ \Rightarrow x=۳$ (در دامنه نیست) غ ق ق یا

$x+۲=۲x-۵ \Rightarrow x=۷$ ق ق

$\log_۴\sqrt[۳]{x+۱}=\log_۴\sqrt[۳]{۷+۱}=\log_۴\sqrt[۳]{۸}=\log_{۲^۲}۲=\frac{۱}{۲}$

۳۱- گزینه «۱» — دشوار

$f(x)=\sqrt{۱-\log(x^۲-۳x)}$

حواست باشه هم دامنهٔ لگاریتم و هم دامنهٔ رادیکال رو درنظر بگیری:

$x^۲-۳x>۰ \Rightarrow x(x-۳)>۰ \Rightarrow x<۰\cup x>۳ \quad (۱)$

$۱-\log(x^۲-۳x)\geq ۰ \Rightarrow \log(x^۲-۳x)\leq ۱$

$\Rightarrow x^۲-۳x\leq ۱۰ \Rightarrow x^۲-۳x-۱۰\leq ۰ \Rightarrow (x-۵)(x+۲)\leq ۰$

$\Rightarrow -۲\leq x\leq ۵ \quad (۲)$

بین شرط‌های (۱) و (۲) اشتراک می‌گیریم:

$D=[-۲,۰)\cup(۳,۵]$

۳۲- گزینه «۳» — دشوار

$(\frac{\sqrt{۳}}{۳})^{۲x}=۳^x+\frac{۸}{۳} \Rightarrow (\frac{۱}{۳})^x=۳^x+\frac{۸}{۳}$

$\Rightarrow ۳^x+\frac{۸}{۳}-\frac{۱}{۳^x}=۰ \xrightarrow{\times ۳^x} (۳^x)^۲+\frac{۸}{۳}\times ۳^x-۱=۰$

$t=۳^x \Rightarrow t^۲+\frac{۸}{۳}t-۱=۰ \xrightarrow{\times ۳} ۳t^۲+۸t-۳=۰$

$$\Delta=۱۰۰ \Rightarrow t=\frac{-۸\pm ۱۰}{۶}=\begin{cases}\frac{۱}{۳}\\ -۳\end{cases}$$

$۳^x=\frac{۱}{۳} \Rightarrow x=-۱ \Rightarrow y=۳^{-۱}+\frac{۸}{۳}=\frac{۱}{۳}+\frac{۸}{۳}=۳ \Rightarrow A(-۱,۳)$

$۳^x=-۳$ غ ق ق

فاصلهٔ **A** از $(-۱,۱)$ با توجه به مساوی بودن **x** برابر تفاضل عرض‌هاست:

$۳-۱=۲$

۳۳- گزینه «۴» — دشوار

$\log ۲x+۱+\log(y-۲)-\log y=\log ۳ \Rightarrow \frac{(۲x+۱)(y-۲)}{y}=۳ \quad (۱)$

$\log_۸(۲y+۴x)+\log_۸ ۲=۱ \Rightarrow \log_۸ ۲(۲y+۴x)=۱ \Rightarrow ۴(y+۲x)=۸$

$\Rightarrow y+۲x=۲ \quad (۲)$

از این رابطه در معادلهٔ اول جاگذاری می‌کنیم:

$(۲x+۱)(y-۲)=۳y \Rightarrow ۲xy-۴x+y-۲-۳y=۰$

$\Rightarrow ۲xy-۴x-۲y-۲=۰ \xrightarrow{\div ۲} xy-۲x-y-۱=۰$

$\Rightarrow xy=۲x+y+۱ \xrightarrow{(۱)} xy=۲+۱=۳$

۳۴- گزینه «۳» — متوسط

از طرفین معادله، لگاریتم در مبنای ۳ می‌گیریم:

$x^{\log_۳ x}=۲۴۳$

$\log_۳ x^{\log_۳ x}=\log_۳ ۲۴۳ \Rightarrow \log_۳ x\cdot\log_۳ x=\log_۳ ۳^۵$

$\Rightarrow (\log_۳ x)^۲=۵ \Rightarrow \log_۳ x=\sqrt{۵} \Rightarrow x=۳^{\sqrt{۵}}$

۳۵- گزینه «۴» آسان

$$f(x)=\log_3 \frac{2x-1}{2x+1}$$

$$f(1)+f(2)+\dots+f(40)=\log_3\frac{1}{3}+\log_3\frac{3}{5}+\log_3\frac{5}{7}+\dots+\log_3\frac{79}{81}$$

$$=\log_3 1-\cancel{\log_3 3}+\cancel{\log_3 3}-\cancel{\log_3 5}+\cancel{\log_3 5}-\cancel{\log_3 7}$$

$$+\dots+\cancel{\log_3 79}-\log_3 81=\log_3 1-\log_3 81=0-4=-4$$

۳۶- گزینه «۳» دشوار

اول از همه دقت کنیم که ۱۲/۵درصد یعنی $\frac{125}{1000}$ و به عبارتی $\frac{1}{8}$ پس اگه در هر هفته $\frac{1}{8}$ جرم باقی‌مانده رو از دست میده یعنی $\frac{7}{8}$ از جرم باقی‌مانده، باقی می‌مونه. از طرفی در هر هفته این جرم باقی مونده و سؤال بعد از چند روز رو پرسیده یعنی اگر تعداد روزها رو t فرض کنیم تعداد هفته‌ها $\frac{t}{7}$ میشه و جرم باقی‌مانده از فرمول زیر به دست میاد:

$$M(t)=M_0\left(\frac{7}{8}\right)^{\frac{t}{7}}$$

$$\frac{1}{7}\cancel{M_0}=\cancel{M_0}\left(\frac{7}{8}\right)^{\frac{t}{7}} \Rightarrow \frac{t}{7}=\log_{\frac{7}{8}}\frac{1}{7}=\frac{\log_3\frac{1}{7}}{\log_3\frac{7}{8}}$$ (در سؤال مبنای ۳ داده)

$$\Rightarrow \frac{t}{7}=\frac{-\log_3 7}{\log_3 7-\log_3 8}=\frac{-\frac{1}{0/6}}{\frac{1}{0/6}-3\left(\frac{1}{1/6}\right)}=\frac{-\frac{10}{6}}{\frac{10}{6}-\frac{30}{16}}=\frac{-\frac{5}{3}}{\frac{5}{3}-\frac{15}{8}}=\frac{-\frac{5}{3}}{-\frac{5}{24}}$$

$$\Rightarrow \frac{t}{7}=8 \Rightarrow t=56$$

۳۷- گزینه «۲» دشوار

توابع $(\frac{1}{2})^x$ و $\log_{\frac{1}{2}} x$، نزولی هستند و توان ۳ تأثیری در صعودی و نزولی بودن ندارد. پس تابع f تابع نزولی است پس با حذف f علامت نامعادله عوض میشه!

$$f(x)=\left(\left(\frac{1}{2}\right)^x+\log_{\frac{1}{2}} x\right)^3$$

$$f(f(x))<f(2^{-3x}) \Rightarrow f(x)>2^{-3x}$$

$$\Rightarrow \left(\left(\frac{1}{2}\right)^x+\log_{\frac{1}{2}} x\right)^3<2^{-3x} \xrightarrow{\text{رادیکال با فرجه ۳}} \left(\frac{1}{2}\right)^x+\log_{\frac{1}{2}} x<2^{-x}$$

$$\Rightarrow \log_{\frac{1}{2}} x<0 \Rightarrow \log_{\frac{1}{2}} x<\log_{\frac{1}{2}} 1 \xrightarrow[\text{علامت عوض میشه}]{0<\frac{1}{2}<1} x>1$$

یادت باشه اگر f نزولی باشه:

$$f(☺)<f(\triangle) \Leftrightarrow ☺>\triangle$$

اما اگه f صعودی باشه:

$$f(☺)<f(\triangle) \Leftrightarrow ☺<\triangle$$

۳۸- گزینه «۲» آسان

$$\log\frac{5}{3}=\log 5-\log 3=1-\log 2-\log 3\cong 1-0/3-0/4=0/3$$

$$\log 9=2\log 3=2(0/4)=0/8$$

$$\log 15=\log 3\times 5=\log 3+\log 5=\log 3+1-\log 2$$
$$=0/4+1-0/3=1/1$$

با جاگذاری لگاریتم‌ها در معادله داریم:

$$0/3x^2+0/8x-1/1=0$$

$$\xrightarrow{\times 10} 3x^2+8x-11=0 \xrightarrow{\text{جمع ضرایب }=0} \begin{cases} x=1 \\ x=\frac{-11}{3}\end{cases}$$

$$\text{اختلاف ریشه‌ها}=\left|1-\left(-\frac{11}{3}\right)\right|=\left|\frac{14}{3}\right|=\frac{14}{3}$$

۳۹- گزینه «۲» دشوار

بزرگ‌ترین عضو مجموعهٔ A رو خواسته و با توجه به این که فقط در مخرج عبارتی برحسب x داریم، کافی‌ست کم‌ترین مقدار مخرج و به عبارتی کم‌ترین مقدار عبارت زیر رادیکال رو به دست بیاریم.

$$\log_8 x+4\log_{x^3} 2=\frac{1}{3}\log_2 x+\frac{4}{3}\log_x 2$$

با توجه به روابط $ax+\frac{b}{x}\geq 2\sqrt{ab}$ ، $\log_2 x\cdot\log_x 2=1$، داریم:

$$\frac{1}{3}\log_2 x+\frac{4}{3}\log_x 2=\frac{1}{3}\log_2 x+\frac{4}{3}\left(\frac{1}{\log_2 x}\right)\geq 2\sqrt{\frac{1}{3}\times\frac{4}{3}}=\frac{4}{3}$$

حال کسر را می‌سازیم.

$$\sqrt{\log_8 x+4\log_{x^3} 2}\geq\frac{2}{\sqrt{3}} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{\log_8 x+4\log_{x^3} 2}}\leq\frac{\sqrt{3}}{2}$$

۴۰- گزینه «۳» آسان

$$\left.\begin{aligned}&\log_2 3=a\\&\log_8 b=\frac{2}{3}(1+a)\end{aligned}\right\} \Rightarrow \log_8 b=\frac{2}{3}(1+\log_2 3)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{3}\log_2 b=\frac{2}{3}(1+\log_2 3)$$

$$\Rightarrow \log_2 b=2+2\log_2 3 \Rightarrow \log_2 b-\log_2 9=2$$

$$\Rightarrow \log_2\frac{b}{9}=2 \Rightarrow \frac{b}{9}=4 \Rightarrow b=36$$

$$\log 3b-8=\log 3(36)-8=\log 100=2$$

۴۱- گزینه «۱» آسان

$$f(x)=\sqrt[3]{2^{ax+b}}$$

$$(\frac{1}{2},1)\Rightarrow f(\frac{1}{2})=1\Rightarrow \sqrt[3]{2^{\frac{a}{2}+b}}=1\Rightarrow 2^{\frac{a}{2}+b}=1\Rightarrow \frac{a}{2}+b=0$$

$$f^{-1}(8)=5\Rightarrow f(5)=8\Rightarrow \sqrt[3]{2^{5a+b}}=8\Rightarrow 2^{5a+b}=\underbrace{512}_{2^9}$$

$$\Rightarrow 5a+b=9$$

$$\begin{cases}\frac{a}{2}+b=0\\ 5a+b=9\end{cases}$$

$$\frac{9}{2}a=9\Rightarrow a=2\Rightarrow \frac{2}{2}+b=0\Rightarrow b=-1$$

$$a-b=2-(-1)=3$$

۴۲- گزینه «۲» دشوار

$$a^2+9b^2=10ab\Rightarrow \underbrace{a^2}_{(a)^2}+\underbrace{9b^2}_{(3b)^2}+2a(3b)-2a(3b)=10ab$$

$$\Rightarrow (a+3b)^2=16ab\Rightarrow a+3b=4\sqrt{ab}$$

حواست باشه چون $(a+3b)$ جلوی لگاریتم هست پس مقدارش مثبته.

$$\Rightarrow \log(\frac{a+3b}{4})=\log\frac{4\sqrt{ab}}{4}=\log\sqrt{ab}=\frac{1}{2}\log ab$$

$$=\frac{1}{2}(\log a+\log b)=\frac{\log a+\log b}{2}=$$

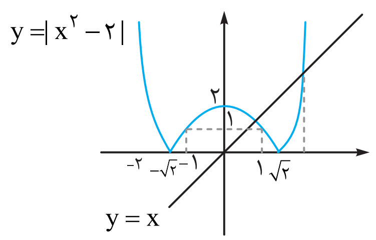
واسطه حسابی بین دو عبارت $\log b, \log a$

۴۳- گزینه «۴» متوسط

$$f(x)=\log(|x^2-2|-x)$$

$$|x^2-x|-x>0\Rightarrow |x^2-2|>x$$

از روش هندسی برای حل این نامعادله استفاده می‌کنیم:



جواب نامعادله بخش‌هایی از محور x است که به‌ازای آن‌ها نمودار $y=|x^2-2|$ بالاتر از نمودار $y=x$ است و بنابراین برابر است با: $(-\infty,1)\cup(2,+\infty)$

۴۴- گزینه «۳» آسان

$$2\log_x a+\log_a\sqrt{x}=2\xrightarrow{x=9}2\log_9 a+\log_a 3=2$$

$$\Rightarrow \log_3 a+\log_a 3=2\Rightarrow \log_3 a+\frac{1}{\log_3 a}=2$$

همان طوری که قبلاً هم دیدیم مقدار ☺ + $\frac{1}{☺}$ وقتی برابر ۲ می‌شود که ☺ = ۱ پس.

$$\log_3 a=1\Rightarrow a=3$$

۴۵- گزینه «۱» متوسط

$$\log_a c+\log_b c=1\Rightarrow \frac{1}{\log_c a}+\frac{1}{\log_c b}=1$$

$$\Rightarrow \frac{\log_c b+\log_c a}{\log_c a\cdot\log_c b}=1\Rightarrow \log_c a\cdot\log_c b=\log_c a+\log_c b=\log_c ab$$

۴۶- گزینه «۳» دشوار

$$\log_2^{4^x+15}=x+3\Rightarrow 4^x+15=2^{x+3}$$

$$\Rightarrow (2^x)^2-8(2^x)+15=0\Rightarrow\Rightarrow (2^x-5)(2^x-3)=0$$

$$\begin{cases}2^x=5\Rightarrow x_1=\log_2 5\\ 2^x=3\Rightarrow x_2=\log_2 3\end{cases}$$

$$x_1+x_2=\log_2 5+\log_2 3=\log_2 15$$

۴۷- گزینه «۳» دشوار

برد تابع را به‌صورت یک بازه داده یعنی **f** در این بازه قرار می‌گیرد پس:

$$\log_2^3<f(x)<\log_2^5\Rightarrow \log_2^3<-\log_2^{\frac{1}{12+\sqrt{[x]}-[x]}}-1<\log_2^5$$

$$\underbrace{1+\log_2 3}_{\log_2 6}<\log_2(\frac{1}{12+\sqrt{[x]}-[x]})^{-1}<\underbrace{1+\log_2 5}_{\log_2 10}$$

مبنای لگاریتم بزرگ‌تر از ۱ است پس تابع صعودی است و با حذف لگاریتم‌ها علامت نامعادله عوض نمی‌شود.

$$6<12+\sqrt{[x]}-[x]<10\Rightarrow -6<\sqrt{[x]}-[x]<-2$$

$$t=\sqrt{[x]}\Rightarrow -6<t-t^2<-2\Rightarrow \begin{cases}t^2-t-6<0\Rightarrow -2<t<3\\ t^2-t-2>0\Rightarrow t<-1\cup t>2\end{cases}$$

اشتراک می‌گیریم و داریم: $2<t<3$ بنابراین $2<\sqrt{[x]}<3$

یعنی $4<[x]<9$ پس $5\le x<9$ جواب است.

۴۸- گزینه «۱» آسان

$$\log_3 2=\frac{5}{8}\xrightarrow{\text{معکوس}}\log_2 3=\frac{8}{5}$$

$$\log_{18}8=\log_{2\times3^2}2^3=\frac{3}{\log_2 2\times3^2}=\frac{3}{\log_2 2+\log_2 3^2}$$

$$=\frac{3}{1+2\times\frac{8}{5}}=\frac{3}{1+\frac{16}{5}}=\frac{3}{\frac{21}{5}}=\frac{15}{21}$$

۴۹- گزینه «۳» — متوسط

$f^{-۱}(۲)$ یعنی مقداری برای **x** که $f(x)=۲$ شده است پس:

$$\frac{۲^x-\frac{۱}{۲^x}}{۲}=۲ \Rightarrow ۲^x-\frac{۱}{۲^x}=۴ \xrightarrow{\times ۲^x} (۲^x)^۲-۴(۲^x)-۱=۰$$

$$\Delta=۲۰ \Rightarrow ۲^x=\frac{۴\pm\sqrt{۲۰}}{۲}=\frac{۴\pm ۲\sqrt{۵}}{۲}=۲\pm\sqrt{۵}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} ۲^x=۲+\sqrt{۵} \Rightarrow x=\log_۲ ۲+\sqrt{۵} \\ ۲^x=۲-\sqrt{۵} \quad \text{غ ق ق}\end{cases}$$

۵۰- گزینه «۲» — متوسط

هر روز ۴ لیتر از ۱۰۰ لیتر برداشته می‌شه به عبارتی $\frac{۴}{۱۰۰}$ یا $\frac{۱}{۲۵}$ محلول برداشته می‌شه پس $۱-\frac{۱}{۲۵}=\frac{۲۴}{۲۵}$ از محلول باقی می‌مونه.

$$f(t)=f_۰(\frac{۲۴}{۲۵})^t \Rightarrow \frac{۱}{۳}\cancel{f_۰}=\cancel{f_۰}(\frac{۲۴}{۲۵})^t$$

$$\Rightarrow t=\frac{\log\frac{۱}{۳}}{\log\frac{۲۴}{۲۵}}=\frac{-\log ۳}{\log ۲۴-\log ۲۵}=\frac{-۰/۴۸}{\log ۲^۳\times ۳-۲\log ۵}$$

$$=\frac{-۰/۴۸}{۳(۰/۳)+۰/۴۸-۲(۱-۰/۳)}=\frac{-۰/۴۸}{۰/۹+۰/۴۸-۲+۰/۶}$$

$$=\frac{\cancel{-}۰/۴۸}{\cancel{-}۰/۰۲}=۲۴$$

۱- متوسط

$$\log E=۱۱/۸+۱/۵\times ۷/۵=۱۱/۸+۱۱/۲۵=۲۳/۰۵$$

$$\Rightarrow E=۱۰^{۲۳/۰۵}\text{Erg}$$

۲- متوسط

آ) $(\frac{۱}{۲})^{\frac{۲}{۱۰}}\times ۲=۲^{-۰/۲}\times ۲^۱=۲^{۰/۸}\approx ۱/۷۴$ گرم

ب) $m(t)=(\frac{۱}{۲})^{\frac{t}{۱۰}}\times ۲=۲^{-\frac{t}{۱۰}}\times ۲^۱=۲^{۱-\frac{t}{۱۰}}=۲^{\frac{۱۰-t}{۱۰}}$

پ) $۲^{\frac{۱۰-t}{۱۰}}=۰/۵ \Rightarrow \log_۲ ۰/۵=\frac{۱۰-t}{۱۰}$

$$\log_۲ ۲^{-۱}=\frac{۱۰-t}{۱۰}\Rightarrow -۱=\frac{۱۰-t}{۱۰}\Rightarrow t=۲۰$$

۳- متوسط

حواستون باشه‌ها! مسأله‌های رشد و زوال از رابطه زیر حساب می‌شود:

$$f(t)=f(۰)(۱-r)^t$$

$$f(۱۰)=۴\times ۱۰^۷(۱-\frac{۱}{۱۰۰})^{۱۰}=۴\times ۱۰^۷(\frac{۹۹}{۱۰۰})^{۱۰}$$

$$=۴\times ۱۰^۷\times\frac{۹۹^{۱۰}}{۱۰۰^{۱۰}}=۴\times ۹۹^{۱۰}\times ۱۰^{-۱۳}$$

۴- متوسط

$$\frac{۱}{۱۰}A_۰=A_۰(\frac{۱}{۲})^{\frac{t}{۱۲/۶}}\Rightarrow \frac{۱}{۱۰}=(\frac{۱}{۲})^{\frac{t}{۱۲/۶}}$$

$$\log_{\frac{۱}{۲}}\frac{۱}{۱۰}=\frac{t}{۱۲/۶}$$

$\frac{۱۰}{۳}=\frac{t}{۱۲/۶}\Rightarrow ۳t=۱۲۶\Rightarrow t=۴۲$ سال

۵- متوسط

$$۲A_۰=A_۰(۱+\frac{۲}{۱۰۰})^t\Rightarrow ۲=(\frac{۱۰۲}{۱۰۰})^t$$

$$\log_{\frac{۱۰۲}{۱۰۰}}۲=t$$

$$\frac{\log ۲}{\log ۱/۰۲}=t\Rightarrow\frac{۰/۳۰۱}{۰/۰۰۸۶}=t\Rightarrow t=۳۵$$

۶- متوسط

حواستون باشه! که در سؤال گفته شده قدرت زلزله از پس:

$$M=\frac{۲}{۳}\log\frac{E}{E_۰}\Rightarrow M=\frac{۲}{۳}\log\frac{۱۰^{۱۳/۴}}{۱۰^{۴/۴}}$$

$$M=\frac{۲}{۳}[\log ۱۰^{۱۳/۴}-\log ۱۰^{۴/۴}]$$

$M=\frac{۲}{۳}[۱۳/۴-۴/۴]=\frac{۲}{۳}\times ۹=۶$ ریشتر

۷- متوسط

$$۲A_۰=A_۰(۱+\frac{۱}{۱۰۰})^t\Rightarrow ۲=(\frac{۱۰۱}{۱۰۰})^t$$

$$\log_{۱/۰۱}۲=t\Rightarrow\frac{\log ۲}{\log ۱/۰۱}=t\Rightarrow\frac{۰/۳۰۱}{۰/۰۴۳}=t$$

$t=۷۰$ سال

۸- آسان

آ) $m(t)=۱(\frac{۱}{۲})^{\frac{t}{۴}}$

ب) $۰/۰۱=(\frac{۱}{۲})^{\frac{t}{۴}}\Rightarrow \log_{۲^{-۱}}۱۰^{-۲}=\frac{t}{۴}\Rightarrow ۲\log_۲ ۱۰=\frac{t}{۴}$

$$۲(\frac{۱۰}{۳})=\frac{t}{۴}\Rightarrow\frac{۲۰}{۳}=\frac{t}{۴}\Rightarrow ۳t=۸۰\Rightarrow t=\frac{۸۰}{۳}$$

۹- متوسط

$M=\frac{۲}{۳}\log\frac{E}{E_۰} \Rightarrow M=\frac{۲}{۳}[\log E-\log E_۰]$

$M=\frac{۲}{۳}[\log E-\log ۱۰^{۴/۴}] \Rightarrow M=\frac{۲}{۳}[\log E-۴/۴]$

$M=\frac{۲}{۳}[۱۰/۴-۴/۴]=\frac{۲}{۳}(۶)=۴$ ریشتر

۱۰- آسان

$f(t)=۱۲۸(\frac{۱}{۲})^{\frac{t}{۳۰}}$

$f(t)=۱۲۸(\frac{۱}{۲})^{\frac{۳۰۰}{۳۰}}=۲^{۷}\times\frac{۱}{۲^{۱۰}}=\frac{۱}{۲^{۳}}=\frac{۱}{۸}$

پاسخنامه سؤالات تستی
بخش ۳

۱- گزینه «۳» دشوار

$۴۰=۶۰-۵۰e^{-\frac{۱}{۴}t}$

$۵۰e^{-\frac{۱}{۴}t}=۲۰ \Rightarrow e^{-\frac{۱}{۴}t}=\frac{۲}{۵} \Rightarrow \log_e\frac{۲}{۵}=-\frac{t}{۴}$

حواستون باشه‌ها! لگاریتم در پایه **e** یا عدد نپر را لگاریتم طبیعی می‌نامند و آن را به‌صورت **Lnx** می‌نویسند.

$\log_e\frac{۵}{۲}=\log_e ۵-\log_e ۲=۰/۹۱$

پس:

$\log_e ۲-\log_e ۵=-\frac{t}{۴} \Rightarrow \frac{-۹۱}{۱۰۰}=\frac{-t}{۴} \Rightarrow t=۳/۶۴$

از نصف ماه بیشتر است پس ۳ ماه و ۱۹ روز جواب است.

۲- گزینه «۳» متوسط

$\frac{۱}{۲}\cancel{A_۰}=\cancel{A_۰}(۱-\frac{۵}{۱۰۰})^{t} \Rightarrow \frac{۱}{۲}=(\frac{۹۵}{۱۰۰})^{t}$

$\log_{\frac{۹۵}{۱۰۰}}\frac{۱}{۲}=t$

$\frac{\log\frac{۱}{۲}}{\log\frac{۹۵}{۱۰۰}}=\frac{-\log ۲}{\log ۵+\log ۱۹-۲\log ۱۰}=\frac{-۰/۳۰۱}{۰/۶۹۹+۱/۲۸۷-۲}$

$=\frac{-۰/۳۰۱}{-۰/۰۱۴}=۲۱/۵$

۳- گزینه «۱» دشوار

$f(t)=m_۰(a)^{\frac{t}{T}}$

$\begin{cases} ۱۲=m_۰(a)^{\frac{۲}{T}} \\ ۴۸=m_۰(a)^{\frac{۴}{T}} \end{cases} \Rightarrow \frac{۴۸}{۱۲}=\frac{\cancel{m_۰}(a)^{\frac{۴}{T}}}{\cancel{m_۰}(a)^{\frac{۲}{T}}}$

$۴=(a)^{\frac{۲}{۱}} \xrightarrow{\text{جذر}} ۲=a^{\frac{۱}{T}}$

$۱۲=m_۰(۴) \Rightarrow m_۰=۳$ با جایگذاری در اطلاعات اولیه

$f(t)=۳(a)^{\frac{۱}{T}}=۳\times ۲=۶$

۴- گزینه «۴» متوسط

$\log E_۱=۱۱/۸+۱/۵(۸)=۲۳/۸ \Rightarrow \log E_۱=۲۳/۸ \Rightarrow ۱۰^{۲۳/۸}=E_۱$

$\log E_۲=۱۱/۸+۱/۵(۶)=۲۰/۸ \Rightarrow \log E_۲=۲۰/۸ \Rightarrow ۱۰^{۲۰/۸}=E_۲$

$\log E_۱E_۲=\log E_۱+\log E_۲=۲۳/۸+۲۰/۸=۴۴/۶$

۵- گزینه «۳» آسان

$۳=۴۸(\frac{۱}{۲})^{\frac{t}{۲۵}} \Rightarrow \frac{۱}{۱۶}=(\frac{۱}{۲})^{\frac{t}{۲۵}}$

$\log_{\frac{۱}{۲}}\frac{۱}{۱۶}=\frac{t}{۲۵} \Rightarrow ۴=\frac{t}{۲۵} \Rightarrow t=۱۰۰$

۶- گزینه «۳» متوسط

$\frac{۱}{۱۰۰}=(۱)(\frac{۱}{۲})^{\frac{t}{۴}} \Rightarrow ۱۰^{-۲}=(\frac{۱}{۲})^{\frac{t}{۴}}$

$\log_{\frac{۱}{۲}}۱۰^{-۲}=\frac{t}{۴}$

$۲\log_۲ ۱۰=\frac{t}{۴} \Rightarrow ۲(\frac{۱۰}{۳})=\frac{t}{۴} \Rightarrow \frac{۲۰}{۳}=\frac{t}{۴} \Rightarrow t=\frac{۸۰}{۳}\cong ۲۶/۶$

۷- گزینه «۲» متوسط

$۲^{۱۰۰}=A \xrightarrow{\text{از طرفین لگاریتم می گیریم}} \log ۲^{۱۰۰}=\log A$

$۱۰۰\log ۲=\log A$

$۱۰۰(۰/۳۰۱)=۳۰/۱ \Rightarrow$ ۳۱ رقمی است

۸- گزینه «۱» متوسط

$\frac{۲۰}{۱۰۰}A_۰=A_۰(\frac{۱}{۲})^{\frac{t}{۵۷۰۰}} \Rightarrow \frac{۲\cancel{۰}}{۱۰\cancel{۰}}=(\frac{۱}{۲})^{\frac{t}{۵۷۰۰}}$

$\frac{۱}{۵}=(\frac{۱}{۲})^{\frac{t}{۵۷۰۰}}$

$\log_{\frac{۱}{۲}}\frac{۱}{۵}=\frac{t}{۵۷۰۰}$

$\frac{\log ۵}{\log ۲}=\frac{t}{۵۷۰۰} \Rightarrow \frac{۰/۶۹}{۰/۳}=\frac{t}{۵۷۰۰} \Rightarrow t=۱۳۱۱۰$

۹- گزینه «۲» — متوسط

$$M=\frac{2}{3}\log\frac{E}{E_0}$$

$$6/8=\frac{2}{3}[\log E-\log 10^{4/4}]\Rightarrow 6/8=\frac{2}{3}\log E-\frac{2}{3}\times 4/4$$

$$\frac{3}{2}(9/7)=\log E\Rightarrow 14/6=\log_{10}E\ \Rightarrow\ E=10^{14/6}$$

۱۰- گزینه «۱» — متوسط

$$f(t)=24\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{25}}$$

$$f(50)=24\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{50}{25}}=24\times\frac{1}{4}=6$$

سؤالات تشریحی
پاسخنامه
آزمون تشریحی ۱

۱- متوسط

آ) درست

ب) نادرست

$$\log_{10}0/1=a\ \Rightarrow\ 10^a=\frac{1}{10}\ \Rightarrow\ 10^a=10^{-1}\ \Rightarrow\ a=-1$$

پ) نادرست ـ اگر $a>b>0$ آن‌گاه $\log_{10}a>\log_{10}b$

ت) نادرست ـ می‌تواند بین صفر و یک باشد.

۲- آسان

آ) $3^3=3^x\ \Leftarrow\ x=3$

ب) صفر

پ) $a>0\ ,\ b>0\ ,\ b\neq 1$

۳- آسان

این تابع نمایی است که یک واحد به سمت بالا رفته است پس: $a=1$.

همچنین محل برخورد با محور yها در تابع نقطه ۲ است پس:

$$2=1+2^{0-b}\Rightarrow 1=2^{-b}\Rightarrow 1=\left(\frac{1}{2}\right)^b\ \Rightarrow\ b=0$$

۴- متوسط

$$\left(\frac{4}{100}\right)^{x^2-3x}<5^4\ \Rightarrow\ \left(\frac{1}{25}\right)^{x^2-3x}<5^4$$

$$(5^{-2})^{x^2-3x}<5^4\Rightarrow 5^{-2x^2+6x}<5^4$$

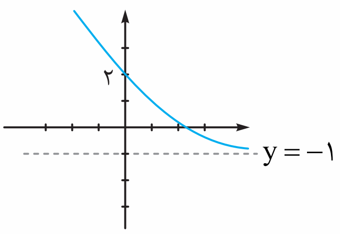
$$-2x^2+6x<4\Rightarrow -2x^2+6x-4<0$$

چون جمع ضرایب صفر است $x_1=+1$ و $x_2=2$ و جواب به‌صورت زیر است:

$$(-\infty,1)\cup(2+\infty)$$

۵- متوسط

آ)



ب) $f^{-1}(8)=\alpha\ \Rightarrow\ (8,\alpha)\in f^{-1}\ \Rightarrow\ (\alpha,8)\in f\ \Rightarrow\ 8=3^{-\alpha+1}-1$

$$9=3^{-\alpha+1}\ \Rightarrow\ 3^2=3^{-\alpha+1}\Rightarrow 2=-\alpha+1\Rightarrow\alpha=-1$$

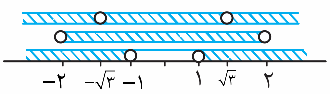
پ) $\left(\frac{1}{3}\right)^{-3x-2}-1=3^{-x+1}-1\ \Rightarrow\ 3^{3x+2}=3^{-x+1}$

$$3x+2=-x+1\Rightarrow 4x=-1\ \Rightarrow\ x=\frac{-1}{4}$$

۶- دشوار

$\log_b a\ \Rightarrow$ می‌دانیم که تابع نمایی دارای دامنه $\begin{cases}a>0\\ b>0\\ b\neq 1\end{cases}$

$$\begin{cases}x^2-1>0\ \Rightarrow\ x^2>1\ \Rightarrow\ x>1\ \text{ یا }\ x<-1\\ 4-x^2>0\ \Rightarrow\ 4>x^2\ \Rightarrow\ -2<x<2\\ 4-x^2\neq 1\ \Rightarrow\ 3\neq x^2\ \Rightarrow\ 3\neq x^2\ \Rightarrow\ x\neq\pm\sqrt{3}\end{cases}$$



مجموعه جواب: $(-2,-\sqrt{3})\cup(-\sqrt{3},-1)\cup(1,\sqrt{3})\cup(\sqrt{3},2)$

۷- دشوار

$$\log(0/75)^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}[\log 75-\log 100]=\frac{1}{2}[\log 3\times 5^2-2]$$

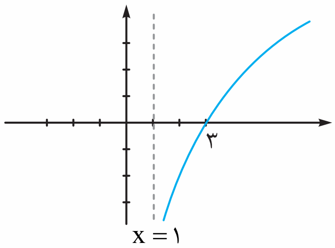
$$=\frac{1}{2}[\log 3+2\log 5-2]$$

$$=\frac{1}{2}[0/4771+2(1-0/301)-2]=[0/4771+\cancel{2}-0/602-\cancel{2}]$$

$$=\frac{1}{2}[-0/1249]=-0/062$$

۸- دشوار

آ)



ب) $f^{-1}(3)=\alpha \Rightarrow (3,\alpha)\in f^{-1} \Rightarrow (\alpha,3)\in f$

$\Rightarrow 3=\log_2(\alpha-1)-1 \Rightarrow 4=\log_2(\alpha-1)$

$2^4=\alpha-1\Rightarrow 17=\alpha$

پ) $\log_2\frac{8}{x+1}=\log_2(x-1)-1 \Rightarrow \log_2\frac{\frac{8}{x+1}}{x-1}=1$

$2=\frac{8}{x^2-1} \Rightarrow x^2-1=4 \Rightarrow x=\pm\sqrt{5} \Rightarrow x=\sqrt{5}$ ق ق

۹- آسان

$\log_2\frac{2x+1}{x-2}=2 \Rightarrow 2^2=\frac{2x+1}{x-2} \Rightarrow 4=\frac{2x+1}{x-2}$

$4x-8=2x+1\Rightarrow 2x=9\Rightarrow x=\frac{9}{2}$ ق ق

۱۰- متوسط

$\log E_1=11/8+1/5M$

$\log E_2=11/8+1/5(M+2)$

$\log E_2=\underbrace{11/8+1/5M}_{\log E_1}+3$

$\log E_2-\log E_1=3$

$\log\frac{E_2}{E_1}=3 \Rightarrow 10^3=\frac{E_2}{E_1}$

انرژی آزادشده ۱۰۰۰ برابر می‌شود.

۱۱- متوسط

حواستون باشه‌ها! ۲۰ دقیقه $\frac{1}{3}$ ساعت است.

$f(t)=64(2)^{\frac{t}{\frac{1}{3}}}$

$f(1)=64(2)^{3t}$

آ) $f(4)=64(2)^{12}=2^6\times 2^{12}=2^{18}$

ب) $1024=64(2)^{3t} \Rightarrow 2^{10}=2^6\times 2^{3t} \Rightarrow 3t+6=10\Rightarrow 3t=4$

$t=\frac{4}{3}$ ساعت

پاسخنامه سؤالات تشریحی

آزمون تشریحی ۲

۱- آسان

آ) درست

ب) درست

پ) درست

ت) نادرست

۲- متوسط

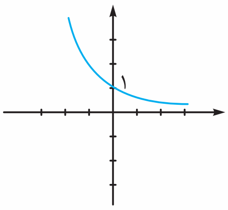
آ) $\frac{1}{2}$

ب) $10=10^{-2x}\Rightarrow -2x=1\Rightarrow x=-\frac{1}{2}$

پ) $k\neq 0\ ,\ a\neq 1\ ,\ a\neq 0$

۳- متوسط

آ)



ب) $f^{-1}(\sqrt{3})=\alpha \Rightarrow (\sqrt{3},\alpha)\in f^{-1} \Rightarrow (\alpha,\sqrt{3})\in f \Rightarrow \sqrt{3}=(\frac{1}{3})^{\alpha}$

$3^{\frac{1}{2}}=3^{-\alpha}\Rightarrow \frac{1}{2}=-\alpha\Rightarrow -\frac{1}{2}=\alpha$

پ) $3^{2x+1}=(\frac{1}{3})^x \Rightarrow 3^{2x+1}=3^{-x} \Rightarrow 2x+1=-x$

$3x=-1\Rightarrow x=\frac{-1}{3}$

۴- آسان

الف) $g(-1)=4^{-1}+2=\frac{1}{4}+2=\frac{9}{4}$

ب) $66=4^x+2 \Rightarrow 64=4^x \Rightarrow 4^3=4^x \Rightarrow x=3$

۵- متوسط

الف) $2x-3=x+1 \Rightarrow x=4$

ب) $(\frac{9}{100})^{x^2-3x}=(\frac{10}{3})^{-4} \Rightarrow (\frac{3}{10})^{2x^2-6x}=(\frac{3}{10})^4$

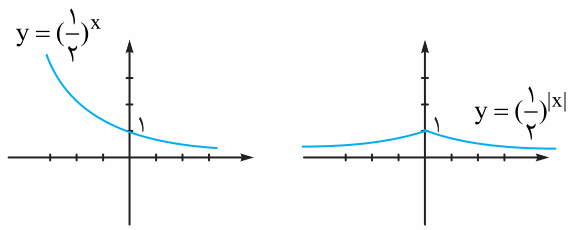
$2x^2-6x=4 \Rightarrow 2x^2-6x-4=0\Rightarrow 2(x^2-3x-2)=0$

$\Delta=9-4(-2)\Rightarrow \Delta=9+8=17$

$x=\frac{3\pm\sqrt{17}}{2}$

۶- آسان

ابتدا $y=(\frac{۱}{۲})^x$ را رسم می‌کنیم سپس $f(|x|)$ به معنای حذف قسمت چپ شکل و قرینه کشیدن سمت راست شکل است.



۷- آسان

$$\log_۲ ۹=\alpha \Rightarrow ۲^{\alpha}=۹$$

پس:

$$۴^{\alpha+۱}=۴^{\alpha}\times ۴=(۲^۲)^{\alpha}\times ۴=(۲^{\alpha})^۲\times ۴=۹^۲\times ۴=۳۲۴$$

۸- متوسط

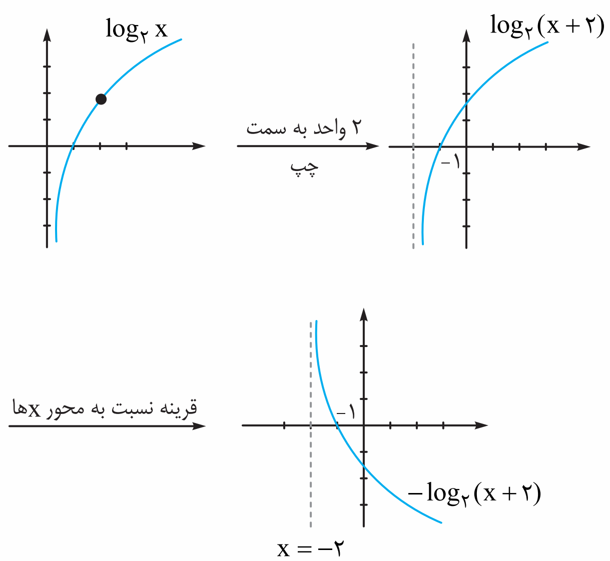
$$\log ۲\sqrt{۳}-\log ۵=\log ۲+\log\sqrt{۳}-\log ۵$$

$$=۰/۳+\frac{۱}{۲}\log ۳-\log ۵=۰/۳+\frac{۱}{۲}(۰/۴۸)-(۱-۰/۳)$$

$$=۰/۳-۰/۲۴-۰/۷=-۰/۶۴$$

۹- آسان

ابتدا $y=\log_۲ x$ را رسم می‌کنیم سپس ۲ واحد به سمت چپ منتقل می‌کنیم سپس برای رسم $-f(x)$ نسبت به محور xها شکل را قرینه می‌کنیم.



۱۰- متوسط

$$\log_۳(x-۱)(\frac{x}{۲}+۱)=۲$$

$$۳^۲=(x-۱)(\frac{x}{۲}+۱) \Rightarrow ۹=\frac{x^۲}{۲}+x-\frac{x}{۲}-۱ \xrightarrow{\times ۲}$$

$$۱۸=x^۲+۲x-x-۲ \Rightarrow ۰=x^۲+x-۲۰$$

$$۰=(x+۵)(x-۴)$$

$x=-۵$ ، $x=۴$

$x=-۵$ غ ق ق چون در دامنه صدق نمی کند

۱۱- آسان

$$\log E=۱۱/۸+۱/۵M \Rightarrow \log E=۱۱/۸+۱/۵(۷/۴)$$

$$\Rightarrow \log E=۱۱/۸+۱۱/۱ \Rightarrow \log E=۲۲/۹ \Rightarrow E=۱۰^{۲۲/۹}$$

۱- گزینه «۴» متوسط

نقاط برخورد در هر دو معادله صدق می‌کند پس طول‌های داده شده را در $y=x^۲-x$ جایگذاری می‌کنیم تا **y** آن‌ها به دست آید. پس:

$$x=۱ \Rightarrow y=۱-۰ \Rightarrow (۱,۰)\in f$$

$$x=۲ \Rightarrow y=۴-۲=۲ \Rightarrow (۲,۲)\in f$$

$$\begin{aligned}(۱,۰)\in f &\Rightarrow ۰=-۲+۲^{-A-B} \Rightarrow ۲=۲^{-A-B} \Rightarrow \\ (۲,۲)\in f &\Rightarrow -۲+۲^{-۲A-B} \Rightarrow ۲^۲=۲^{-۲A-B} \Rightarrow\end{aligned}\begin{cases}-A-B=۱\\-۲A-B=۲\end{cases}$$

با حل دستگاه به دست آمده $A=-۱$ و $B=۰$ خواهد بود پس:

$$f(۳)=-۲+(\frac{۱}{۲})^{-۱(۳)}=-۲+۸=۶$$

۲- گزینه «۱» متوسط

ابتدا معادله نمایی را حل می‌کنیم پس:

$$(\frac{\cancel{۴}}{\cancel{۱۰}})^{۲x-۱}=(\frac{۵^۳}{۲^۳})^{x^۲}$$

$$(\frac{۲}{۵})^{۲x-۱}=(\frac{۵}{۲})^{۳x^۲} \Rightarrow (\frac{۵}{۲})^{-۲x+۱}=(\frac{۵}{۲})^{۳x^۲} \Rightarrow ۳x^۲=-۲x+۱$$

$$۳x^۲+۲x-۱=۰$$

چون $a+b=c$ پس: $x_1=-1$, $x_2=\frac{-c}{a}=\frac{1}{3}$

ریشه ۱- در لگاریتم آرگومان را منفی می‌کند قابل‌قبول نیست درنتیجه با $x=\frac{1}{3}$ داریم:

$$\log_8 4=\log_{2^3}2^2=\frac{2}{3}$$

۳- گزینه «۲» متوسط

مجانب ریشه آرگومان است پس $U(x)=x+1$ خواهد بود اما با توجه به شکل که نزولی است و با توجه به مبنای بزرگ‌تر از یک در log متوجه می‌شویم که شکل نسبت به محور xها قرینه شده است پس $-\log_2(x+1)$ در شکل داده شده است و درنتیجه خواهیم داشت:

$$y=\log_2(x+1)^{-1}$$

۴- گزینه «۱» دشوار

اگر در هر ۳۰ روز $\frac{1}{10}$ جرم باقی‌مانده را از دست بدهد پس ۰/۹ جرم باقی می‌ماند پس با توجه به فرمول داریم:

$$f(t)=m_0(a)^{\frac{t}{T}} \Rightarrow 8=24(0/9)^{\frac{t}{30}} \Rightarrow \frac{1}{3}=(0/9)^{\frac{t}{30}}$$

$$\log_{0/9}\frac{1}{3}=\frac{t}{30} \quad *$$

ابتدا حاصل لگاریتم $\log_{0/9}\frac{1}{3}$ را به دست آوریم:

$$\log_{0/9}\frac{1}{3}=\frac{1}{\log_{\frac{1}{3}}\frac{9}{10}}=\frac{1}{\log_{3^{-1}}3^2-\log_{3^{-1}}10}=\frac{1}{-2+\frac{100}{48}}=12$$

$$\xrightarrow{\text{جایگذاری در } *} 12=\frac{t}{30} \Rightarrow t=360$$

۵- گزینه «۱» آسان

با استفاده از تغییر مبنا داریم:

$$\frac{\log_4 6}{\log_4 12}=\frac{\log_4 2+\log_4 3}{\log_4 4+\log_4 3}=\frac{\frac{1}{2}+\frac{8}{10}}{1+\frac{8}{10}}=\frac{13}{18}$$

۶- گزینه «۲» متوسط

با توجه به تحلیل تابع $f(x)$ داریم: $f(x)=-4+2^{ax}\times 2^b$

مجانب نمودار ۴-، محل برخورد با محور **x**ها، $-\frac{1}{3}$ و محل برخورد با محور **y**ها، ۲- است پس:

$$x=0 \Rightarrow y=-2 \Rightarrow -2=-4+2^b \Rightarrow 2=2^b \Rightarrow b=1$$

$$y=0 \Rightarrow x=-\frac{1}{3} \Rightarrow 0=-4+2^{-\frac{1}{3}a+1} \Rightarrow 2^2=2^{-\frac{1}{3}a+1}$$

$$2=-\frac{1}{3}a+1 \Rightarrow 1=-\frac{1}{3}a \Rightarrow a=-3$$

$$f(-\frac{5}{3})=-4+2^{-3(-\frac{5}{3})+1}=-4+2^6=-4+64=60$$

۷- گزینه «۴» دشوار

$f^{-1}(2)$ به معنای آن است که در تابع $f(x)$ خروجی را ۲ قرار دهیم پس:

$$2=\frac{2^x+(\frac{1}{2})^x}{2} \xrightarrow{2^x=t} 4=t+\frac{1}{t} \Rightarrow t^2-4t+1=0$$

$$\Delta=b^2-4ac \Rightarrow \Delta=16-4=12 \Rightarrow t=\frac{4\pm2\sqrt{3}}{2}=2\pm\sqrt{3}$$

حواستون باشه که $2-\sqrt{3}$ حدود ۰/۳ هست پس $\log_2 2-\sqrt{3}$ عددی منفی خواهد بود. پس:

$$x=\log_2 2+\sqrt{3}$$

۸- گزینه «۴» دشوار

ابتدا تجزیه اعداد $147=7\times21$ و $1323=21^2\times3$ را جایگزین می‌کنیم:

$$(\log_{21}3)^2+(\log_{21}7\times21)(\log_{21}21^2\times3)$$

$$=(\log_{21}3)^2+(\log_{21}7+1)(\log_{21}3+2)$$

$$\xrightarrow{\log_{21}3=1-\log_{21}7} (\log_{21}3)^2+(1-\log_{21}3+1)(\log_{21}3+2)=$$

$$\xrightarrow{\log_{21}3=t} t^2+(2-t)(2+t)=t^2+4-t^2=4$$

۹- گزینه «۲» آسان

ابتدا ضابطه را ساده کنید:

$$f(x)=3^{2\log_3 x}=3^{\log_3 x^2}=x^2$$

با توجه دامنه $\log_3 x$ خواهیم داشت: $x>0$ پس گزینه ۲ پاسخ است.

۱۰- گزینه «۲» متوسط

از صورت 3^x و از موج 2^x را فاکتور می‌گیریم:

$$\frac{3^x(1+3+9+27+81+243)}{2^x(\frac{1}{4}+\frac{1}{2}+1+2+4+8)}=52$$

$$(\frac{3}{2})^x(\frac{364}{\frac{63}{4}})=52 \Rightarrow (\frac{3}{2})^x=\frac{52\times63}{364\times4} \Rightarrow (\frac{3}{2})^x=\frac{9}{4}=(\frac{3}{2})^2 \Rightarrow x=2$$

۱۱- گزینه «۱» متوسط

اگر $\log_x y = t$ درنظر بگیریم.

$$t - \frac{۲}{t} = ۱$$

$$t^۲ - t - ۲ = ۰$$

$$(t-۲)(t+۱) = ۰ \Rightarrow \begin{matrix} t = ۲ \Rightarrow \log_x y = ۲ \Rightarrow x^۲ = y \\ t = -۱ \Rightarrow \log_x y = -۱ \Rightarrow y = x^{-۱} \end{matrix}$$

$$\Rightarrow y = \frac{۱}{x} \Rightarrow xy = ۱$$

۱۲- گزینه «۳» دشوار

اگر $۵^x = ۱۰$ را لگاریتم‌دار بنویسیم خواهیم داشت:

$$\log_۵ ۱۰ = x$$

همچنین $۲^{f(x)} = ۲۰$ را اگر لگاریتم‌دار بنویسیم:

$$f(x) = \log_۲ ۲۰ = \log_۲ ۲^۲ + \log_۲ ۵$$

$$f(x) = ۲ + \frac{\log_{۱۰} ۵}{\log_{۱۰} ۲} = ۲ + \frac{\frac{۱}{x}}{۱ - \frac{۱}{x}} = ۲ + \frac{\frac{۱}{x}}{\frac{x-۱}{x}} = ۲ + \frac{۱}{x-۱} = \frac{۲x-۱}{x-۱}$$

۱۳- گزینه «۱» متوسط

ابتدا $\log_۸ ۱۸ = m$ را ساده کنیم.

$$\log_۸ ۱۸ = \log_{۲^۳} ۲ \times ۳^۲ = \log_{۲^۳} ۲ + \log_{۲^۳} ۳^۲ = \frac{۱}{۳} + \frac{۲}{۳}\log_۲ ۳ = m$$

$$\Rightarrow \frac{۲}{۳}\log_۲ ۳ = m - \frac{۱}{۳} \Rightarrow \log_۲ ۳ = \frac{۳}{۲}m - \frac{۱}{۲}$$

$$\log_۴ ۲^۲ \times ۳ = \log_۴ ۲^۲ + \log_{۲^۲} ۳ = ۱ + \frac{۱}{۲}\log_۲ ۳$$

$$= ۱ + \frac{۱}{۲}(\frac{۳}{۲}m - \frac{۱}{۲}) = ۱ + \frac{۳}{۴}m - \frac{۱}{۴} = \frac{۳}{۴}(m+۱)$$

۱۴- گزینه «۳» آسان

$$f(۰,۰) \Rightarrow ۰ = a + b(\frac{۱}{۲})^۰ \Rightarrow ۰ = a + b$$

$$f(-۱,-۱) \Rightarrow -۱ = a + ۲b \Rightarrow -۱ = a + ۲b$$

با حل دستگاه $b = -۱$ و $a = ۱$ است پس:

$$a - b = ۱ - (-۱) = ۲$$

۱۵- گزینه «۲» دشوار

محل برخورد با محور yها به معنای $x = ۰$ است پس:

$$g^{-۱}(f^{-۱}(۰)) = \alpha$$

$$(۰, f^{-۱}(۰)) \in f^{-۱} \Rightarrow (f^{-۱}(۰), ۰) \in f \Rightarrow \log_{۱۰} ۲x - ۵ = ۰$$

$$\Rightarrow ۲x - ۵ = ۱۰^۰ \Rightarrow x = ۳$$

$$(۳,۰) \in f \Rightarrow (۰,۳) \in f^{-۱}$$

$$g^{-۱}(۳) = \alpha \Rightarrow (۳,a) \in f^{-۱} \Rightarrow (\alpha,۳) \in f$$

$$\Rightarrow ۳ = \alpha + \sqrt{۲\alpha - ۴} \Rightarrow ۳ - \alpha = \sqrt{۲\alpha - ۴}$$

$$\xrightarrow[۳-\alpha>۰ \Rightarrow ۳>\alpha]{\text{دامنه رادیکال } ۲\alpha-۴>۰ \Rightarrow \alpha>۲} ۹ + \alpha^۲ - ۶\alpha = ۲\alpha - ۴ \Rightarrow \alpha^۲ - ۸\alpha + ۱۳ = ۰$$

$$\Delta = ۶۴ - ۴(۱۳) = ۱۲$$

$$\alpha = \frac{۸ \pm ۲\sqrt{۳}}{۲} \begin{cases} ۴ + \sqrt{۳} & \text{غ ق ق} \\ ۴ - \sqrt{۳} & \text{ق ق} \end{cases}$$

۱۶- گزینه «۱» متوسط

چون نقطه‌ای به طول ۱ محل برخورد دو نمودار است پس در دو ضابطه صدق می‌کند پس:

$$y = -x^۲ - ۳x + ۸ \xrightarrow{x=۱} y = -۱ - ۳ + ۸ = +۴$$

$$\Rightarrow (۱,۴) \in g \Rightarrow (۱,۴) \in f$$

$$۴ = ۲ + ۲^{b-a} \Rightarrow ۲^۱ = ۲^{b-a} \Rightarrow b - a = ۱$$

$$(۱۰,-۱) \in f^{-۱} \Rightarrow (-۱,۱۰) \in f \Rightarrow ۱۰ = ۲ + ۲^{b+a}$$

$$\Rightarrow ۲^۳ = ۲^{b+a} \Rightarrow b + a = ۳$$

با حل دستگاه دو جواب خواهیم داشت. $b = ۲$ و $a = ۱$ پس:

$$۲b - a = ۲(۲) - ۱ = ۳$$

۱۷- گزینه «۴» متوسط

در معادله‌های داده شده **s** و **p** جدید و **s** و **p** قدیمی با یکدیگر برابرند پس:

$$S_{\text{جدید}} = \alpha\beta^۲ + \alpha\beta^۲ = \alpha\beta(\alpha+\beta) = S_{\text{ق}}P_{\text{ق}} = \frac{۴}{a}\cdot\frac{۸}{a} = \frac{۳۲}{a^۲}$$

$$S_{\text{جدید}} = S_{\text{قدیمی}} \Rightarrow \frac{۳۲}{a^۲} = \frac{۸}{a} \Rightarrow a = ۴$$

$$\log_{\sqrt{۲}} ۴ = \log_{۲^{\frac{۱}{۲}}} ۲^۲ = ۴$$

۱۸- گزینه «۱» متوسط

ابتدا با استفاده از تغییر مبنا داریم:

$$\frac{\log_n m^۲ n}{\log_n mn} = b \Rightarrow \frac{\log_n m^۲ + \log_n n}{\log_n m + \log_n n} = \frac{۲a+۱}{a+۱}$$

$$= \frac{a}{a+۱} + \frac{a+۱}{a+۱} = \frac{a}{a+۱} + ۱$$

این عبارت چون $a > ۰$ است، عددی بین ۱ تا ۲ به ما می‌دهد پس $۱ < b < ۲$.

در نتیجه براکت عددی بین ۱ و ۲ برابر ۱ است و $[b] = ۱ \leftarrow ۱ < b < ۲$

۱۹- گزینه «۱» دشوار

$$\frac{1}{6}A = A(\frac{8}{9})^t \Rightarrow 6 = (\frac{9}{8})^t \Rightarrow \log_5 6 = t\log_5 \frac{9}{8}$$

$$\Rightarrow \log_5 2 + \log_5 3 = t(\log_5 9 - \log_5 8)$$

$$\frac{1}{2/4} + \frac{1}{1/4} = t(2\log_5 3 - 3\log_5 2)$$

$$\frac{5}{12} + \frac{5}{7} = t(\frac{10}{7} - \frac{15}{12}) \Rightarrow \frac{1}{12} + \frac{1}{7} = t(\frac{2}{7} - \frac{3}{12})$$

$$\Rightarrow t = \frac{19}{3} \text{ ساعت} = 380 \text{ دقیقه}$$

۲۰- گزینه «۴» دشوار

$$\log 30 = \log 3\times 2\times 5 = \log 3 + \log 2 + 1 - \log 2$$

$$= 0/4 + 0/3 + 0/7 = 1/4$$

$$\log 5 - \log 6 = 1 - \log 2 - \log 6 = 1 - 0/3 - 0/7 = 0$$

$$\frac{14}{10}x^2 + \frac{14}{10}x = 0 \Rightarrow \frac{14}{10}x(x+1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -1 \end{cases}$$

اختلاف ریشه‌ها ۱ واحد است.

۱- گزینه «۳»

$$3^{x^2-2} = 3^{4x} \Rightarrow x^2 - 2 = 4x \Rightarrow x^2 - 4x - 2 = 0 \xrightarrow{\text{تبدیل به مربع کامل}}$$

$$x^2 - 4x + 4 - 6 = 0 \Rightarrow (x-2)^2 - 6 = 0 \Rightarrow (x-2) = \sqrt{6}$$

$$\log_6 \sqrt{6} = \frac{1}{2}\log_6 6 = \frac{1}{2}$$

۲- گزینه «۲»

ابتدا سعی در پیدا کردن **a** و **b** داریم: محل برخورد با محور **x**ها ← $y = 0$ و $x = 2$

$$0 = -1 + \log_b 4 + a \Rightarrow \log_b 4 + a = 1 \Rightarrow b = 4 + a$$

مجانب از ریشه‌ی آرگومان به‌دست می‌آید. پس:

$$2x + a = 0 \xrightarrow{x = +\frac{1}{2}} 2(\frac{1}{2}) + a = 0 \Rightarrow a = -1$$

با این دو اطلاعات $a = -1$ و $b = 3$ پس:

$$y = -1 + \log_3 2x - 1 \xrightarrow{y=1} 1 = -1 + \log_3 2x - 1 = 2$$

$$\Rightarrow 9 = 2x - 1 \Rightarrow 10 = 2x \Rightarrow x = 5$$

۳- گزینه «۳»

محل برخورد دو تابع $x = 1$ و $x = 3$ است. پس این دو مقدار در هر دو تابع صدق می‌کند.

$$\left.\begin{array}{l} 3^{Ax+B} = x^2 \Rightarrow 3^{3A+B} = 3^2 \Rightarrow 3A + B = 2 \\ 3^{A+B} = 1 = 3^0 \Rightarrow A + B = 0 \Rightarrow A = -B \end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow -3B + B = 2 \Rightarrow -2B = 2$$

$$B = -1$$

$$A = 1$$

$$f(x) = 3^{x-1} \xrightarrow[\text{با محور yها}]{\text{محل برخورد}} f(0) = 3^{0-1} = 3^{-1} = \frac{1}{3}$$

۴- گزینه «۲»

اگر غلظت اولیه را A_0 درنظر بگیریم غلظت پس از گذشت مدتی به $\frac{1}{3}A_0$ می‌رسد پس همچنین در هر مرحله غلظت محلول ۹۶٪ غلظت محلول قبلی است پس بعد از **n** مرحله غلظت محلول برابر $(0/96)^n$ برابر محلول اولیه است پس:

$$(0/96)^n A_0 = \frac{1}{3}A_0 \Rightarrow (0/96)^n = \frac{1}{3} \Rightarrow \log(0/96)^n = \log\frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow n\log 0/96 = -\log 3$$

$$n = \frac{-\log 3}{\log 96 - \log 100}$$

$$\Rightarrow n = \frac{-\log 3}{-2 + 5\log 2 - \log 3} = \frac{-0/48}{-2 + 5(0/3) - (0/48)} = 24$$

۵- گزینه «۱»

در شکل محل برخورد با محور**x** و **y** را داده است پس:

محل برخورد با محور xها $\Rightarrow y = 0 \Rightarrow 0 = -9 + (\frac{1}{3})^{\frac{1}{2}a+b} \Rightarrow 3^2 = 3^{-\frac{1}{2}a-b}$

$$2 = -\frac{1}{2}a - b$$

محل برخورد با محور y ها $\Rightarrow x = 0 \Rightarrow -6 = -9 + (\frac{1}{3})^b$

$$\Rightarrow 3^1 = 3^{-b} \Rightarrow b = -1$$

$$2 = -\frac{1}{2}a + 1 \Rightarrow 1 = \frac{-a}{2} \Rightarrow a = -2$$

$$f(2) = -9 + (\frac{1}{3})^{-2(2)-1} = -9 + (\frac{1}{3})^{-5} = -9 + 243 = 234$$

۶- گزینه «۲»

با تغییر مبنا شروع می‌کنیم:

$$\log_{۱۸}۸=\frac{\log_۳ ۸}{\log_۳ ۱۸}=\frac{\log_۳ ۲^۳}{\log_۳ ۲+\log_۳ ۹}$$

$$=\frac{۳\log_۳ ۲}{\log_۳ ۲+۲}=\frac{۳(\frac{۵}{۸})}{\frac{۵}{۸}+۲}=\frac{\frac{۱۵}{۸}}{\frac{۲۱}{۸}}=\frac{۱۵}{۲۱}=\frac{۵}{۷}$$

۷- گزینه «۳»

$$۲=\frac{۲^x-(\frac{۱}{۲})^x}{۲}\Rightarrow ۲^۲=۲^x-(\frac{۱}{۲})^x \xrightarrow{۲^x=t} ۴=t-\frac{۱}{t}$$

$$۴t=t^۲-۱\Rightarrow ۰=t^۲-۴t-۱\Rightarrow \Delta=۱۶-۴(-۱)=۲۰$$

$$t=\frac{۴\pm ۲\sqrt{۵}}{۲}=۲+\sqrt{۵}$$

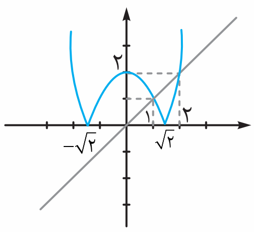
$$۲^x=۲+\sqrt{۵}\Rightarrow \log_۲ ۲+\sqrt{۵}=x$$

۸- گزینه «۴»

دامنه تابع $y=\log_b^{۹}$ $\begin{cases} a>۰ \\ b>۰ \\ b\neq ۱\end{cases}$

$$|x^۲-۲|-x>۰\Rightarrow |x^۲-۲|>x$$

با رسم هندسی داریم:



توجه کنید محل برخورد دو شکل $x=۱$ و $x=۲$ است.

که با توجه به رسم نواحی که $|x^۲-۲|$ بالاتر از **x** است جواب برابر $(-\infty,۱)\cup(۲,+\infty)$ است.

حواستون باشه‌ها!

این سؤال را با رد گزینه نیز می‌توان پاسخ داد.

۹- گزینه «۳»

$$۲\log_۹^۹+\log_a^{\sqrt{۹}}=۲\Rightarrow ۲\log_۹^۹+\frac{۱}{۲}\log_a^۹=۲$$

$$\xrightarrow{\log_۹^a=t} ۲t+\frac{۱}{۲t}=۲ \xrightarrow{(\times ۲t)} ۴t^۲+۱=۴t$$

$$\Rightarrow ۴t^۲-۴t+۱=۰\Rightarrow (۲t-۱)^۲=۰\Rightarrow t=\frac{۱}{۲}$$

$$\log_۹^a=\frac{۱}{۲}\Rightarrow (۹)^{\frac{۱}{۲}}=a\Rightarrow a=۳$$

۱۰- گزینه «۱»

$$y=۲^{x+|x|}\xrightarrow[\text{جهت منفی}(x+۳)]{\text{۳ واحد محور xها در}} y=۲^{x+۳+|x+۳|}\xrightarrow[\text{۲ واحد جهت منفی}]{\text{محل yها}}$$

$$y=۲^{x+۳+|x+۳|}-۲\xrightarrow[y=۰]{\text{محل برخورد با محور xها}}۲=۲^{x+۳+|x+۳|}$$

$$x+۳+|x+۳|=۱\Rightarrow |x+۳|=-x-۲\xrightarrow[-۲>x]{\text{با شرط } -x-۲>۰}$$

(طرفین به توان ۲)

$$x^۲+۶x+۹=x^۲+۴x+۴\Rightarrow ۲x=-۵\Rightarrow x=-\frac{۵}{۲}$$

چون $-\frac{۵}{۲}<-۲$ است پس در شرط صدق می‌کند و قابل قبول است.

۱۱- گزینه «۳»

$$۲^{x+۳}=۴^x+۱۵\Rightarrow ۲^x\times ۲^۳=۴^x+۱۵\xrightarrow{۲^x=t}$$

$$۸t=t^۲+۱۵\Rightarrow t^۲-۸t+۱۵=۰\Rightarrow (t-۳)(t-۵)=۰$$

$$t=۳,t=۵\Rightarrow ۲^x=۳,۲^x=۵\Rightarrow \log_۲^۳=x_۱,\log_۲^۵=x_۲$$

$$x_۱+x_۲=\log_۲^۳+\log_۲^۵=\log_۲^{۱۵}$$

۱۲- گزینه «۱»

$$\frac{۱}{\log_c a}+\frac{۱}{\log_c b}=۱\Rightarrow \frac{\log_c b+\log_c a}{\log_c a\log_c b}=۱$$

$$\frac{\log_c ab}{\log_c a\log_c b}=۱\Rightarrow \log_c ab=\log_c a\cdot\log_c b$$

۱۳- گزینه «۲»

ابتدا سعی می‌کنیم عبارت $a^۲+۹b^۲=۱۰ab$ را ساده کنیم:

$$a^۲+۶ab+۹b^۲=۱۰ab+۶ab\Rightarrow (a+۳b)^۲=۱۰ab+۶ab$$

$$\Rightarrow a+۳b=\sqrt{۱۰ab+۶ab}$$

پس:

$$\frac{a+۳b}{۴}=\frac{\sqrt{۱۶ab}}{۴}=ab$$

پس:

$$\log_{۱۰}ab=\log_{۱۰}۹+\log_{۱۰}b$$

۱۴- گزینه «۴»

این سؤال در ۱۴۰۰ سؤالی بود که گزینه‌های اشتباه نوشته شده بود:

$$\log_۲ ۳<\log_{\frac{۱}{۲}}(\frac{۱}{۱۲+\sqrt{[x]}-[x]})-۱<\log_۲ ۵$$

$$\log_۲ ۳+۱<\log_۲ ۱۲+\sqrt{[x]}-[x]<\log_۲ ۵+۱$$

$$\log_۲ ۶<\log_۲ \frac{۴۹}{۴}-(\sqrt{[x]}-\frac{۱}{۲})^۲<\log_۲ ۱۰$$

$$۶<\frac{۴۹}{۴}-(\sqrt{[x]}-\frac{۱}{۲})^۲<۱۰\Rightarrow \frac{۳}{۲}<\sqrt{[x]}-\frac{۱}{۲}<\frac{۵}{۲}\Rightarrow$$

$$۲<\sqrt{[x]}<۳\Rightarrow ۴<[x]<۹\Rightarrow ۵\le x<۹\Rightarrow [۵,۹)$$

۱۵- گزینه «۳»

با توجه به دو اطلاعات داده شده:

$$\log_{۲}^{۳} = a \Rightarrow ۲^{۹} = ۳$$

$$\log_{۸}^{b} = \frac{۲+۲a}{۳} \Rightarrow (۲^{۳})^{\frac{۲+۲a}{۳}} = b \Rightarrow ۲+۲a = b \Rightarrow ۲^{۲} \times ۲^{۲a} = b$$

$$۴ \times (۲^{a}) = b \Rightarrow ۴ \times ۳^{۲} = b \Rightarrow ۳۶ = b$$

$$\log^{۳(۳۶)-۸} = \log_{۱۰}^{۱۰۰} = ۲$$

۱۶- گزینه «۱»

$$۱ = \sqrt[۳]{۲^{\frac{۱}{۲}a+b}} \Rightarrow ۱ = ۲^{\frac{a}{۲}+b} \Rightarrow \frac{a}{۲}+b = ۰ \Rightarrow b = -\frac{a}{۲} \Rightarrow a = -۲b$$

$$f^{-۱}(۸) = ۵ \Rightarrow (۸,۵) \in f^{-۱} \Rightarrow (۵,۸) \in f$$

$$۸ = \sqrt[۳]{۲^{۵a+b}} \Rightarrow ۲^{۳} = \sqrt[۳]{۲^{-۱۰b+b}} \Rightarrow ۲^{۹} = ۲^{-۹b} \Rightarrow ۹ = -۹b \Rightarrow -۱ = b$$

$$a = ۲$$

$$a - b = ۲ - (-۱) = ۳$$

۱۷- گزینه «۳»

۱۲/۵ درصد را از دست بدهد یعنی ۸۷/۵ درصد آن باقی خواهد ماند پس بعد از **n** مرحله

$$(\frac{۸۷/۵}{۱۰۰})^{n} A_{۰} = \frac{۱}{۷} A_{۰} \Rightarrow (\frac{۸۷/۵}{۱۰۰})^{n} = \frac{۱}{۷} \Rightarrow (\frac{۸۷۵}{۱۰۰۰})^{n} = \frac{۱}{۷}$$

$$n = \log_{\frac{۸۷۵}{۱۰۰۰}} \frac{۱}{۷} = \log_{\frac{۷\times۵^{۳}}{۱۰^{۳}}} ۷^{-۱} = \frac{۱}{\log_{۷^{-۱}} \frac{۱۰^{۳}}{۷\times۵^{۳}}}$$

$$= \frac{۱}{\log_{۷^{-۱}} \frac{۱}{۷} + \log_{۷^{-۱}} ۲^{۳}} = \frac{۱}{۱+(-۳)\log_{۷} ۲} = \frac{۱}{۱+(-۳)\frac{\log_{۳} ۲}{\log_{۳} ۷}}$$

$$= \frac{۱}{۱+(-۳)\frac{\frac{۱۰}{۱۶}}{\frac{۱۰}{۶}}} = \frac{۱}{۱+(-۳)(\frac{۶}{۱۶})} = \frac{۱}{۱-\frac{۱۸}{۱۶}} = \frac{۱}{\frac{۲}{۱۶}} = ۸$$

که ۸ هفته معادل ۵۶ روز است.

۱۸- گزینه «۲»

$$\log_{۸} x + ۴\log_{x^{۳}} ۲ = \frac{۱}{۳}\log_{۲} x + \frac{۴}{۳}\log_{x} ۲$$

رابطهٔ مهم $ax + \frac{b}{x} \geq ۲\sqrt{ab}$ را می‌دانیم پس:

$$\frac{۱}{۳}\log_{۲} x + \frac{۴}{۳}\log_{x} ۲ \geq ۲\sqrt{\frac{۱}{۳}\log_{۲} x \times \frac{۴}{۳}\log_{x} ۲}$$

$$\frac{۱}{۳}\log_{۲} x + \frac{۴}{۳}\log_{x} ۲ \geq ۲(\frac{۲}{۳}) \xrightarrow{\text{پس}}$$

$$\frac{۱}{\sqrt{\frac{۱}{۳}\log_{۲} x + \frac{۴}{۳}\log_{x} ۲}} \geq \frac{۱}{\sqrt{\frac{۴}{۳}}} \Rightarrow \frac{۱}{\sqrt{\frac{۱}{۳}\log_{۲} x + \frac{۴}{۳}\log_{x} ۲}} \leq \frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

۱۹- گزینه «۲»

اختلاف ریشه‌ها از رابطه $\sqrt{s^{۲}-۴p}$ به دست می‌آید پس:

$$S = \frac{-b}{a} = \frac{-\log ۹}{\log \frac{۵}{۳}} = \frac{-\log ۳^{۲}}{\log ۵ - \log ۳} = \frac{-۲\log ۳}{۱-\log ۲ - \log ۳}$$

$$= \frac{-۲(۰/۴)}{۱-۰/۳-۰/۴} = \frac{-۰/۸}{۰/۳} = -\frac{۸}{۳}$$

$$p = \frac{c}{a} = \frac{-\log ۱۵}{\log \frac{۵}{۳}} = \frac{-(\log ۳ + \log ۵)}{\log ۵ - \log ۳} = \frac{-(۰/۴+۰/۷)}{۰/۷-۰/۴}$$

$$= \frac{-۱/۱}{۰/۳} = \frac{-۱۱}{۳}$$

اختلاف ریشه‌ها $= \sqrt{s^{۲}-۴p} = \sqrt{\frac{۶۴}{۹} - ۴(\frac{-۱۱}{۳})} = \sqrt{\frac{۶۴}{۹} + \frac{۴۴}{۳}}$

$$= \sqrt{\frac{۱۹۶}{۹}} = \frac{۱۴}{۳}$$

۲۰- گزینه «۴»

تابع **f** مجموع دو تابع نزولی است که به توان فرد رسیده پس تابع **f** نزولی است پس:

$$(fof)(x) < f(۲^{-۳x}) \Rightarrow f(f(x)) < f(۲^{-۳x})$$

$$f(x) > ۲^{-۳x} = (۲^{-x})^{۳}$$

$$((\frac{۱}{۲})^{x} + \log_{۰/۵} x)^{۳} > (۲^{-x})^{۳} \Rightarrow (\frac{۱}{۲})^{x} + \log_{۰/۵} x > ۲^{-x}$$

$$\log_{۰/۵} x > ۰ \Rightarrow \log_{۰/۵} x > \log_{۰/۵} ۱ \Rightarrow x < ۱$$

همچنین با توجه به دامنه لگاریتم $x > ۰$ پس:

$$x \in (۰,۱)$$