

آسان

-۴

با در نظر گرفتن $\pi = 3/14$ داریم:

$$۱) ۱ \text{ rad} = \frac{360^\circ}{2\pi} \simeq 57/3^\circ$$

$$۲) 3 \text{ rad} = 3(57/3^\circ) = 171/9^\circ$$

$$۳) 5 \text{ rad} = 5(57/3^\circ) = 286/5^\circ$$

آسان

-۵

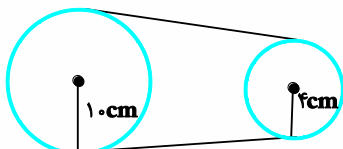
$$\alpha = \frac{\cancel{360}^\circ}{\cancel{2\pi}} \pi = \frac{\pi}{9} \text{ rad} \quad \text{برای تبدیل درجه به رادیان داریم:}$$

و برای محاسبه طول کمان فرمول $L = r\theta$ را داریم که r شعاع دایره و θ زاویه مرکزی روبه رو به کمان برحسب رادیان هست.

$$L = 2 \times \frac{\pi}{9} = \frac{2\pi}{9} \text{ cm}$$

متوسط

-۶



می‌دونیم که قرقره‌ها با تسمه بهم وصل هستند و بنابراین هر چقدر یکی از قرقره‌ها بچرخه و مسافت L رو طی کنه، قرقره دوم هم همون مسافت رو با همان طول L طی می‌کنه و فقط زاویه چرخش آن‌ها متفاوت هست (بخاطر تفاوت طول شعاع) پس:

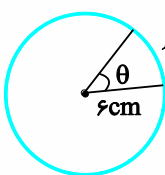
$$L_1 = L_2 \xrightarrow{L=r\theta} r_1\theta_1 = r_2\theta_2 \Rightarrow \frac{5}{2} \times \frac{\pi}{4} = 4\theta_2$$

$$\Rightarrow \theta_2 = \frac{\frac{5}{2} \times \pi}{4} = \frac{5\pi}{8} \text{ rad}$$

پس قرقره کوچک‌تر به اندازه $\frac{5\pi}{8}$ رادیان می‌چرخه.

متوسط

-۷



$$l = \frac{\pi}{4} \text{ rad}$$

قطاع در دایره بخشی از دایره است که توسط دو شعاع و بخشی از محیط دایره (کمان) محدود شده است.

فرمول مساحت قطاع به صورت زیر است:

$$S = \frac{1}{2} r^2 \theta$$

پس با استفاده از فرمول L اندازه زاویه θ را بیابیم و سپس در فرمول S جایگذاری کنیم:

$$L = r\theta \Rightarrow \frac{\pi}{4} = 6\theta \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{24}$$

$$S = \frac{1}{2} (6)^2 \times \frac{\pi}{24} = \frac{36}{24} \times \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$$



سؤالات تشریحی

پاسخنامه

بخش ۱

آسان

-۱

در هر دایره، یک رادیان، اندازه زاویه مرکزی روبه‌روی کمانی از دایره است که طول کمان برابر طول شعاع دایره باشد. نماد رادیان **rad** است. اگر $\pi = 3/14$ در نظر بگیریم، آن‌گاه یک رادیان تقریباً برابر $57/3^\circ$ به دست می‌آید و می‌توان گفت که یک دور دایره مثلثاتی حدوداً ۶ رادیان است. به عبارتی:

$$2\pi \text{ rad} = 360^\circ \Rightarrow 1 \text{ rad} = \frac{360^\circ}{2\pi} \simeq 57/3^\circ$$

آسان

-۲

برای تبدیل درجه به رادیان از فرمول زیر استفاده می‌کنیم:

$$\frac{\pi}{180} = \frac{R}{D}$$

که در آن D نماد درجه و R نماد رادیان است.

$$آ) D = 45^\circ \Rightarrow \frac{\pi}{180} = \frac{R}{D} \Rightarrow R = \frac{45 \times \pi}{180} = \frac{\pi}{4}$$

$$ب) D = 120^\circ \Rightarrow \frac{\pi}{180} = \frac{R}{D} \Rightarrow R = \frac{120 \times \pi}{180} = \frac{2\pi}{3}$$

$$پ) D = 315^\circ \Rightarrow R = \frac{315 \times \pi}{180} \Rightarrow R = \frac{7\pi}{4}$$

$$ت) D = 10^\circ \Rightarrow R = \frac{10 \times \pi}{180} = \frac{\pi}{18}$$

آسان

-۳

برای تبدیل رادیان به درجه هم می‌تونیم از فرمول $\frac{\pi}{180} = \frac{R}{D}$ استفاده کنیم.

اما به راه آسون‌تر اینه که به جای π قرار بدیم 180° و ساده کنیم.

$$۱) \frac{\pi}{20} = \frac{180^\circ}{20} = 9^\circ$$

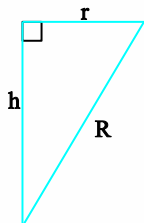
$$۲) \frac{2\pi}{3} = \frac{2 \times 180^\circ}{3} = 120^\circ$$

$$۳) \frac{4\pi}{5} = \frac{4 \times 180^\circ}{5} = 144^\circ$$

متوسط

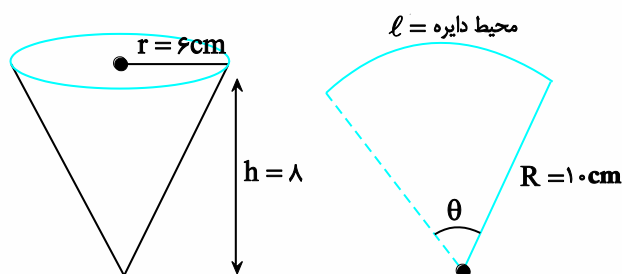
-۱۱

در تبدیل مخروط، به شکل باز شده، همانطوری که از شکل زیر پیداست، طول کمان L برابر محیط قاعده مخروط اولیه است. همچنین شعاع این قطاع از رابطه فیثاغورس در مثلث زیر به دست می آید:



$$\rightarrow R^2 = 6^2 + 8^2 = 100 \rightarrow R = 10$$

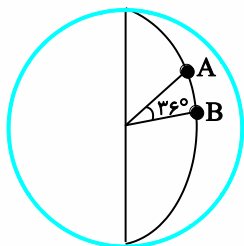
$$\text{ا) } L = 2\pi r = 2\pi(6) = 12\pi \quad \theta = \frac{L}{r} = \frac{12\pi}{10} = \frac{6\pi}{5} \text{ rad}$$



$$\text{ب) } S = \frac{1}{2} r^2 \theta = \frac{1}{2} (10)^2 \times \frac{6\pi}{5} = \frac{180\pi}{5} \times 6\pi = 60\pi$$

متوسط

-۱۲



ابتدا زاویه روبه رو کمان را به تبدیل کنیم:

$$R = \frac{36}{180} \pi = \frac{\pi}{5} \text{ rad} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{5} \text{ rad}$$

$$\Rightarrow AB = r\theta = 6320 \times \frac{\pi}{5} = 1264\pi = 3968/96 \text{ m}$$

$$\simeq 3969 \text{ km}$$

دشوار

-۸

این دو زاویه برحسب درجه رو α و β در نظر می گیریم: $\alpha - \beta = 36^\circ$
چون در نهایت، اندازه زاویه ها رو برحسب درجه خواسته پس رابطه رو هم به درجه تبدیل می کنیم:

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 72^\circ \\ \alpha - \beta = 36^\circ \end{cases}$$

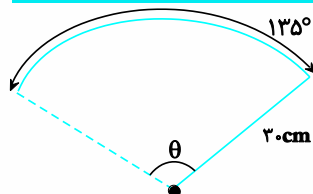
$$2\alpha = 108$$

$$\frac{2\pi}{5} \times \frac{180}{\pi} = 72^\circ \Rightarrow \alpha + \beta = 72^\circ$$

$$\alpha = 54^\circ \Rightarrow 54^\circ + \beta = 72^\circ \Rightarrow \beta = 72 - 54 = 18^\circ$$

متوسط

-۹



$$\text{ا) } \theta = \frac{135}{180} \pi = \frac{3\pi}{4} \text{ rad}$$

ب) اندازه کمان برحسب رادیان $\frac{3\pi}{4}$ است. برای تبدیل به سانتی متر کافیست $\pi = 3/14$ را در نظر بگیریم:

$$L = r\theta = 30 \times \frac{3\pi}{4} = \frac{15}{2} \times 3 \times \frac{3}{14} = 141/3 \text{ cm}$$

ج) مسافتی که نوک برف پاک کن در رفت و برگشت طی می کند، دو برابر طول کمان یعنی $2L$ است:

$$2L = 2(141/3) = 282/6 \text{ cm}$$

د) مساحت پاک شده همان مساحت قطاع دایره ای است که برف پاک کن شعاع آن است:

$$S = \frac{1}{2} r^2 \theta = \frac{1}{2} (30)^2 \times \frac{3\pi}{4} = \frac{900}{2} \times \frac{37 \times 3}{14} = 1059/7 \text{ cm}$$

آسان

-۱۰

گفتیم مساحت قطاع از فرمول $S = \frac{1}{2} r^2 \theta$ به دست میاد پس باید اول θ رو پیدا کنیم. به سراغ فرمول L می رویم:

$$L = r\theta \Rightarrow \theta = \frac{L}{r} = \frac{\pi}{3}$$

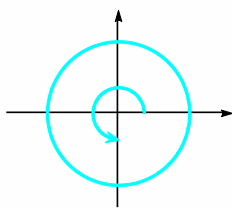
$$S = \frac{1}{2} (3)^2 \times \frac{\pi}{3} = \frac{9}{2} \times \frac{\pi}{3} = \frac{3\pi}{2}$$



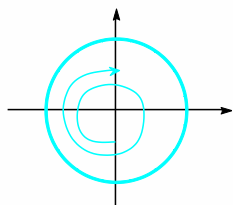
دشوار

۱- گزینه «۲»

$\frac{3\pi}{4}$ دور در خلاف جهت حرکت عقربه‌های ساعت یعنی رسیدن به $\frac{3\pi}{2}$ یا 270° :



حال از همین مکان به اندازه $\frac{1}{5}$ یعنی $\frac{1}{5}$ دور بطور ساعتگرد حرکت می‌کنیم:



و به مکان $\frac{-3\pi}{2}$ میرسیم زیرا، حرکت پادساعتگرد، جهت حرکت مثبت مثلثاتی است اما حرکت ساعتگرد حرکت منفی مثلثاتی است پس:

$$\frac{3\pi}{2} - \frac{1}{5}(2\pi) = \frac{3\pi}{2} - \pi = -\frac{\pi}{2}$$

آسان

۲- گزینه «۳»

باید بررسی کنیم یا جایگذاری اعداد صحیح به جای k ، چند زاویه درون دایره مثلثاتی در یک دور کامل یعنی بین 0° تا 2π به دست می‌آوریم:

$$k=0 \Rightarrow \frac{\pi}{3} \checkmark$$

$$k=1 \Rightarrow \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{3} \checkmark$$

$$k=2 \Rightarrow \frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{3} \checkmark$$

$$k=3 \Rightarrow \pi + \frac{\pi}{3} \checkmark$$

$$k=4 \Rightarrow \frac{4\pi}{3} + \frac{\pi}{3} \checkmark$$

$$k=5 \Rightarrow \frac{5\pi}{3} + \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{1} \checkmark$$

$$k=6 \Rightarrow 2\pi + \frac{\pi}{3} \times$$

شش زاویه را به دست آوردیم، پس این زوایا یک شش ضلعی را مشخص می‌کنند.

متوسط

۱۳-

$$S_{\text{رنگی}} = S_{\text{قطاع}} - S_{\Delta}$$

$$AB = \frac{\pi}{3} \Rightarrow \theta = \frac{AB}{r} = \frac{\frac{\pi}{3}}{2} = \frac{\pi}{6}$$

$$S_{\text{قطاع}} = \frac{1}{2} r^2 \theta = \frac{1}{2} \times 2^2 \times \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$$

زاویه θ برابر 30° است و مثلث متساوی الساقین با طول ساق ۲ است پس:

$$S_{\Delta} = \frac{1}{2} \times 2 \times 2 \times \sin \frac{\pi}{6} = 2 \times \frac{1}{2} = 1$$

دشوار

۱۴-

تعداد کابین‌ها 40° است پس زاویه بین هر دو کابین برابر است با:

$$\frac{2\pi}{40} = \frac{\pi}{20}$$

دوران به اندازه $\frac{47\pi}{10}$ صورت گرفته و داریم:

$$\frac{47\pi}{10} = \frac{40\pi}{10} + \frac{7\pi}{10} = 4\pi + \frac{7\pi}{10}$$

یعنی هر کابین به اندازه دو دور کامل می‌چرخد و سپس به اندازه $\frac{7\pi}{10}$ جلو رفته.

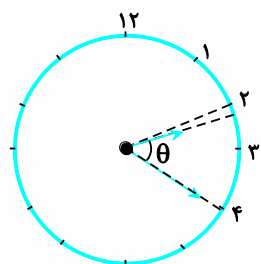
از طرفی داریم:

$$\frac{7\pi}{10} = \frac{14\pi}{20} = 14 \times \frac{\pi}{20}$$

پس به اندازه ۱۴ کابین نسبت به موقعیت اولیه جلو رفته پس کابین شماره ۳ به کابین شماره ۱۷ منتقل می‌شود.

دشوار

۱۵-



در ساعت $2:20'$ ، عقربه دقیقه شمار دقیقاً مقابل عدد ۴ است و عقربه ساعت

شمار بین دو عدد ۲ و ۳ است که به اندازه $\frac{1}{3}$ فاصله بین دو عدد جلو رفته

است (زیرا $20'$ ، یک سوم $60'$ دقیقه (یک دور کامل) است).

زاویه بین هر دو عدد به اندازه $\frac{2\pi}{12}$ یا $\frac{\pi}{6}$ است پس:

$$\theta = 2\left(\frac{\pi}{6}\right) - \frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{18} = \frac{5\pi}{18}$$

۳- گزینه «۳»

آسان

گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

$$(۱): \frac{\text{محیط}}{\text{قطر}} = \frac{2\pi r}{2r} = \pi \Rightarrow \text{مقدار ثابت}$$

$$(۲): \frac{\text{قطر}}{\text{شعاع}} = \frac{2r}{r} = 2 \Rightarrow \text{مقدار ثابت}$$

$$(۳): \frac{AB}{r} = \frac{r\theta}{r} = \theta \Rightarrow \text{در دایره زوایای متفاوتی وجود دارد پس ثابت نیست.}$$

$$(۴): \frac{\text{محیط}}{\text{مساحت}} = \frac{2\pi r}{\pi r^2} = \frac{2}{r} \Rightarrow \text{در یک دایره شعاع ثابت است پس مقدار ثابت است.}$$

۴- گزینه «۱»

متوسط

مکان‌های توقف دو دوندۀ $\frac{3\pi}{8}$ و $\frac{5\pi}{4}$ است. پس فاصله بین زاویه‌های آنها برابر است با:

$$\frac{5\pi}{4} - \frac{3\pi}{8} = \frac{7\pi}{8}$$

شعاع دایره ۱۶ متر است پس:

$$L = r\theta = 16 \times \frac{7\pi}{8} = 14\pi$$

۵- گزینه «۳»

متوسط

مسافت طی شده 6π است یعنی $L = 6\pi$ طول عقربه برابر شعاع دایره است پس: $r = 15\text{cm}$

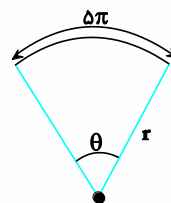
$$\theta = \frac{L}{r} = \frac{6\pi}{15} = \frac{2\pi}{5}$$

یعنی نوک عقربه، زاویه‌ی $\frac{2\pi}{5}$ را طی کرده است. کل دایره 2π است پس $\frac{1}{5}$ کل دایره طی شده است. یک دور کامل ۶۰ دقیقه است پس $\frac{1}{5} \times 60$ یعنی ۱۲ دقیقه زمان گذشته است.

۶- گزینه «۲»

متوسط

اگر مخروط را گسترده کنیم به قطاعی مانند شکل بالا می‌رسیم که طول کمان آن همان محیط قاعده مخروط اولیه است پس محیط آن برابر طول این کمان و دو شعاع است:



$$\text{محیط: } 2r + \Delta\pi = 7\pi \Rightarrow 2r = 2\pi \Rightarrow r = \pi$$

از طرفی طبق رابطه طول کمان داریم:

$$\theta = \frac{L}{r} = \frac{\Delta\pi}{\pi} = \Delta\text{rad}$$

۷- گزینه «۴»

متوسط

$$\frac{\pi}{18}\alpha - \frac{\pi}{3} = \beta$$

$$\frac{\pi}{18} \times \frac{180}{\pi} \beta - \frac{\pi}{3} = \beta$$

$$\Rightarrow 9\beta = \frac{\pi}{3}$$

$$\Rightarrow \beta = \frac{\pi}{27} \text{ rad}$$

۸- گزینه «۲»

متوسط

$$r = 35\text{cm}$$

$$\theta = 80^\circ$$

$$2L = ?$$

$$L = r\theta$$

$$\theta = \frac{80^\circ}{180^\circ} \pi = \frac{4\pi}{9}$$

$$2L = 2 \times 35 \times \frac{4\pi}{9} = \frac{280\pi}{9}$$

۹- گزینه «۳»

متوسط

شعاع چرخ‌ها ۱ متر و ۱۵۰ سانتی‌متر است. ابتدا واحدها را یکی کنیم:

$$r_1 = 1\text{m}$$

$$r_2 = 1/5\text{m}$$

چرخ جلو به اندازه 60° می‌چرخد پس:

$$\theta_1 = \frac{60^\circ \pi}{180^\circ} = \frac{\pi}{3}$$

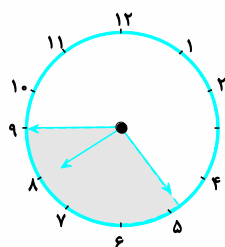
همانطور که قبلاً هم اشاره شد، در حرکت چرخ‌ها، زاویه‌ها متفاوت است اما مسافت طی شده یکسان است پس:

$$L_1 = L_2$$

$$r_1\theta_1 = r_2\theta_2 \Rightarrow 1 \times \frac{\pi}{3} = \frac{1}{5}\theta_2 \Rightarrow \theta_2 = \frac{\frac{\pi}{3}}{\frac{1}{5}} = \frac{5\pi}{3}$$

۱۰- گزینه «۳»

متوسط



در ساعت ۴:۴۰ عقربه ساعت شمار بین دو عدد ۴ و ۵ و در فاصله $\frac{2}{3}$ از ۴ گذشته یا $\frac{1}{3}$ به ۵ نرسیده است. در ۴:۵۰ عقربه ثانیه شمار روی ۹ است و بنابراین زاویه بین عقربه ثانیه شمار و ساعت شمار بصورت زیر است:

$$4\left(\frac{\pi}{6}\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{18} = \frac{13\pi}{18}$$

زاویه در فاصله
بین هر دو عدد

آسان

-۳

$$1) \sin \frac{3\pi}{4} = \sin(\pi - \frac{\pi}{4}) = \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cot(-\alpha) = -\cot \alpha \Rightarrow \cot(-\frac{\pi}{4}) = -\cot \frac{\pi}{4} = -1$$

$$\cot \frac{2\pi}{3} = \cos(120^\circ) = \cos(180^\circ - 60^\circ) = -\cos 60^\circ = -\frac{1}{2}$$

پس داریم:

$$\frac{(\frac{\sqrt{3}}{3})^2 + (\frac{\sqrt{2}}{2})^2}{(-1)^2 - (-\frac{1}{2})^2} = \frac{\frac{1}{3} + \frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{\frac{5}{6}}{\frac{3}{4}} = \frac{10}{9}$$

$$ب) \cos(-90^\circ) = \cos 90^\circ = 0$$

$$\sin(-180^\circ) = -\sin 180^\circ = 0$$

$$\sin(-270^\circ) = -\sin 270^\circ = +1$$

$$\cos(-360^\circ) = \cos 360^\circ = 1$$

$$\frac{0+1}{0-1} = -1 \text{ پس داریم:}$$

متوسط

-۴

$$1) \cos(-210^\circ) + \cot(240^\circ) = \cos 210^\circ + \cot 240^\circ$$

$$= \cos(180^\circ + 30^\circ) + \cot(180^\circ + 60^\circ) = -\cos 30^\circ + \cot 60^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$= \frac{-3\sqrt{3} + 2\sqrt{3}}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{6}$$

$$ب) \sin 63^\circ + \tan(-54^\circ) = \sin(72^\circ - 9^\circ) - \tan(54^\circ)$$

$$2(36^\circ)$$

$$= -\sin 9^\circ - \tan(36^\circ + 18^\circ) = -1 - 0 = -1$$

$$پ) \cos(-72^\circ) + \cot(-60^\circ) + \tan(72^\circ) - \tan(-60^\circ)$$

$$= \cos(2 \times 36^\circ) - \cot(72^\circ - 12^\circ) + \tan(2 \times 36^\circ) + \tan(72^\circ - 12^\circ)$$

$$= \cos 36^\circ + \cot(180^\circ - 60^\circ) + \tan 36^\circ - \tan 180^\circ$$

$$= 1 - \frac{\sqrt{3}}{3} + 0 + \sqrt{3} = \frac{3 - \sqrt{3} + 3\sqrt{3}}{3} = \frac{3 + 2\sqrt{3}}{3}$$

$$د) \sin \frac{25\pi}{3} - \cos \frac{23\pi}{4} = \sin(8\pi + \frac{\pi}{3}) - \cos(6\pi - \frac{\pi}{4})$$

$$= \sin \frac{\pi}{3} - \cos \frac{\pi}{4} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$ه) \frac{\sin \frac{3\pi}{4} - \cos \frac{5\pi}{6}}{\sin(-\frac{3\pi}{4}) + \tan(-\frac{4\pi}{3})} = \frac{\sin(\pi - \frac{\pi}{4}) - \cos(\pi - \frac{\pi}{6})}{-\sin(\pi - \frac{\pi}{4}) - \tan(\pi + \frac{\pi}{3})}$$

$$= \frac{\sin \frac{\pi}{4} + \cos \frac{\pi}{6}}{-\sin \frac{\pi}{4} - \tan \frac{\pi}{3}} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}}{-\frac{\sqrt{2}}{2} - \sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{2} + \sqrt{3}}{\sqrt{2} + 2\sqrt{3}}$$



سؤالات تشریحی

پاسخنامه

بخش ۲

آسان

-۱

آ) اولین اتحادی که در مثلثات رابطه بین سینوس و کسینوس رو نشون میده این هست:

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow \cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha$$

$$\Rightarrow \cos^2 \alpha = 1 - (-\frac{1}{3})^2 = 1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9} \Rightarrow \cos \alpha = \pm \sqrt{\frac{8}{9}} = \pm \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

در ربع سوم علامت کسینوس منفی است پس: $\cos \alpha = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$

ب) با داشتن $\sin \alpha$, $\cos \alpha$ می توان نوشت:

$$\tan \alpha + \cot \alpha = \frac{-\frac{1}{3}}{-\frac{2\sqrt{2}}{3}} + \frac{-\frac{2\sqrt{2}}{3}}{-\frac{1}{3}} = \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{1+2\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}$$

آسان

-۲

از اونجایی که میدونیم $\tan \alpha$, $\cot \alpha$ معکوس هم هستند پس:

$$\tan \alpha = -\frac{1}{2}$$

از طرفی طبق اتحاد $1 + \cot^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$ داریم:

$$1 + (-2)^2 = \frac{1}{\sin^2 \alpha} \xrightarrow{\text{معکوس}} \sin^2 \alpha = \frac{1}{5}$$

$$\Rightarrow \sin \alpha = \pm \sqrt{\frac{1}{5}}$$

میدونیم که کتانژانت منفی، کسینوس مثبت هست پس α در ربع چهارم هست و علامت سینوس منفی هست پس:

$$\sin \alpha = \frac{-\sqrt{5}}{5}$$

از طرفی داریم: $\cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$ پس با طرفین وسطین داریم:

$$\cos \alpha = \sin \alpha \cot \alpha = \frac{-\sqrt{5}}{5} \times (-2)$$

$$\cos \alpha = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

دشوار

-۸

$$\frac{\sin(\pi + \alpha) + \cos(\pi - \alpha)}{\cos(\frac{3\pi}{2} + \alpha) - \sin(\frac{\pi}{2} - \alpha)} = \frac{-\sin \alpha - \cos \alpha}{\sin \alpha - \cos \alpha}$$

در صورت مساله. $\tan \alpha = \frac{1}{3}$ داده شده است. با تقسیم صورت و مخرج کسر

بر $\cos \alpha$ داریم:

$$\begin{aligned} \frac{\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} - \frac{\cos \alpha}{\cos \alpha}}{\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} - \frac{\cos \alpha}{\cos \alpha}} &= \frac{-\tan \alpha - 1}{\tan \alpha - 1} \\ \frac{-\frac{1}{3} - 1}{\frac{1}{3} - 1} &= \frac{-\frac{4}{3}}{-\frac{2}{3}} = 2 \end{aligned}$$

آسان

-۹

$$\cos 150^\circ = \cos(180^\circ - 30^\circ) = -\cos 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 240^\circ = \cos(180^\circ + 60^\circ) = -\cos 60^\circ = -\frac{1}{2}$$

$$\sin 150^\circ = \sin(180^\circ - 30^\circ) = \sin 30^\circ = \frac{1}{2}$$

$$\cos(-60^\circ) = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$$

$$\cos 3\pi = \cos \pi = -1$$

$$\frac{\cos 150^\circ \times \cos 240^\circ - \sin 150^\circ \times \cos(-60^\circ)}{\cos 3\pi + 2 \sin 90^\circ \times \cot 45^\circ} = \frac{(-\frac{\sqrt{3}}{2})(-\frac{1}{2}) - (\frac{1}{2})(\frac{1}{2})}{-1 + 2(1)(1)}$$

$$= \frac{\frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{1}{4}}{1} = \frac{\sqrt{3} - 1}{4}$$

متوسط

-۱۰

$$\text{آ)} \frac{\tan(90^\circ + 10^\circ) \tan(180^\circ - 10^\circ) + \sin(360^\circ - 20^\circ) \sin(180^\circ - 20^\circ)}{\sin(180^\circ + 20^\circ) \cos(180^\circ + 20^\circ)}$$

$$= \frac{(-\cot 10^\circ)(-\tan 10^\circ) + (-\sin 20^\circ)(\sin 20^\circ)}{(-\sin 20^\circ)(-\cos 20^\circ)} = \frac{1 - \sin 20^\circ \sin 20^\circ}{\sin 20^\circ \cos 20^\circ}$$

$$= \frac{1 - \sin^2 20^\circ}{\sin 20^\circ \cos 20^\circ} = \frac{\cos^2 20^\circ}{\sin 20^\circ \cos 20^\circ} = \frac{\cos 20^\circ}{\sin 20^\circ} = \cot 20^\circ$$

$$\text{ب)} \frac{1 + \sin^2(180^\circ - 30^\circ) + \cos^2(270^\circ - 30^\circ)}{\sin^2(180^\circ + 80^\circ) + \cos^2(180^\circ - 80^\circ) + \cot(90^\circ + 20^\circ) \tan(360^\circ - 20^\circ)}$$

$$= \frac{1 + \sin^2 30^\circ - \sin^2 30^\circ}{\sin^2 80^\circ + \cos^2 80^\circ + \tan 20^\circ \times \tan 20^\circ} = \frac{1}{1 + \tan^2 20^\circ} = \cos^2 20^\circ$$

دشوار

-۵

آ) درست

$$\sin 840^\circ = \sin(720^\circ + 120^\circ) = \sin 120^\circ = \sin(180^\circ - 60^\circ) = \sin 60^\circ$$

ب) درست

$$\tan(-1000^\circ) = -\tan 1000^\circ = -\tan(1080^\circ - 80^\circ)$$

$$= -\tan(-80^\circ) = \tan 80^\circ$$

ج) درست

$$\cos(-324^\circ) = \cos 324^\circ = \cos(360^\circ - 36^\circ)$$

$$= \cos(-36^\circ) = \cos 36^\circ$$

د) درست

$$\sin 870^\circ = \sin(720^\circ + 150^\circ) = \sin 150^\circ$$

حواست باشه که مضارب حذف زوج 360° یعنی 4π یا 720° یا 6π یا 1080° رو نادیده می گیریم.

آسان

-۶

$$\text{آ)} \cos \theta + \cos(\pi - \theta) = \cos \theta - \cos \theta = 0 \text{ درست}$$

$$\text{ب)} \sin(\frac{\pi}{2} - \theta) + \cos \theta = \cos \theta + \cos \theta = 2 \cos \theta \text{ نادرست}$$

$$\text{پ)} \cos(-\alpha) = \cos \alpha \Rightarrow \cos(-\gamma) = \cos \gamma \text{ درست}$$

$$\text{ت)} \tan(\pi - \alpha) = -\tan \alpha$$

$$\tan \pi - \tan \alpha = 0 - \tan \alpha \text{ درست}$$

$$\text{ث)} \frac{\sin(\frac{\pi}{2} + \theta)}{\cos(\frac{\pi}{2} - \theta)} = \frac{\cos \theta}{\sin \theta} = \cot \theta \text{ نادرست}$$

$$\text{ج)} \sin(\pi + \alpha) - \cos(\pi + \alpha) = -\sin \alpha + \cos \alpha \text{ نادرست}$$

متوسط

-۷

$$\cos(-\frac{7\pi}{4}) = -\cos(\frac{7\pi}{4}) = -\cos(2\pi - \frac{\pi}{4}) = -\cos(-\frac{\pi}{4})$$

$$= -\cos \frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\tan(-\frac{7\pi}{4}) = -\tan(\frac{7\pi}{4}) = -\tan(2\pi - \frac{\pi}{4}) = -\tan(-\frac{\pi}{4}) = \tan \frac{\pi}{4} = 1$$

بنابراین با توجه به علامت کسینوس و تانژانت مربوط به α ، این زاویه در ربع سوم قرار دارد.

$$\cos \frac{13\pi}{4} = \cos(3\pi + \frac{\pi}{4}) = -\cos \frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\tan \frac{13\pi}{4} = \tan(3\pi + \frac{\pi}{4}) = \tan \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

باتوجه به علامت کسینوس و تانژانت زاویه β این زاویه در ربع سوم قرار دارد.

متوسط

-۱۵

$$\begin{aligned} \tan^2 135^\circ - \cos^2 120^\circ &= x \sin 330^\circ \cos 45^\circ \tan 240^\circ \\ \Rightarrow \tan^2 (90^\circ + 45^\circ) - \cos^2 (90^\circ + 30^\circ) &= x \sin (360^\circ - 30^\circ) \cos 45^\circ \cdot \tan (180^\circ + 60^\circ) \\ \Rightarrow \cot^2 45^\circ - \sin^2 30^\circ &= -x \sin 30^\circ \cdot \cos 45^\circ \cdot \cot 60^\circ \\ \Rightarrow 1 - \frac{1}{4} &= -x \left(\frac{1}{2}\right) \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) \\ \Rightarrow \frac{3}{4} &= \frac{-\sqrt{6}}{\sqrt{3}} x \Rightarrow x = \frac{-9}{\sqrt{6}} = \frac{-3\sqrt{6}}{2} \end{aligned}$$

متوسط

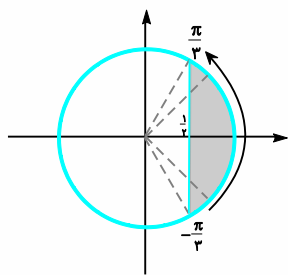
-۱۶

$$\begin{aligned} \frac{2 \sin(3\pi - x) + \cos(\frac{3\pi}{2} + x)}{\sin(\frac{3\pi}{2} - x)} &= 3 \Rightarrow \frac{2 \sin x + \sin x}{-\cos x} = 3 \\ \Rightarrow \frac{3 \sin x}{-\cos x} &= 3 \Rightarrow \tan x = -1 \Rightarrow \tan x = -\tan \frac{\pi}{4} \\ \Rightarrow \begin{cases} \tan x = \tan(\pi - \frac{\pi}{4}) \Rightarrow x = \frac{3\pi}{4} \\ \tan x = \tan(2\pi - \frac{\pi}{4}) \Rightarrow x = \frac{7\pi}{4} \end{cases} \\ \tan(x - \frac{\pi}{12}) &= \begin{cases} \tan(\frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{12}) = \tan \frac{5\pi}{6} = \tan(\pi - \frac{\pi}{6}) = -\tan \frac{\pi}{6} = -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \tan(\frac{7\pi}{4} - \frac{\pi}{12}) = \tan \frac{13\pi}{6} = \tan(2\pi - \frac{\pi}{6}) = -\tan \frac{\pi}{6} = -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{cases} \end{aligned}$$

$$-\frac{\pi}{18} < x < \frac{\pi}{18} \xrightarrow{\times 6} -\frac{\pi}{3} < 6x < \frac{\pi}{3}$$

بازه کمان یعنی $6x$ رو پیدا کردیم حالا کافیست ببینیم روی دایره مثلثاتی مقدار

کسینوس در فاصله $-\frac{\pi}{3}$ تا $\frac{\pi}{3}$ چه مقادیری رو می‌گیره



کم‌ترین مقدار زاویه $-\frac{\pi}{3}$ هست که کسینوس مقدار $\frac{1}{2}$ رو می‌گیره و بعد خطوط قائم عمود بر محور کسینوس رو رسم می‌کنیم تا ببینیم کجاها محور کسینوس رو شامل میشه و همونطور که از شکل پیداست، بازه $\frac{1}{2}$ تا 1 (به ازای $\alpha = 0^\circ$) رو شامل میشه پس:

$$\frac{1}{2} \leq \cos 6x \leq 1 \Rightarrow \frac{1}{2} \leq \frac{r^m + 1}{2} \leq 1 \xrightarrow{\times 2} 1 < r^m + 1 \leq 2$$

$$\Rightarrow 0 < r^m \leq 1 \Rightarrow 0 < m \leq \frac{1}{3}$$

دشوار

-۱۱

$$\begin{aligned} A &= \tan 1^\circ \tan 2^\circ \dots \tan 88^\circ \tan 89^\circ \\ &= \frac{\tan 1^\circ \tan 89^\circ}{1} \times \frac{\tan 2^\circ \tan 88^\circ}{1} \times \dots \times \frac{\tan 44^\circ \tan 46^\circ}{1} \times \frac{\tan 45^\circ}{1} \\ &= \frac{\tan 1^\circ \cdot \cot 1^\circ}{1} \\ \Rightarrow A &= 1 \end{aligned}$$

دشوار

-۱۲

$$\begin{aligned} A &= \sin \frac{\pi}{5} + \sin \frac{2\pi}{5} + \sin \frac{3\pi}{5} + \sin \frac{4\pi}{5} + \sin \pi + \sin \frac{6\pi}{5} + \sin \frac{7\pi}{5} + \\ &\quad \sin \frac{8\pi}{5} + \sin \frac{9\pi}{5} + \sin 2\pi = \\ A &= \sin \frac{\pi}{5} + \sin \frac{9\pi}{5} + \sin \frac{2\pi}{5} + \sin \frac{8\pi}{5} + \sin \frac{3\pi}{5} + \sin \frac{7\pi}{5} + \sin \frac{4\pi}{5} + \sin \frac{6\pi}{5} + \sin \frac{5\pi}{5} + \sin \frac{10\pi}{5} = \\ &\quad \sin(\pi - \frac{\pi}{5}) + \sin(\pi - \frac{\pi}{5}) + \sin(\pi - \frac{2\pi}{5}) + \sin(\pi - \frac{2\pi}{5}) + \sin(\pi - \frac{3\pi}{5}) + \sin(\pi - \frac{3\pi}{5}) + \sin(\pi - \frac{4\pi}{5}) + \sin(\pi - \frac{4\pi}{5}) + \sin \pi + \sin 2\pi = \\ A &= \sin \frac{\pi}{5} - \sin \frac{\pi}{5} + \sin \frac{2\pi}{5} - \sin \frac{2\pi}{5} + \sin \frac{3\pi}{5} - \sin \frac{3\pi}{5} + \sin \frac{4\pi}{5} - \sin \frac{4\pi}{5} + \sin \pi + \sin 2\pi = \\ \Rightarrow A &= 0 \end{aligned}$$

دشوار

-۱۳

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{1 + \tan 1} + \frac{1}{1 + \tan 19} + \frac{1}{1 + \tan 37} + \frac{1}{1 + \tan 55} + \dots + \frac{1}{1 + \tan 44} + \frac{1}{1 + \tan 62} + \frac{1}{1 + \tan 80} \\ &= \frac{1}{1 + \tan 1} + \frac{1}{1 + \frac{1}{\tan 1}} + \frac{1}{1 + \tan 2} + \frac{1}{1 + \frac{1}{\tan 2}} + \dots + \frac{1}{1 + \tan 44} + \frac{1}{1 + \frac{1}{\tan 44}} + \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{1 + \tan 1} + \frac{\tan 1}{1 + \tan 1} + \frac{1}{1 + \tan 2} + \frac{\tan 2}{1 + \tan 2} + \dots + \frac{1}{1 + \tan 44} + \frac{\tan 44}{1 + \tan 44} + \frac{1}{2} \\ &= \frac{1 + \tan 1}{1 + \tan 1} + \frac{1 + \tan 2}{1 + \tan 2} + \dots + \frac{1 + \tan 44}{1 + \tan 44} + \frac{1}{2} \\ &= \frac{1 + 1 + \dots + 1}{44 \text{ بار}} + \frac{1}{2} = 44 + \frac{1}{2} = 44 \frac{1}{2} \end{aligned}$$

آسان

-۱۴

$$\cos(\underbrace{x - 28}_\alpha) = \sin(\underbrace{3x + 74}_\beta)$$

می‌دانیم که اگر $\alpha + \beta = 90^\circ$ اونوقت $\sin \beta = \cos \alpha$ و بنابراین:

$$x - 28 + 3x + 74 = 90^\circ$$

$$\Rightarrow 4x = 90 - 74 + 28 \Rightarrow 4x = 44 \Rightarrow x = 11$$



دشوار

۱- گزینه «۴»

معادله‌ی درجه دومی داریم که با روش دلتا حل می‌کنیم:

$$\begin{aligned}\Delta &= b^2 - 4ac = (\tan \alpha + 3 \cot \alpha)^2 - 4(1)(3) \\ &= \tan^2 \alpha + 9 \cot^2 \alpha + 6 \frac{\tan \alpha \cot \alpha}{1} - 12 = \tan^2 \alpha + 9 \cot^2 \alpha - 6 \\ &= (\tan \alpha - 3 \cot \alpha)^2 \\ x &= \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{\tan \alpha + 3 \cot \alpha \pm (\tan \alpha - 3 \cot \alpha)}{2} \\ &= \begin{cases} \frac{2 \tan \alpha}{2} = \tan \alpha \\ -\frac{6 \cot \alpha}{2} = 3 \cot \alpha \end{cases}\end{aligned}$$

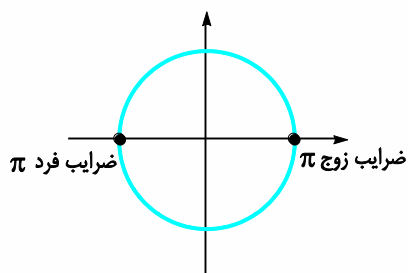
پس گزینه ۴ درست است.

متوسط

۲- گزینه «۳»

$$\begin{aligned}&= \tan(\alpha - \delta\pi) \cot(\alpha + 9\pi) + \cos(4\pi - \alpha) \cos(\alpha - 3\pi) \\ &= -\tan(\delta\pi - \alpha) \cot(9\pi + \alpha) + \cos(4\pi - \alpha) \cos(3\pi - \alpha) \\ &= + \frac{\tan \alpha \cot \alpha}{1} + \cos \alpha (-\cos \alpha) = 1 - \cos^2 \alpha = \sin^2 \alpha\end{aligned}$$

یادت باشه ضرایب زوج و فرد π در دایره مثلثاتی به صورت روبه رو هستند.



و یادت باشه کسینوس منفی خوره! یعنی: $\cos(-\alpha) = \cos \alpha$

متوسط

۱۷-

(آ) همانطوری که از شکل پیداست: $90^\circ = \alpha + \theta$ پس α , θ متمم هم هستند و سینوس یکی با کسینوس دیگری برابر است و می‌توان نوشت:

$$I = k \sin\left(\frac{\pi}{6} - \alpha\right) = k \cos \alpha = k \sin \theta$$

ب) $\theta = 0 \Rightarrow I = k \sin 0^\circ = k(0) = 0$

$$\theta = \frac{\pi}{6} \Rightarrow I = k \sin \frac{\pi}{6} = \frac{k}{2}$$

$$\theta = \frac{\pi}{3} \Rightarrow I = k \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} k$$

پ) بیش‌ترین شدت نور وابسته به مقدار $\sin \theta$ هست و می‌دانیم سینوس زمانی

بیشترین مقدار رو داره که $\sin \theta = 1$ و بنابراین $\theta = \frac{\pi}{2}$ باشه.

آسان

۱۸-

$$\begin{aligned}\text{آ)} \quad \cot \frac{\pi}{6} - \tan \frac{\pi}{3} \cdot \sin \frac{\pi}{4} &= \sqrt{3} - \sqrt{3} \times \frac{\sqrt{2}}{2} \\ &= \frac{2\sqrt{3} - \sqrt{3} \times \sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{3}(2 - \sqrt{2})}{2}\end{aligned}$$

$$\text{ب)} \quad \frac{\tan^2 \frac{\pi}{6} + \sin^2 \frac{\pi}{4}}{\cot^2 \frac{\pi}{6} - \cos^2 \frac{\pi}{3}} + \frac{\cos^2 75^\circ + \sin^2 75^\circ}{1}$$

$$\begin{aligned}&= \frac{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}{(1)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} + 1 = \frac{\frac{1}{3} + \frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{4}} + 1 = \frac{\frac{5}{6}}{\frac{3}{4}} + 1 \\ &= \frac{10}{9} + 1 = \frac{19}{9}\end{aligned}$$

متوسط

۱۹-

(آ) سینوس x با کسینوس $(x + 20)$ برابر شده یعنی زوایا متمم هم بوده‌اند پس:

$$x + x + 20^\circ = 90^\circ \Rightarrow 2x = 70^\circ \Rightarrow x = 35^\circ$$

ب) تانژانت یک زاویه با کتانژانت دیگری برابر شده یعنی زوایا متمم هم هستند:

$$\begin{aligned}x + \frac{\pi}{18} + \frac{2\pi}{9} + x &= \frac{\pi}{2} \Rightarrow 2x = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{18} - \frac{2\pi}{9} = \frac{9\pi - \pi - 4\pi}{18} \\ \Rightarrow 2x &= \frac{4\pi}{18} \Rightarrow x = \frac{\pi}{9}\end{aligned}$$

متوسط

۶- گزینه «۳»

می دانیم که در هر مثلث دلخواه، مجموع زوایای داخلی برابر 180° هست

پس: $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ$ بنابراین:

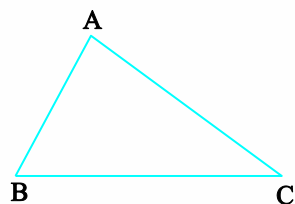
$$\hat{A} + \hat{B} = 180^\circ - \hat{C} \Rightarrow \frac{\hat{A} + \hat{B}}{2} = 90^\circ - \frac{\hat{C}}{2}$$

$$\Rightarrow \tan\left(\frac{\hat{A} + \hat{B}}{2}\right) = \tan\left(90^\circ - \frac{\hat{C}}{2}\right) = \cot \frac{\hat{C}}{2}$$

یادت باشه:

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cot \alpha$$

$$\cot\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \tan \alpha$$



دشوار

۷- گزینه «۴»

با عبارت درجه دومی سروکار داریم که متغیرش مشخص نیست پس ما

تبدیل $\cos$ به $\sin$ ، عبارت درجه دوم مشخصی رو می سازیم که بتونیم

ماکزیم اون رو، مشخص کنیم:

$$A = 3\sin^2 x - 4(1 - \sin^2 x) + 1 = 3\sin^2 x - 4 + 4\sin^2 x + 1$$

$$\Rightarrow A = 7\sin^2 x - 3$$

می دونیم که بیشترین مقدار $\sin x$ برابر ۱ هست اما حواست باشه ماکزیم

مقدار یک عبارت درجه دوممکنه در $\frac{-b}{2a}$ اتفاق بیفته پس هر دو حالت رو

در نظر می گیریم:

$$\sin x = 1 \Rightarrow A = 7(1) - 3 = 4$$

$$\sin x = \frac{-b}{2a} = \frac{-0}{2(7)} = 0 \Rightarrow A = 7(0) - 3 = -3$$

پس ماکزیم مقدار همون ۴ هست.

دشوار

۸- گزینه «۱»

برای یک متغیره کردن عبارت، بهتره به جای $\sin$ ، جاگذاری کنیم:

$$A = 3(1 - \cos^2 x) - 2\cos^2 x + \cos x = 3 - 3\cos^2 x - 2\cos^2 x + \cos x$$

$$\Rightarrow A = -5\cos^2 x + \cos x + 3$$

طبق توضیحی که در تست ۷ داشتیم:

$$1) \cos x = 1 \Rightarrow A = -5 + 1 + 3 = -1$$

$$\cos x = -1 \Rightarrow A = -5 - 1 + 3 = -3$$

$$\cos x = 0 \Rightarrow A = 3$$

$$2) \cos x = \frac{-b}{2a} = \frac{-1}{-10} = \frac{1}{10} \Rightarrow A = -5\left(\frac{1}{10}\right) + \frac{1}{10} + 3$$

$$= 3 + 0.1 - 0.5 = 2.6$$

متوسط

۳- گزینه «۴»

$$A = \frac{2\sin \frac{49\pi}{10} - 3\cos \frac{3\pi}{5}}{\cos\left(-\frac{7\pi}{5}\right) + 2\sin \frac{121\pi}{10}} = \frac{2\sin\left(\frac{50\pi}{10} - \frac{\pi}{10}\right) - 3\cos\left(\frac{50\pi}{10} - \frac{2\pi}{10}\right)}{\cos \frac{7\pi}{5} + 2\sin\left(\frac{120\pi}{10} + \frac{\pi}{10}\right)}$$

$$= \frac{2\sin\left(5\pi - \frac{\pi}{10}\right) - 3\cos\left(5\pi - \frac{2\pi}{10}\right)}{\cos\left(\frac{50\pi}{10} + \frac{2\pi}{10}\right) + 2\sin\left(12\pi + \frac{\pi}{10}\right)}$$

$$= \frac{2\sin \frac{\pi}{10} + 3\cos \frac{2\pi}{10}}{\cos\left(\pi + \frac{2\pi}{10}\right) + 2\sin \frac{\pi}{10}} = \frac{2\sin \frac{\pi}{10} + 3\cos \frac{2\pi}{10}}{-\cos \frac{2\pi}{10} + 2\sin \frac{\pi}{10}}$$

می دونیم که $\frac{2\pi}{10}, \frac{\pi}{10}, \frac{\pi}{10} + \frac{2\pi}{10} = \frac{\pi + 4\pi}{10} = \frac{5\pi}{10} = \frac{\pi}{2}$ پس داریم:

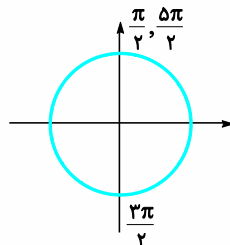
$$\frac{2\sin \frac{\pi}{10} + 3\sin \frac{\pi}{10}}{-\sin \frac{\pi}{10} + 2\sin \frac{\pi}{10}} = \frac{5\sin \frac{\pi}{10}}{\sin \frac{\pi}{10}} = 5$$

متوسط

۴- گزینه «۴»

$$A = \frac{(a^2 - b^2)\cot(\pi - \alpha)}{\tan\left(\frac{\Delta\pi}{2} - \alpha\right)} + \frac{(a^2 + b^2)\tan\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right)}{\cot(\alpha - \pi)}$$

$$\tan\left(\frac{\Delta\pi}{2} - \alpha\right) = \cot \alpha, \quad \cot(\alpha - \pi) = -\cot(\pi - \alpha) = \cot \alpha$$



$$\Rightarrow A = \frac{(a^2 - b^2)\cot \alpha + (a^2 + b^2)(-\cot \alpha)}{\cot \alpha}$$

$$= \frac{\cot \alpha (a^2 - b^2 - a^2 - b^2)}{\cot \alpha} = -2b^2$$

دشوار

۵- گزینه «۱»

$$A = \cos \frac{\pi}{9} + \cos \frac{2\pi}{9} + \cos \frac{3\pi}{9} + \dots + \cos \frac{8\pi}{9} + \cos \frac{9\pi}{9}$$

می دانیم $\cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha$ پس $\cos \frac{8\pi}{9} = -\cos \frac{\pi}{9}$ و به همین ترتیب

دوتایی های مشخص شده مکمل هم هستند و بنابراین کسینوس یکی قرینه کسینوس دیگری است.

$$A = \underbrace{\cos \frac{\pi}{9} + \cos \frac{8\pi}{9}}_0 + \underbrace{\cos \frac{2\pi}{9} + \cos \frac{7\pi}{9}}_0 + \underbrace{\cos \frac{3\pi}{9} + \cos \frac{6\pi}{9}}_0 + \underbrace{\cos \frac{4\pi}{9} + \cos \frac{5\pi}{9}}_0 = 0$$

آسان

۱۲- گزینه «ب»

$$\frac{17\pi}{6} = \frac{18\pi - \pi}{6} = 3\pi - \frac{\pi}{6}$$

$$\frac{11\pi}{3} = \frac{12\pi - \pi}{3} = 4\pi - \frac{\pi}{3}$$

$$\frac{10\pi}{3} = \frac{9\pi + \pi}{3} = 3\pi + \frac{\pi}{3}$$

$$\tan \frac{17\pi}{6} \sin \frac{11\pi}{3} + \cos \frac{10\pi}{3} = \tan(\pi - \frac{\pi}{6}) \sin(-\frac{\pi}{3}) + \cos(\pi + \frac{\pi}{3})$$

$$= (-\tan \frac{\pi}{6})(-\sin \frac{\pi}{3}) - \cos \frac{\pi}{3} = (\frac{\sqrt{3}}{3})(\frac{\sqrt{3}}{2}) - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$$

حواست باشد که 3π روی مکان π و 4π روی مکان 2π قرار می‌گیرد.

متوسط

۱۳- گزینه «ب»

$$\tan \frac{11\pi}{4} + \sin \frac{15\pi}{4} \cos \frac{13\pi}{4} = \tan(\frac{12\pi - \pi}{4}) + \sin(\frac{16\pi - \pi}{4}) \cos(\frac{12\pi + \pi}{4})$$

$$= \tan(3\pi - \frac{\pi}{4}) + \sin(4\pi - \frac{\pi}{4}) \cos(3\pi + \frac{\pi}{4})$$

$$= -\tan \frac{\pi}{4} + (\sin \frac{\pi}{4})(-\cos \frac{\pi}{4}) = -1 + (\frac{\sqrt{2}}{2})(-\frac{\sqrt{2}}{2}) = -1 + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$$

متوسط

۱۴- گزینه «ب»

$$A = \frac{\sin 145^\circ - \sin 235^\circ}{\cos 325^\circ - 2 \sin 115^\circ} = \frac{\sin(180^\circ - 35^\circ) - \sin(180^\circ - 65^\circ)}{\cos(360^\circ - 35^\circ) - 2 \sin(180^\circ - 65^\circ)}$$

$$= \frac{\sin 35^\circ + \cos 65^\circ}{\cos 35^\circ + 2 \sin 65^\circ}$$

با تقسیم صورت و مخرج بر $\cos 35^\circ$ داریم:

$$A = \frac{\tan 35^\circ + 1}{1 + 2 \tan 35^\circ} = \frac{a - 1 + 1}{1 + 2(a - 1)} = \frac{a}{2a - 1}$$

متوسط

۱۵- گزینه «د»

$$\frac{2 \sin 110^\circ - 2 \sin 20^\circ}{2 \cos 70^\circ + 3 \cos 34^\circ} = \alpha$$

$$\frac{2 \sin(90^\circ + 20^\circ) - 2 \sin(180^\circ + 20^\circ)}{2 \cos(90^\circ - 20^\circ) + 3 \cos(360^\circ - 20^\circ)} = \alpha \Rightarrow \frac{2 \cos 20^\circ + 2 \sin 20^\circ}{2 \sin 20^\circ + 3 \cos 20^\circ} = \alpha$$

$$\frac{\div \cos 20^\circ}{\div \cos 20^\circ} \rightarrow \frac{2 + 2 \tan 20^\circ}{2 \tan 20^\circ + 3} = \alpha \Rightarrow 2 + 2 \tan 20^\circ = 2\alpha \tan 20^\circ + 3\alpha$$

$$\Rightarrow (2 - 2\alpha) \tan 20^\circ = 3\alpha - 2 \Rightarrow \tan 20^\circ = \frac{3\alpha - 2}{2 - 2\alpha}$$

متوسط

۱۶- گزینه «د»

$$A = \sqrt{\sin^2(-\frac{5\pi}{6}) - \cos^2(-\frac{2\pi}{3})} = \sqrt{-\sin^2 \frac{5\pi}{6} - \cos^2 \frac{2\pi}{3}}$$

$$= \sqrt{-\sin^2(\pi - \frac{\pi}{6}) - \cos^2(\pi - \frac{\pi}{3})} = \sqrt{-\sin^2 \frac{\pi}{6} + \cos^2 \frac{\pi}{3}}$$

$$= \sqrt{-\frac{1}{4} + \frac{1}{4}} = 0$$

متوسط

۹- گزینه «ا»

$$A = (\sin^2 x)^2 - (\sin^2 x) + 1$$

طبق توضیحات تست‌های ۷ و ۸ داریم:

$$1) \sin^2 x = -1 \Rightarrow A = 1 + 1 + 1 = 3$$

$$\sin^2 x = 0 \Rightarrow A = 0 - 0 + 1 = 1$$

$$\sin^2 x = +1 \Rightarrow A = 1 - 1 + 1 = 1$$

$$2) \sin^2 x = -\frac{b}{2a} = \frac{1}{2} \Rightarrow A = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{4}$$

دشوار

۱۰- گزینه «ا»

از اتحاد کمکی درجه دوم داریم:

$$a^2 + b^2 = (a + b)^2 - 2ab$$

$$\Rightarrow \sin^2 x + \cos^2 x = \underbrace{(\sin x + \cos x)^2}_{\frac{1}{3}} - 2 \sin x \cos x$$

$$\Rightarrow 1 = \frac{1}{9} - 2 \sin x \cos x \Rightarrow \sin x \cos x = -\frac{4}{9}$$

حال اتحاد کمکی درجه سوم را به کار می‌بریم:

$$a^3 + b^3 = (a^2 + b^2)(a + b) - 2ab(a + b)$$

$$\sin^3 x + \cos^3 x = \underbrace{(\sin x + \cos x)^3}_{\frac{1}{3}} - \cancel{\frac{\sin x \cos x (\sin x + \cos x)}{\frac{4}{9} \cdot \frac{1}{3}}}$$

$$= \frac{1}{27} + \frac{4}{9} = \frac{13}{27}$$

متوسط

۱۱- گزینه «ب»

$$\sin(\frac{17\pi}{3}) \cos(-\frac{17\pi}{6}) + \tan(\frac{19\pi}{6}) \sin(-\frac{11\pi}{6})$$

$$= \sin(\frac{18\pi - \pi}{3}) \cos(\frac{18\pi - \pi}{6}) + \tan(\frac{20\pi - \pi}{6})(-\sin(\frac{12\pi - \pi}{6}))$$

$$= \sin(6\pi - \frac{\pi}{3}) \cos(3\pi - \frac{\pi}{6}) - \tan(5\pi - \frac{\pi}{6}) \sin(2\pi - \frac{\pi}{6})$$

$$= (-\sin \frac{\pi}{3})(-\cos \frac{\pi}{6}) - (-\tan \frac{\pi}{6})(-\sin \frac{\pi}{6})$$

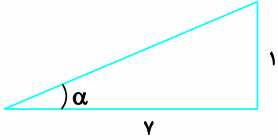
$$= \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} - 1 \times \frac{1}{2} = \frac{3}{4} - \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

متوسط

۲۰- گزینه «۲»

$$\sin\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) = -\cos \alpha$$

و از اونجایی که $\tan \alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$ داریم:



$$\sqrt{4+1} = \sqrt{5} = 5\sqrt{2} \Rightarrow \cos \alpha = \frac{\sqrt{2}}{5\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{10}$$

$$\Rightarrow \sin\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) = -\frac{\sqrt{2}}{10}$$

متوسط

۲۱- گزینه «۱»

$$\frac{\tan x}{\sqrt{1+\tan^2 x}} \left(\frac{1}{\sin x} - \sin x \right) = \frac{\tan x}{\sqrt{\frac{1}{\cos^2 x}}} \left(\frac{1-\sin^2 x}{\sin x} \right)$$

حواست باشد در ربع دوم علامت کسینوس منفی هست.

$$= \frac{\sin x}{\cos x} \left(\frac{\cos^2 x}{\sin x} \right) = -\sin x \left(\frac{\cos^2 x}{\sin x} \right) = -\cos^2 x$$

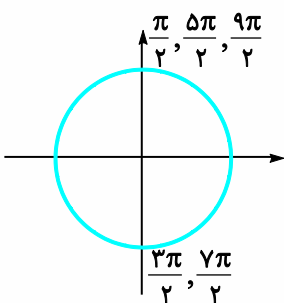
دشوار

۲۲- گزینه «۳»

$$A = \sin\left(\frac{9\pi}{2} + \alpha\right) \cos\left(\frac{7\pi}{2} - \alpha\right) - \tan\left(\alpha - \frac{3\pi}{2}\right)$$

برای پیدا کردن مکان ضریب‌های $\frac{\pi}{2}$ ، روی دایره مثلثاتی به ترتیب بشمار و جلو

برو. زوج و نیم π ها معادل $\frac{\pi}{2}$ و فرد و نیم π ها معادل $\frac{3\pi}{2}$ است:



$$= \sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) \cos\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) + \tan\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right)$$

$$= -\cos \alpha \sin \alpha + \cot \alpha$$

$$\tan \alpha = \frac{4}{3} \Rightarrow \sin \alpha = -\frac{4}{5}, \cos \alpha = -\frac{3}{5}, \cot \alpha = \frac{3}{4}$$

$$A = +\frac{3}{5} \times -\frac{4}{5} + \frac{3}{4} = \frac{-12}{25} + \frac{3}{4} = \frac{27}{100}$$

دشوار

۱۷-5- گزینه «۲»

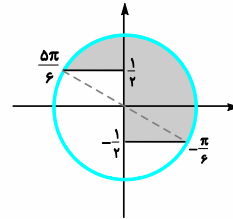
جلوی سینوس عبارت $2x$ قرار گرفته پس اول محدوده $2x$ رو پیدا می‌کنیم:

$$-\frac{\pi}{12} < x < \frac{5\pi}{12} \Rightarrow -\frac{\pi}{6} < 2x < \frac{5\pi}{6}$$

حالا از روی دایره مثلثاتی، مشخص می‌کنیم در این بازه، سینوس چه مقدارهایی

رو می‌گیره. کم‌ترین مقداری که روی محور سینوس، مشخص شده $\frac{1}{2}$ است و

بیشترین مقدار برابر ۱ است پس:



حواست باشد که مقدار ۱ دقیقاً گرفته شده در ۱ بسته هست:

$$-\frac{1}{2} < \sin 2x \leq 1$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{2} < \frac{m-1}{4} \leq 1 \Rightarrow -2 < m-1 \leq 4 \Rightarrow -1 < m \leq 5 \Rightarrow m \in (-1, 5]$$

متوسط

۱۸-5- گزینه «۳»

$$A = \frac{\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) - \sin(\alpha - \pi)}{|\tan^2 \alpha - 1|} = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) + \sin(\pi - \alpha)}{|\tan^2 \alpha - 1|}$$

$$= \frac{\cos \alpha + \sin \alpha}{|\tan^2 \alpha - 1|}$$

داریم: $\cos \alpha = \frac{2}{3}$

$$\sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha = 1 - \frac{4}{9} = \frac{5}{9}$$

$$\xrightarrow{\text{ربع چهارم}} \sin \alpha = -\frac{\sqrt{5}}{3} \Rightarrow \tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{-\frac{\sqrt{5}}{3}}{\frac{2}{3}} = -\frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$\Rightarrow A = \frac{\frac{2}{3} - \frac{\sqrt{5}}{3}}{\left|\frac{5}{4} - 1\right|} = \frac{\frac{2-\sqrt{5}}{3}}{\frac{1}{4}} = \frac{4(2-\sqrt{5})}{3}$$

دشوار

۱۹-5- گزینه «۴»

$$\tan 285^\circ \tan(-165^\circ) - \sin(1095^\circ) \cos 255^\circ$$

$$= -\tan(270^\circ + 15^\circ) \tan(180^\circ - 15^\circ) - \sin(1080^\circ + 15^\circ) \cos(270^\circ - 15^\circ)$$

$$= -(-\cot 15^\circ)(-\tan 15^\circ) - (+\sin 15^\circ)(-\sin 15^\circ)$$

$$= -1 + \sin^2 15^\circ = -(1 - \sin^2 15^\circ) = -\cos^2 15^\circ$$

آسان

۲۷- گزینه «۲»

$$\begin{aligned} & \log \tan 7 + \log \tan 21 + \log \tan 69 + \log \tan 83 \\ &= \log (\tan 7 \times \tan 21 \times \tan 69 \times \tan 83) \\ &= \log (\tan 7 \times \tan 21 \times \cot 21 \times \cot 7) = \log 1 = 0 \end{aligned}$$

متوسط

۲۸- گزینه «۴»

$$\begin{aligned} & \sin\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) + \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \frac{1}{2} \\ & \Rightarrow -\cos x - \sin x = \frac{1}{2} \xrightarrow{\text{توان}} \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{1} + 2 \sin x \cos x = \frac{1}{4} \\ & \Rightarrow 2 \sin x \cos x = -\frac{3}{4} \Rightarrow \sin x \cos x = -\frac{3}{8} \\ & \sin^3 x + \cos^3 x = (\sin x + \cos x)(\underbrace{\cos^2 x + \sin^2 x}_1 - \sin x \cos x) \\ &= \left(-\frac{1}{2}\right)\left(1 + \frac{3}{8}\right) = -\frac{11}{16} \end{aligned}$$

متوسط

۲۹- گزینه «۳»

$$\begin{aligned} & \frac{\sin 160^\circ - \cos 200^\circ}{\cos 110^\circ + \sin 70^\circ} = \frac{\sin(180^\circ - 20^\circ) - \cos(180^\circ + 20^\circ)}{\cos(90^\circ + 20^\circ) + \sin(90^\circ - 20^\circ)} \\ &= \frac{\sin 20^\circ + \cos 20^\circ}{-\sin 20^\circ + \cos 20^\circ} = \frac{\frac{\sin 20^\circ}{\cos 20^\circ} + 1}{-\frac{\sin 20^\circ}{\cos 20^\circ} + 1} = \frac{\tan 20^\circ + 1}{-\tan 20^\circ + 1} \\ &= \frac{0.36 + 1}{-0.36 + 1} = \frac{1.36}{0.64} = \frac{17}{8} \end{aligned}$$

دشوار

۳۰- گزینه «۱»

$$\begin{aligned} & \tan(\hat{B} + 30^\circ) \tan(C + 30^\circ) = 1 \\ & \Rightarrow \tan(\hat{B} + 30^\circ) = \frac{1}{\tan(C + 30^\circ)} \\ & \Rightarrow \tan(\hat{B} + 30^\circ) = \cot(C + 30^\circ) \text{ زاویه‌ها متمم هم هستند} \\ & \Rightarrow \hat{B} + 30^\circ + \hat{C} + 30^\circ = 90^\circ \Rightarrow \hat{B} + \hat{C} = 30^\circ \\ & \Rightarrow \hat{A} = 180^\circ - 30^\circ = 150^\circ \end{aligned}$$

آسان

۳۱- گزینه «۱»

$$\begin{aligned} A &= -\sin\left(\frac{179\pi}{6}\right) + \cos\left(\frac{17\pi}{3}\right) - 2 \tan\left(\frac{33\pi}{4}\right) \\ &= -\sin\left(3\pi - \frac{\pi}{6}\right) + \cos\left(6\pi - \frac{\pi}{3}\right) - 2 \tan\left(8\pi + \frac{\pi}{4}\right) \\ &= \sin \frac{\pi}{6} + \cos \frac{\pi}{3} - 2 \tan \frac{\pi}{4} \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - 2 = -1 \end{aligned}$$

آسان

۳۲- گزینه «۳»

$$\begin{aligned} A &= \cos \frac{\pi}{5} + \cos \frac{2\pi}{5} + \cos \frac{3\pi}{5} + \cos \frac{4\pi}{5} + \cos \frac{5\pi}{5} \\ &= \cancel{\cos \frac{\pi}{5}} + \cancel{\cos \frac{2\pi}{5}} - \cancel{\cos \frac{2\pi}{5}} - \cancel{\cos \frac{\pi}{5}} + \cos \pi \\ &= \cos \pi = -1 \end{aligned}$$

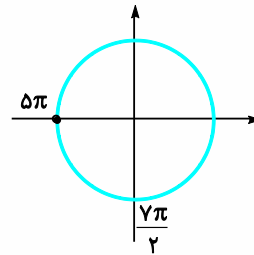
حواست باشه كه:

$$\begin{aligned} & \frac{2\pi}{5} + \frac{3\pi}{5} = \pi \\ & \cos \frac{3\pi}{5} = \cos\left(\pi - \frac{2\pi}{5}\right) = -\cos \frac{2\pi}{5} \end{aligned}$$

متوسط

۳۳- گزینه «۴»

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{-\cos a} + \frac{\sin(\Delta\pi - a)}{\sin\left(\frac{\gamma\pi}{2} + a\right)} \times \cot a \\ &= \frac{-1}{\cos a} + \frac{\sin a}{-\cos a} \times \cot a = \frac{-1}{\cos a} - 1 \end{aligned}$$



دشوار

۳۴- گزینه «۴»

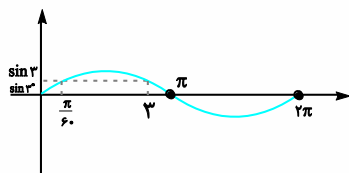
$$\begin{aligned} & \frac{2 \sin(3\pi - x) + \cos\left(\frac{3\pi}{2} + x\right)}{\sin\left(\frac{3\pi}{2} - x\right)} = 3 \\ & \Rightarrow \frac{2 \sin x + \sin x}{-\cos x} = 3 \Rightarrow \frac{3 \sin x}{-\cos x} = 3 \\ & \Rightarrow \tan x = -1 \Rightarrow x = -\frac{\pi}{4} \\ & \tan\left(x - \frac{\pi}{12}\right) = \tan\left(-\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{12}\right) = \tan\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\sqrt{3} \end{aligned}$$

دشوار

-۳

$\sin 3^\circ$ یعنی زاویه جلوی سینوس 3° درجه هست اما $\sin 3$ یعنی زاویه جلوی سینوس 3 رادیان هست و ما می‌دانیم که این‌ها متفاوت هستند و بنابراین این تساوی نادرست است.

$$3^\circ = \frac{3}{180} \times \pi = \frac{\pi}{60} \text{ rad}$$



در نمودار، π را تقریباً 3 در نظر می‌گیریم

پس برای $\sin 3$ ، نمودار π قرار می‌گیرد و مقدار آن تقریباً 0.52 است.

اما در درجه π برابر 180° است و 3° روی نمودار نزدیک به $x = 0$ است و $\sin 3^\circ$ تقریباً برابر 0.0091 است بنابراین $\sin 3$ بزرگ‌تر از $\sin 3^\circ$ درمی‌آید.

متوسط

-۴

$$[-1, 1], \mathbb{R} \text{ (ت)}$$

(ب) صفر

$$x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}, \quad x = \frac{-7\pi}{2}, x = \frac{-3\pi}{2}, x = \frac{5\pi}{2}, +1 \text{ (پ)}$$

$$x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}, \quad x = -\frac{5\pi}{2}, x = -\frac{\pi}{2}, x = \frac{7\pi}{2}, -1 \text{ (ت)}$$

آسان

-۵

$$\text{ت) } [-1, 1], \mathbb{R}$$

$$\text{ب) } k \in \mathbb{Z}, x = \frac{k\pi}{2}$$

$$\text{پ) } k \in \mathbb{Z}, x = 2k\pi, 1$$

$$\text{ت) } k \in \mathbb{Z}, x = (2k+1)\pi, -1$$



سوالات تشریحی

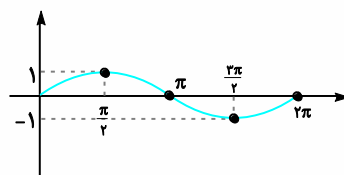
پاسخنامه

بخش ۳

متوسط

-۱

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\sin x$	0	1	0	-1	0

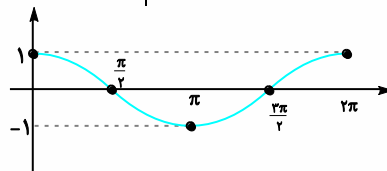


این بخش از نمودار سینوس‌ها، یک نوسان سینوسی نام دارد و در ادامه رسم، همین اعداد تکرار می‌شود. این نوسان در یک دوره تناوب که 2π هست بین دو عدد -1 و 1 رسم می‌شود.

متوسط

-۲

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\cos x$	1	0	-1	0	1

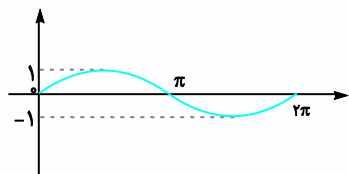


این نمودار، یک نوسان کسینوسی هست که بخشی از نمودار تابع کسینوس هست و در یک دوره تناوب که $[0, 2\pi]$ تناوب اصلی اون هست، دوره تناوب 2π و نمودار بین -1 تا 1 رسم می‌شود.

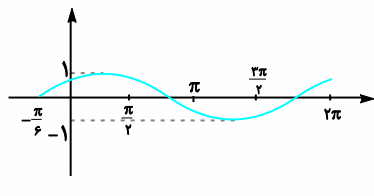
متوسط

-۷

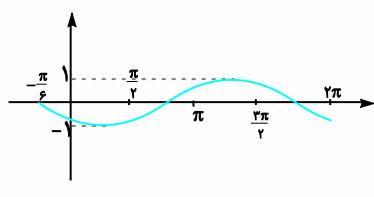
ا) $y = -\sin(x + \frac{\pi}{6})$



$\sin x$

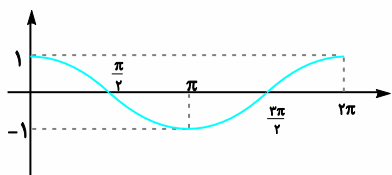


$\sin(x + \frac{\pi}{6})$

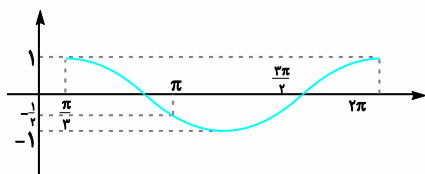


$-\sin(x + \frac{\pi}{6})$

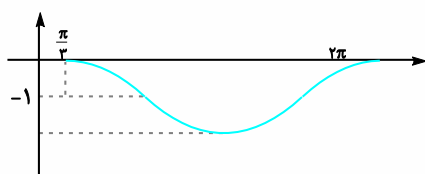
ب) $y = \cos(x - \frac{\pi}{3}) - 1$



$\cos x$



$\cos(x - \frac{\pi}{3})$

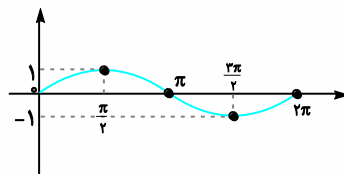


$\cos(x - \frac{\pi}{3}) - 1$

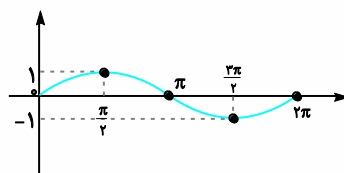
متوسط

-۶

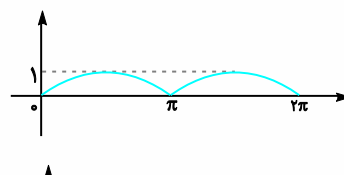
ا) $y = -\cos(x + \frac{\pi}{4}) = -(-\sin x) = \sin x$



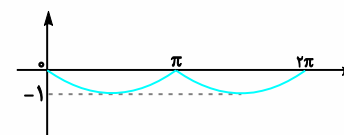
ب) $y = -|\sin x|$



$\sin x$

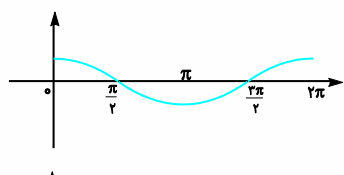


$|\sin x|$

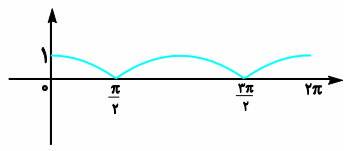


$-|\sin x|$

پ) $y = |\cos x|$

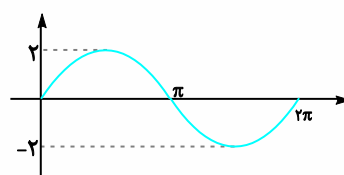


$\cos x$

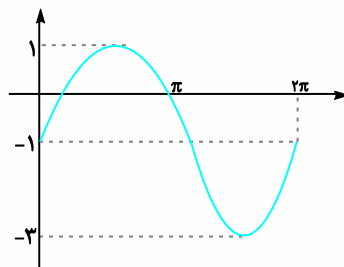


$|\cos x|$

ت) $y = 2\sin x - 1$



$2\sin x$

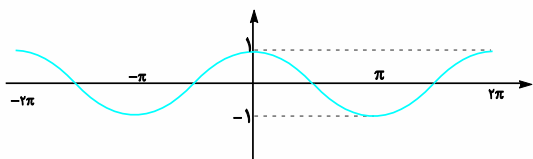


$2\sin x - 1$

آسان

-۱۱

نمودار $y = \cos x$ در این بازه به صورت زیر است:



(آ) مقدار $\sqrt{3}$ تقریباً $1/7$ است و با در نظر گرفتن π به صورت تقریبی ۳، روی نمودار $\sqrt{3}$ را مشخص کرده‌ایم. عرض نظیر این نقطه، $\cos \sqrt{3}$ را نشان می‌دهد که مقدار تقریبی آن (-0.16) است.

(ب) همان‌طور که از نمودار پیداست، کسینوس بین -1 تا 1 تغییر می‌کند، هیچ‌وقت نمی‌تواند با $-\frac{3}{2}$ برابر شود. بنابراین نقطه x_0 وجود ندارد.

دشواری

-۱۲

(آ) صفرهای تابع $y = \sin x$ به صورت $x = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ هست و بنابراین صفرهای

تابع $y = \sin 2x$ به صورت $2x = k\pi$ و در نتیجه $x = \frac{k\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$ هست. و در

بازه $[0, 2\pi]$ به صورت $0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi$ هست.

(ب) صفرهای تابع $y = \cos x$ به صورت $x = (2k+1)\frac{\pi}{2}$ است و بنابراین داریم:

$$y = 3 \cos\left(\frac{1}{2}x - \frac{\pi}{4}\right) \Rightarrow \frac{1}{2}x - \frac{\pi}{4} = (2k+1)\frac{\pi}{2}$$

$$\xrightarrow{\times 2} x = (2k+1)\pi + \frac{\pi}{2}$$

که در بازه $[0, 2\pi]$ به صورت مقابل است: $x = \frac{3\pi}{2}$

متوسط

-۱۳

(آ) می‌دانیم که $-1 \leq \sin x \leq 1$ پس $-2 \leq -2 \sin x \leq 2$ بنابراین کم‌ترین

مقدار -2 و بیشترین مقدار 2 است.

(ب) همان‌طور که برای سینوس داشتیم، برای کسینوس نیز: $-1 \leq \cos x \leq 1$

بنابراین $-3 \leq 3 \cos x \leq 3$ و می‌دانیم تغییرات مربوط به x ، تأثیر در دامنه

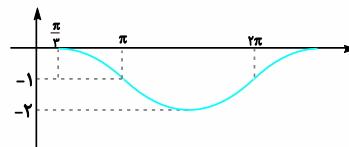
دارند و تأثیری در برد یا ماکزیمم و مینیمم تابع ندارند بنابراین کم‌ترین

مقدار -3 و بیشترین مقدار 3 است.

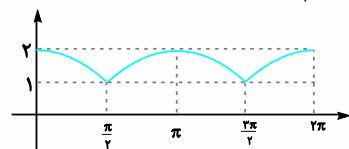
متوسط

-۸

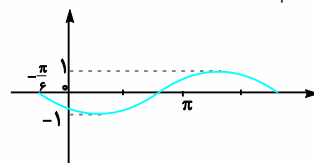
نمودار اول مربوط به قسمت ب هست زیرا نمودار به اندازه $\frac{\pi}{3}$ به سمت راست منتقل شده و در شروع نمودار رو به پائین حرکت کرده بنابراین نمودار کسینوسی با انتقال $\frac{\pi}{3}$ به سمت راست است:



نمودار دوم مربوط به قسمت پ است زیرا نمودار بالای محور x است و به اندازه یک واحد به بالا منتقل شده و داریم:



نمودار سوم مربوط به قسمت آ است و داریم:



آسان

-۹

دوره تناوب هر تابع، بازه‌ای هست که یک نوسان نمودار در اون بازه رسم شده و بعد قبل از اون، نمودار به صورت همون نوسان تکرار شده است.

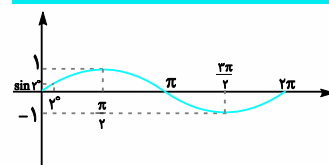
(آ) دوره تناوب ۴ است زیرا نوسان () در فاصله‌های ۴ واحدی تکرار میشه.

(ب) دوره تناوب ۶ است زیرا () در فاصله‌های ۶ واحدی تکرار میشه.

(پ) دوره تناوب ۲ است زیرا () در فاصله‌ای به طول ۲ تکرار میشه.

آسان

-۱۰



(آ) 2° در ربع اول بین 0° تا $\frac{\pi}{4}$ قرار می‌گیرد بنابراین $\sin 2^\circ$ بین 0 تا 1 روی محور y ها و نزدیک‌تر به صفر قرار می‌گیرد.

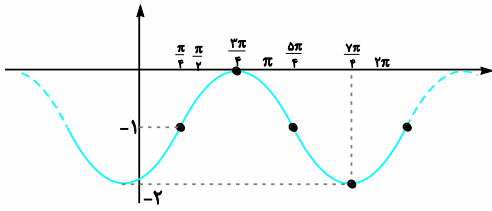
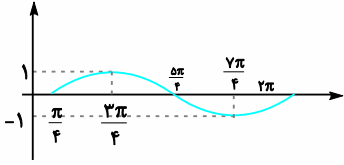
(ب) عددی وجود ندارد که $\sin x_0 = 2$ زیرا سینوس هر زاویه‌ای بین -1 تا 1 قرار می‌گیرد و هیچگاه کمتر از -1 یا بیشتر از 1 نمی‌شود.

متوسط

-۱۶

(آ) برای رسم نمودار این تابع کافیست نمودار $y = \sin x$ رو رسم کنیم، سپس

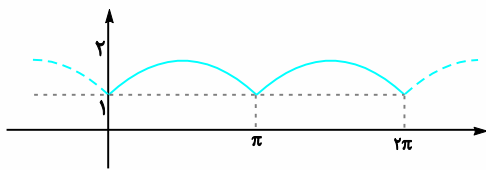
به اندازه $\frac{\pi}{4}$ به سمت راست منتقل کرده یک واحد به پایین ببریم:



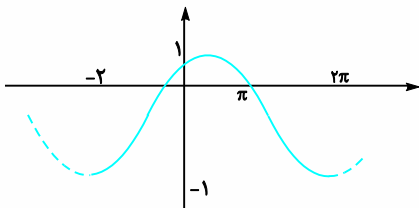
این نمودار در بازه $[0, \pi]$ یک به یک است زیرا خطی موازی محور x ها وجود

دارد که نمودار را در بیش از یک نقطه قطع می کند.

(ب)



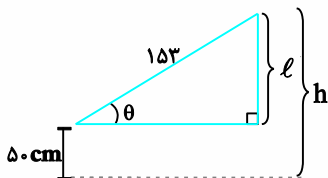
(ج)



آسان

-۱۷

در ربات طراحی شده مثلثی قائم الزاویه به صورت زیر وجود دارد:



$$\sin \theta = \frac{\ell}{153} \Rightarrow \ell = 153 \sin \theta$$

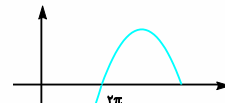
ارتفاع نوک گیره ربات: $h = 50 + \ell$

$$\Rightarrow h = 50 + 153 \sin \theta \quad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$$

متوسط

-۱۴

از روی نمودار می بینیم که در مقایسه با نمودار کسینوس، ضریب a منفی است و داریم:



$$\left(\frac{2\pi}{3}, 0\right) \xrightarrow{\text{جایگذاری}} a \cos \frac{2\pi}{3} + b = 0 \Rightarrow a \cos\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) + b = 0$$

$$\Rightarrow -a \cos \frac{\pi}{3} + b = 0 \Rightarrow -\frac{a}{2} + b = 0 \quad (1)$$

$$(0, -3) \xrightarrow{\text{جایگذاری}} a \cos 0 + b = -3 \Rightarrow a + b = -3 \quad (2)$$

$$\begin{cases} -\frac{a}{2} + b = 0 \\ a + b = -3 \end{cases}$$

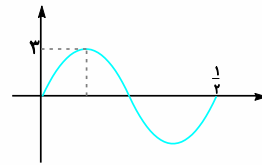
$$a + \frac{a}{2} = -3 \Rightarrow \frac{3}{2}a = -3 \Rightarrow a = -2$$

$$\Rightarrow -2 + b = -3 \Rightarrow b = -1$$

دشواری

-۱۵

از فرمولنامه فصل می دومیم که



$$T = \frac{2\pi}{|b\pi|} = \frac{2}{|b|}$$

و از روی نمودار مقدار T برابر $\frac{1}{4}$ است (یک نوسان کامل) بنابراین داریم:

$$\frac{2}{|b|} = \frac{1}{4} \Rightarrow b = 4 \quad (b > 0)$$

بنابراین $M = 3$, $m = -3$ و باز از فرمولهای فرمولنامه داریم:

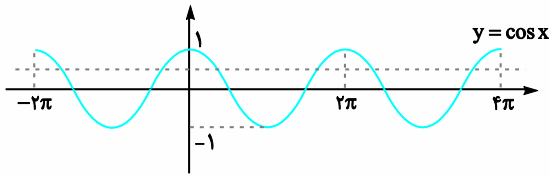
$$a = \frac{M - m}{2} = \frac{3 + 3}{2} = 3, c = \frac{M + m}{2} = \frac{-3 + 3}{2} = 0$$

$$\Rightarrow f(x) = 3 \sin 4\pi x$$

$$\Rightarrow f\left(\frac{1}{12}\right) = 3 \sin\left(4\pi \times \frac{1}{12}\right) = 3 \sin \frac{\pi}{3} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

آسان

-۲۱



(آ) بله. اگر خط $y = \frac{1}{3}$ را رسم کنیم می‌بینیم که نقاط زیادی وجود دارند

که $\cos x_0 = \frac{1}{3}$ باشد.

(ب) خیر. زیرا حداکثر مقداری که کسینوس می‌تواند بگیرد برابر ۱ است و هیچگاه مساوی ۲ نمیشه.

(پ) کم‌ترین مقدار تابع $y = \cos x$ همواره برابر -۱ و حداکثر مقدار آن برابر ۱ است و داریم: $-1 \leq \cos x \leq 1$

آسان

-۲۲

$$1) D_{\sin x} = \mathbb{R}, D_{\cos(x - \frac{\pi}{2})} = \mathbb{R}$$

$$\cos(x - \frac{\pi}{2}) = \cos(\frac{\pi}{2} - x) = \sin x \Rightarrow \text{برهم منطبق هستند}$$

$$2) D_{\cos x} = D_{\cos(2\pi - x)} = \mathbb{R}$$

$$\cos(2\pi - x) = \cos(-x) = \cos x \Rightarrow \text{برهم منطبق هستند}$$

$$3) D_{\cos x} = D_{\sin(\frac{\pi}{2} + x)} = \mathbb{R}$$

$$\sin(x + \frac{\pi}{2}) = \cos x \Rightarrow \text{برهم منطبق هستند}$$

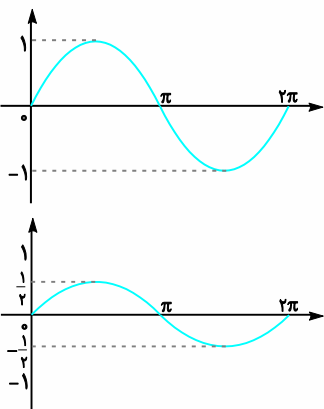
$$4) D_{\sin x} = D_{\sin(\pi - x)} = \mathbb{R}$$

$$\sin(\pi - x) = \sin(\pi - x) = \sin x \Rightarrow \text{برهم منطبق هستند}$$

متوسط

-۲۳

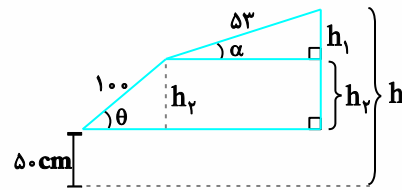
(آ) تأثیر ضریب $\frac{1}{2}$ در برد سینوس است و باعث نصف شدن ماکزیمم و مینیمم می‌شود.



آسان

-۱۸

(آ) با رسم روبات به صورت ساده داریم:



$$\sin \theta = \frac{h_2}{100} \Rightarrow h_2 = 100 \sin \theta$$

$$\sin \alpha = \frac{h_1}{53} \Rightarrow h_1 = 53 \sin \alpha$$

$$\text{ارتفاع نوک گیره} = h_1 + h_2 + 50 = 100 \sin \theta + 53 \sin \alpha + 50$$

$$(ب) \quad 23/5 = 100 \sin \theta + 53 \sin(-30^\circ) + 50$$

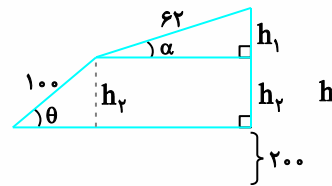
$$\Rightarrow 23/5 = 100 \sin \theta - \frac{53}{2} + 50 \Rightarrow 100 \sin \theta = 23/5 - 23/5 = 0$$

$$\Rightarrow \sin \theta = 0 \Rightarrow \theta = 0$$

آسان

-۱۹

(آ) شبیه راه‌حل سوال ۱۹ داریم:



$$\text{ارتفاع نوک گیره} = h = 62 \sin \alpha + 100 \sin \theta + 200$$

$$(ب) \quad 219 = 62 \sin(-30^\circ) + 100 \sin \theta + 200$$

$$219 - 200 + 31 = 100 \sin \theta \Rightarrow \sin \theta = \frac{50}{100} = \frac{1}{2} \Rightarrow \theta = 30^\circ$$

آسان

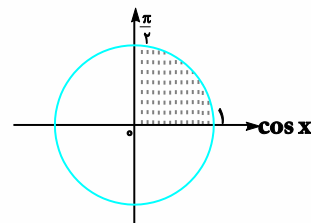
-۲۰

(آ) نادرست

(ب) درست

(پ) نادرست

(ت) نادرست: $0 < \cos x < 1$



(ث) نادرست: $-1 \leq \sin x \leq 1$

(ج) نادرست: $\cos(\pi) = -1$

دشوار

-۲۵

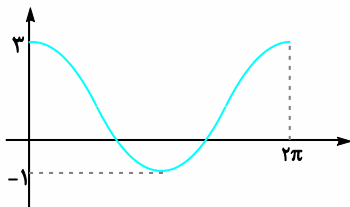
در نمودار سمت چپ، اگر شکل را در نظر بگیریم داریم

() پس نمودار کسینوسی است و ضریب کسینوس منفی است پس ضابطه آن در «پ» آمده است.

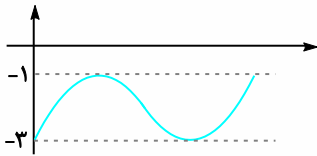
در نمودار سمت راست، داریم: () پس نمودار سینوسی و با ضریب مثبت است و از روی شکل داریم $y = -1$ است پس ۱ واحد به پائین منتقل شده و بنابراین ضابطه‌ی آن در «ب» آمده است.

حال نمودارهای مربوط به قسمت‌های آ و ت را رسم می‌کنیم:

آ) $y = 2\cos x + 1$



ت) $y = \sin x - 2$



آسان

-۲۶

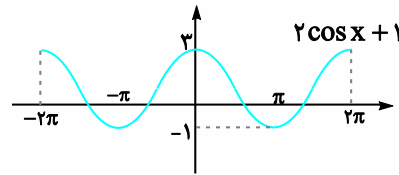
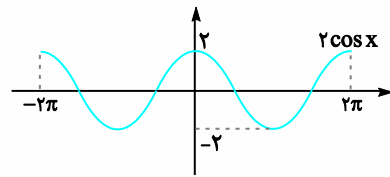
آ) درست. زیرا سینوس ضریب $\frac{1}{4}$ گرفته و برد باید $[-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}]$ باشد و تناوب 2π باشد که در نمودار نیز همین‌طور آمده است.

ب) نادرست. زیرا نمودار $y = \cos x - \frac{1}{4}$ همان نمودار $y = \cos x$ است که

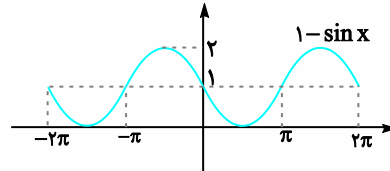
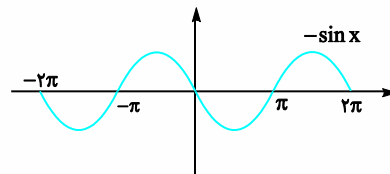
به اندازه $\frac{1}{4}$ به پایین منتقل می‌شود و بنابراین برد تابع $[-\frac{3}{4}, \frac{1}{4}]$ است که در

نمودار درست رسم نشده است.

(ب)



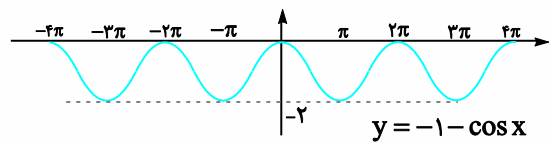
(پ)



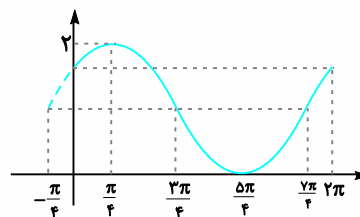
دشوار

-۲۴

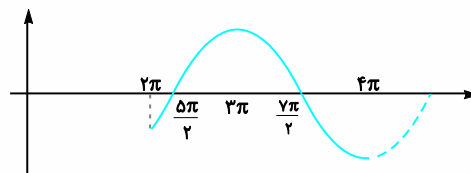
(آ)



(ب)



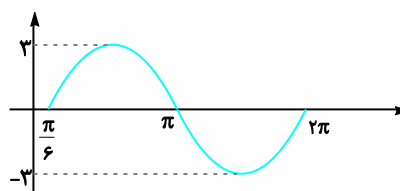
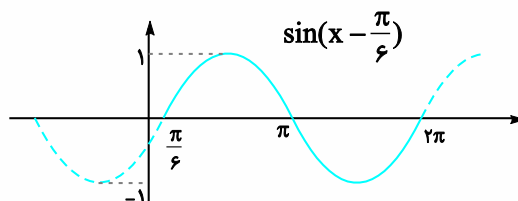
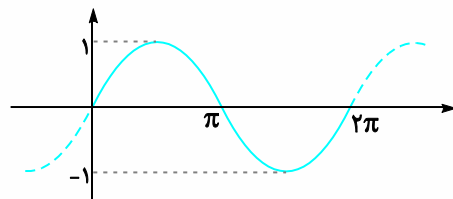
(پ)



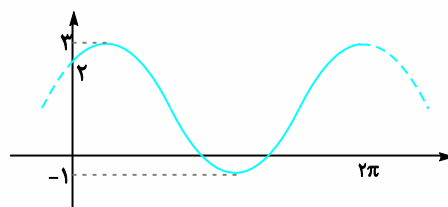
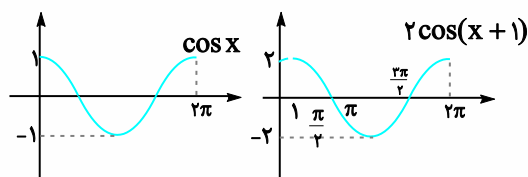
-۲۷

دشوار

$$1) y = -3 \sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$$



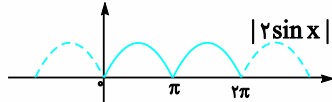
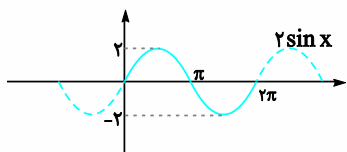
$$2) y = 2 \cos(x + 1) + 1$$



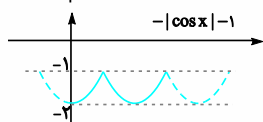
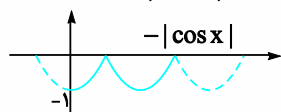
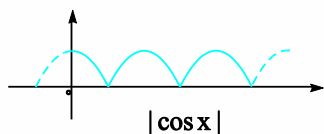
-۲۸

دشوار

$$1) y = 2 \sin x$$



$$2) y = -|\cos x| - 1$$



-۲۹

دشوار

خط وسط $y = 2$ است و فاصله حداقل مقدار و حداکثر مقدار تابع تا خط وسط یک واحد است بنابراین $a = \pm 1$. از طرفی نمودار از زیر خط وسط شروع به رسم کرده پس $a = -1$

$$T = 4\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{4\pi}{3} \text{ به اندازه } \frac{1}{4} \text{ کل دوره متناوب است پس: } \frac{\pi}{3} \text{ تا } \frac{4\pi}{3}$$

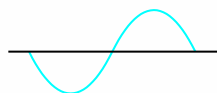
$$\Rightarrow \frac{2}{\frac{4\pi}{3}} = \frac{2\pi}{\frac{4\pi}{3}} \Rightarrow |b| = \frac{3}{2} \Rightarrow b = \frac{3}{2} \text{ (جلوی cos منفی از بین می‌ره!)} \Rightarrow b = \frac{3}{2}$$

$$\begin{cases} M = 3 \\ m = 1 \end{cases} \Rightarrow c = \frac{1+3}{2} = 2 \Rightarrow \frac{bc}{a} = \frac{\frac{3}{2} \times \frac{3}{2}}{-1} = -\frac{9}{4}$$

-۳۰

دشوار

نمودار به صورت زیر است:



پس نمودار مربوط به سینوس اما با $ab < 0$ است.

$$T = \frac{\pi}{3} \text{ بنابراین: } \frac{3}{4}T = \frac{\pi}{4} \text{ که می‌شویم}$$

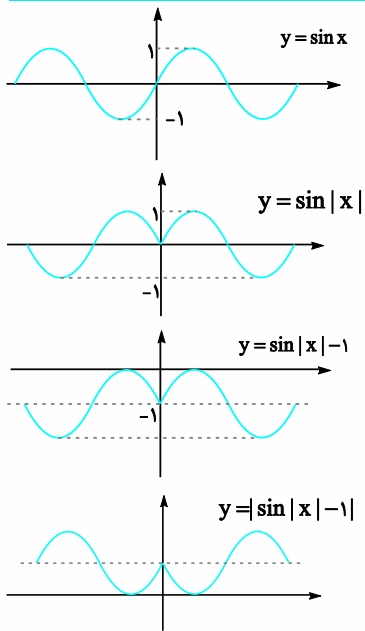
$$|b| = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{3}} = 6$$

$$|a| = \frac{M-m}{2} = \frac{1+3}{2} = 2, \quad c = \frac{M+m}{2} = \frac{1-3}{2} = -1$$

$$\Rightarrow a+b+c = \begin{cases} 2-6-5 \\ -2+6-1=3 \end{cases}$$

۳- گزینه «۴»

دشوار

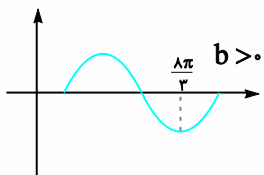


۴- گزینه «۱»

دشوار

$$y = \sin(x - b)$$

می‌دونیم که تابع سینوس اولین مینیمم خود در سمت راست محور y رو به ازای $x = \frac{3\pi}{2}$ می‌گیرد اما این تابع در $x = \frac{4\pi}{3}$ گرفته که بزرگ‌تر از $\frac{3\pi}{2}$ است یعنی نمودار به سمت راست منتقل شده و بنابراین b مقداری مثبت است پس:

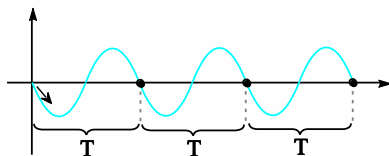


$$\frac{3\pi}{2} + b = \frac{4\pi}{3} \Rightarrow b = \frac{\pi}{6}$$

۵- گزینه «۱»

دشوار

$$\begin{cases} m = -3 \\ M = 3 \end{cases} \Rightarrow |a| = \frac{3+3}{2} = 3, c = \frac{3-3}{2} = 0$$



$$3T = 3 \Rightarrow T = 1$$

$$\frac{2\pi}{|b\pi|} = 1 \Rightarrow |b| = 2$$

نمودار از خط وسط (محور x) روبه پایین رسم شده بنابراین ab منفی است.

$$|ab| = 6 \xrightarrow{ab < 0} ab = -6$$

سؤالات تستی

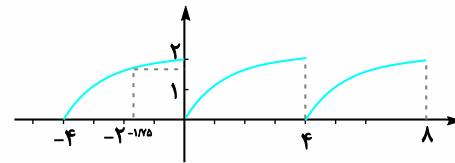
پاسخنامه

بخش ۳

دشوار

۱- گزینه «۱»

اگر f تابعی متناوب باشد یعنی نمودار $\sqrt{x}$ در بازه‌های به فاصله ۴ واحدی تکرار میشه پس نمودار f به صورت زیر هست:

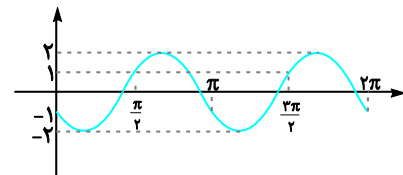
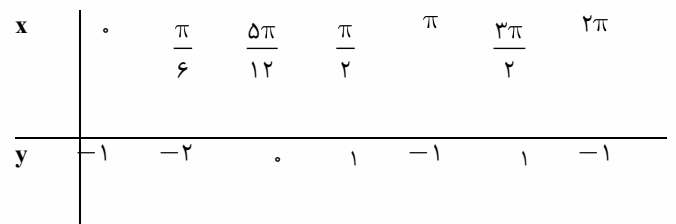


یعنی روی نمودار ببینیم مقدار y به ازای $x = -1/75$ چقدر شده است که در واقع با توجه به نمودار، می‌بینیم که مقداری بین ۱ تا ۲ دارد پس گزینه ۱ درست است.

دشوار

۲- گزینه «۳»

$$y = -2\sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right)$$



می‌دانیم

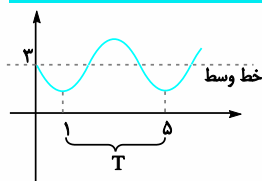
از روی نمودار هم مشخص است که تابع در دو نقطه به بیشترین مقدار خود می‌رسد. در واقع زمانی این ماکزیمم رخ می‌دهد که $\sin x = -1$ یعنی مقدار

جلوی سینوس یا $\frac{3\pi}{2}$ شود یا $\frac{7\pi}{2}$:

$$\begin{aligned} 2x + \frac{\pi}{6} &= \frac{3\pi}{2} \Rightarrow x = \frac{2\pi}{3} \\ 2x + \frac{\pi}{6} &= \frac{7\pi}{2} \Rightarrow x = \frac{5\pi}{3} \end{aligned} \xrightarrow{+} \frac{7\pi}{3}$$

دشوار

۱۱- گزینه «ب»



با توجه به فرم نمودار و نسبت به خط وسط، ab منفی است و دوره تناوب برابر ۴ است.

$$\frac{\cancel{f}}{|b\cancel{\pi}|} = \frac{2}{\cancel{\pi}} \Rightarrow |b| = \frac{1}{2} \xrightarrow[\text{مثبت}]{\text{ضریب سینوس}} b = -\frac{1}{2}$$

ضریب سینوس ۱ است یعنی فاصله ماکزیمم (یا مینیمم) تا خط وسط ۱ واحد است پس:

$$m = 2 \Rightarrow a = \frac{4+2}{2} = 3 \Rightarrow f(x) = 3 \sin(-\frac{\pi}{2}x)$$

$$\Rightarrow f(x) = 3 - \sin \frac{\pi}{2}x \Rightarrow f(\frac{25}{3}) = 3 - \frac{\pi}{3} \times \frac{25}{3}$$

$$= 3 - \sin(\frac{25\pi}{6}) = 3 - \sin(4\pi + \frac{\pi}{6}) = 3 - \sin(\frac{\pi}{6}) = 3 - \frac{1}{2} = \frac{5}{2} = 2.5$$

دشوار

۱۲- گزینه «ب»

$$f(x) = \frac{2}{a} - \frac{b}{1 + \tan^2(Cx - \frac{3\pi}{4})} = \frac{2}{a} - \frac{b}{\cos^2(Cx - \frac{3\pi}{4})}$$

$$= \frac{2}{a} - b \cos^2(Cx - \frac{3\pi}{4}) = \frac{2}{a} - b(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2(Cx - \frac{3\pi}{4}))$$

$$f(x) = \frac{2}{a} - \frac{b}{2} - \frac{b}{2} \cos(2Cx - \frac{3\pi}{2}) = \frac{2}{a} - \frac{b}{2} + \frac{b}{2} \sin(-2Cx)$$

$$f(0) = 2 \Rightarrow \frac{2}{a} - b + \frac{b}{2}(0) = 2 \Rightarrow \frac{2}{a} - \frac{b}{2} = 2 \quad (*) \quad (b > 0)$$

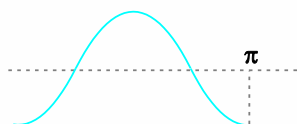
$$T = \frac{2\pi}{|2c|} = 4\pi \Rightarrow |c| = \frac{1}{4} \xrightarrow{c < 0} c = -\frac{1}{4}, M = 6 \Rightarrow \frac{2}{a} - \frac{b}{2} + |\frac{b}{2}| = 6$$

$$\Rightarrow \frac{2}{a} = 6 \Rightarrow a = \frac{1}{3} \xrightarrow{*} 6 - \frac{b}{2} = 2 \Rightarrow \frac{b}{2} = 4 \Rightarrow b = 8$$

$$f(\frac{3\pi}{4}) = \frac{2}{\frac{1}{3}} - \frac{8}{2} + \frac{8}{2} \sin(+\frac{\pi}{4} \times \frac{\pi}{4}) = 6 - 4 + 4 \sin(\frac{\pi}{4}) = 2 + 4 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 2 + 2\sqrt{2} = 4.414$$

آسان

۱۳- گزینه «ب»



$$y = c + a \cos bx$$

با توجه به موقعیت نمودار $a < 0$:

$$|a| = \frac{\frac{5}{2} - \frac{1}{2}}{2} = \frac{2}{2} = 1 \Rightarrow a = -\frac{3}{2} \Rightarrow ac = -\frac{3}{2}$$

$$c = \frac{\frac{5}{2} - \frac{1}{2}}{2} = 1$$

متوسط

۶- گزینه «ا»

از فاصله $2/5$ تا $3/5$ به اندازه سه دوره تناوب داریم پس:

$$3T = 3/5 - (-2/5) = 6 \Rightarrow T = 2 \Rightarrow \frac{2\pi}{|b\pi|} = 2 \Rightarrow |b| = 1 \Rightarrow b = 1$$

$$y = a \sin(\frac{\pi}{2} + b\pi x) = a \cos b\pi x$$

$$\begin{cases} m = -2 \\ M = 2 \end{cases} \Rightarrow |a| = \frac{2+2}{2} = 2$$

و از اونجایی که نمودار کسینوس نسبت به خط وسط در حالت a مثبت (شروع

رو به پایین) است پس: $a = 2$ و بنابراین:

$$ab = 2$$

آسان

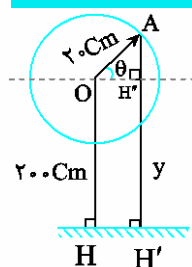
۷- گزینه «ب»

$$\begin{cases} m = -4 \\ M = 5 \end{cases} \Rightarrow a = \frac{5 - (-4)}{2} = \frac{9}{2} \Rightarrow (a, c) = (\frac{9}{2}, \frac{1}{2})$$

$$c = \frac{-4 + 5}{2} = \frac{1}{2}$$

آسان

۸- گزینه «ب»



$$OAH' : \sin \theta = \frac{AH'}{20} \Rightarrow AH' = 20 \sin \theta$$

$$y = AH' + H'H' \Rightarrow y = 20 \sin \theta + 20$$

$$\Rightarrow y = 20(\sin \theta + 1)$$

آسان

۹- گزینه «ب»

$$T = 1/2 \Rightarrow \frac{\cancel{f}\pi}{\cancel{b\cancel{\pi}}} = |B| \xrightarrow{B > 0} B = \frac{\pi}{0.6} = \frac{10\pi}{6} = \frac{5\pi}{3}$$

$$A = \frac{5 - (-5)}{2} = 5 \Rightarrow A \times B = 5 \times \frac{5\pi}{3} = \frac{25\pi}{3}$$

آسان

۱۰- گزینه «ب»

$$T = 6 \Rightarrow \frac{\cancel{f}\pi}{\cancel{b\cancel{\pi}}} = |b\cancel{\pi}| \xrightarrow{b > 0} b = \frac{1}{3}$$

$$a = 2 \Rightarrow a + b = 2 + \frac{1}{3} = \frac{7}{3}$$

آسان

-۵

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = \cos\frac{\pi}{2}\cos\theta - \sin\frac{\pi}{2}\sin\theta$$

$$= (0)(\cos\theta) - (1)(\sin\theta) = -\sin\theta$$

آسان

-۶

$$\sin(45^\circ - 30^\circ) = \sin 45^\circ \cos 30^\circ - \sin 30^\circ \cos 45^\circ$$

$$= \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$$

متوسط

-۷

$$1) \cos(45^\circ - 30^\circ) = \cos 45^\circ \cos 30^\circ + \sin 45^\circ \sin 30^\circ$$

$$= \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$$

$$2) \tan(60^\circ + 45^\circ) = \frac{\sin(60^\circ + 45^\circ)}{\cos(60^\circ + 45^\circ)} = \frac{\sin 60^\circ \cos 45^\circ + \cos 60^\circ \sin 45^\circ}{\cos 60^\circ \cos 45^\circ - \sin 60^\circ \sin 45^\circ}$$

$$= \frac{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}{\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{\sqrt{2} - \sqrt{6}}$$

$$= \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{\sqrt{2} - \sqrt{6}}$$

$$3) \sin\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) = \sin\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4} - \sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{3} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) - \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$= \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$$

متوسط

-۸

ابتدا با استفاده از روابط مثلثاتی داریم:

$$\sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha = 1 - \frac{16}{25} = \frac{9}{25} \Rightarrow \sin \alpha = \frac{3}{5}$$

$$\sin^2 \beta = 1 - \cos^2 \beta = 1 - \frac{144}{169} = \frac{25}{169} \Rightarrow \sin \beta = \frac{5}{13}$$

$$1) \sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha = \left(\frac{3}{5}\right)\left(-\frac{12}{13}\right) + \left(\frac{4}{5}\right)\left(\frac{5}{13}\right)$$

$$= -\frac{36}{65} + \frac{20}{65} = -\frac{16}{65}$$

$$2) \cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta = \left(\frac{4}{5}\right)\left(-\frac{12}{13}\right) + \left(\frac{3}{5}\right)\left(\frac{5}{13}\right)$$

$$= -\frac{48}{65} + \frac{15}{65} = -\frac{33}{65}$$

آسان

-۹

$$1) \sin(\alpha + \alpha) = \sin \alpha \cos \alpha + \cos \alpha \sin \alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

$$2) \cos(\alpha + \alpha) = \cos \alpha \cos \alpha - \sin \alpha \sin \alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$$



سوالات تشریحی

پاسخنامه

بخش ۴

دشوار

-۱

ابتدا زاویه $\hat{E}$ را در مثلث EFC می‌یابیم: چون E نیم صفحه است و مجموع زوایا در مثلث ABE ، 180° است

$$\hat{FEC} + 90^\circ + \hat{AEB} = 180^\circ, \alpha + 90^\circ + \hat{AEB} = 180^\circ \Rightarrow \alpha = \hat{FEC}$$

همچنین با توجه به موازی بودن DC و AB و مورب بوده AF

$$\hat{DFA} = \alpha + \beta$$

اندازه اضلاع AD و DF را در مثلث ADF می‌نویسیم:

$$\sin(\alpha + \beta) = \frac{AD}{1}$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \frac{DF}{1}$$

اندازه اضلاع AE و EF را بر حسب B می‌نویسیم:

$$\sin \beta = \frac{EF}{1}, \cos \beta = \frac{AE}{1}$$

اندازه اضلاع BE و EC و AB را بر حسب زاویه α می‌نویسیم:

$$\sin \alpha = \frac{BE}{AE} \Rightarrow \sin \alpha = \frac{BE}{\cos \beta} \Rightarrow BE = \sin \alpha \cos \beta$$

$$\cos \alpha = \frac{AB}{AE} \Rightarrow \cos \alpha = \frac{AB}{\cos \beta} \Rightarrow AB = \cos \alpha \cos \beta$$

$$\sin \alpha = \frac{FC}{EF} \Rightarrow \sin \alpha = \frac{FC}{\sin \beta} \Rightarrow FC = \sin \alpha \sin \beta$$

$$\cos \alpha = \frac{EC}{EF} \Rightarrow \cos \alpha = \frac{EC}{\sin \beta} \Rightarrow EC = \cos \alpha \sin \beta$$

با توجه به آن که در مستطیل اضلاع روبه‌رو برابرند پس

$$AD = BE + EC \Rightarrow \sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$$

$$AB + DF + FC \Rightarrow \cos \alpha \cos \beta = \cos(\alpha + \beta) + \sin \alpha \sin \beta \Rightarrow$$

$$\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta = \cos(\alpha + \beta)$$

آسان

-۲

$$\sin(30^\circ + 45^\circ) = \sin 30^\circ \cos 45^\circ + \cos 30^\circ \sin 45^\circ$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}$$

آسان

-۳

$$\cos 105^\circ = \cos(60^\circ + 45^\circ) = \cos 60^\circ \cos 45^\circ - \sin 60^\circ \sin 45^\circ$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4}$$

آسان

-۴

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right)} = \frac{\sin\frac{\pi}{2}\cos\theta + \cos\frac{\pi}{2}\sin\theta}{\cos\frac{\pi}{2}\cos\theta - \sin\frac{\pi}{2}\sin\theta} = \frac{\cos\theta}{-\sin\theta} = -\cot\theta$$

متوسط

-۱۵

نتیجه این اتحاد را در ذهن بسپارید.

$$\begin{aligned}\sin(\alpha + 2\alpha) &= \sin\alpha \cos 2\alpha + \cos\alpha \sin 2\alpha \\ &= \sin\alpha(1 - 2\sin^2\alpha) + \cos\alpha(2\sin\alpha \cos\alpha) \\ &= \sin\alpha - 2\sin^3\alpha + 2\sin\alpha \cos^2\alpha \\ &= \sin\alpha - 2\sin^3\alpha + 2\sin\alpha(1 - \sin^2\alpha) \\ &= \sin\alpha - 2\sin^3\alpha + 2\sin\alpha - 2\sin^3\alpha \\ &= 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha\end{aligned}$$

متوسط

-۱۶

نتیجه این اثبات را در ذهن بسپارید.

$$\begin{aligned}\cos(\alpha + 2\alpha) &= \cos\alpha \cos 2\alpha - \sin\alpha \sin 2\alpha \\ &= \cos\alpha(2\cos^2\alpha - 1) - \sin\alpha(2\sin\alpha \cos\alpha) \\ &= 2\cos^3\alpha - \cos\alpha - 2(1 - \cos^2\alpha)\cos\alpha \\ &= 2\cos^3\alpha - \cos\alpha - 2\cos\alpha + 2\cos^3\alpha \\ &= 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha\end{aligned}$$

آسان

-۱۷

با استفاده از فرمول $\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cos\beta - \sin\alpha \sin\beta$ داریم:

$$\cos 10^\circ \cos 20^\circ - \sin 10^\circ \sin 20^\circ = \cos(10^\circ + 20^\circ) = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

آسان

-۱۸

با استفاده از فرمول $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$ داریم:

$$\cos^2 15^\circ - \sin^2 15^\circ = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

متوسط

-۱۹

با استفاده از فرمول $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha \cos\alpha$ می‌توانیم به

$$\sin 75^\circ = 2\sin 37.5^\circ \cos 37.5^\circ \xrightarrow{\text{پس}} \frac{1}{2}\sin 75^\circ = \sin 37.5^\circ \times \cos 37.5^\circ$$

از طرفی برای یافتن $\sin 75^\circ$ می‌توان از رابطه

$$\sin 75^\circ = \sin(30^\circ + 45^\circ) = \sin 30^\circ \cos 45^\circ + \sin 45^\circ \cos 30^\circ$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}$$

در نتیجه:

$$\sin 37.5^\circ \times \cos 37.5^\circ = \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{8}$$

متوسط

-۲۰

$$\cos(2\alpha + 2\alpha) = \cos 2\alpha \cos 2\alpha - \sin 2\alpha \sin 2\alpha$$

$$= \cos^2 2\alpha - \sin^2 2\alpha \xrightarrow{\sin^2 2\alpha = 1 - \cos^2 2\alpha}$$

$$= \cos^2 2\alpha - 1 + \cos^2 2\alpha = 2\cos^2 2\alpha - 1$$

متوسط

-۱۰

با استفاده از اتحادها داریم:

$$\sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha = 1 - \frac{1}{9} \Rightarrow \sin \alpha = \frac{-2\sqrt{2}}{3}$$

$$\cos^2 \beta = 1 - \sin^2 \beta = 1 - \frac{4}{25} \Rightarrow \cos \beta = \frac{-\sqrt{21}}{5}$$

در نتیجه:

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha \cos\beta + \cos\alpha \sin\beta$$

$$= \left(\frac{-2\sqrt{2}}{3}\right)\left(\frac{-\sqrt{21}}{5}\right) + \left(\frac{-1}{3}\right)\left(\frac{-2}{5}\right)$$

$$= \frac{2\sqrt{42}}{15} + \frac{2}{15} = \frac{2\sqrt{42} + 2}{15}$$

متوسط

-۱۱

با استفاده از اتحادها

$$\cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha$$

$$\cos^2 \alpha = 1 - \frac{144}{169} = \frac{25}{169} \Rightarrow \cos \alpha = \frac{5}{13}$$

$$1 + \tan^2 \beta = \frac{1}{\cos^2 \beta} \Rightarrow 1 + \frac{9}{16} = \frac{1}{\cos^2 \beta} \Rightarrow \frac{25}{16} = \frac{1}{\cos^2 \beta} \Rightarrow \cos \beta = \frac{4}{5}$$

$$\sin^2 \beta = 1 - \cos^2 \beta \Rightarrow \sin^2 \beta = 1 - \frac{16}{25} \Rightarrow \sin \beta = \frac{3}{5}$$

در نتیجه:

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha \cos\beta - \cos\alpha \sin\beta$$

$$= \left(\frac{12}{13}\right)\left(\frac{4}{5}\right) - \left(\frac{5}{13}\right)\left(\frac{3}{5}\right) = \frac{48}{65} - \frac{15}{65} = \frac{33}{65}$$

آسان

-۱۲

با توجه به رابطه $\frac{1}{2}\sin 2\alpha = \sin\alpha \cos\alpha$

$$\frac{1}{2}\sin 45^\circ = \sin\alpha \cos\alpha \Rightarrow \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \sin 22.5^\circ \cos 22.5^\circ$$

$$\frac{\sqrt{2}}{4} = \sin 22.5^\circ \cos 22.5^\circ$$

آسان

-۱۳

برای یافتن آن از رابطه $\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2 \alpha$

$$\cos 45^\circ = 1 - 2\sin^2 22.5^\circ$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} = 1 - 2\sin^2 22.5^\circ \Rightarrow 2\sin^2 22.5^\circ = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\sin 22.5^\circ = \sqrt{\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{4}}$$

آسان

-۱۴

$$\frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\cos x + \sin x} = \frac{(\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x)}{\cos x + \sin x} = \cos x - \sin x$$

متوسط

-۲۴

با استفاده از ضرب و تقسیم عبارت در $\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2}$ داریم:

$$\sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \sin \alpha \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \cos \alpha \right) = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} \sin \alpha \pm \sin \frac{\pi}{4} \cos \alpha \right)$$

$$= \sqrt{2} \sin \left(\alpha \pm \frac{\pi}{4} \right)$$

این فرمول را در ذهن بسپارید.

متوسط

-۲۵

$$\sin 105^\circ = \sin(60^\circ + 45^\circ) = \sin 60^\circ \cos 45^\circ + \sin 45^\circ \cos 60^\circ = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$= \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$$

$$\cos 105^\circ = \cos(60^\circ + 45^\circ) = \cos 60^\circ \cos 45^\circ - \sin 60^\circ \sin 45^\circ = \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$= \frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4}$$

در نتیجه:

$$= \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2} + \sqrt{2} - \sqrt{6}}{4} = \frac{2\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

متوسط

-۲۶

برای محاسبه آن از فرمول $\cos 2\alpha = 2\cos^2 \alpha - 1$

$$\cos 45^\circ = 2\cos^2 22.5^\circ - 1 \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} = 2\cos^2 22.5^\circ - 1$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} + 1 = 2\cos^2 22.5^\circ \Rightarrow \sqrt{\frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{1}{2}} = \cos 22.5^\circ$$

دشوار

-۲۷

خواستون باشه! فرمول $\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta}$ را به ذهن بسپارید.

$$\tan\left(\frac{\pi}{4} + 2x\right) = \frac{\tan \frac{\pi}{4} + \tan 2x}{1 - \tan \frac{\pi}{4} \tan 2x} = \frac{1 + \tan 2x}{1 - \tan 2x} \quad (*)$$

برای محاسبه $\tan 2x$ از رابطه $\tan 2x = \frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x}$ استفاده می‌کنیم:

$$\tan 2x = \frac{2\left(\frac{1}{2}\right)}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{1}{\frac{3}{4}} = \frac{4}{3}$$

پس در نتیجه با جایگذاری در *

$$\frac{1 + \frac{4}{3}}{1 - \frac{4}{3}} = \frac{\frac{7}{3}}{-\frac{1}{3}} = -7$$

متوسط

-۲۱

خواستون باشه! فرمول‌های این سوال را در ذهن بسپارید:

$$\bar{1}) \sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta}{\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta} \xrightarrow[\text{تقسیم می‌کنیم}]{\text{کل عبارت‌ها را بر } \cos \alpha \cos \beta}$$

$$\frac{\frac{\sin \alpha \cos \beta}{\cos \alpha \cos \beta} + \frac{\cos \alpha \sin \beta}{\cos \alpha \cos \beta}}{1 - \frac{\sin \alpha \sin \beta}{\cos \alpha \cos \beta}} = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta}$$

$$\text{ب) } \cot(\alpha + \beta) = \frac{\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta}{\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta} \xrightarrow[\text{تقسیم می‌کنیم}]{\text{کل عبارت را بر } \sin \alpha \sin \beta}$$

$$\frac{\frac{\cos \alpha \cos \beta}{\sin \alpha \sin \beta} - \frac{\sin \alpha \sin \beta}{\sin \alpha \sin \beta}}{\frac{\sin \alpha \cos \beta}{\sin \alpha \sin \beta} + \frac{\cos \alpha \sin \beta}{\sin \alpha \sin \beta}} = \frac{\cot \alpha \cot \beta - 1}{\cot \beta + \cot \alpha}$$

متوسط

-۲۲

$$\bar{1}) \cos(30^\circ + 45^\circ) = \cos 30^\circ \cos 45^\circ - \sin 30^\circ \sin 45^\circ$$

$$= \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) - \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$$

$$\text{ب) } \tan\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\tan \frac{\pi}{3} + \tan \frac{\pi}{4}}{1 - \tan \frac{\pi}{3} \tan \frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{3} + 1}{1 - \sqrt{3}}$$

$$\text{پ) } \cot(270^\circ + 15^\circ) = -\tan 15^\circ = -\tan(45^\circ - 30^\circ)$$

$$= -\frac{\tan 45^\circ - \tan 30^\circ}{1 + \tan 45^\circ \tan 30^\circ} = -\frac{1 - \frac{\sqrt{3}}{3}}{1 + \frac{\sqrt{3}}{3}}$$

متوسط

-۲۳

ابتدا با استفاده از اتحاد

$$\sin \beta = \sqrt{1 - \frac{25}{169}} = \frac{12}{13}, \cos \alpha = \sqrt{1 - \frac{9}{25}} = \frac{4}{5} \leftarrow \cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha$$

می‌یابیم:

$$\bar{1}) \sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha = \left(\frac{3}{5}\right)\left(-\frac{5}{13}\right) + \left(\frac{4}{5}\right)\left(\frac{12}{13}\right)$$

$$= -\frac{15}{65} + \frac{48}{65} = \frac{33}{65}$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta = \left(\frac{4}{5}\right)\left(-\frac{5}{13}\right) + \left(\frac{3}{5}\right)\left(\frac{12}{13}\right)$$

$$= \frac{-20}{65} + \frac{36}{65} = \frac{16}{65}$$

چون منفی است پس در ربع سوم قرار دارد

$$\text{ب) } \sin(\alpha + \beta) = -\frac{33}{65}$$

$$\cos(\alpha + \beta) = -\frac{56}{65}$$

متوسط

۳۳-

نتیجه این سوال را در ذهن بسپارید:

$$\begin{aligned}\sin \alpha + \cos \alpha &= \sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \sin \alpha + \frac{\sqrt{2}}{2} \cos \alpha \right) = \sqrt{2} \left(\sin \frac{\pi}{4} \sin \alpha + \cos \frac{\pi}{4} \cos \alpha \right) \\ &= \sqrt{2} \left(\cos \left(\alpha - \frac{\pi}{4} \right) \right) = \sqrt{2} \cos \left(\alpha - \frac{\pi}{4} \right)\end{aligned}$$

متوسط

۳۳-

نتیجه این سوال را در ذهن بسپارید:

$$\begin{aligned}\sin 2\alpha &= 2 \sin \alpha \cos \alpha \xrightarrow[\text{تقسیم و هم ضرب می‌کنیم}]{\text{عبارت را هم } \cos \alpha} \frac{2 \sin \alpha}{\cos \alpha} \cdot \cos^2 \alpha \\ 2 \tan \alpha \times \frac{1}{\cos^2 \alpha} &= 2 \tan \alpha \times \frac{1}{1 + \tan^2 \alpha} = \frac{2 \tan \alpha}{1 + \tan^2 \alpha}\end{aligned}$$

آسان

۳۴-

$$\begin{aligned}\cos 2\alpha &= \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = \cos^2 \alpha - (1 - \cos^2 \alpha) \\ &= \cos^2 \alpha - 1 + \cos^2 \alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1\end{aligned}$$

متوسط

۳۵-

نتیجه این سوال را در ذهن بسپارید:

$$\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} + \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha}{\sin \alpha \cos \alpha} = \frac{1}{\frac{1}{2} \sin 2\alpha} = \frac{2}{\sin 2\alpha}$$

متوسط

۳۶-

حواستون باشه! همیشه ایده به توان ۲ رساندن طرفین را در ذهن داشته باشید.

$$\sin^2 x + \cos^2 x + 2 \sin x \cos x = \frac{1}{4} \Rightarrow 1 + \sin 2x = \frac{1}{4} \Rightarrow \sin 2x = -\frac{3}{4}$$

فرمول $\tan x + \cot x = \frac{2}{\sin 2x}$ را در ذهن داشته باشید:

$$\tan x + \cot x = \frac{2}{-\frac{3}{4}} = -\frac{8}{3}$$

متوسط

۳۷-

حواستون باشه!!

فرمول $\tan x + \cot x = \frac{2}{\sin 2x}$ را در ذهن بسپارید.

$$\tan 15^\circ + \cot 15^\circ = \frac{2}{\sin 30^\circ} = \frac{2}{\frac{1}{2}} = 4$$

دشوار

۲۸-

اتحاد قسمت آ این سوال را به خاطر بسپارید:

$$\begin{aligned}\text{آ)} \quad \frac{\sin x}{1 + \cos x} &= \frac{2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}}{2 \cos^2 \frac{x}{2}} = \frac{\cancel{2} \sin \frac{x}{2} \cancel{\cos \frac{x}{2}}}{\cancel{2} \cos^2 \frac{x}{2}} = \frac{\sin \frac{x}{2}}{\cos \frac{x}{2}} = \tan \frac{x}{2} \\ \text{ب)} \quad \frac{\sin 2x}{\cos 2x} \cdot \cos 2x - \tan x \cdot \frac{2 \tan x}{1 + \tan^2 x} &= \sin 2x - \frac{2 \tan^2 x}{1 + \tan^2 x} \\ &= \sin 2x - \frac{2 \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}}{\frac{1 + \tan^2 x}{\cos^2 x}} = \sin 2x - 2 \sin^2 x\end{aligned}$$

متوسط

۲۹-

$$\begin{aligned}\text{آ)} \quad \cos \left(\pi + \frac{\pi}{12} \right) &= -\cos \frac{\pi}{12} = -\cos \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} \right) \\ &= -\left[\cos \frac{\pi}{3} \cos \frac{\pi}{4} + \sin \frac{\pi}{3} \sin \frac{\pi}{4} \right] \\ &= -\left[\left(\frac{1}{2} \right) \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right) + \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right) \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right) \right] \\ &= -\left[\frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{6}}{4} \right] = -\frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4} \\ \text{ب)} \quad \tan \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} \right) &= \frac{\tan \frac{\pi}{3} - \tan \frac{\pi}{4}}{1 + \tan \frac{\pi}{3} \tan \frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{3} - 1}{1 + \sqrt{3}}\end{aligned}$$

متوسط

۳۰-

ابتدا با استفاده از اتحادها $\cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha$

$$\cos^2 \alpha = 1 - \frac{49}{625} \Rightarrow \cos^2 \alpha = \frac{576}{625} \Rightarrow \cos \alpha = \frac{-24}{25}$$

همچنین با استفاده از $1 + \tan^2 \beta = \frac{1}{\cos^2 \beta}$

$$1 + \frac{225}{64} = \frac{1}{\cos^2 \beta} \Rightarrow \frac{289}{64} = \frac{1}{\cos^2 \beta} \Rightarrow \cos \beta = -\frac{17}{29}, \sin \beta = \frac{15}{29}$$

$$\begin{aligned}\sin(\alpha - \beta) &= \sin \alpha \cos \beta - \sin \beta \cos \alpha = \left(-\frac{24}{25} \right) \left(-\frac{17}{29} \right) - \left(\frac{15}{29} \right) \left(\frac{-24}{25} \right) \\ &= \frac{56}{425} + \frac{360}{425} = \frac{416}{425}\end{aligned}$$

متوسط

۳۱-

ابتدا با توجه به متوجه می‌شویم $\sin^2 \alpha = 1 - \frac{144}{169} = \frac{25}{169} \Rightarrow \sin \alpha = \frac{5}{13}$

$$\text{آ)} \quad \sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha = 2 \left(-\frac{5}{13} \right) \left(\frac{12}{13} \right) = -\frac{120}{169}$$

$$\text{ب)} \quad \cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1 = 2 \left(\frac{12}{13} \right)^2 - 1 = 2 \left(\frac{144}{169} \right) - 1 = \frac{288}{169} - 1 = \frac{119}{169}$$

$$\text{پ)} \quad \tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha} = \frac{2 \left(-\frac{5}{12} \right)}{1 - \frac{25}{144}} = \frac{-\frac{10}{12}}{\frac{119}{144}} = -\frac{120}{119}$$

سوالات تستی

پاسخنامه

بخش ۴

متوسط

۱- گزینه «۳»

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$$

اگر $\sin \alpha = \frac{3}{5}$ باشد طبق فیثاغورس $\cos \alpha = \frac{4}{5}$ همچنین $\cos \beta = -\frac{5}{13}$

پس $\sin \beta = -\frac{12}{13}$

$$= \left(\frac{3}{5}\right)\left(-\frac{5}{13}\right) + \left(\frac{4}{5}\right)\left(-\frac{12}{13}\right) = \frac{-15}{65} - \frac{48}{65} = -\frac{63}{65}$$

متوسط

۲- گزینه «۲»

$$\frac{\sin 3x \cos x - \sin x \cos 3x}{\sin x \cos x} = \frac{\sin(3x - x)}{\frac{1}{2} \sin 2x} = \frac{\sin 2x}{\frac{1}{2} \sin 2x} = 2$$

دشوار

۳- گزینه «۴»

با ساده کردن عبارت خواسته شده داریم:

$$\frac{(\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta)(\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta)}{(\sin \alpha \cos \beta - \sin \beta \cos \alpha)(\sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha)} =$$

$$\frac{[\cos(\alpha + \beta)][\cos(\alpha - \beta)]}{[\sin(\alpha - \beta)][\sin(\alpha + \beta)]} = \frac{(\cos(135^\circ))}{(\sin(135^\circ))} \times \cot(\alpha - \beta)$$

$$= \cot(135^\circ) \times \cot(\alpha - \beta) = \cot(180^\circ - 45^\circ) \times \cot(\alpha - \beta)$$

$$= -\cot 45^\circ \times \frac{4}{3} = -1 \times \frac{4}{3} = -\frac{4}{3}$$

متوسط

۴- گزینه «۳»

حواستون باشه! فرمول $\sin \alpha \pm \cos \alpha = \sqrt{2} \sin(\alpha \pm \frac{\pi}{4})$ را در ذهن

بسیارید:

$$\frac{\sin^3 x + \cos^3 x}{\sin x + \cos x} + \frac{1}{2} \sin 2x =$$

$$\frac{(\sin x + \cos x)(\sin^2 x - \sin x \cos x + \cos^2 x)}{\sin x \cos x} + \frac{1}{2} \sin 2x$$

$$= (1 - \sin x \cos x) + \frac{1}{2} \sin 2x = 1 - \frac{1}{2} \sin 2x + \frac{1}{2} \sin 2x = 1$$

متوسط

۳۸-

حواستون باشه! فرمول

$$\tan x - \cot x = -2 \cot 2x$$

را در ذهن بسپارید.

$$\tan 22^\circ / 5 - \cot 22^\circ / 5 = -2 \cot 44^\circ = -2(1) = -2$$

متوسط

۳۹-

نتیجه این سوال را در ذهن بسپارید:

$$\alpha = \frac{\pi}{4} - \beta$$

$$(1 + \tan(\frac{\pi}{4} - \beta))(1 + \tan \beta) \Rightarrow (1 + \frac{\tan \frac{\pi}{4} - \tan \beta}{1 + \tan \frac{\pi}{4} \tan \beta})(1 + \tan \beta)$$

$$(1 + \frac{1 - \tan \beta}{1 + \tan \beta})(1 + \tan \beta)$$

$$(\frac{1 + \tan \beta + 1 - \tan \beta}{1 + \tan \beta})(1 + \tan \beta) = 2$$

دشوار

۴۰-

ابتدا عبارت را ساده کنیم:

$$\frac{\sin x (\frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\cos^2 x})}{\frac{1}{\cos^4 x}} = \frac{\sin x \cdot \cos 2x}{\frac{1}{\cos^4 x}} = \frac{\sin x \cdot \cos 2x}{\cos x}$$

$$= \sin x \cos x \cdot \cos 2x$$

$$= \frac{1}{2} \sin 2x \cdot \cos 2x$$

$$= \frac{1}{4} \sin 4x = \frac{1}{4}$$

در نتیجه $\sin 4x = \frac{1}{2}$ است.

آسان

۹- گزینه «۲»

ایده این سوال را در ذهن داشته باشید:

در صورت کسر هر دو جمله را تقسیم بر ۲ کنید:

$$2\left(\frac{1}{2}\cos 20^\circ + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin 20^\circ\right) = 2(\cos 60^\circ \cos 20^\circ + \sin 60^\circ \sin 20^\circ) = 2\cos(60^\circ - 20^\circ) \\ = 2\cos 40^\circ$$

در نتیجه:

$$\frac{2\cos 40^\circ}{\cos 40^\circ} = 2$$

دشوار

۱۰- گزینه «۴»

ابتدا b را تنها کنیم: $b = \frac{\pi}{2} - 2a$

$$\tan a + \tan\left(\frac{\pi}{2} - 2a\right) = \tan a + \cot 2a = \tan a + \frac{1}{\tan 2a} \\ = \tan a + \frac{1 - \tan^2 a}{2 \tan a} = \frac{2 \tan^2 a + 1 - \tan^2 a}{2 \tan a} = \frac{\tan^2 a + 1}{2 \tan a} \\ = \frac{\frac{1}{\cos^2 a}}{\frac{2 \sin a \cos a}{\cos a}} = \frac{1}{2 \sin a \cos a} = \frac{1}{\sin 2a} = \frac{1}{\sin\left(\frac{\pi}{2} - b\right)} = \frac{1}{\cos b}$$

متوسط

۱۱- گزینه «۴»

ابتدا حاصل هر عبارت را به دست آورید:

$$(\cos \alpha)(\cos \alpha) - (\sin \alpha)(\cos \alpha) \\ (\cos \alpha)(\sin \alpha) - (\sin \alpha)(\cos \alpha) = \text{صفر}$$

دشوار

۱۲- گزینه «۲»

حواستون باشه! دو اتحاد زیر را در ذهن بسپارید:

$$\sin 2x = \frac{2 \tan x}{1 + \tan^2 x}, \quad \cos 2x = \frac{1 - \tan^2 x}{1 + \tan^2 x}$$

$$\frac{1 - \frac{2 \tan x}{1 + \tan^2 x}}{1 + \tan^2 x} = \frac{1 + \tan^2 x - 2 \tan x}{1 + \tan^2 x} = \frac{1 - 2 \tan x + \tan^2 x}{1 + \tan^2 x}$$

$$= \frac{(\tan x - 1)^2}{(1 - \tan x)(1 + \tan x)} = \frac{1 - \tan x}{1 + \tan x}$$

متوسط

۱۳- گزینه «۱»

حواستون باشه! این ایده توی ذهنتون باشه که طرفین رو به توان ۲ برسانید:

$$\sin^2 x + \cos^2 x + 2 \sin x \cos x = \frac{1}{9} \Rightarrow 2 \sin x \cos x = \frac{-8}{9} \Rightarrow \sin x \cos x = \frac{-4}{9}$$

حالا با استفاده از چاق و لاغر داریم:

$$\sin^3 x + \cos^3 x = (\sin x + \cos x)(\sin^2 x - \sin x \cos x + \cos^2 x) \\ = \left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{4}{9} + 1\right) = \left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{13}{9}\right) = \frac{13}{27}$$

دشوار

۵- گزینه «۱»

ما به دنبال $\cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$ می گردیم پس:

$$\cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = \cos 2x \cos \frac{\pi}{4} + \sin 2x \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cos 2x + \frac{\sqrt{2}}{2} \sin 2x \\ = \frac{\sqrt{2}}{2} (\cos 2x + \sin 2x) *$$

حالا به ساده کردن عبارت اولیه می پردازیم:

$$\sin x \cos x - \sin^2 x = -1$$

$$\frac{1}{2} \sin 2x - \sin^2 x = -1$$

$$\sin 2x - 2 \sin^2 x = -2$$

$$\sin 2x + 1 - 2 \sin^2 x = 1 - 2$$

$$\sin 2x + \cos 2x = -1$$

و جایگذاری آن در * داریم:

$$\frac{\sqrt{2}}{2} (\cos 2x + \sin 2x) = \frac{\sqrt{2}}{2} (-1) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

متوسط

۶- گزینه «۲»

با ساده کردن عبارت داده شده داریم:

$$\frac{1 - \frac{\sin 15^\circ}{\cos 15^\circ}}{1 + \frac{\sin 15^\circ}{\cos 15^\circ}} = \frac{\frac{\cos 15^\circ - \sin 15^\circ}{\cos 15^\circ}}{\frac{\cos 15^\circ + \sin 15^\circ}{\cos 15^\circ}} = \frac{\cos 15^\circ - \sin 15^\circ}{\cos 15^\circ + \sin 15^\circ} = \frac{-\sqrt{2} \sin(15^\circ - 45^\circ)}{\sqrt{2} \sin(15^\circ + 45^\circ)}$$

حواستون باشه! فرمول $\sin \alpha \pm \cos \alpha = \sqrt{2} \sin\left(\alpha \pm \frac{\pi}{4}\right)$ را به ذهن بسپارید:

$$= \frac{-\sin(-30^\circ)}{\sin(60^\circ)} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \xrightarrow{\text{گویا کنید}} \frac{1}{\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

آسان

۷- گزینه «۳»

ابتدا $\sin 97^\circ / 5$ را ساده می کنیم

$$\sin(90^\circ + 7^\circ / 5) = \cos 7^\circ / 5$$

در نتیجه:

$$\frac{\sin 7^\circ / 5 \cos 7^\circ / 5 \cos 15^\circ}{\frac{1}{2} \sin 15^\circ} = \frac{\frac{1}{2} \sin 15^\circ \cos 15^\circ}{\frac{1}{2} \sin 30^\circ} = \frac{1}{4} \times \sin 30^\circ = \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$$

متوسط

۸- گزینه «۳»

$$\sin 3a = \sin(2a + a) = \sin 2a \cos a + \sin a \cos 2a$$

$$\cos 3a = \cos(2a + a) = \cos a \cos 2a - \sin a \sin 2a$$

در نتیجه:

$$\frac{\sin 2a \cos a + \sin a \cos 2a - \sin 2a \cos a}{\cos 2a \cos a - \sin a \sin 2a + \sin 2a \sin a} = \frac{\sin a \cos 2a}{\cos 2a \cos a} = \frac{\sin a}{\cos a} = \tan a$$

دشوار

۱۷- گزینه «۳»

طرفین رابطه را به توان ۲ برسانیم:

$$\sin x + \cos x = \frac{4}{3}$$

$$\sin^2 x + \cos^2 x + 2 \sin x \cos x = \frac{16}{9}$$

$$\sin 2x = \frac{8}{9}$$

حالا طرفین خواسته مسئله را نیز به توان ۲ می‌رسانیم:

$$\sqrt{\tan x} + \sqrt{\cos x} = A \Rightarrow \tan x + \cot x + 2 = A^2$$

با استفاده از فرمول $\tan x + \cot x = \frac{2}{\sin 2x}$ که در ذهن داریم:

$$\frac{2}{\sin 2x} + 2 = A^2 \xrightarrow{\sin 2x = \frac{8}{9}} \frac{2}{\frac{8}{9}} + 2 = A^2 \Rightarrow \frac{18}{8} + 2 = A^2$$

$$\sqrt{\frac{32}{9}} = A$$

متوسط

۱۸- گزینه «۳»

ابتدا با استفاده از فرمول‌ها داریم:

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} + 2x\right) = -\cot 2x$$

با استفاده از فرمول $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$ پس $\cos^2 x = 1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25}$

$$\cos x = \frac{4}{5}$$

$$\cot x = \frac{4}{3}$$

پس طبق فرمول $\cot 2x = \frac{\cot^2 x - 1}{2 \cot x}$ داریم:

$$-\cot 2x = \frac{\frac{16}{9} - 1}{2 \left(\frac{4}{3}\right)} = \frac{\frac{7}{9}}{\frac{8}{3}} = -\frac{7}{24}$$

دشوار

۱۹- گزینه «۲»

ابتدا عبارت را ساده می‌کنیم:

$$\frac{1 + \cos 2x + 2 \cos^2 2x - 1}{\sin 2x + 2 \sin 2x \cos 2x} = \frac{\cos 2x (1 + 2 \cos 2x)}{\sin 2x (1 + 2 \cos 2x)} = \cot 2x$$

حالا با استفاده از $\cos x = \frac{1}{3}$ و فرمول $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$

$$\sin^2 x = 1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9} \Rightarrow \sin x = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

در نتیجه $\cot x = \frac{1}{2\sqrt{2}}$ و با استفاده از فرمول $\cot 2x = \frac{\cot^2 x - 1}{2 \cot x}$

$$\cot 2x = \frac{\frac{1}{8} - 1}{2 \left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)} = \frac{-\frac{7}{8}}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = -\frac{7\sqrt{2}}{8}$$

دشوار

۱۴- گزینه «۱»

حواستون باشه‌ها هر موقع خواستید اتحاد بسازید یک عبارت را ضرب و همچنان تقسیم کنید.

$$\frac{\overbrace{\sin 12 \cos 12 \cos 24 \cos 48}^{\frac{1}{2} \sin 24 \cos 24 \cos 48}}{\sin 12} = \frac{\frac{1}{2} \sin 24 \cos 24 \cos 48}{\sin 12}$$

$$= \frac{\frac{1}{4} \overbrace{\sin 48 \cos 48}^{\frac{1}{2} \sin 96}}{\sin 12} = \frac{\frac{1}{8} \sin 96}{\sin 12} = \frac{\frac{1}{8} \sin (90 + 6)}{2 \sin 6 \cos 6}$$

$$= \frac{\frac{1}{8} \cos 6}{2 \sin 6 \cos 6} = \frac{1}{16 \sin 6}$$

دشوار

۱۵- گزینه «۳»

ابتدا با استفاده از $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ و طرفین به توان ۲ رساندن داریم:

$$\sin^4 x + \cos^4 x + 2 \sin^2 x \cos^2 x = \frac{3}{5} + 2 \sin^2 x \cos^2 x = 1$$

$$2 \sin^2 x \cos^2 x = \frac{2}{5}$$

$$\sin^2 x \cos^2 x = \frac{1}{5}$$

حالا یکبار دیگر طرفین را به توان ۳ می‌رسانیم:

$$\sin^6 x + \cos^6 x + 3 \sin^4 x \cos^2 x + 3 \sin^2 x \cos^4 x = 1$$

$$\sin^6 x + \cos^6 x + 3 \sin^2 x \cos^2 x (\sin^2 x + \cos^2 x) = 1$$

$$\sin^6 x + \cos^6 x + 3 \left(\frac{1}{5}\right)(1) = 1 \Rightarrow \sin^6 x + \cos^6 x = \frac{2}{5}$$

دشوار

۱۶- گزینه «۴»

با استفاده از فرمول‌های $1 + \tan^2 \theta = \frac{1}{\cos^2 \theta}$, $1 + \cot^2 \theta = \frac{1}{\sin^2 \theta}$

$$\left(\frac{1}{\cos^2 \theta}\right) \left(\frac{1}{\sin^2 \theta}\right) = \frac{1}{\cos^2 \theta \sin^2 \theta} = \frac{1}{\cos^2 \theta (1 - \cos^2 \theta)} = \frac{1}{\cos^2 \theta \sin^2 \theta} =$$

$$\frac{1}{\cos^4 \theta \sin^4 \theta} = \frac{1}{\frac{1}{16} \sin^4 2\theta} = 16 \sin^{-4} 2\theta$$

۲۰- گزینه «۴» متوسط

ابتدا طرفین را به توان ۲ برسانید:

$$\sin^2 x + \cos^2 x - 2 \sin x \cos x = \frac{1}{4}$$

$$1 - \sin 2x = \frac{1}{4}$$

$$1 - \frac{1}{4} = \sin 2x$$

$$\frac{3}{4} = \sin 2x$$

$$\cos 4x = 1 - 2 \sin^2 2x = 1 - 2 \left(\frac{3}{4}\right)^2 = 1 - 2 \left(\frac{9}{16}\right) = 1 - \frac{9}{8} = -\frac{1}{8}$$

۲۱- گزینه «۳» متوسط

ابتدا با استفاده از قوانین داریم:

$$(\sin x)(\cos x)(-\sin x)(-\cos x) = \left(\frac{1}{2} \sin 2x\right) \left(\frac{1}{2} \sin 2x\right)$$

$$= \frac{1}{4} \sin^2 2x$$

حالا با استفاده از فرمول‌های $\cos 2\alpha$ داریم:

$$\cos 4x = 1 - 2 \sin^2 2x = a$$

$$1 - a = 2 \sin^2 2x$$

$$\frac{1-a}{2} = \sin^2 2x$$

در نتیجه:

$$\frac{1}{4} \left(\frac{1-a}{2}\right) = \frac{1-a}{8}$$

۲۲- گزینه «۳» متوسط

$$\tan\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) = \frac{1}{5}$$

$$\frac{\tan \frac{\pi}{4} - \tan \alpha}{1 + \tan \frac{\pi}{4} \tan \alpha} = \frac{1}{5} \Rightarrow \frac{1 - \tan \alpha}{1 + \tan \alpha} = \frac{1}{5} \Rightarrow 5 - 5 \tan \alpha = 1 + \tan \alpha$$

$$4 = 6 \tan \alpha$$

$$\frac{2}{3} = \tan \alpha$$

$$\tan 2x = \frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x}$$

$$\tan 2x = \frac{2 \left(\frac{2}{3}\right)}{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^2} = \frac{\frac{4}{3}}{\frac{5}{9}} = \frac{12}{5} = 2 \frac{2}{5}$$

۲۳- گزینه «۴» متوسط

ابتدا با استفاده از فرمول $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$ داریم:

$$\sin^2 x = 1 - \frac{5}{9} = \frac{4}{9} \Rightarrow \sin x = \frac{2}{3} \Rightarrow \tan x = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$\tan 2x = \frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x}$$

$$\tan 2x = \frac{2 \times \frac{2}{\sqrt{5}}}{1 - \frac{4}{5}} = \frac{\frac{4}{\sqrt{5}}}{\frac{1}{5}} = \frac{4}{\sqrt{5}} \times \frac{5}{1} = \frac{20}{\sqrt{5}} = 4\sqrt{5}$$

۲۴- گزینه «۱» متوسط

خواستون باشه‌ها: رابطه $\sin \alpha \pm \cos \alpha = \sqrt{2} \sin(\alpha \pm \frac{\pi}{4})$ را در ذهن بسپارید:

$$\frac{[\sqrt{2} \sin(15^\circ - 45^\circ)]^4}{[\sqrt{2} \sin(15^\circ + 45^\circ)]^4} = \left(\frac{\sqrt{2} \sin(-30^\circ)}{\sqrt{2} \sin 60^\circ}\right)^4 = \left(\frac{-\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\right)^4 = \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^4 = \frac{1}{9}$$

متوسط

۲۵- گزینه «۱»

خواستون باشه‌ها رابطه $\sin \alpha - \cos \alpha = \sqrt{2} \sin(\alpha - 45^\circ)$ را در ذهن بسپارید:

$$\frac{\sin 15^\circ - \cos 15^\circ}{\sin 15^\circ \cos 15^\circ} = \frac{\sqrt{2} \sin(15^\circ - 45^\circ)}{\frac{1}{2} \sin 30^\circ} = \frac{\sqrt{2} \sin(-30^\circ)}{\frac{1}{2} \sin 30^\circ} = -2\sqrt{2}$$

متوسط

۲۶- گزینه «۲»

ابتدا با استفاده $\cos(\alpha \pm \beta)$ داریم:

$$\cos x \cos \frac{\pi}{3} - \sin x \sin \frac{\pi}{3} + \cos x \cos \frac{\pi}{3} + \sin x \sin \frac{\pi}{3} = \frac{2}{3}$$

$$\frac{1}{3} \cos x - \frac{\sqrt{3}}{3} \sin x + \frac{1}{3} \cos x + \frac{\sqrt{3}}{3} \sin x = \frac{2}{3} \Rightarrow \cos x = \frac{2}{3}$$

با استفاده از اتحاد $\cos 2x = 2 \cos^2 x - 1$ داریم:

$$\cos 2x = 2 \left(\frac{2}{3}\right)^2 - 1 = 2 \left(\frac{4}{9}\right) - 1 = \frac{8}{9} - 1 = -\frac{1}{9}$$

متوسط

۲۷- گزینه «۱»

$$= \left[\frac{\sqrt{2}}{2} \cos \alpha + \frac{\sqrt{2}}{2} \sin \alpha\right] - \left[\frac{\sqrt{2}}{2} \cos \alpha - \frac{\sqrt{2}}{2} \sin \alpha\right] =$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \cos \alpha + \frac{\sqrt{2}}{2} \sin \alpha - \frac{\sqrt{2}}{2} \cos \alpha + \frac{\sqrt{2}}{2} \sin \alpha = \sqrt{2} \sin \alpha$$

با استفاده از اتحادها داریم:

$$\sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha$$

$$\sin^2 \alpha = 1 - \frac{4}{9} = \frac{5}{9} \Rightarrow \sin \alpha = -\frac{\sqrt{5}}{3}$$

$$\sin \alpha = \sqrt{2} \sin \alpha = (\sqrt{2}) \left(-\frac{\sqrt{5}}{3}\right) = -\frac{2}{3}$$

دشوار

۳۳- گزینه «۲»

می‌دانیم $\sin 10^\circ = \cos 80^\circ$

$$\frac{\sqrt{1-\cos 80^\circ}}{\cos 20^\circ} = \frac{\sqrt{2\sin^2 40^\circ}}{\cos 20^\circ} = \frac{\sqrt{2}\sin 40^\circ}{\cos 20^\circ} = \frac{2\sqrt{2}\sin 20^\circ \cos 20^\circ}{\cos 20^\circ} = 2\sqrt{2}\sin 20^\circ$$

دشوار

۳۴- گزینه «۳»

ساده شده عبارت $\tan(\frac{\pi}{4} - \alpha)$ را به دست آورده و $\sin 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1+\tan^2\alpha}$ را جایگذاری می‌کنیم.

$$\frac{1+\frac{2\tan\alpha}{1+\tan^2\alpha}}{1-\frac{2\tan\alpha}{1+\tan^2\alpha}} = \frac{1+\tan^2\alpha+2\tan\alpha}{1+\tan^2\alpha-2\tan\alpha} = \frac{(1+\tan\alpha)^2}{(1-\tan\alpha)^2}$$

$$\tan(\frac{\pi}{4} - \alpha) = \frac{\tan\frac{\pi}{4} - \tan\alpha}{1+\tan\frac{\pi}{4}\tan\alpha} = \frac{1-\tan\alpha}{1+\tan\alpha}$$

پس:

$$A = \frac{(1+\tan\alpha)^2}{(1-\tan\alpha)^2} \times \frac{1-\tan\alpha}{1+\tan\alpha} = \frac{1+\tan\alpha}{1-\tan\alpha} = \tan(\frac{\pi}{4} + \alpha)$$

متوسط

۳۵- گزینه «۳»

حواستون باشه‌ها در ذهن داشته باشید که

$$\tan x - \cot x = -2\cot x$$

با استفاده از اتحادی که در ذهن داریم:

$$-2\cot x = 1 \Rightarrow \cot x = -\frac{1}{2} \Rightarrow \tan x = -2$$

$$\tan 2x = \frac{2\tan x}{1-\tan^2 x}$$

$$\tan 2x = \frac{2(-2)}{1-4} = \frac{-4}{-3} = \frac{4}{3}$$

دشوار

۳۶- گزینه «۲»

چون $\alpha - \beta = \frac{\pi}{4}$ است پس $\alpha - \frac{\pi}{4} = \beta$

$$\tan(\alpha - \frac{\pi}{4}) = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{\tan\alpha - \tan\frac{\pi}{4}}{1+\tan\alpha\tan\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{\tan\alpha - 1}{1+\tan\alpha} = \frac{1}{2} \Rightarrow 2\tan\alpha - 2 = 1 + \tan\alpha$$

$$\tan\alpha = 3$$

حواستون باشه‌ها $\sin 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1+\tan^2\alpha}$ (فرمول را در ذهن داشته باشید) پس:

$$\sin 2\alpha = \frac{2(3)}{1+9} = \frac{6}{10} = 0.6$$

متوسط

۲۸- گزینه «۱»

ابتدا با استفاده از قوانین گذشته داریم:

$$\cos(\frac{3\pi}{4} - 2\alpha) = -\sin 2\alpha$$

از طرفی می‌توانیم طرفین $\sin\alpha - \cos\alpha = \frac{1}{2}$ را به توان ۲ برسانیم پس

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha - 2\sin\alpha\cos\alpha = \frac{1}{4} \Rightarrow 1 - \sin 2\alpha = \frac{1}{4} \Rightarrow -\sin 2\alpha = -\frac{3}{4}$$

دشوار

۲۹- گزینه «۴»

با استفاده از قوانین متمرک $\tan 70^\circ = \cot 20^\circ$, $\cos 50^\circ = \sin 40^\circ$

$$\sin 40^\circ (\frac{1}{\tan 20^\circ} + \tan 10^\circ) = 2\sin 20^\circ \cos 20^\circ (\frac{1-\tan^2 10^\circ}{2\tan 10^\circ} + \tan 10^\circ) =$$

$$2\sin 20^\circ \cos 20^\circ (\frac{1-\tan^2 10^\circ + 2\tan^2 10^\circ}{2\tan 10^\circ}) = 2\sin 20^\circ \cos 20^\circ (\frac{1+\tan^2 10^\circ}{2\tan 10^\circ})$$

$$= 2\sin 20^\circ \cos 20^\circ (\frac{\cos^2 10^\circ}{\sin 10^\circ \cos 10^\circ}) = 2\sin 20^\circ \cos 20^\circ (\frac{1}{\sin 10^\circ \cos 10^\circ}) = 2\sin 40^\circ \cos 20^\circ (\frac{1}{\sin 20^\circ}) = 2\cos 20^\circ$$

دشوار

۳۰- گزینه «۴»

در ابتدا می‌دانیم که $\tan 20^\circ = \cot 70^\circ = \frac{1}{\tan 70^\circ}$ پس

$$2\sin 35^\circ \cos 35^\circ (\frac{1}{\tan 70^\circ} + \tan 35^\circ) = 2\sin 35^\circ \cos 35^\circ (\frac{1-\tan^2 35^\circ}{2\tan 35^\circ} + \tan 35^\circ) = 2\sin 35^\circ \cos 35^\circ (\frac{1-\tan^2 35^\circ + 2\tan^2 35^\circ}{2\tan 35^\circ}) = 2\sin 35^\circ \cos 35^\circ (\frac{1+\tan^2 35^\circ}{2\tan 35^\circ})$$

$$\frac{\cos^2 35^\circ + \sin^2 35^\circ}{\cos 35^\circ} = \sin 35^\circ \cos 35^\circ (\frac{1}{\sin 35^\circ \cos 35^\circ}) = 1$$

متوسط

۳۱- گزینه «۳»

حواستون باشه‌ها که در ذهن داریم: $\tan(y-x) = \frac{\tan y - \tan x}{1+\tan y \tan x}$

$$\tan(y-x) = \frac{\sqrt{2}+1-\sqrt{2}+1}{1+1} = \frac{2}{2} = 1 \Rightarrow \tan(y-x) = 1$$

$$y-x = \frac{\pi}{4}$$

متوسط

۳۲- گزینه «۳»

حواستون باشه‌ها اتحادهای

$$\tan 2x = \frac{2\tan x}{1-\tan^2 x}, \tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$$

را در ذهن بسپارید. پس

$$\tan 2x = \frac{2\tan x}{1-\tan^2 x} = \frac{2(1-\sqrt{2})}{1-(1+2-2\sqrt{2})} = \frac{2-2\sqrt{2}}{-2+2\sqrt{2}} = -1$$

$$\tan(2x+y) = \frac{\tan 2x + \tan y}{1+\tan 2x \tan y} = \frac{-1+2}{1+2} = \frac{1}{3}$$



سؤالات تشریحی

پاسخنامه

آزمون تشریحی ۱

متوسط

-۱

$$[-1, 1] - \mathbb{R} \quad (\text{ب})$$

$$\frac{7\pi}{9} \quad (\text{آ})$$

$$x = 2k\pi + \pi / (-1) \quad (\text{ت})$$

$$x = k\pi + \frac{\pi}{2} \quad (\text{پ})$$

متوسط

-۲

(آ) نادرست - در ربع دوم است.

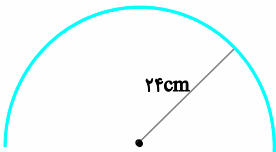
(ب) درست - در هر مثلث ضلع رو به رو زاویه کوچکتر، کوچکتر است از

ضلع رو به رو زاویه بزرگتر

$$(\text{پ}) \text{ درست - } \cos \theta - \cos \theta = 0$$

آسان

-۳



$$L = r\theta$$

$$\theta = 120^\circ \Rightarrow \theta = \frac{2\pi}{3}$$

$$L = 24 \times \frac{2\pi}{3} = \frac{24 \times 2 \times \pi \times 14}{3} = 50.24 \text{ cm}$$

آسان

-۴

$$1) \sin(180^\circ + 30^\circ) = -\sin 30^\circ = -\frac{1}{2}$$

$$2) \tan\left(\frac{9\pi}{3} + \frac{\pi}{3}\right) = \tan\left(3\pi + \frac{\pi}{3}\right) = +\tan \frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$$

متوسط

-۵

$$1) \sin\left(\frac{5\pi}{2} + 30^\circ\right) = +\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$2) \cos(480^\circ) = \cos(360^\circ + 120^\circ) = \cos 120^\circ = \cos(180^\circ - 60^\circ) = -\cos 60^\circ = -\frac{1}{2}$$

$$3) \tan\left(\frac{6\pi}{6} + \frac{\pi}{6}\right) = \tan\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right) = +\tan \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$4) \frac{\sin 37^\circ}{\cos 53^\circ} \xrightarrow{\text{متمم}} \frac{\cos 53^\circ}{\cos 53^\circ} = 1$$

آسان

۳۷- گزینه «۱»

حواستون باشه که در ذهن داریم که $\frac{\sin x}{1 + \cos x} = \tan \frac{x}{2} = \frac{1}{2}$

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\alpha}{2}\right) = -\cot \frac{\alpha}{2}$$

چون $\tan \frac{x}{2} = \frac{1}{2}$ است و $\tan$ و $\cot$ یک زاویه معکوس یکدیگرند پس

$$-\cot \frac{\alpha}{2} = -2$$

دشوار

۳۸- گزینه «۲»

حواستون باشه نتیجه این سوال را به عنوان اتحاد مثلثاتی در ذهن داشته

باشید.

$$\tan \frac{x}{2} - \cot \frac{x}{2} = \frac{\sin \frac{x}{2}}{\cos \frac{x}{2}} - \frac{\cos \frac{x}{2}}{\sin \frac{x}{2}} = \frac{\sin^2 \frac{x}{2} - \cos^2 \frac{x}{2}}{\sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}} = \frac{-\cos x}{\frac{1}{2} \sin x} = -2 \cot x$$

همچنین چون $\tan x = \frac{4}{3}$ است پس $\cot x = \frac{3}{4}$ است در نتیجه:

$$-2 \cot x = -2\left(\frac{3}{4}\right) = -\frac{3}{2}$$

متوسط

۳۹- گزینه «۱»

ابتدا یادآوری ریشه‌های معادله درجه دو رو داریم:

$$s = \tan \alpha + \tan \beta = \frac{-b}{a} = 4$$

$$p = \tan \alpha \tan \beta = \frac{c}{a} = m$$

حالا با استفاده از داده مسئله داریم:

$$\tan(\alpha + \beta) = 2 \Rightarrow \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta} = 2 \Rightarrow \frac{4}{1 - m} = 2 \Rightarrow 4 = 2 - 2m$$

$$2m = -2 \Rightarrow m = -1$$

آسان

-۱۱

$$\sin 22/5^\circ$$

$$\cos 45 = 1 - 2 \sin^2 22/5 \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} = 1 - 2 \sin^2 22/5$$

$$2 \sin^2 22/5 = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \frac{1 - \sqrt{2}}{2} = \sin^2 22/5$$

متوسط

-۱۲

$$\sin \alpha = \frac{2}{3} \Rightarrow \cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha \Rightarrow \cos^2 \alpha = 1 - \frac{4}{9} \Rightarrow \cos \alpha = -\frac{\sqrt{5}}{3}$$

$$\cos \beta = -\frac{4}{5} \Rightarrow \sin^2 \beta = 1 - \frac{16}{25} = \frac{9}{25} \Rightarrow \sin \beta = -\frac{3}{5}$$

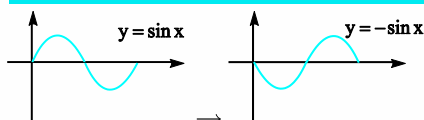
$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$$

$$\left(-\frac{\sqrt{5}}{3}\right)\left(-\frac{4}{5}\right) + \left(\frac{2}{3}\right)\left(-\frac{3}{5}\right)$$

$$\frac{4\sqrt{5}}{15} - \frac{6}{15} = \frac{4\sqrt{5} - 6}{15}$$

آسان

-۱۳



سوالات تشریحی

پاسخنامه

آزمون تشریحی ۲

متوسط

-۱

$$[-1, 1] \Rightarrow \mathbb{R} \text{ ب}$$

$$300 \text{ (آ)}$$

$$x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \text{ ت یک}$$

$$x = k\pi \text{ ب}$$

آسان

-۲

(آ درست

(ب نادرست

$$\frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{9} + \frac{7\pi}{36} = \frac{24\pi + 4\pi + 7\pi}{36} + \frac{35\pi}{36} \neq \pi$$

(پ درست

دشوار

-۶

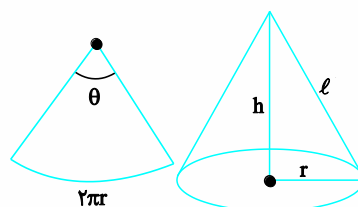
ارتفاع $\times$ محیط قاعده = مساحت جانبی مخروط

$$8\pi = 2\pi r h \Rightarrow rh = 4$$

$$l^2 = r^2 + h^2 \Rightarrow l^2 - r^2 = h^2 \Rightarrow 2\delta r^2 - r^2 = h^2 \Rightarrow 2\delta r^2 = h^2$$

$$\Rightarrow 2\sqrt{6}r = h \xrightarrow{rh=4} 2\sqrt{6}r^2 = 4 \Rightarrow r = \sqrt{\frac{2}{6}}$$

$$l = \delta r \Rightarrow l = \delta \sqrt{\frac{2}{6}}$$



$$s = \frac{1}{2} l^2 \theta = \frac{1}{2} (l^2) \left(\frac{2\pi r}{l}\right) = Lr\pi = \delta \sqrt{\frac{2}{6}} \times \sqrt{\frac{2}{6}} \pi$$

آسان

-۷

می‌دانیم اگر $\alpha + \beta = 90^\circ$ آنگاه $\sin \alpha = \cos \beta$ پس در نتیجه:

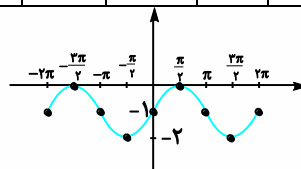
$$x - 70 + x - 10 = 90 \Rightarrow 2x - 80 = 90 \Rightarrow 2x = 170 \Rightarrow x = 85$$

متوسط

-۸

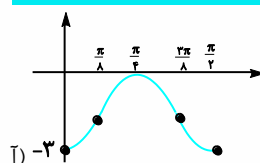
$$y = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) - 1 \Rightarrow y = \sin x - 1$$

x	$-\pi$	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
y	-1	0	-1	-2	-1	0	-1



متوسط

-۹



$$\text{ب) } y = -2 - \cos 4x$$

آسان

-۱۰

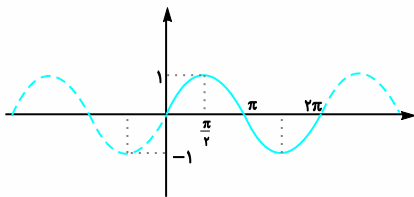
$$\theta = 10^\circ \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{18}$$

$$L = 6320 \times \frac{\pi}{18} \simeq 351/1\pi$$

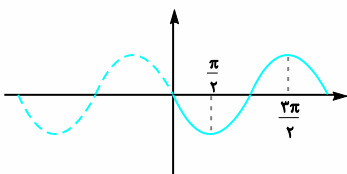
دشوار

-۸

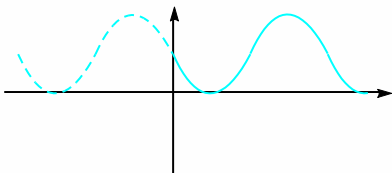
$$y = \sin x$$



$$y = -\sin x$$

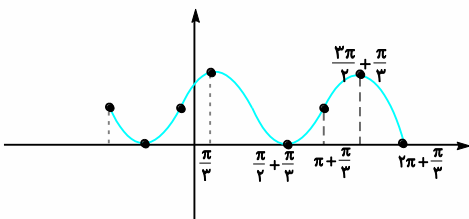


$$y = 1 - \sin x$$



$$y = 1 - \sin x$$

$$y = 1 - \sin(x - \frac{\pi}{3})$$

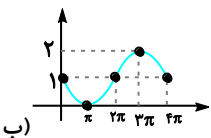


$$y = 1 - \sin(x - \frac{\pi}{3})$$

متوسط

-۹

$$1) y = 1 - \sin \frac{x}{2}$$



ب)

متوسط

-۱۰

$$\frac{2\pi}{60} = \frac{\pi}{30} \Rightarrow \text{زاویه بین هر دو کابین}$$

حال می‌خواهیم بدانیم در $\frac{53\pi}{6}$ چندتا $\frac{\pi}{30}$ قرار دارد پس:

$$\frac{53\pi}{6} \div \frac{\pi}{30} = \frac{53 \times 30}{6} = 265$$

آسان

-۳

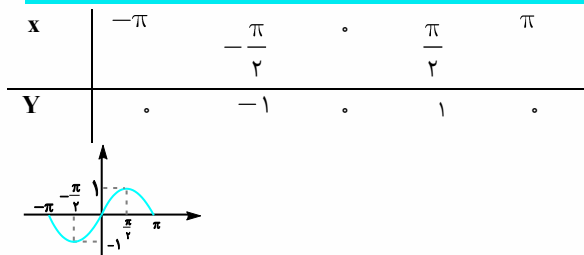
$$AB \text{ کمان} = L = r\theta \Rightarrow 2\pi = r \times \frac{\pi}{3} \Rightarrow r = 6 \text{ دایره کوچک تر}$$

$$MN \text{ کمان} = L = r \times \frac{\pi}{3} = \frac{8\pi}{3}$$

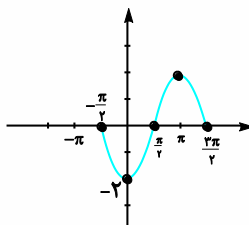
$$8 = 2 + 6 \text{ شعاع دایره بزرگ تر}$$

دشوار

-۱۴



$$g(x) = 2 \sin(x - \frac{\pi}{3}) \text{ واحد به سمت راست و در راستای محور } y \text{ ها } 2 \text{ برابر}$$



متوسط

-۵

$$1) \cos(\frac{\sqrt{3}\pi}{2} - 60^\circ) = -\sin 60^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$2) -\tan(140^\circ) = -\tan(72^\circ + 68^\circ) = -\tan 140^\circ = -\tan(180^\circ - 40^\circ) = +\tan 40^\circ$$

$$3) \sin(6\pi) = 0$$

$$4) \frac{\tan 17^\circ}{\tan 1^\circ} = \frac{-\tan 1^\circ}{\tan 1^\circ} = -1$$

آسان

-۶

$$l_1 = l_2$$

$$r_1\theta_1 = r_2\theta_2$$

$$15\theta_1 = 60 \times \frac{5\pi}{4} \Rightarrow \theta_1 = 5\pi$$

متوسط

-۷

$$\frac{\pi}{9} + x + \frac{\pi}{3} + x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow 2x + \frac{4\pi}{9} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow 2x = \frac{\pi}{2} - \frac{4\pi}{9}$$

$$2x = \frac{9\pi - 8\pi}{18} \Rightarrow 2x = \frac{\pi}{18} \Rightarrow x = \frac{\pi}{36}$$



سؤالات تستی

پاسخنامه

آزمون تستی پایانی

متوسط

۱- گزینه «۳»

حواستون باشه! دوره‌ی تناوب توابع $\sin bx$ و $\cos bx$ از رابطه $T = \frac{2\pi}{|b|}$

و $\min$ و $\max$ این دو تابع از $y = a \sin bx + c$

$\min = -|a| + c$ و $\max = |a| + c$

فاصله بین $-\frac{\pi}{4}$ تا $\frac{3\pi}{4}$ یک دوره‌ی تناوب شکل را تشکیل داده است یعنی:

$$y = 1 + \frac{1}{2} a \sin 2bx \Rightarrow \pi = \frac{2\pi}{|2b|} \Rightarrow |2b| = 2 \Rightarrow b = \pm 1$$

همچنین $\min = \frac{1}{2}$ و $\max = \frac{3}{2}$ پس:

$$\frac{3}{2} = \left| \frac{1}{2} a \right| + 1 \Rightarrow \left| \frac{a}{2} \right| = \frac{1}{2} \Rightarrow |a| = 1 \Rightarrow a = \pm 1$$

در نتیجه $a = 1$ و $b = 1$ قابل قبول است پس:

$$y = 1 + \frac{1}{2} \sin 2x, a + b = 2$$

متوسط

۲- گزینه «۴»

عبارت را با استفاده از اتحادها ساده کنید:

$$\sqrt{\frac{1}{\cos^2 x}} \left(2 \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^2 - \sin^2 x \right)$$

$$\left| \frac{1}{\cos x} \right| (1 - \sin^2 x) \xrightarrow{\pi < x < \frac{3\pi}{2}, \cos x \text{ منفی}} -\frac{1}{\cos x} (\cos^2 x) = -\cos x$$

متوسط

۳- گزینه «۳»

$$\sin\left(\frac{17\pi}{3}\right) = \sin\left(6\pi - \frac{\pi}{3}\right) = -\sin\frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos\left(-\frac{17\pi}{6}\right) = \cos\left(\frac{17\pi}{6}\right) = \cos\left(3\pi - \frac{\pi}{6}\right) = -\cos\frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan\left(\frac{19\pi}{4}\right) = \tan\left(5\pi - \frac{\pi}{4}\right) = -\tan\frac{\pi}{4} = -1$$

$$\sin\left(-\frac{11\pi}{6}\right) = -\sin\left(\frac{11\pi}{6}\right) = -\sin\left(2\pi - \frac{\pi}{6}\right) = +\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$$

$$\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + (-1)\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4} - \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

پس ۲۶۵ کابین جابه‌جا شده‌ایم چون که ۶۰ کابین داشته‌ایم پس این چرخ و فلک ۴ دور کامل زده است و در چرخ آخر ۲۵ کابین جابه‌جا شده است پس:

$$265 \left| \frac{60}{4} \right| \rightarrow \text{تعداد دور کامل}$$

$$\frac{240}{25} \downarrow$$

میزان جابه‌جایی در دور آخر

الان در کابین ۳۵ نشسته‌ایم: $10 + 25 = 35$

متوسط

-۱۱

$$\begin{aligned} \tan \frac{\pi}{12} &= \frac{\sin \frac{\pi}{12}}{\cos \frac{\pi}{12}} = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right)} = \frac{\sin \frac{\pi}{3} \cos \frac{\pi}{4} - \cos \frac{\pi}{3} \sin \frac{\pi}{4}}{\cos \frac{\pi}{3} \cos \frac{\pi}{4} + \sin \frac{\pi}{3} \sin \frac{\pi}{4}} \\ &= \frac{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) - \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}{\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)} = \frac{\frac{\sqrt{6}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4}}{\frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{6}}{4}} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{\sqrt{2} + \sqrt{6}} \end{aligned}$$

آسان

-۱۲

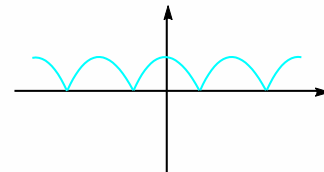
$$\cos(2\alpha + 2\alpha) = \cos 2\alpha \cos 2\alpha - \sin 2\alpha \sin 2\alpha = \cos^2 2\alpha - \sin^2 2\alpha$$

$$= 1 - \sin^2 2\alpha - \sin^2 2\alpha = 1 - 2\sin^2 2\alpha$$

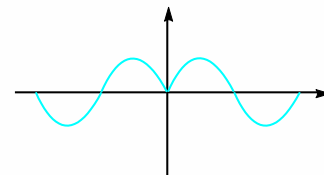
دشوار

-۱۳

$$\text{آ) } y = |\cos x|$$



$$\text{ب) } y = \sin |x|$$



دشوار

۸- گزینه «۴»

اگر عبارت را ساده کنیم داریم:

$$y = a + b \sin\left(\frac{\pi}{3} + x\right)$$

$$y = a + b \cos x$$

نقطه $(0, \frac{7\pi}{3})$ در تابع صدق می‌کند $\max$ تابع برابر ۳ است پس:

$$a + b \cos \frac{7\pi}{3} = 0 \Rightarrow a + b \cos\left(2\pi + \frac{\pi}{3}\right) = 0 \Rightarrow a + b \cos \frac{\pi}{3} = 0$$

$$\max = |b| + a = 3 \Rightarrow -b + a = 3 \xrightarrow{a = -\frac{1}{2}b}$$

$$\begin{cases} a + \frac{1}{2}b = 0 \Rightarrow a = -\frac{1}{2}b \\ -b - \frac{1}{2}b = 3 \Rightarrow -\frac{3}{2}b = 3 \Rightarrow b = -2 \end{cases}$$

متوسط

۹- گزینه «۴»

با توجه به فرمول‌های توابع مثلثاتی تناوب از روی شکل فاصله $\frac{9\pi}{2}$ تا $\frac{3\pi}{2}$ است.

$$T = \frac{2\pi}{|b|} \Rightarrow 6\pi = \frac{2\pi}{b} \Rightarrow b = \frac{1}{3}$$

$$\max = |a| + c = 1$$

$$\min = -|a| + c = -3$$

$$2c = -2 \Rightarrow c = -1$$

$$|a| - 1 = 1 \Rightarrow |a| = 2 \Rightarrow a = -2$$

در نتیجه:

$$\frac{a}{b} = \frac{-2}{\frac{1}{3}} = -6$$

دشوار

۱۰- گزینه «۲»

با استفاده از اتحادهایی که در ذهن داریم:

$$\tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha}$$

$$\tan \alpha = \frac{2 \tan \alpha / 2}{1 - \tan^2 \alpha / 2} = \frac{2(\frac{1}{4})}{1 - \frac{1}{16}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{15}{16}} = \frac{16}{30} = \frac{8}{15}$$

$$1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \Rightarrow 1 + \frac{64}{225} = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \Rightarrow \cos^2 \alpha = \frac{225}{289} \Rightarrow \cos \alpha = \frac{15}{17}$$

$$\sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha = 1 - \frac{225}{289} \Rightarrow \sin \alpha = \frac{8}{17}$$

$$\frac{\frac{8}{15} - \frac{8}{15}}{\frac{15}{17} - \frac{15}{17}} = \frac{136 - 120}{15 \times 17} = \frac{16}{15 \times 17} = \frac{-16}{105} \quad \text{در نتیجه:}$$

متوسط

۱۴- گزینه «۳»

$$|b| + a = \sqrt{3}$$

در شکل داده شده $\max = \sqrt{3}$ است پس همچنین نقطه $(\pi, -\frac{3}{2})$ در تابع

$$\text{صدق می‌کند پس: } -\frac{3}{2} = a + b \sin\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right)$$

$$-\frac{3}{2} = a - b \sin \frac{\pi}{3} \Rightarrow -\frac{3}{2} = a - \frac{\sqrt{3}}{2}b \xrightarrow{\times 2} -3 = 2a - \sqrt{3}b$$

با اطلاعات داده شده و حل دستگاه داریم:

$$2a - \sqrt{3}b = -3$$

$$\begin{cases} 2a - \sqrt{3}b = -3 \\ a + b = \sqrt{3} \end{cases} \xrightarrow{\times \sqrt{3}} \begin{cases} 2a - \sqrt{3}b = -3 \\ \sqrt{3}a + \sqrt{3}b = 3 \end{cases} \xrightarrow{a=0} \begin{cases} 2a - \sqrt{3}b = -3 \\ (2 + \sqrt{3})a = 0 \end{cases} \Rightarrow b = \sqrt{3}$$

متوسط

۵- گزینه «۳»

$$\cos\left(\frac{11\pi}{4} + \alpha\right) = \cos \frac{11\pi}{4} \cos \alpha - \sin \frac{11\pi}{4} \sin \alpha$$

ابتدا با استفاده از $\cos^2 \beta = 1 - \sin^2 \beta$ می‌توان:

$$\cos^2 \alpha = 1 - \frac{2}{100} \Rightarrow \cos^2 \alpha = \frac{98}{100} \Rightarrow \cos \alpha = \sqrt{\frac{98}{100}} = \frac{-7\sqrt{2}}{10}$$

$$\cos \frac{11\pi}{4} = \cos\left(3\pi - \frac{\pi}{4}\right) = -\cos \frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\sin \frac{11\pi}{4} = \sin\left(3\pi - \frac{\pi}{4}\right) = -\sin \frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

در نتیجه:

$$\cos\left(\frac{11\pi}{4} + \alpha\right) = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\frac{7\sqrt{2}}{10}\right) - \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{10}\right) = \left(-\frac{7 \times 2}{20}\right) - \left(-\frac{2}{20}\right) = \frac{12}{20} = \frac{3}{5}$$

دشوار

۶- گزینه «۴»

$$S = \tan \alpha + \tan \beta = -\frac{b}{a} = -\frac{3}{2}$$

$$P = \tan \alpha \cdot \tan \beta = \frac{c}{b} = -\frac{1}{2}$$

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta} = \frac{-\frac{3}{2}}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{-\frac{3}{2}}{\frac{3}{2}} = -1$$

آسان

۷- گزینه «۲»

$$\tan(300^\circ) = \tan(270^\circ + 30^\circ) = -\cot 30^\circ = -\sqrt{3}$$

$$\cos(210^\circ) = \cos(180^\circ + 30^\circ) = -\cos 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan(480^\circ) = \tan 120^\circ = -\tan 60^\circ = -\sqrt{3}$$

$$\sin 84^\circ = \sin 12^\circ = \sin 6^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$(-\sqrt{3})\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + (-\sqrt{3})\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{3}{2} - \frac{3}{2} = 0 \quad \text{در نتیجه:}$$



دشوار

۱۴- گزینه «ب»

ابتدا عبارت را ساده کنید:

$$\frac{\sin 2\alpha - \cos \alpha}{\cot 2\alpha}$$

پس

$$\cos \alpha = \frac{-4}{5} \leftarrow 1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$$

حال با استفاده از فرمول مثلثاتی

$$\tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha}, \quad \sin 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 + \tan^2 \alpha}$$

خواهیم داشت:

$$\sin 2\alpha = \frac{2(\frac{3}{4})}{1 + \frac{9}{16}} = \frac{\frac{3}{2}}{\frac{25}{16}} = \frac{24}{25}$$

$$\tan 2\alpha = \frac{2(\frac{3}{4})}{1 - \frac{9}{16}} = \frac{\frac{3}{2}}{\frac{7}{16}} = \frac{24}{7} \Rightarrow \cot 2\alpha = \frac{7}{24}$$

در نتیجه:

$$= \frac{\frac{24}{25} + \frac{4}{5}}{\frac{7}{24}} = \frac{\frac{24}{25} + \frac{20}{25}}{\frac{7}{24}} = \frac{24 \times 44}{7 \times 25} = \frac{1056}{175}$$

دشوار

۱۵- گزینه «ب»

$$\begin{cases} A = B + 45 \\ A + B + C = 180 \end{cases} \Rightarrow C = 180 - A - B \Rightarrow C = 180 - (B + 45) - B$$

$$C = 180 - B - 45 - B$$

$$C = 135 - 2B$$

در نتیجه:

$$2 \cos(\beta + 45) \sin \beta - \sin(135 - 2\beta)$$

$$2[\cos \beta \cos 45 - \sin \beta \sin 45] \sin \beta - [\sin 135 \cos 2\beta - \cos 135 \sin 2\beta]$$

با قوانین مکمل دو زاویه:

$$\sqrt{2} \cos \beta \sin \beta - \sqrt{2} \sin^2 \beta - \frac{\sqrt{2}}{2} \cos 2\beta - \frac{\sqrt{2}}{2} \sin 2\beta$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \sin 2\beta - \sqrt{2} \sin^2 \beta - \frac{\sqrt{2}}{2} \cos 2\beta - \frac{\sqrt{2}}{2} \sin 2\beta = -\sqrt{2} \sin^2 \beta - \frac{\sqrt{2}}{2} (2 \cos^2 \beta - 1)$$

$$= -\sqrt{2} \sin^2 \beta - \sqrt{2} \cos^2 \beta + \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$= -\sqrt{2} (\sin^2 \beta + \cos^2 \beta) + \frac{\sqrt{2}}{2} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

متوسط

۱۱- گزینه «ا»

ابتدا عبارت داده شده را ساده می‌کنیم:

$$f(\alpha) = 4 \sin \alpha (1 - 2 \sin^2 \alpha) + 2 \sin \alpha$$

$$= 4 \sin \alpha - 8 \sin^3 \alpha + 2 \sin \alpha = 6 \sin \alpha - 8 \sin^3 \alpha = 2(3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha)$$

باتوجه به اتحادها که در ذهن دادیم $\sin 3\alpha = 3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha$ پس:

$$= 2 \sin 3\alpha$$

$$f(\frac{4\pi}{9}) = 2 \sin(\frac{3 \times 4\pi}{9}) = 2 \sin(\frac{4\pi}{3}) = 2 \sin(1\pi + \frac{\pi}{3}) = -2 \sin \frac{\pi}{3}$$

$$= -2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = -\sqrt{3}$$

دشوار

۱۲- گزینه «ب»

ابتدا به توان‌ها دقت کنید:

$$0 \leq \cos^2 x \leq 1 \Rightarrow 0 \leq 9 \cos^2 x \leq 9$$

$$-1 \leq 9 \cos^2 x - 1 \leq 8 \Rightarrow -1 \leq \sqrt[3]{9 \cos^2 x - 1} \leq 2$$

$$\sqrt[3]{9 \cos^2 x - 1} = t \Rightarrow -1 \leq t \leq 2 \Rightarrow f(t) = t^2 - t^{-t}, \quad -1 \leq t \leq 2$$

تابع $f(t)$ تابعی است صعودی پس سر و ته بازه مقادیر برد را به ما می‌دهد در

نتیجه:

$$f(-1) = 2^{-1} - 2^1 = \frac{1}{2} - 2 = -\frac{3}{2}, \quad f(2) = 2^2 - 2^{-2} = 4 - \frac{1}{4} = \frac{15}{4}$$

$$\text{برد آن } [-\frac{3}{2}, \frac{15}{4}] = [a, b]$$

$$b - a = \frac{15}{4} + \frac{3}{2} = \frac{15}{4} + \frac{6}{4} = \frac{21}{4}$$

دشوار

۱۳- گزینه «ب»

$$f(\frac{\pi}{36}) = 16 \cos^2(\frac{3\pi}{36}) \cos^2(\frac{6\pi}{36}) \cos^2(\frac{12\pi}{36}) \cos^2(\frac{24\pi}{36})$$

$$16 \cos^2(\frac{\pi}{12}) \cos^2(\frac{\pi}{6}) \cos^2(\frac{\pi}{3}) \cos^2(\frac{2\pi}{3})$$

مقادیر $\cos \frac{\pi}{6}, \cos \frac{\pi}{3}$ واضح است از آنجایی که $\frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{3} = \pi$ یعنیمکمل‌اند پس تنها $\cos \frac{\pi}{12}$ احتیاج به محاسبه دارد.

$$\cos \frac{2\pi}{3} = -\cos \frac{\pi}{3}$$

$$\cos \frac{\pi}{12} = \cos(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}) = \cos \frac{\pi}{3} \cos \frac{\pi}{4} + \sin \frac{\pi}{3} \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{6}}{4}$$

در نتیجه:

$$= 16 (\frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4})^2 (\frac{\sqrt{3}}{2})^2 (\frac{1}{2})^2 (-\frac{1}{2})^2 = \frac{6 + 3\sqrt{3}}{16}$$

متوسط

۲۰- گزینه «۳»

$$T = \frac{\frac{4\pi}{3}}{\frac{2\pi}{3}} = 2 \Rightarrow T = \frac{2\pi}{|c|} \Rightarrow |c| = 1 \Rightarrow c = 1$$

$$\max = |b| + a = 1 \Rightarrow b + a = 1$$

(۰, ۰) در معادله صدق می‌کند. پس:

$$0 = a + b \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) \Rightarrow 2a + b = 0 \Rightarrow a = -1, b = 2$$

$$b(c - a) = 2(1 + 1) = 4$$

متوسط

۱۶- گزینه «۱»

$$T = 2\left(\frac{5}{4} - \frac{1}{4}\right) = 2 \Rightarrow T = \frac{2\pi}{|b|} = 2 \Rightarrow |b| = \pi \Rightarrow b = \pi$$

$$f\left(\frac{1}{4}\right) = 0 \Rightarrow a \cos\left(\frac{\pi}{4} + c\right) = 0 \Rightarrow \frac{\pi}{4} + c = \frac{\pi}{2} \Rightarrow c = \frac{\pi}{4}$$

$$\max = \frac{1}{4} \Rightarrow |a| = \frac{1}{4} \Rightarrow a = \pm \frac{1}{4}$$

$$\frac{ac}{b} = \frac{\frac{1}{4} \times \frac{\pi}{4}}{\pi} = \frac{1}{16}$$

دشوار

۱۷- گزینه «۱»

$$\tan\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = \frac{\tan \frac{\pi}{4} - \tan x}{1 + \tan \frac{\pi}{4} \tan x}$$

با استفاده از فرمول

$$\frac{1 - \tan x}{1 + \tan x} = \frac{1 - m}{1 + m} \Rightarrow 1 + m - 2 \tan x - m \tan x = 1 - m + \tan x - m \tan x$$

$$1 + 2m = 3 \tan x \Rightarrow \tan x = \frac{1 + 2m}{3}$$

$$-1 < \tan x < 1$$

$$-1 < \frac{1 + 2m}{3} < 1$$

$$-3 < 1 + 2m < 3$$

$$-4 < 2m < 2$$

$$-2 < m < 1$$

دشوار

۱۸- گزینه «۳»

با استفاده از فرمول مثلثاتی:

$$2(1 - \cos^2 x) + \cos^2 x = \frac{4}{3} \Rightarrow 2 - 2\cos^2 x + \cos^2 x = \frac{4}{3}$$

$$2 - \frac{4}{3} = \cos^2 x$$

$$\frac{2}{3} = \cos^2 x$$

$$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} \Rightarrow 1 + \tan^2 x = \frac{3}{2} \Rightarrow \tan^2 x = \frac{1}{2}$$

متوسط

۱۹- گزینه «۳»

با توجه به فرمول دوره‌ی تناوب:

$$4\pi = \frac{2\pi}{|b|} \Rightarrow b = \frac{1}{2}$$

باتوجه به فرمول $\max$ و $\min$

$$5 = |a| + c \Rightarrow 6 = 2c \Rightarrow c = 3$$

$$1 = -|a| + c$$

$$|a| + 3 = 5 \Rightarrow |a| = 2 \Rightarrow a = -2$$

سوالات تستی

پاسخنامه

آزمون پلاس

۱- گزینه «۱»

چون در یک دوره تناوب رسم شده است پس دوره‌ی تناوب $y = \cos^2 bx$

$$T = \frac{\pi}{|b|} \text{ برابر}$$

$$T = \frac{9\pi}{20} = \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{5}$$

$$\frac{\pi}{5} = \frac{\pi}{|b|} \Rightarrow |b| = 5 \Rightarrow b = 5$$

$$x = \frac{\pi}{4} \Rightarrow y = a \cos^2\left(\frac{5\pi}{4} - \frac{\pi}{4}\right) + c \Rightarrow y = a + c = 1 \Rightarrow a + c = 1$$

۲- که $\min$ تابع $\cos$ است در میانگین بین $\frac{\pi}{4}$ و $\frac{9\pi}{20}$ اتفاق افتاده است.

$$x = \frac{7\pi}{20} \Rightarrow y = a \cos^2\left(\frac{7\pi}{20} - \frac{\pi}{4}\right) + c \Rightarrow y = a \cos^2\left(\frac{3\pi}{20}\right) + c \Rightarrow c = -2$$

پس $a = 3$

$$ab = (3)(5) = 15$$

۲- گزینه «۲»

$$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} \text{ با استفاده از اتحاد}$$

$$f(x) = \frac{2}{a} - b \cos^2\left(x - \frac{3\pi}{4}\right)$$

حالا با استفاده از $\cos^2 x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2x$ داریم:

$$f(x) = \frac{2}{a} - b\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos^2\left(2x - \frac{3\pi}{2}\right)\right) = \frac{2}{a} - \frac{b}{2} - \frac{b}{2}(-\sin 2cx)$$

$$f(x) = \frac{b}{2} \sin(2cx) + \frac{2}{a} - \frac{b}{2} \Rightarrow T = \frac{2\pi}{|2c|} \Rightarrow 9\pi = \frac{2\pi}{|2c|} \Rightarrow c = \frac{1}{9}$$

$$\max = \left|\frac{b}{2}\right| + \frac{2}{a} - \frac{b}{2} = 6 \xrightarrow{b > 0} \frac{2}{a} = 6 \Rightarrow a = \frac{1}{3}$$

$$\min = -\left|\frac{b}{2}\right| + \frac{2}{a} - \frac{b}{2} = 0 \xrightarrow{b > 0} b = 6$$

$$f\left(\frac{3\pi}{4}\right) = 3 + 3 \sin\left(\frac{2}{9}x\right) = 3 + 3 \sin\left(\frac{2}{9} \times \frac{3\pi}{4}\right) = 4/5$$

۴- گزینه «پ»

$$y = a + b \sin x$$

$$\left(-\frac{\delta\pi}{\epsilon}, \circ\right) \in f \Rightarrow \circ = a + b \sin\left(-\frac{\delta\pi}{\epsilon}\right) \Rightarrow \circ = a - b \sin\left(\pi - \frac{\pi}{\epsilon}\right)$$

$$\circ = a - b \sin \frac{\pi}{\epsilon}$$

$$\circ = a - \frac{1}{\gamma} b \Rightarrow a = \frac{1}{\gamma} b$$

$$\max = 3$$

$$|b| + a = 3 \Rightarrow b + a = 3$$

باجل

$$a + b = 3 \Rightarrow a = \frac{1}{\gamma} b$$

$$a = 1, b = 2 \leftarrow \frac{3b}{\gamma} = 3 \leftarrow \frac{b}{\gamma} + b = 3$$

$$y = 1 + 2 \sin x \Rightarrow y = 1 + 2 \sin \frac{\pi}{\epsilon} \Rightarrow y = 2$$

۷- گزینه «پ»

$$(-\cos \alpha)(+\sin \alpha) + \tan\left(\frac{3\pi}{\gamma} - \alpha\right)$$

$$-\sin \alpha \cos \alpha + \cot \alpha$$

$$\text{اگر } \tan \alpha = \frac{4}{3} \text{ باشد با توجه به اتحاد } 1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \text{ داریم:}$$

$$1 + \frac{16}{9} = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \Rightarrow \frac{25}{9} = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \Rightarrow \cos \alpha = \frac{-3}{5}$$

$$\sin^2 \alpha = 1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25} \Rightarrow \sin \alpha = -\frac{4}{5}$$

$$-\left(-\frac{4}{5}\right)\left(-\frac{3}{5}\right) + \frac{3}{4} = -\frac{12}{25} + \frac{3}{4} = \frac{-48 + 75}{100} = \frac{27}{100}$$

۸- گزینه «ا»

$$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} \text{ با استفاده از اتحاد}$$

$$\frac{\tan x}{\frac{1}{|\cos x|}} \left(\frac{1 - \sin^2 x}{\sin x} \right)$$

چون $\frac{\pi}{\gamma} < x < \pi$ است پس $\cos x$ مقدار منفی دارد پس:

$$-\cancel{\cos x} \cdot \frac{\sin x}{\cancel{\cos x}} \left(\frac{\cos^2 x}{\sin x} \right) = -\cos^2 x$$

۳- گزینه «پ»

با استفاده از اتحادهای مثلثاتی:

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$4 \cos^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$5 \cos^2 \alpha = 1$$

$$\cos \alpha = \sqrt{\frac{1}{5}} = \frac{-1}{\sqrt{5}} \times \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{-\sqrt{5}}{5}$$

۴- گزینه «پ»

ابتدا با استفاده از اتحاد $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$ داریم:

$$f(x) = a + \frac{1}{\gamma} b \sin\left(2cx - \frac{3\pi}{\epsilon}\right) \Rightarrow f(x) = a + \frac{1}{\gamma} b \sin\left(2cx - \frac{3\pi}{\gamma}\right)$$

$$f(x) = a - \frac{1}{\gamma} b \sin\left(\frac{3\pi}{\gamma} - 2cx\right)$$

$$f(x) = a + \frac{b}{\gamma} \cos 2cx$$

باتوجه به $\min, \max$ تابع کسینوس داریم:

$$\left. \begin{aligned} a + \left| \frac{b}{\gamma} \right| &= 3 \\ a - \left| \frac{b}{\gamma} \right| &= -1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow 2a = 2 \Rightarrow a = 1$$

$$\left| \frac{b}{\gamma} \right| = 2 \Rightarrow b = \pm 4 \Rightarrow b = -4$$

همچنین دوره تناوب تناوب تابع $y = \cos 2cx$ از رابطه $T = \frac{2\pi}{|2c|}$ که در

شکل برابر π است پس:

$$\frac{2\pi}{|2c|} = \pi \Rightarrow |2c| = 2 \Rightarrow c = 1$$

$$f(x) = 1 - 2 \cos 2x \xrightarrow[\text{محل برخورد با محور } x]{\text{صفهای تابع}}$$

$$\cos 2x = \frac{1}{2} \begin{cases} 2x = \frac{\pi}{3} \Rightarrow x = \frac{\pi}{6} \\ 2x = 2\pi - \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{3} \Rightarrow x = \frac{5\pi}{6} \end{cases}$$

۵- گزینه «پ»

$$\tan \frac{17\pi}{6} = \tan\left(\frac{18\pi - \pi}{6}\right) = \tan\left(3\pi - \frac{\pi}{6}\right) = -\tan \frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\sin \frac{11\pi}{3} = \sin\left(\frac{12\pi - \pi}{3}\right) = \sin\left(4\pi - \frac{\pi}{3}\right) = -\sin \frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos \frac{10\pi}{3} = \sin\left(\frac{9\pi - \pi}{3}\right) = \sin\left(3\pi - \frac{\pi}{3}\right) = -\sin \frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2}$$

$$\left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - \frac{1}{2} = \frac{3}{2} - \frac{1}{2} = 1$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{[\sin(\frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{4})]^2}{3^2[\sin(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4})]^2} = \frac{\sin^2 \frac{\pi}{4}}{3^2[\sin(\frac{\pi}{4} \cos \frac{\pi}{4} - \cos \frac{\pi}{4} \sin \frac{\pi}{4})]^2} \\
 &= \frac{\frac{3}{4}}{3^2[(\frac{\sqrt{3}}{4})(\frac{\sqrt{2}}{4}) - (\frac{1}{4})(\frac{\sqrt{2}}{4})]^2} \\
 &= \frac{\frac{3}{4}}{3^2(\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4})^2} = \frac{\frac{3}{4}}{3^2(\frac{6 + 2 - 2\sqrt{12}}{16})} = \frac{12}{3^2(8 - 2\sqrt{12})} \times \frac{8 + 2\sqrt{12}}{8 + 2\sqrt{12}} \\
 &= \frac{12(8 + 4\sqrt{3})}{64 - 48} = \frac{12(8 + 4\sqrt{3})}{16 \times 2} = \frac{6 + \sqrt{3}}{2}
 \end{aligned}$$

۱۳- گزینه «ب»

$$\frac{\cos \alpha + \sin \alpha}{|\tan^2 \alpha - 1|}$$

با استفاده از اتحادهای مثلثاتی داریم:

$$\sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha = 1 - \frac{4}{9} = \frac{5}{9} \Rightarrow \sin \alpha = -\frac{\sqrt{5}}{3}$$

$$1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \Rightarrow 1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\frac{4}{9}} \Rightarrow 1 + \tan^2 \alpha = \frac{9}{4}$$

$$\tan^2 \alpha = \frac{9}{4} - 1$$

$$\tan^2 \alpha = \frac{5}{4}$$

پس:

$$= \frac{\frac{2}{3} - \frac{\sqrt{5}}{3}}{|\frac{5}{4} - 1|} = \frac{\frac{2 - \sqrt{5}}{3}}{\frac{1}{4}} = \frac{4(2 - \sqrt{5})}{3}$$

۱۴- گزینه «ب»

با استفاده از اتحادهای $\frac{\sin \alpha}{1 + \cot \alpha} - \tan \frac{\alpha}{2}$, $\frac{\sin \alpha}{1 - \cos \alpha} = \cot \frac{\alpha}{2}$ داریم:

$$\cot \frac{\alpha}{2} + \frac{1}{\tan \frac{\alpha}{2}} = \cot \frac{\alpha}{2} + \cot \frac{\alpha}{2} = 2 \cot \frac{\alpha}{2}$$

۱۵- گزینه «ا»

$$\begin{aligned} \max &= |a| + b = 3 \Rightarrow 2b = -4 \Rightarrow b = -2, |a| = 5 \Rightarrow a = 5 \\ \min &= -|a| + b = -9 \end{aligned}$$

$$f(x) = 5 \cos x - 2 \Rightarrow f(\frac{\pi}{3}) = 5 \cos \frac{\pi}{3} - 2 = \frac{5}{2} - 2 = \frac{1}{2}$$

۹- گزینه «ا»

چون در یک بازه متناوب است پس:

$$T = \frac{\Delta \pi}{6} - \frac{\pi}{6} = \frac{4\pi}{6} = \frac{2\pi}{3} \Rightarrow \frac{2\pi}{3} = \frac{2\pi}{|b|} \Rightarrow |b| = 3 \Rightarrow b = 3$$

$$\max = |a| + c = 1 \Rightarrow a + c = 1$$

$$\min = -|a| + c = -3 \Rightarrow -a + c = -3 \Rightarrow 2c = -2 \Rightarrow c = -1, a = 2$$

۱۰- گزینه «ب»

$$\text{محل برخورد با محور } x \text{ ها} \Rightarrow y = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} : 0 = a + b \sin(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3})$$

$$\Rightarrow 0 = a + b \cos \frac{\pi}{3}$$

$$0 = a + \frac{b}{2}$$

$$a = -\frac{b}{2}$$

$$\max = |b| + a = \frac{3}{2} \Rightarrow |b| - \frac{b}{2} = \frac{3}{2} \Rightarrow -b - \frac{b}{2} = \frac{3}{2} \Rightarrow \frac{-3b}{2} = \frac{3}{2}$$

$$b = -1 \text{ و } a = \frac{1}{2}$$

۱۱- گزینه «ب»

$$\tan(285) = \tan(270 + 15) = -\cot 15$$

$$-\tan(165) = -\tan(180 - 15) = +\tan 15$$

$$\sin(1095) = \sin(15)$$

$$\cos(255) = \cos(270 - 15) = -\sin 15$$

$$(-\cot 15)(\tan 15) - (\sin 15)(-\sin 15)$$

$$-1 + \sin^2 15 = -\cos^2 15$$

۱۲- گزینه «ب»

برای ساختن اتحاد $\sin 2x$ ابتدا یک $\sin^2 x$ در عبارت ضرب کرده در آخر

تقسیم می کنیم:

$$f(x) = \frac{3^2 \sin^2 x \cos^2 x \cos^2 2x \cos^2 4x \cos^2 8x \cos^2 16x}{3^2 \sin^2 x \cos^2 x \cos^2 2x \cos^2 4x \cos^2 8x \cos^2 16x}$$

$$f(x) = 16 \sin^2 2x \cos^2 2x \cos^2 4x \cos^2 8x \cos^2 16x$$

$$f(x) = 16 \sin^2 4x \cos^2 4x \cos^2 8x \cos^2 16x$$

$$f(x) = 16 \sin^2 8x \cos^2 8x \cos^2 16x$$

$$f(x) = 16 \sin^2 16x \cos^2 16x = \frac{\sin^2 32x}{3^2 \sin^2 \frac{\pi}{12}} = \frac{\sin^2(\frac{32\pi}{12})}{3^2 \sin^2(\frac{\pi}{12})} = \frac{\sin^2(\frac{8\pi}{3})}{3^2 \sin^2(\frac{\pi}{12})}$$

۲۰- گزینه «۱»

$$\tan x + \cot x = \frac{2}{\sin 2x} = 4 \Rightarrow \sin 2x = \frac{1}{2} \Rightarrow \sin x \cos x = \frac{1}{4}$$

$$5\pi < 4x < 6\pi \xrightarrow{\div 4} \frac{5\pi}{4} < x < \frac{3\pi}{2} \Rightarrow \sin x < \cos x < 0$$

حواستون باشه که وقتی کمانی از ۲۲۵ تا ۲۷۰ باشد مقادیر

است پس:

$$\sin x - \cos x < 0 \xrightarrow{\text{طرفین به توان ۲}}$$

$$(\sin x - \cos x)^2 = 1 - \sin 2x \Rightarrow \sin x - \cos x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\sin^3 x - \cos^3 x = (\sin x - \cos x)(\sin^2 x + \sin x \cos x + \cos^2 x)$$

$$= \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(1 + \frac{1}{4}\right) = \frac{-5}{4\sqrt{2}}$$

$$\text{معکوس} = -\frac{5}{4\sqrt{2}}$$

۱۶- گزینه «۴»

$$\max = |a| + c = \frac{5}{2} \Rightarrow 2c = 2 \Rightarrow c = 1 \Rightarrow |a| = \frac{3}{2} \Rightarrow a = -\frac{3}{2}$$

$$\min = -|a| + c = -\frac{1}{2}$$

$$T = \pi \Rightarrow \frac{2\pi}{|b|} = \pi \Rightarrow b = 2$$

۱۷- گزینه «۳»

$$\sin x + \cos x = \frac{3\sqrt{5}}{2} \xrightarrow{\text{به توان ۲}} 1 + \sin 2x = \frac{9}{5} \Rightarrow \sin 2x = \frac{4}{5}$$

$$\sin 2x = \frac{2 \tan x}{1 + \tan^2 x} \Rightarrow \sin 2x = \frac{4}{5} \Rightarrow \frac{4}{5} = \frac{2 \tan x}{1 + \tan^2 x}$$

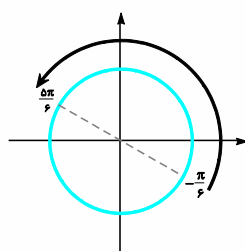
$$2 \tan^2 x - 5 \tan x + 2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} \tan x = 2 \\ \tan x = \frac{1}{2} \end{cases}$$

۱۸- گزینه «۲»

$$\sin 2x \text{ اگر } x < \frac{5\pi}{12} < \frac{-\pi}{12} \text{ آنگاه } \frac{5\pi}{6} < 2x < \frac{-\pi}{6} \text{ در این مسیر بیشترین مقدار } \sin 2x$$

یک و کمترین مقدار $\sin 2x$ است پس:

$$-\frac{1}{2} < \frac{m-1}{4} \leq 1 \xrightarrow{\times 4} -2 < m-1 \leq 4 \Rightarrow -1 < m \leq 5$$



۱۹- گزینه «۳»

ابتدا با استفاده از اتحادهای مثلثاتی داریم:

$$\sin^2\left(\frac{\pi}{4} - bx\right) = \frac{1}{2}(1 - \cos(2(\frac{\pi}{4} - bx))) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos\left(\frac{\pi}{2} - 2bx\right)$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sin 2bx$$

$$y = \frac{a}{2} - \frac{a}{2}\sin 2bx + c \Rightarrow \begin{aligned} \max &= \left|-\frac{a}{2}\right| + \frac{a}{2} + c = 1 \\ \min &= -\left|-\frac{a}{2}\right| + \frac{a}{2} + c = -2 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow 2\left|\frac{a}{2}\right| = 3$$

$$a = \pm 3$$

$$T = \frac{15\pi}{4} + \frac{5\pi}{4} = 5\pi \Rightarrow \frac{2\pi}{|2b|} + 5\pi \Rightarrow b = \pm \frac{1}{5}$$

$$ab = \pm \frac{3}{5} \xrightarrow{ab < 0} ab = -\frac{3}{5} = -\frac{6}{10}$$