

متوسط

-۳

وقتی به جملات دنباله نگاه می‌کنیم متوجه می‌شویم که هر جمله در عدد ۲ ضرب شده پس دنباله هندسی با قدرنسبت ۲ داریم.

از طرفی جمله کوچکتر از ۳۰۰ در ریاضی رو می‌دانیم که $a_n < 300$ می‌شه پس:

$$a_n < 300$$

$$a_1 r^{n-1} < 300 \Rightarrow (0/25)(2)^{n-1} < 300$$

$$\left(\frac{1}{5}\right)(2)^{n-1} < 300 \Rightarrow 2^{n-3} < 300$$

$$n-3 \leq 8 \Rightarrow n \leq 11$$

حواستون به چند تا نکته باشه!

اول این که به جای (۰/۲۵) می‌توانید $\left(\frac{1}{5}\right)$ بذارید.

دوم این که در مرحله آخر دنبال توانی از ۲ هستیم که از ۳۰۰ کمتر باشه و

$$2^8 = 256$$

پس ۱۱ جمله کوچکتر از ۳۰۰ دارد.

متوسط

-۴

اگر به الگوی نوشتن جملات دنباله‌ای هندسی توجه کنیم، می‌بینیم که داریم:

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 80$$

$$a_1 + a_3 = 20$$

با جای‌گذاری جمع جملات اول و سوم در معادله‌ی اول داریم:

$$a_2 + a_4 + 20 = 80 \Rightarrow a_2 + a_4 = 60 \Rightarrow a_1 r + a_1 r^3 = 60 \quad (1)$$

از طرفی داشتیم:

$$a_1 + a_3 = 20 \Rightarrow a_1 + a_1 r^2 = 20 \quad (2)$$

$$\xrightarrow{(1)} r(a_1 + a_1 r^2) = 60 \Rightarrow 20r = 60 \Rightarrow r = 3$$

حالا مقدار r رو تو معادله‌ی (۲) جای‌گذاری می‌کنیم:

$$a_1 + 9a_1 = 20$$

$$\Rightarrow 10a_1 = 20 \Rightarrow a_1 = 2 \Rightarrow a_5 = a_1 r^4 = 2 \times (3)^4 = 162$$

آسان

-۵

در سال دهم یاد گرفتیم که اگر سه جمله متوالی دنباله حسابی داشته باشیم

مانند a, b, c واسطه حسابی از رابطه $2b = a + c$ حساب می‌شود پس:

$$2(3x + 2) = 3x - 1 + 4x + 2 \Rightarrow 6x + 4 = 7x + 1 \Rightarrow 3 = x$$

با جای‌گذاری $x = 3$ در سه جمله اعداد دنباله ۸، ۱۱، ۱۴ به دست می‌آید پس:

$$a_{16} = a_1 + 15d = 8 + 15(3) = 53$$

آسان

-۶

وقتی به جملات دنباله نگاه کنیم متوجه می‌شویم جمله اول ۵- و جمله چهارم

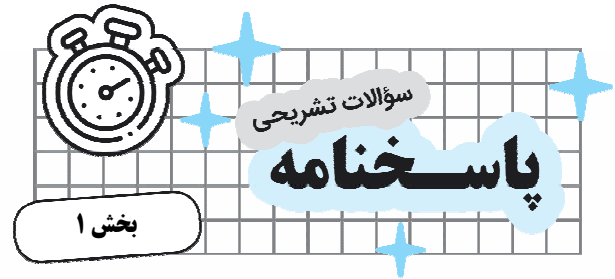
۱ است. همچنین از پارسال می‌دانیم $d = \frac{a_m - a_n}{m - n}$ پس $d = \frac{1 - (-5)}{4 - 1}$ در

نتیجه $d = \frac{6}{3} = 2$ حالا به راحتی جملات دنباله را به دست می‌آوریم.

$$-5, -3, -1, +1, +3$$

$$\text{پس } c = 3, b = -1, a = -3$$

$$a + b + c = -3 - 1 + 3 = -1$$



آسان

-۱

سال دهم یاد گرفتیم که اگر جملات غیرمتوالی یک دنباله حسابی را داشته

باشیم، برای محاسبه قدرنسبت از فرمول $d = \frac{a_m - a_n}{m - n}$ استفاده کنیم پس:

$$d = \frac{a_7 - a_3}{7 - 3} = \frac{9 - 25}{7 - 3} = -4$$

و با جای‌گذاری در جمله‌ی سوم داریم:

$$a_3 = a_1 + 2d \Rightarrow a_1 - 8 = 25 \Rightarrow a_1 = 33$$

معنی جمله مثبت این است که $a_n > 0$ و از دهم یاد گرفتیم که $a_n = a_1 + (n-1)d$

پس:

$$a_1 + (n-1)d > 0 \Rightarrow 33 + (n-1)(-4) > 0 \Rightarrow 37 - 4n > 0$$

$$37 > 4n \Rightarrow \frac{37}{4} > n$$

$\frac{37}{4} > n$ یعنی اولین عدد طبیعی کوچکتر از ۹/۲۵ که می‌شه ۹. پس ۹ جمله

این دنباله مثبت است.

آسان

-۲

$$a_{20} = 52$$

$$a_1 + a_2 + a_3 = -6$$

اگر هر کدام از اطلاعات سوال را بسط بدیم به اطلاعات زیر می‌رسیم.

$$\begin{cases} a_1 + 19d = 52 \\ 3a_1 + 3d = -6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 + 19d = 52 \\ -a_1 - d = 2 \end{cases} \Rightarrow 18d = 54$$

$$d = 3, a_1 = -5$$

حالا جمله چندم یعنی: a_n پس $a_n = 19$

$$a_1 + (n-1)d = 19 \Rightarrow -5 + (n-1)(3) = 19$$

$$\Rightarrow 3n = 27 \Rightarrow n = 9$$

-۷

متوسط

در دنباله‌های هندسی هر جمله در قدرنسبت ضرب می‌شود پس در این دنباله قدرنسبت m هست پس جمله سوم هم m^3 هست که شده ۶۴. در نتیجه:

$$m^3 = 64$$

$$m = 4$$

پس جملات دنباله به صورت $4, 16, 64, \dots$

$$a_4 = a_1 r^3 = 4(4)^3 = 256$$

حواستون باشه! قسمت اول سوال رو با واسطه هندسی هم می‌شد بریم!

-۸

متوسط

اول از همه بریم سراغ سواد دهم شما!

عدد $2\sqrt{2}$ رو به صورت $\sqrt{8}$ بنویسید که راحت بشید. پس:

$$2^y, \sqrt{8}, 2^x$$

همچنین در سال دهم واسطه هندسی داشتید که می‌شه $b^2 = ac$ پس

$$(\sqrt{8})^2 = 2^y \times 2^x$$

با استفاده از قوانین توان داریم: $2^3 = 8 = 2^{x+y}$

$$3 = x + y$$

در آخر هم واسطه حسابی x و y خواسته که می‌شه $\frac{x+y}{2}$ پس واسطه برابر

$$\frac{3}{2} \text{ است.}$$

-۹

دشوار

حواستون به یک نکته باشه!

در سال دهم این سوالات را با بسط دادن جملات حل می‌کردید ولی حالا می‌تونید از این نکته استفاده کنید که اگر a_p, a_m, a_n سه جمله از دنباله حسابی باشند و همچنین سه جمله متوالی دنباله هندسی باشند برای پیدا کردن

قدرنسبت هندسی از رابطه $q = \frac{p-m}{m-n}$ استفاده می‌کنیم پس:

$$q = \frac{37-7}{7-1} = \frac{30}{6} = 5$$

حواستون باشه که راه حل تشریحی این سوال در سوالات تستی شماره ۲۰ آمده است.

-۱۰

آسان

از سال‌های گذشته می‌دانیم که اعدادی مضرب ۱۵ هستند که بر ۳ و ۵ بخش پذیر باشند. پس دنباله اعداد سه رقمی مضرب ۱۵:

$$105, 120, 135, \dots, 990$$

برای پیدا کردن S_n اولین چیزی که باید داشته باشد تعداد جملات هست که فرمول تعداد جملات دنباله از سال دهم:

$$n = \frac{\text{اولی} - \text{آخری}}{\text{فاصله}} + 1$$

$$n = \frac{990 - 105}{15} + 1 = 60$$

$$S_{60} = \frac{60}{2} [(105) + (990)] = 30 [210 + 885] = 32850$$

-۱۱

آسان

البته که با دیدن این سوال دانش آموز باسواد از سال دهم به یاد شمارش می‌افته و از فرمول ترکیب استفاده می‌کنه و به راحتی جواب رو به صورت روبه

$$\binom{40}{2} = \frac{40 \times 39}{2} = 780$$

اما خب در بخش اول کتاب یازدهم چون از مجموع جملات می‌خواهیم استفاده کنیم پس این طور در نظر می‌گیریم که نقطه اول به ۳۹ نقطه دیگر وصل می‌شه. نقطه بعدی به ۳۸ نقطه دیگر و به همین صورت پس:

$$39 + 38 + \dots + 1 = \frac{39}{2} [39 + 1] = \frac{39 \times 40}{2} = 780$$

-۱۲

آسان

از فرمول زیبای کتاب درسی به راحتی استفاده می‌کنیم:

$$S_n = \frac{n}{2} [2a_1 + (n-1)d]$$

$$S_{20} = \frac{20}{2} [2(5) + (20-1)(4)] \Rightarrow S_{20} = 10 [10 + 76]$$

$$\Rightarrow S_{20} = 10 [86] = 860$$

-۱۳

متوسط

اول به این فکر کنید اعداد سه رقمی که در تقسیم بر ۹ باقی‌مانده ۲ دارند چه اعدادی هستند این اعداد مضرب ۹ هستند که ۲ واحد به آنها اضافه شده یعنی:

$$101, 110, \dots, 992$$

وقتی دنباله را پیدا کردیم مرحله اول پیدا کردن تعداد و سپس فرمول S_n است.

$$n = \frac{992 - 101}{9} + 1 = 100$$

$$S_{100} = \frac{100}{2} [2(101) + 99(9)] = 50 [202 + 891] = 54650$$

-۱۴

آسان

این سوال هم مشابه سوال یازدهم هست. یعنی می‌توان آن را با ترکیب از سال

دهم حل کرد و به راحتی جواب $\binom{20}{2}$ را نوشت.

اما در سال یازدهم چون بحث بر سر مجموع هست پس می‌توان گفت نفر اول با ۱۹ نفر دیگری تواند گروه ۲ نفره تشکیل دهد، نفر دوم با ۳۸ نفر باقی مانده می‌تواند گروه ۲ نفره تشکیل دهد و به همین صورت پس دنباله ما به صورت:

$$19 + 18 + \dots + 1 = \frac{19}{2} [19 + 1] = \frac{19 \times 20}{2} = 190$$

-۱۵

متوسط

در مرحله اول ورزشکار ۳ متر طی می‌کند و دوباره ۳ متر باز می‌گردد به نقطه شروع پس اولین مسافت برای اولین وزنه ۶ متر خواهد بود. همچنین برای وزنه دوم ۶ متر طی خواهد کرد و ۶ متر باز می‌گردد پس جمله دوم این دنباله ۱۲ متر خواهد بود و... در نتیجه دنباله‌ای به صورت زیر خواهیم داشت.

$$6 + 12 + 18 + \dots$$

این دنباله یک دنباله حسابی با قدرنسبت ۶ است پس:

$$S_n = \frac{n}{2} [2a_1 + (n-1)d] \Rightarrow 918 = \frac{n}{2} [12 + (n-1)(6)]$$

$$918 = \frac{n}{2} [12 + 6n - 6] \Rightarrow 918 = 62 + 3n^2 - 3n$$

$$918 = 3n^2 + 3n \Rightarrow 0 = 3n^2 + 3n - 918$$

$$0 = n^2 + n - 306 \Rightarrow (n+18)(n-17) = 0 \Rightarrow \begin{cases} n = -18 \\ n = 17 \end{cases} \quad \text{غ ق ق ۱۸}$$

-۱۶

متوسط

با استفاده از روش گاوس خواهیم داشت:

$$\bar{T}) \quad 2 + 4 + 6 + \dots + 2n$$

$$\frac{(2n) + (2n-2) + (2n-4) + \dots + (2)}{n} = \frac{n(2n+2)}{2} = \frac{2n^2 + 2n}{2}$$

مجموع اعداد طبیعی زوج $= n^2 + n$

$$\text{ب) } 1 + 3 + 5 + \dots + 2n-1$$

$$\frac{(2n-1) + (2n-3) + (2n-5) + \dots + (1)}{n} = \frac{2n + 2n - 2 + \dots + 2n - 2n + 1}{n}$$

$$= \frac{(n)(2n)}{2} = \frac{2n^2}{2} = n^2 \quad \text{مجموع اعداد طبیعی فرد}$$

$$\text{پ) } 1 + 2 + 3 + \dots + n$$

$$\frac{n + n-1 + n-2 + \dots + 1}{n} = \frac{(n+1) + (n+1) + \dots + (n+1)}{n}$$

$$= \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n^2 + n}{2} \quad \text{مجموع اعداد طبیعی}$$

-۱۷

متوسط

حداقل چند جمله را جمع کنیم یعنی دنبال کمترین تعداد n هست پس:

$$S_n > 65$$

$$\frac{n}{2} [2a_1 + (n-1)d] > 65 \Rightarrow \frac{n}{2} [2(2) + (n-1)(5)] > 65$$

$$\frac{n}{2} [4 + 5n - 5] > 65 \Rightarrow \frac{n}{2} [5n - 1] > 65 \Rightarrow \frac{5}{2} n^2 - \frac{n}{2} - 65 > 0$$

که این به معنای تعیین علامت عبارت هست پس:

$$5n^2 - n - 130 > 0 \Rightarrow (5n-26)(n+5) > 0 \Rightarrow n > \frac{26}{5} \Rightarrow n > 5.2$$

اولین عدد طبیعی آن $n=6$ هست.

-۱۸

دشوار

اگر دنباله‌ای ۳۰ جمله داشته باشد پس ۱۵ جمله آن زوج و ۱۵ جمله آن فرد است اما حواسون باشه که وقتی شماره جملات زوج هستند یعنی قدرنسبت ۲د می‌شه همچنین وقتی شماره جملات فرد هستند قدرنسبت ۲د هست.

$$S_{15} = \frac{15}{2} [2a_1 + (15-1)(2d)] = 225$$

$$\frac{15}{2} [2a_1 + 28d] = 225$$

$$2a_1 + 28d = 30 \quad **$$

$$S_{15} = \frac{15}{2} [2a_2 + (15-1)(2d)] = 270$$

$$= \frac{15}{2} [2a_1 + 2d + 28d] = 270$$

$$2a_1 + 30d = 36 \quad *$$

با حل دستگاه * و ** خواهیم داشت:

$$a_1 = -27, d = 3$$

-۱۹

متوسط

این سوال را به دو صورت می‌شه حل کرد. روش اول این هست که شما فرمول S_n در

$$S_n = \frac{d}{2} n^2 + (a_1 - \frac{d}{2})n \quad \text{کتاب درسی را مرتب کرده باشید و متوجه شده باشید که}$$

هست پس در این سوال ضریب n^2 نصف قدرنسبت است در نتیجه:

$$a_1 - 4 = -5, d = 8$$

$$a_1 = -1, a_n = -1 + (n-1)(8) = 8n - 9$$

روش دوم حل این سوال این هست که $S_n - S_{n-1} = a_n$

پس با جای گذاری $(n-1)$ در فرمول S_n خواهیم داشت:

$$S_n - S_{n-1} = [4n^2 - 8n] - [4(n-1)^2 - 8(n-1)]$$

$$= 4n^2 - 8n - 4n^2 + 12n - 9 = 8n - 9 = a_n$$

و برای یافتن S_1 در فرمول به جای n عدد ۱۰ رو قرار می‌دهیم.

$$S_{10} = 4(10)^2 - 8(10) = 400 - 80 = 320$$

-۲۰

آسان

با توجه به فرمول کتاب درسی برای مجموع دنباله هندسی:

$$S_n = a_1 \frac{1-q^n}{1-q}$$

$$S_{10} = \frac{1}{9} \times \frac{1-3^{10}}{1-3} = \frac{-59048}{-18} = 3280.4$$

متوسط

-۲۴

حواستون باشه! توی این سوال بیشتر می‌خواهیم ببینیم اتحاد بلدید یا نه!

$$S_6 = 846 \quad S_3 = 94$$

$$a_1 \frac{1-q^6}{1-q} = 846 \quad a_1 \frac{1-q^3}{1-q} = 94$$

در دنباله‌های هندسی به یاد داشته باشید که تقسیم کردن اطلاعات خیلی کمک کننده است.

$$\frac{a_1 \frac{1-q^6}{1-q}}{a_1 \frac{1-q^3}{1-q}} = \frac{846}{94} \Rightarrow \frac{(1-q^6)(1+q^3)}{1-q^3} = 9 \Rightarrow 1+q^3 = 9 \Rightarrow q = 2$$

حالا نسبت جمله هشتم به جمله پنجم دنباله هندسی یعنی:

$$\frac{a_8}{a_5} = \frac{a_1 q^7}{a_1 q^4} = q^3 = 8$$

متوسط

-۲۵

تیکه اول سوال که مربوط به سال دهم هست یعنی:

$$d = \frac{a_{10} - a_5}{10 - 5} = \frac{27 - 12}{10 - 5} = \frac{15}{5} = 3$$

و با جای‌گذاری قدرنسبت، در بسط یکی از جملات a_1 را به دست می‌آوریم:

$$a_5 = a_1 + 4d$$

$$12 = a_1 + 4(3) \Rightarrow a_1 = 0$$

تیکه دوم سوال وقتی که گفته شده با شروع از جمله هفتم یعنی شش جمله قبل از مجموع بیست جمله اول کم شده پس در اصل $S_{20} - S_6$ را از ما خواسته:

$$S_{20} - S_6 = \frac{20}{2} [2(0) + (19)(3)] - \frac{6}{2} [2(0) + 5(3)] = 10[57] - 3[15] = 525$$

دشوار

-۲۶

مجموع 20 جمله اول دنباله حسابی از رابطه $S_{20} = \frac{20}{2} [2a_1 + (19)(d)]$ به

دست می‌آید.

حالا قدرنسبت را به $(d+4)$ و جمله اول را به (a_1-3) تغییر می‌دهیم پس

مجموع 20 جمله اول دنباله از رابطه $S_{20} = \frac{20}{2} [2(a_1-3) + (19)(d+4)]$ به

دست می‌آید. از مقایسه دو رابطه به دست آمده داریم:

$$10[2a_1 - 6 + 19d + 76] - 10[2a_1 + 19d]$$

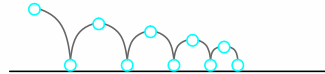
$$20a_1 + 700 + 190d - 20a_1 - 190d = 700$$

پس یعنی 700 واحد به مجموع بیست جمله اول دنباله اضافه شده است.

دشوار

-۲۱

حواستون باشه! اول این که این توپ از ارتفاع 15 متری رها می‌شه پس:



پس اولین جمله دنباله 15 هست اما جملات بعدی ثلث، $(\frac{1}{3})$ رفت و برگشت توپ باید حساب شود.

$$15 + 2 \times \frac{15}{3} + 2 \times \frac{1}{3} \times \frac{15}{3} + \dots$$

چون 15 به عنوان جمله اول، دنباله هندسی نمی‌سازد، مجموع جملات دوم به بعد را با استفاده از دنباله هندسی حساب کرده و در آخر با 15 جمع می‌کنیم:

$$\frac{2}{3} \times 15 \left(1 + \frac{1}{3} + \dots\right)$$

$$\frac{2}{3} \times 15 \left(1 \times \frac{1 - (\frac{1}{3})^4}{1 - \frac{1}{3}}\right) = \frac{2}{3} \times 15 \left(\frac{1 - \frac{1}{81}}{\frac{2}{3}}\right) = 15 \times \frac{80}{81} = \frac{400}{27}$$

و در آخر این عدد با 15 جمع می‌شود پس جواب آخر $\frac{400}{27} + 15 = \frac{805}{27}$.

متوسط

-۲۲

خانه‌های شطرنج را شماره جملات در نظر می‌گیریم و تعداد گندم‌ها را خود جملات در نظر می‌گیریم:

$$1 + 2 + 4 + 8 + \dots$$

$$S_{64} = 1 \times \frac{1 - 2^{64}}{1 - 2} \Rightarrow S_{64} = 2^{64} - 1$$

پس $2^{64} - 1$ گرم گندم خواهد داشت.

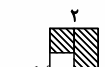
دشوار

-۲۳

در ابتدای سوال گفته شده که مربعی به طول ضلع 2 واحد داریم که نصف آن را رنگ می‌کنیم مانند شکل زیر:



پس مساحت قسمت رنگ شده برابر مستطیلی یک در دو است پس جمله اول 2 خواهد بود.



سپس در قسمت رنگ نشده دوباره نیمی از آن را رنگ می‌کنیم $(\frac{1}{4})$ که مربعی یک در یک خواهد بود که مساحت آن 1 خواهد بود و به همین ترتیب:

$$2, 1, \frac{1}{2}, \dots$$

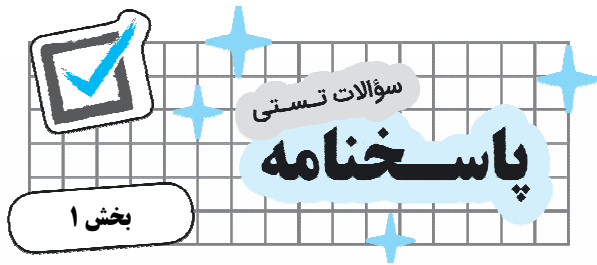
حالا مجموع این قسمت‌های رنگ شده باید حداقل $\frac{96}{100}$ درصد سطح مربع باشد.

$$2 + 1 + \frac{1}{2} + \dots \geq \frac{96}{100} \times 4$$

$$2 \times \frac{1 - (\frac{1}{2})^n}{1 - \frac{1}{2}} \geq \frac{96}{100} \times 4 \Rightarrow 2 \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right) \geq \frac{96}{100} \times 2 \Rightarrow 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n \geq \frac{96}{100}$$

$$\frac{4}{100} \geq \left(\frac{1}{2}\right)^n \xrightarrow{\text{طرفین وسطین}} 25 \leq 2^n$$

اولین عدد طبیعی که در این نامساوی صدق می‌کند $n = 5$ است. پس $n \geq 5$ خواهد بود.



متوسط

۱- گزینه «پ»

چون بین دو عدد ۲۳ و ۱۲۳ نوزده واسطه قرار داده شده است پس یعنی دنباله بیست و یک جمله دارد.

$$23 \quad \boxed{} \quad \boxed{} \quad \dots \quad \boxed{} \quad 123$$

۱۹ جمله

$$d = \frac{123 - 23}{21 - 1} = 5$$

حواستون باشه! واسطه یازدهم دنباله به معنای جمله دوازدهم دنباله است پس:

$$a_{12} = a_1 + 11d = 23 + 11(5) = 78$$

دشوار

۲- گزینه «پ»

از دنباله‌های سال دهم می‌دونی که سه عدد از یک دنباله حسابی وقتی پشت سر هم باشن، می‌تونیم به صورت $x-d, x, x+d$ بنویسیم. چرا؟ چون فاصله وسطی با قبل و بعدش دقیقاً d ، یعنی همون قدرنسبت هست. درسته؟

$$x-d + x + x+d = 21 \Rightarrow 3x = 21 \Rightarrow x = 7$$

حالا با جایگذاری $x = 7$ داریم:

$$(7-d)(7)(7+d) = 231 \text{ یعنی: } (7-d)(7)(7+d) = 231$$

$$\Rightarrow 49 - d^2 = 33 \Rightarrow d^2 = 16 \Rightarrow d = 4$$

فرقی نداره d رو منفی یا مثبت بگیریم، فقط جمله‌ها جابه‌جا می‌شن.

$$(x+d) - (x-d) = 2d = 8 \Rightarrow (عدد کوچکتر) - (عدد بزرگتر) = 8$$

دشوار

۳- گزینه «پ»

بخش اول که مجموع چهار جمله اول رو بهمون داده یعنی دقیقاً S_4 ، اما بخش دوم چون شروع از جمله اول نیست پس با قبلی جمع می‌کنیم تا مجموع ۹ جمله اول به دست بیاد:

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 + a_8 + a_9 \Rightarrow S_9 = 45$$

۱۵ ۳۰

حالا دستگاه تشکیل می‌دیم و حل می‌کنیم:

$$\begin{cases} S_4 = 15 \\ S_9 = 45 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2(2a_1 + 3d) = 15 \\ \frac{9}{2}(2a_1 + 8d) = 45 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4a_1 + 6d = 15 \\ 9a_1 + 36d = 45 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4a_1 + 6d = 15 \\ a_1 + 4d = 5 \end{cases}$$

با حل کردن دستگاه به جواب‌های $a_1 = 3, d = \frac{1}{2}$ می‌رسیم.

حالا جمله یازدهم رو حساب می‌کنیم:

$$a_{11} = a_1 + 10d = 3 + 5 = 8$$

دشوار

۲۷-

داخل پرانتزها را وقتی نگاه می‌کنیم متوجه می‌شیم پرانتز اول دنباله هندسی با قدرنسبت x و پرانتز دوم دنباله هندسی با قدرنسبت $-x$ هست پس:

$$(1 \times \frac{1-x^5}{1-x})(1 \times \frac{1+x^5}{1+x}) =$$

که دو عبارت صورت اتحاد مزدوج هست پس:

$$\frac{1-x^5}{1-x} = \frac{1-(\sqrt{3})^5}{1-(\sqrt{3})^2}$$

دشوار

۲۸-

اگر به جملات دنباله به صورت:

$$1 \rightarrow \text{مجموع} \rightarrow 1 \text{ دسته اول}$$

$$8 \rightarrow \text{مجموع} \rightarrow 3 \text{ دسته دوم}$$

$$27 \rightarrow \text{مجموع} \rightarrow 9 \text{ دسته سوم}$$

$$n^3 \rightarrow \text{مجموع} \rightarrow \text{دسته شانزدهم:}$$

نگاه کنیم متوجه می‌شیم که مجموع جملات هر دسته از n^3 به دست آمده پس مجموع جملات دسته شانزدهم نیز از 16^3 به دست می‌آید.

دشوار

۲۹-

$$S_n = \frac{d}{2}n^2 + (a_1 - \frac{d}{2})n$$

پس در مرحله اول با مقایسه صورت سوال این نکته متوجه می‌شیم که ضرب n^3 باید صفر باشه پس $a - 2 = 0$ در نتیجه $a = 2$. همچنین در این فرمول $4b - 8 = 0$ باشد پس $b = 2$ پس $S_n = 3n^2 + 3n$ در نتیجه $d = 6, \frac{d}{2} = 3$ و همچنین:

$$a_1 - \frac{d}{2} = 3 \Rightarrow a_1 - 3 = 3 \Rightarrow a_1 = 6$$

و در آخر بسط جمله نهم در دنباله حسابی:

$$a_9 = a_1 + 8d = 6 + 8(6) = 54$$

دشوار

۳۰-

این سوال تلفیقی از اطلاعات دهم و یازدهم داره! پس اول شماره جملات منفی را پیدا کنیم. جمله منفی در ریاضی یعنی $t_n < 0$ پس $\frac{2n-15}{2} < 0$ پس $n < \frac{15}{2}$ و اولین عدد طبیعی کوچک‌تر از 7.5 هفت هست پس هفت جمله اول این دنباله منفی هستند در واقع این سوال S_7 را از ما سوال می‌کند.

$$t_n = \frac{2}{2}n - \frac{15}{2}$$

$$\text{پس قدرنسبت } d = \frac{2}{2}, t_1 = -\frac{13}{2} \text{ هست.}$$

$$S_7 = \frac{7}{2}[2(-\frac{13}{2}) + 6(\frac{2}{2})]$$

$$S_7 = \frac{7}{2}[-13 + 6] = \frac{7}{2}[-7] = -\frac{49}{2}$$

۴- گزینه «۲»

دشوار

$$2 - \sqrt{3}, a_2, a_3, \dots, a_{51}, 8 + \sqrt{3}$$

۵۰ واسطه حسابی به شماره‌های a_2 تا a_{51} هستند و می‌دونیم که اگر جملات

اول و آخر یک دنباله حسابی رو داشته باشیم می‌تونیم از فرمول زیر مجموع

جملات رو حساب کنیم:

$$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$$

پس داریم:

$$S_{50} = \frac{50}{2}(a_2 + a_{51}) = 25(a_2 + a_{51})$$

حالا دو راه پیش رو داریم. بریم ببینیم:

روش اول:

$$a_2 = a_1 + d$$

$$a_{51} = a_{52} - d \Rightarrow S_{50} = 25(a_1 + d + a_{52} - d)$$

$$= 25(2 - \sqrt{3} + 8 + \sqrt{3}) = 25 \times 10 = 250$$

روش دوم: یه قانون هست به اسم «قانون اندیس S» که می‌گه:

اگر $m + n = p + q$ اونوقت $a_m + a_n = a_p + a_q$ پس:

$$S_{50} = 25(a_1 + a_{52}) \text{ و } (2 + 51 = 1 + 52) \text{ چون } a_2 + a_{51} = a_1 + a_{52}$$

در نتیجه:

$$S_{50} = 25(2 - \sqrt{3} + 8 + \sqrt{3}) = 25 \times 10 = 250$$

۵- گزینه «۲»

دشوار

هر وقت صحبت از جملات مشترک بین دو دنباله حسابی شد، دو تا کار باید

انجام بدی اول این که، اولین جمله مشترک با ویژگی خواسته شده رو پیدا کنی.

و دوم بین قدرنسبت‌های دو دنباله ک.م.م بگیری و دنباله جدیدی با شروع از

همون اولین جمله مشترک و با قدرنسبت جدید بسازی.

$$a_n = 2, 5, 8, 11, 14, 17, \dots \Rightarrow d_1 = 3$$

$$b_n = 1, 5, 9, 13, 17, 21, \dots \Rightarrow d_2 = 4 \Rightarrow d = \text{ک.م.م}[3, 4] = 12$$

پس دنباله جدید، شروع از ۱۷ با قدرنسبت ۱۲ است.

$$17, 29, 41, 53, 65, 77, 89$$

که ۷ تا جمله داره!

اگر هم خواستی با فرمول، n رو به دست بیاری:

$$a_n = 17 + 12(n-1) = 12n + 5$$

$$12n + 5 < 100 \Rightarrow 12n < 95 \Rightarrow n < 7.9 \Rightarrow n = 7$$

۶- گزینه «۳»

دشوار

طبق توضیحات تست قبلی داریم:

$$a_n = -1, 3, 7, 11, 15, \dots \Rightarrow d_1 = 4 \Rightarrow d = \text{ک.م.م}[2, 4] = 4$$

$$b_n = 7, 9, 11, 13, 15, \dots \Rightarrow d_2 = 2$$

دنباله جدید با شروع از $a_1 = 15$ و با قدرنسبت $d = 4$ هستش:

$$15, 19, 23, 27, \dots$$

که جمله عمومی اول به این صورت در میاد:

$$a_n = 15 + (n-1)(4) = 4n + 11$$

برای این که ببینیم چند تا جمله داریم:

$$4n + 11 < 100 \Rightarrow 4n < 89 \Rightarrow n < 22.25$$

پس n برابر ۲۲ هست. (n عدد طبیعی هست).

حالا می‌تونیم S_{22} رو حساب کنیم:

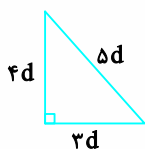
$$S_{22} = \frac{22}{2}[2(15) + 21(4)] = 11(114) = 1254$$

۷- گزینه «۱»

دشوار

یه چیزی بهت یاد بدم! هر وقت اضلاع مثلث قائم‌الزاویه تشکیل دنباله حسابی

بدهند، باید این سه تا عدد بیاد تو ذهنت:



(ضریب قدرنسبت از همون اعداد طلایی معروف ۳، ۴، ۵)

حالا گفته مساحت، پس میشه گفت: $\frac{1}{2} \times 3d \times 4d = 24$

$$\Rightarrow d^2 = 4 \Rightarrow d = 2 \quad (\text{حواست باشه } d \text{ نمی‌تونه منفی بشه!})$$

پس اضلاع مثلث به ترتیب ۶، ۸، ۱۰ هستن که طول ضلع کوچک میشه ۶.

۸- گزینه «۳»

آسان

خب بهتره جملات را طبق الگوی حسابی بنویسیم تا به ارتباطی با جمله هشتم

برسیم:

$$3a_2 + 4a_5 = 35$$

$$3(a_1 + 1d) + 4(a_1 + 4d) = 35$$

$$7a_1 + 19d = 35$$

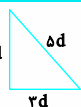
حالا جمله رو به ۷ تقسیم کنیم: $a_1 + 7d = 5$

که این، همون الگوی حسابی جمله هشتم هست پس $a_8 = 5$

۹- گزینه «۴»

متوسط

یادته گفتیم همچنین مثلثی این شکلیه: ($3d$ ، $4d$ ، $5d$) گفته محیط برابر ۶۰



هست پس داریم:

$$3d + 4d + 5d = 60$$

$$12d = 60 \Rightarrow d = 5$$

پس سه جمله اول دنباله میشه:

$$15, 20, 25$$

حالا S_7 رو حساب می‌کنیم:

$$S_7 = \frac{7}{2}[2(15) + 19(5)] = 10(125) = 1250$$

۱۰- گزینه «۱»

دشوار

وقتی توی تست، اطلاعات مسأله به اندازه کافی نیست که بتونیم همه مجهول‌ها رو حساب کنیم، معمولاً واقعاً هم نیازی بهشون نداریم و کافیه فقط ارتباط بین اطلاعات مسأله و خواسته اون رو پیدا کنیم.

نو این تست اول a_{12} رو با الگو می‌نویسیم:

$$a + 11d = 30 \quad (1)$$

حالا S_{23} رو طبق فرمول مجموع بارش می‌کنیم:

$$S_n = \frac{n}{2}[2a_1 + (n-1)d] \quad \text{یادت هست که:}$$

$$S_{23} = \frac{23}{2}[2a + 22d]$$

$$(1) \Rightarrow S_{23} = \frac{23}{2} \times 2 \times 30 = 690$$

اگر می‌خواهی راه میانبر و تستی از این سوال ببینی به تست شماره ۱۴ مراجعه کن!

۱۱- گزینه «۴»

دشوار

می‌دونیم که در الگوی درجه دوم، فاصله بین جملات، تشکیل یک دنباله حسابی می‌دهند. پس اول دنباله حسابی و قدرنسبت اون رو پیدا کنیم:

$$\begin{array}{ccccccc} 5 & , & 8 & , & 13 & , & 20 & , & 29 & , & \dots \\ & & +3 & & +5 & & +7 & & +9 & & \\ & & +2 & & +2 & & +2 & & & & \end{array}$$

می‌بینیم که $d=2$ به دست می‌یاد.

در الگوی درجه دوم $t_n = an^2 + bn + c$ ، عدد a همون نصف d هست پس:

$$a = \frac{2}{2} = 1 \Rightarrow a = 1$$

C . همون جمله صفرم هست و چون ۵ با عدد ۳ جمع شده تا به ۸ رسیده از

سمت چپ باید یکی کم کنیم تا به a_0 برسیم پس $c = 4$, $c = 5 - 1 = 4$ و

$$\text{همچنین } b = a_1 - (a + c) \text{ پس } b = 5 - (4 + 1) = 0 \text{ در نتیجه } S_n = \frac{5}{2}n^2 + \frac{1}{2}n$$

$$\text{مجموع } 10 \text{ جمله اول رو خواسته پس } S_{10} \text{ رو می‌خواد } S_{10} = \frac{5}{2}(100) + \frac{1}{2}(10) = 255$$

۱۲- گزینه «۴»

متوسط

اطلاعات مسئله رو باز کنیم ببینیم به چی می‌رسیم!

$$S_8 = 15$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}[2a_1 + 7d] = 15 \Rightarrow \frac{1}{2} \times 7[a_1 + 2d] = 3 \Rightarrow a_1 + 2d = 3$$

گفته جملات سوم و اول قرینه هم هستند پس میشه گفت:

$$a_3 = -a_1$$

$$\Rightarrow a_3 + a_1 = 0 \Rightarrow a_1 + 2d + a_1 = 0 \Rightarrow 2a_1 + 2d = 0 \Rightarrow a_1 + d = 0$$

دو معادله داریم که در یک دستگاه حل می‌کنیم:

$$\begin{cases} a_1 + 2d = 3 \\ a_1 + d = 0 \end{cases}$$

$$d = 3 \xrightarrow{\text{جایگزینی در دومی}} a_1 + 3 = 0 \Rightarrow a_1 = -3$$

$$a_{10} = a_1 + 9d = -3 + 9(3) = 24$$

۱۳- گزینه «۲»

متوسط

معنی جمله اول اینه که: $S_{10} = S_{11} - 5$

به عبارتی میشه گفت: $S_{11} - S_{10} = 5$

خوبه بدونیم که در دنباله حسابی: $S_n - S_{n-1} = a_n$

پس داریم: $a_{11} = 5$

$$S_{21} = \frac{21}{2}[2a + 20d] \quad \text{بریم سراغ خواسته مسأله:}$$

$$\Rightarrow S_{21} = 21(a_{11}) = 21(5) = 105$$

۱۴- گزینه «۱»

دشوار

حواستون باشه! در مجموع دنباله‌های حسابی اگر تعداد جملات فرد باشه (که

جمله وسط داشته باشه) اگر جمله وسط را در تعداد جملات ضرب کنیم

مجموع جملات به دست می‌آید یعنی:

مجموع جملات = (جمله وسط) (تعداد)

پس در این سوال که تعداد جملات $(2n+1)$ است:

$$(13)(2n+1) = 143 \Rightarrow 2n+1 = 11 \Rightarrow 2n = 10 \Rightarrow n = 5$$

۱۵- گزینه «۱»

دشوار

توجه: این هم از همون مدل سوالاتی هست که گفتیم اطلاعات داده شده و

خواسته شده سوال به هم مربوط هست و نیازی به محاسبات کامل نیست.

ضرب ۹ جمله اول رو باز کنیم:

$$a_1 a_2 a_3 \dots a_9 = 8 \Rightarrow a_1 \cdot a_1 r \cdot a_1 r^2 \dots a_1 r^8 = 8$$

$$\Rightarrow a_1^9 \times r^{1+2+\dots+8} = 8 \Rightarrow a_1^9 \times r^{36} = 2^3$$

$$\xrightarrow{\text{فرجه ۳ بگیریم}} a_1^3 r^{12} = 2 \xrightarrow{\text{فرجه ۲}} a_1 r^4 = \sqrt[3]{2}$$

حالا حاصل ضرب خواسته شده رو باز کنیم:

$$a_2 a_4 a_6 a_8 = a_1 r \cdot a_1 r^3 \cdot a_1 r^5 \cdot a_1 r^7$$

$$= a_1^4 \times r^{16} = (a_1 r^4)^4 = (\sqrt[3]{2})^4 = \sqrt[3]{2^4} = \sqrt[3]{2^3 \times 2} = 2\sqrt[3]{2}$$

دشوار

۱۸- گزینه «۲»

برای پیدا کردن الگوی مناسب برای این دنباله دقت کنیم که $10 - 1 = 9$.

$100 - 1 = 99$ و $1000 - 1 = 999$ و ... به همین ترتیب تا آخرین عدد که

$1000000 - 1 = 999999$ هست. پس داریم:

$$10 - 1 + 10^2 - 1 + 10^3 - 1 + \dots + 10^{20} - 1$$

$$= (10 + 10^2 + 10^3 + \dots + 10^{20}) - 20$$

$$= \frac{10(1 - 10^{21})}{1 - 10} - 20 = \frac{10 - 10^{21} + 180}{-9} = \frac{10^{21} - 190}{9}$$

متوسط

۱۹- گزینه «۱»

$$\begin{matrix} 1, & \dots, & \dots, & \dots, & \dots, & \dots, & 64 \\ \downarrow & & & & & & \downarrow \\ a_1 & & & & & & a_7 \end{matrix}$$

اگر پنج واسطه حسابی بگذاریم، جمله وسط یعنی a_4 رو می‌خواهیم:

$$d = \frac{64 - 1}{7 - 1} = \frac{63}{6} = 10.5 \Rightarrow a_4 = 1 + (3)(10.5) = 32.5 \Rightarrow A$$

که البته چون میانگین حسابی بین ۱ و ۶۴ میشه، پس می‌تونیم بگیم:

$$a_4 = \frac{1 + 64}{2} = 32.5$$

به همین صورت برای B داریم:

$$r^{7-1} = \frac{64}{1} \Rightarrow r^6 = 64 \Rightarrow r = 2$$

$$a_4 = 1 \times (2)^3 = 8 \Rightarrow B$$

که در گزینه ۱ درست اومده. $A + B = 40.5$

اما گزینه ۲ نادرست هست: $A - B = 24.5$

و گزینه‌های ۳ و ۴ هم واضحه که نادرست هستند.

متوسط

۲۰- گزینه «۴»

باید جملات رو از دنباله حسابی برداشت و برد درون دنباله‌ی هندسی گذاشت:

$$\begin{matrix} a_4 & , & a_6 & , & a_{12} \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ a_1 + 3d & a_1 + 5d & a_1 + 11d \end{matrix}$$

دنباله هندسی:

از واسطه هندسی کمک می‌گیریم و داریم:

$$(a_1 + 5d)^2 = (a_1 + 3d)(a_1 + 11d)$$

$$a_1^2 + 10a_1d + 25d^2 = a_1^2 + 14a_1d + 33d^2$$

$$4a_1d + 8d^2 = 0 \Rightarrow 4d(a_1 + 2d) = 0 \Rightarrow d = 0 \text{ یا } a_1 + 2d = 0 \Rightarrow a_1 = -2d$$

اگر a_1 رو در جملات جای‌گذاری کنیم، داریم:

$$d, 3d, 9d$$

که از مقایسه با استفاده از فرمول $r = \frac{a_2}{a_1}$ ، مقدار قدرنسبت دنباله هندسی

برابر ۳ به دست می‌آید.

حواستون باشه‌ها راه حل دیگر این سوال در پاسخ‌نامه سوالات تشریحی شماره

سوال ۹ آمده است.

دشوار

۱۶- گزینه «۲»

اول فرض سوال رو به زبان ریاضی بنویسیم و با فرمول مجموع بازش کنیم:

$$S_n = \frac{5}{4} S_f \Rightarrow \frac{5(1-r^n)}{1-r} = \frac{5}{4} \times \frac{5(1-r^f)}{1-r}$$

می‌دونی که $(1-r)$ رو می‌تونیم از دوطرف ساده کنیم چون می‌دونیم صفر نیست.

اگر $r = 1$ آن وقت دنباله، تبدیل به دنباله ثابت میشه و $S_n = \frac{5}{4} S_f$ برقرار نیست.

$$1 - r^n = \frac{5}{4} (1 - r^f)$$

حالا با کمک اتحاد مزدوج، سمت چپ رو تجزیه می‌کنیم:

$$(1-r^f)(1+r^f) = \frac{5}{4} (1-r^f)$$

باز هم ساده کردن $1 - r^f$ به خاطر صفر نبودن هست چون با همون استدلال

بالا، اگر $1 - r^f = 0$ اونوقت $r^f = 1$ ، $r = \pm 1$ ، میشه که ممکن نیست چون

$$S_n = \frac{5}{4} S_f \text{ اتفاق نمی‌افته!}$$

$$1 + r^f = \frac{5}{4} \Rightarrow r^f = \frac{1}{4} \Rightarrow r^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow r = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$$

حالا بریم سراغ خواسته مسأله:

$$\frac{a_7}{a_1} = \frac{5^6 r^6}{5^1} = r^6 = (r^2)^3 = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$$

دشوار

۱۷- گزینه «۱»

صورت کسر دقیقاً مجموع ۱۲ جمله از دنباله $1, t, t^2, \dots, t^{11}, \dots$ هست پس

میشه S_{12} با قدرنسبت t و جمله اول ۱.

مخرج کسر هم مجموع چهار جمله از دنباله $1, t^3, t^6, t^9, \dots$ هست که

میشه S_4 با قدرنسبت t^3 و جمله اول ۱، پس داریم:

یادآوری اتحاد جاق و لاغر:

$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$$

$$\frac{1(1-r^{12})}{1-t} = \frac{1-t^3}{1-t} \xrightarrow{\text{جاق و لاغر}} 1+t+t^2 = 1 + \frac{\sqrt{5}-1}{2} + \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^2$$

$$= \frac{2 + \sqrt{5} - 1}{2} + \frac{5 - 2\sqrt{5} + 1 - 2\sqrt{5}}{4} = \frac{1 + \sqrt{5} + 3 - \sqrt{5}}{2} = 2$$

دشوار

۲۴- گزینه «ا»

اول از همه حواستون باشه که گفته اعداد حسابی $\mathbb{N}$ ، یعنی جملات به صورت:

$$\begin{aligned} a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 + a_8 + a_9 &= 19 \\ 1 + 4 + 1 + a + 2 + 2 + 1 + a + 4 + 0 + 2 + a + 8 &= 19 \\ 3a + 25 = 19 \Rightarrow a = -2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_2 + a_5 + a_8 + \dots + a_{29} &= \left(\left[\frac{2}{3}\right] + a\right) + \left(\left[\frac{5}{3}\right] + a\right) + \dots + \left(\left[\frac{29}{3}\right] + a\right) \\ (1-2) + (1-2) + (1-1) + (1-1) + (1-1) + (1-1) + (1-1) &= -2 \\ + (1-1) + (1-1) + (1-1) &= -2 \end{aligned}$$

حواستون باشه! شاید علامت [] براکت رو هنوز بلد نباشید پس بدونید که []

بزرگترین عدد درست سمت چپ رو خروجی می‌ده مثلاً $[2/3] = 2$.

دشوار

۲۵- گزینه «ب»

اول از همه حواستون به قدرنسبت طبیعی و بزرگتر از یک باشد که این یعنی

جملات دنباله‌ها افزایشی هستند. نکته دوم اینجاست که دنباله ۵ جمله داره

پس بزرگترین جمله t_5 هست نکته سوم این که چون $t_5 = t_4 q$ هست

قدرنسبت قطعاً از ۴ بزرگتر نیست چون $q^4 = 4^4$ می‌شه که بزرگتر از

مجموعه داده شده است پس:

$$q=2 \Rightarrow \begin{cases} t_1=1 \xrightarrow{\text{دنباله}} 1, 2, 4, 8, 16 \\ t_1=2 \xrightarrow{\text{دنباله}} 2, 4, 8, 16, 32 \\ t_1=3 \xrightarrow{\text{دنباله}} 3, 6, 12, 24, 48 \\ t_1=4 \xrightarrow{\text{دنباله}} 4, 8, 16, 32, 64 \\ t_1=5 \xrightarrow{\text{دنباله}} 5, 10, 20, 40, 80 \\ t_1=6 \xrightarrow{\text{دنباله}} 6, 12, 24, 48, 96 \end{cases}$$

پس به طور کلی ۷ دنباله با این شرط می‌توان یافت:

$$q=3 \Rightarrow t_1=1 \xrightarrow{\text{دنباله}} 1, 3, 9, 27, 81$$

دشوار

۲۶- گزینه «ب»

اگر به دسته‌ها به صورت: $\{1\}$ دسته اول

$\{2, 3\}$ دسته دوم

$\{4, 5, 6\}$ دسته سوم

$\{7, 8, 9, 10, 11, 12\}$ دسته چهارم

با نگاه کردن جملات آخر هر دسته متوجه دنباله $3, 6, 12, 24, \dots$ می‌شویم

که با استفاده از جمله عمومی (به جز دسته اول) $a_n = 3 \times 2^{n-2}$ پس جمله

آخر دسته سیزدهم $a_{13} = 3 \times 2^{11}$ خواهد بود. همچنین اگر جمله آخر دسته

دوازدهم را حساب کنیم عدد بعدی آن جمله اول دسته سیزدهم را خواهد داد

پس $a_{12} = 3 \times 2^{10}$. حالا دسته سیزدهم $\{3 \times 2^{10} + 1, \dots, 3 \times 2^{11}\}$

حواستون باشه! چون دنباله حسابی است میانگین تمام اعضا با میانگین عضو

اول و آخر برابر خواهد بود پس:

$$\frac{(3 \times 1024 + 1) + (3 \times 2048)}{2} = \frac{3073 + 6144}{2} = 4608.5$$

دشوار

۲۱- گزینه «ب»

اگر جملات این دنباله را به صورت: $\{1\}$ دسته اول

$\{2, 3\}$ دسته دوم

$\{4, 5, 6\}$ دسته سوم

$\{7, 8, 9, 10\}$ دسته چهارم

در نظر بگیریم متوجه می‌شویم که جملات انتهایی هر دسته دنباله مثلثی است و

از رابطه‌ای که در دهم یاد گرفتیم می‌دانیم دنباله‌های مثلثی از رابطه

$$\frac{n(n+1)}{2} \text{ به دست می‌آید پس جمله آخر دسته بیستم از رابطه } \frac{20(21)}{2} \text{ به}$$

دست می‌آید پس دسته بیستم $\{191, \dots, 210\}$ است.

$$S_{20} = \frac{20}{2} [191 + 210] = 4010$$

آسان

۲۲- گزینه «ب»

اولین عدد دو رقمی مضرب ۷ و آخرین عدد دو رقمی مضرب ۷ را پیدا کنید.

$$14, 21, \dots, 98$$

حالا تعداد جملات را حساب کنید.

$$n = \frac{98 - 14}{7} + 1 = 13$$

و در آخر S_{13} را حساب می‌کنیم:

$$S_{13} = \frac{13}{2} [2(14) + (12)(7)] \Rightarrow S_{13} = \frac{13}{2} [28 + 84] = 728$$

متوسط

۲۳- گزینه «ب»

اگر دسته‌ها را به صورت: $\{1\}$

$\{2, 3, 4\}$

$\{5, 6, 7, 8, 9\}$

در نظر بگیریم متوجه می‌شویم جمله آخر هر دسته مربع کامل شماره آن دسته

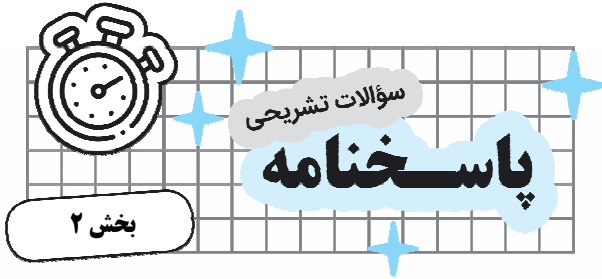
یعنی n^2 است پس دسته نهم به صورت $\{8^2 + 1, \dots, 9^2\}$.

حواستون به این نکته باشه که جمله اول دسته نهم، بدون بیشتر از جمله آخر

دسته هشتم است.

حالا واسطه حسابی که از رابطه $b = \frac{a+c}{2}$ حساب می‌شه را محاسبه می‌کنیم.

$$b = \frac{8^2 + 1 + 9^2}{2} = \frac{64 + 1 + 81}{2} = 73$$



آسان

۱-

ما برای معادلات درجه ۲ در سال دهم یاد گرفتیم که ریشه‌های آن را از راه تجزیه، ریشه‌گیری، مربع کامل و فرمول کلی (Δ) و یا روش تستی می‌توان پیدا کرد. در سال یازدهم روش t نیز به این روش‌ها اضافه می‌شود.

$$T) \quad 3x^2 - 5x + 2 = 0 \Rightarrow (3x - 2)(x - 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{2}{3} \\ x = 1 \end{cases}$$

$$B) \quad 2x^3 + x^2 + 3x = 0 \xrightarrow{\text{فاکتورگیری}} x(2x^2 + x + 3) = 0$$

$$\Rightarrow x_1 = 0, 2x^2 + x + 3 = 0 \Rightarrow \Delta < 0 \text{ ریشه ندارد}$$

$$P) \quad x^4 - 3x^2 - 4 = 0 \xrightarrow{x^2 = t} \text{هرگاه عبارتی تکراری در معادلات یافتید آن را } t \text{ بگیرید}$$

$$t^2 - 3t - 4 = 0 \xrightarrow{\text{چون } a+c=b \text{ پس}} t_1 = -1, t_2 = 4$$

$$x_1 = -1, x_2 = -\frac{c}{a}$$

$$\xrightarrow{x^2 = t} x^2 = -1 \text{ ریشه ندارد} \quad x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2$$

$$T) \quad (4 - x^2)^2 - (4 - x^2) - 12 = 0 \xrightarrow{4 - x^2 = t} t^2 - t - 12 = 0$$

$$\xrightarrow{\text{جمله مشترک}} (t - 4)(t + 3) = 0$$

$$t_1 = 4, t_2 = -3 \xrightarrow{4 - x^2 = t} \begin{cases} 4 - x^2 = 4 \Rightarrow x^2 = 0 \Rightarrow x = 0 \\ 4 - x^2 = -3 \Rightarrow x^2 = 7 \Rightarrow x = \pm\sqrt{7} \end{cases}$$

$$T) \quad \left(\frac{x^2}{3} - 2\right)^2 - 7\left(\frac{x^2}{3} - 2\right) + 6 = 0 \xrightarrow{\frac{x^2}{3} - 2 = t}$$

$$t^2 - 7t + 6 = 0 \xrightarrow{\text{چون جمع ضرایب صفر است ریشه‌ها یکی ۱ و دیگری } \frac{c}{a} \text{ است}} t_1 = 1, t_2 = 6$$

$$\xrightarrow{\frac{x^2}{3} - 2 = t} \begin{cases} \frac{x^2}{3} - 2 = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{3} = 3 \Rightarrow x^2 = 9 \Rightarrow x = \pm 3 \\ \frac{x^2}{3} - 2 = 6 \Rightarrow \frac{x^2}{3} = 8 \Rightarrow x^2 = 24 \Rightarrow x = \pm 2\sqrt{6} \end{cases}$$

دشواری

۲۷- گزینه «۲»

تیکه اول سوال راجع به سه جمله متوالی یک دنباله هندسی صحبت می‌کند پس a, aq, aq^2 داریم بعدش این جملات به ترتیب در ۱۶، ۸، ۴ ضرب می‌شوند و جملات دنباله حسابی به صورت $4a, 8aq, 16aq^2$ هستند. و در دنباله‌های حسابی از واسطه حسابی می‌دانیم $a + c = 2b$ پس:

$$2(8aq) = 4a + 16aq^2 \Rightarrow 8aq = 4a(1 + 4q^2)$$

$$4q = 1 + 4q^2 \Rightarrow 0 = 4q^2 - 4q + 1 \Rightarrow 0 = (2q - 1)^2 \Rightarrow q = \frac{1}{2}$$

و در آخر ارتباط بین جملات حسابی و هندسی را توضیح داده:

$$a^2 + (aq)^2 + (aq^2)^2 = 4a + 8aq + 16aq^2 \xrightarrow{q = \frac{1}{2}} \frac{21}{16}a^2 = 12a \Rightarrow a = \frac{64}{7}$$

آسان

۲۸- گزینه «۴»

خب این سوال منبع انرژی دهنده کنکور ۱۴۰۱ بوده دیگه!

$$d = \frac{a_1 - a_0}{1 - 0.5} = \frac{5 - 8}{0.5} = -\frac{6}{0.5}$$

$$a_0 = a_1 + 4d$$

$$8 = a_1 + 4\left(-\frac{6}{0.5}\right) \Rightarrow 8 + \frac{12}{0.5} = a_1 \Rightarrow \frac{52}{0.5} = a_1$$

حالا با بسط جمله شانزدهم داریم:

$$a_{16} = a_1 + 15d = \frac{52}{0.5} + 15\left(-\frac{6}{0.5}\right) = \frac{52 - 45}{0.5} = \frac{7}{0.5} = 14$$

دشواری

۲۹- گزینه «۴»

حواستون باشه! الگو خطی $t_n = an + b$ و دنباله حسابی $t_n = t_1 + (n-1)d$ کافیه قدم به قدم صورت سوال را معنی کنیم. جمله‌ی چهارم دنباله حسابی با جمله دوم الگو خطی برابر هستند یعنی:

$$t_1 + 3d = 2a + b$$

همچنین جمله هشتم دنباله حسابی با جمله هفتم الگو خطی برابر هستند یعنی:

$$t_1 + 7d = 7a + b$$

حالا گفته که جمله دهم الگو خطی صفر است یعنی:

$$10a + b = 0 \Rightarrow b = -10a \quad (*)$$

با جای گذاری * در اطلاعات بالا و حل دستگاه خواهیم داشت:

$$\begin{cases} -t_1 - 3d = 8a \\ t_1 + 7d = -3a \end{cases}$$

$$4d = 5a \Rightarrow d = \frac{5}{4}a$$

و در آخر نسبت جمله پانزدهم به قدرنسبت:

$$\frac{15a + b}{d} = \frac{15a - 10a}{d} = \frac{5a}{\frac{5}{4}a} = 4$$

متوسط

۳۰- گزینه «۲»

تنها دنباله‌ای که هم حسابی و هم هندسی باشند دنباله ثابت است که در

$$\text{آن } r + d = 1 \text{ هست پس } d = 0, r = 1$$

متوسط

-۵

حواستان باشه! در کتاب درسی روابطی که برای s و p بیان شده تنها

$$s = \alpha + \beta = \frac{b}{a}, \quad p = \alpha\beta = \frac{c}{a} \quad |\alpha - \beta| = \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}$$

روابط به دست آمده در قسمت آ و ب و ک و ه را به خاطر بسپارید.

$$\text{در معادله داده شده } 2x^2 - 6x + 3 = 0 \Rightarrow s = 3, p = \frac{3}{2} \text{ است پس:}$$

$$T) (\alpha + \beta)^2 = \alpha^2 + \beta^2 + 2\alpha\beta \Rightarrow s^2 = \alpha^2 + \beta^2 + 2p \Rightarrow s^2 - 2p = \alpha^2 + \beta^2$$

$$\alpha^2 + \beta^2 = (3)^2 - 2\left(\frac{3}{2}\right) = 9 - 3 = 6$$

$$B) (\alpha + \beta)^3 = \alpha^3 + \beta^3 + 3\alpha\beta(\alpha + \beta) \Rightarrow s^3 = \alpha^3 + \beta^3 + 3ps$$

$$\Rightarrow s^3 - 3ps = \alpha^3 + \beta^3$$

$$\alpha^3 + \beta^3 = (3)^3 - 3\left(\frac{3}{2}\right) \times 3 = 27 - \frac{27}{2} = \frac{27}{2}$$

$$P) (\alpha^2 + \beta^2)^2 = \alpha^4 + \beta^4 + 2(\alpha\beta)^2 \Rightarrow (s^2 - 2p)^2 = \alpha^4 + \beta^4 + 2p^2$$

$$\Rightarrow (s^2 - 2p)^2 = \alpha^4 + \beta^4 + 2p^2 \quad (3)^2 - 2\left(\frac{3}{2}\right)^2 = (9 - 3)^2 = 36$$

$$\left. \begin{aligned} \alpha^3 + \beta^3 &= s^3 - 3ps = \frac{27}{2} \\ \alpha^2 + \beta^2 &= s^2 - 2p = 6 \end{aligned} \right\} \xrightarrow{\text{در هم ضرب شوند}}$$

$$(\alpha^3 + \beta^3)(\alpha^2 + \beta^2) = \frac{27}{2} \times 6 \Rightarrow \alpha^5 + \alpha^2\beta^2 + \alpha^4\beta + \beta^5 + \beta^2\alpha^3 + \alpha\beta^4 = 81$$

$$\Rightarrow \alpha^5 + \alpha^2\beta^2(\alpha + \beta) + \beta^5 = 81 \Rightarrow \alpha^5 + \beta^5 = 81 - \alpha^2\beta^2(\alpha + \beta)$$

$$\alpha^5 + \beta^5 = 81 - p^2(s) = 81 - \left[\frac{9}{4} \times 3\right] = \frac{297}{4}$$

$$T) (\alpha^3 + \beta^3)^2 = \alpha^6 + \beta^6 + 2(\alpha\beta)^3$$

$$(s^3 - 3ps)^2 - 2p^3 = \alpha^6 + \beta^6 \Rightarrow \left(\frac{27}{2}\right)^2 - 2\left(\frac{3}{2}\right)^3 = \alpha^6 + \beta^6$$

$$= \frac{729}{4} - \frac{27}{4} = \alpha^6 + \beta^6 \Rightarrow 175/5 = \alpha^6 + \beta^6$$

$$J) \sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta} = A \xrightarrow{\text{طرفین به توان ۲}} \alpha + \beta + 2\sqrt{\alpha\beta} = A^2 \Rightarrow s + 2\sqrt{p} = A^2$$

$$\sqrt{s + 2\sqrt{p}} = A \Rightarrow \sqrt{6 + 2\sqrt{\frac{3}{2}}}$$

$$J) \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = \frac{\alpha + \beta}{\alpha\beta} = \frac{s}{p} = \frac{1}{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}$$

$$H) \beta\sqrt{\beta} + \alpha\sqrt{\alpha} = A \xrightarrow{\text{توان ۲}} (\beta\sqrt{\beta} + \alpha\sqrt{\alpha})^2 = A^2$$

$$\Rightarrow \beta^3 + \alpha^3 + 2\alpha\beta\sqrt{\alpha\beta} = A^2 \Rightarrow s^3 - 3ps + 2p\sqrt{p} = A^2$$

$$\sqrt{3^3 - 3\left(\frac{3}{2}\right) + 2\left(\frac{3}{2}\right)\sqrt{\frac{3}{2}}} = \sqrt{\frac{27}{2} + 3\sqrt{\frac{3}{2}}}$$

$$G) \frac{\sqrt{\alpha}}{\beta} + \frac{\sqrt{\beta}}{\alpha} = \frac{\alpha\sqrt{\alpha} + \beta\sqrt{\beta}}{\alpha\beta} \xrightarrow{\text{قسمت ۲}} \frac{\sqrt{\frac{27}{2} + 3\sqrt{\frac{3}{2}}}}{\frac{3}{2}} = \frac{\sqrt{\frac{27}{2} + 3\sqrt{\frac{3}{2}}}}{\frac{3}{2}}$$

$$D) \alpha\beta^4 + \beta\alpha^4 = \alpha\beta(\beta^3 + \alpha^3) = p(s^3 - 3ps) = \frac{3}{2}(27 - 3\left(\frac{9}{2}\right))$$

$$= \frac{3}{2}(27 - \frac{27}{2}) \Rightarrow \frac{3}{2}\left(\frac{27}{2}\right) = \frac{81}{4}$$

آسان

-۶

حواستان باشه! روش دیگری که برای یافتن صفرهای تابع یا ریشه‌های آن استفاده می‌کنند زمانی که ۱ ریشه عبارت را داشته باشند، تقسیم چکشی است.

یعنی $f(x)$ بر $x - a$ بخش‌پذیر است اگر a یک ریشه $f(x)$ باشد.

چون یکی از ریشه‌های این تابع (-2) است پس عبارت بر $x + 2$ بخش‌پذیر است. یعنی:

$$f(-2) = 0$$

$$(-2)^3 + k(-2)^2 - (-2) - 2 = 0 \Rightarrow -8 + 4k + 2 - 2 = 0$$

$$\Rightarrow 4k = 8 \Rightarrow k = 2$$

پس $f(x) = x^3 + 2x^2 - x - 2$ است. حال با تقسیم چکشی عبارت بر $x + 2$ تجزیه آن را داریم:

$$\begin{array}{r} x^3 + 2x^2 - x - 2 \quad | \quad x + 2 \\ \underline{x^3 + 2x^2} \\ -x - 2 \\ \underline{-x - 2} \\ 0 \end{array}$$

تجزیه عبارت $(x^3 + 2x^2 - x - 2)$ پس $(x + 2)(x - 1)(x + 1)$ و ریشه‌ها به صورت:

$$x_1 = -2, x_2 = 1, x_3 = -1$$

آسان

-۳

حواستان باشه! برای نوشتن معادله درجه دو زمانی که ریشه‌های آن را دارید

از رابطه $x^2 - sx + p = 0$ استفاده می‌کنید.

$$p = \alpha\beta = \frac{c}{a}, \quad s = \alpha + \beta = -\frac{b}{a}$$

$$s = 2 + \sqrt{3} + 2 - \sqrt{3} = 4$$

$$p = (2 + \sqrt{3})(2 - \sqrt{3}) = 4 - 3 = 1$$

پس معادله درجه ۲ به صورت $x^2 - 4x + 1 = 0$ است.

آسان

-۴

مستطیل روبه‌رو را در نظر بگیرید با توجه به اطلاعات مستطیل اگر α, β ریشه‌های معادله درجه ۲ در نظر بگیریم خواهیم داشت:

α

β

$$\text{محیط: } 2(\alpha + \beta) = 11 \Rightarrow \alpha + \beta = \frac{11}{2} = s$$

$$\text{مساحت } \alpha\beta = 6 = p$$

$$x^2 - \frac{11}{2}x + 6 = 0 \Rightarrow 2x^2 - 11x + 12 = 0$$

$$\Rightarrow \Delta = b^2 - 4ac = (-11)^2 - 4(24) = 121 - 96 = 25$$

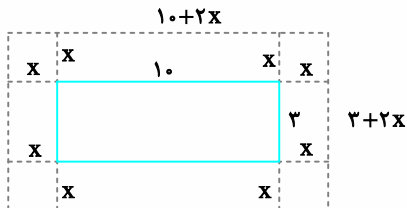
چون دلتا مثبت است پس این معادله ۲ ریشه دارد.

$$\text{ریشه‌ها: } \frac{11 \pm 5}{2(2)} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{16}{4} = 4 \\ \beta = \frac{6}{4} = \frac{3}{2} \end{cases}$$

متوسط

-۹

مساحت آبراه از تفاضل مساحت‌های دو مستطیل در شکل مقابل به دست می‌آید:



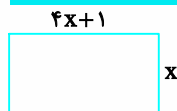
$$(10+2x)(3+2x) - 10 \times 3 = 14$$

$$4x^2 + 26x + 30 - 30 = 14 \Rightarrow 4x^2 + 26x - 14 = 0$$

$$(4x-2)(x+7) = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2}, x = -7 \text{ غ ق}$$

آسان

-۱۰



$$S = \text{مساحت}$$

$$S \text{ دیوار} = (S \text{ یک کاشی}) \times (\text{تعداد کاشی})$$

$$2000 \times S = 6000 \text{ cm}^2 \Rightarrow S = 3 \text{ cm}^2$$

$$S = 3 \text{ cm}^2 \text{ یک کاشی}$$

$$S = (4x+1)(x)$$

$$3 = 4x^2 + x \Rightarrow 0 = 4x^2 + x - 3$$

$$x_1 = -1, x_2 = \frac{3}{4} \text{ ق غ ق}$$

$$4x+1 = 4\left(\frac{3}{4}\right) + 1 = 4 \text{ طول کاشی}$$

آسان

-۱۱

حواستان باشه! ۱- ریشه مضاعف یعنی $\Delta = 0$

$$\Delta = 0 \Rightarrow b^2 - 4ac = 0 \Rightarrow 16 - 4(m^2 - 3m) = 0 \Rightarrow 16 - 4m^2 + 12m = 0$$

$$4m^2 - 12m - 16 = 0 \Rightarrow 4(m^2 - 3m - 4) = 0 \Rightarrow m = -1, m = 4$$

$$\text{ریشه مثبت } m = -1 \Rightarrow -x^2 + 4x - 4 = 0 \Rightarrow x = \frac{-4}{2(-1)} = 2$$

$$\text{ریشه منفی } m = 4 \Rightarrow +4x^2 + 4x + 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{-4}{2(4)} = -\frac{1}{2}$$

پس $m = -1$ قابل قبول است چون ریشه مثبت تولید کرده است.

آسان

-۲

حواستان باشه! رأس سهمی زمانی که دهنه سهمی به سمت بالاست ($a > 0$)

مینیمم سهمی محسوب می‌شود ($\min$) و رأس سهمی زمانی که دهنه سهمی به سمت پایین است ($a < 0$) ماکسیمم سهمی است. ($\max$)

$$f(x) = -2x^2 + 8x - 5 \Rightarrow \begin{cases} x_s = -\frac{b}{2a} = \frac{-8}{2(-2)} = \frac{-8}{-4} = 2 \\ y_s = -\frac{\Delta}{4a} \text{ یا } x_s \text{ جایگذاری} \end{cases}$$

$$y_s = -2(2)^2 + 8(2) - 5 = -8 + 16 - 5 = 3$$

چون دهنه سهمی به سمت پایین است ماکسیمم است.

$$g(x) = 3x^2 + 6x + 5 \Rightarrow \begin{cases} x_s = \frac{-6}{6} = -1 \\ y_s = 3(-1)^2 + 6(-1) + 5 = 3 - 6 + 5 = 2 \end{cases}$$

چون دهنه سهمی به سمت بالا است مینیمم است.

آسان

-۷

حواستان باشه! برای نوشتن معادله سهمی زمانی که دو ریشه داده شده باشد

از رابطه $y = a(x - \alpha)(x - \beta)$ و زمانی که رأس سهمی داده شده باشد از

رابطه $y = a(x - x_s)^2 + y_s$ استفاده می‌کنیم.

(آ) در این سهمی محور تقارن داده شده است و از سال دهم می‌دانیم که فاصله

ریشه‌ها تا محور تقارن سهمی یکسان است پس ریشه دیگر این سهمی $x = 4$ است.

$$y = a(x - 2)(x - 4) \Rightarrow 4 = a(0 - 2)(0 - 4) \Rightarrow 4 = 8a$$

$$4 = 8a \Rightarrow \frac{1}{2} = a$$

$$y = \frac{1}{2}(x^2 - 6x + 8) = \frac{1}{2}x^2 - 3x + 4$$

(ب) در این شکل رأس سهمی داده شده است پس:

$$y = a(x - 2)^2 + 1 \Rightarrow 0 = a(1 - 2)^2 + 1 \Rightarrow 0 = a + 1 \Rightarrow -1 = a$$

$$y = -1(x - 2)^2 + 1 \Rightarrow y = -(x^2 - 4x + 4) + 1 = -x^2 + 4x - 3$$

آسان

-۸

۱- علامت a : دهنه سهمی (بالا a مثبت، پایین a منفی)

۲- علامت b : روش کتاب (از روی x_s تعیین می‌شود)

روش دیگر (شیب محل برخورد با محور y)

۳- علامت c : محل برخورد با محور y ها

۴- علامت Δ : تعداد محل برخورد با محور x ها

حواستان باشه!

در تابع درجه ۲

$$y = ax^2 + bx + c$$

در این سهمی چون دهنه سهمی به سمت بالاست پس $a > 0$ است. چون x_s

$$\text{در قسمت منفی هاست پس } (-) = \frac{-(b)}{2(+)} \leftarrow x_s = \frac{-b}{2a}$$

چون محل برخورد با محور y ها مثبت است پس $c > 0$ و در آخر چون ۲ ریشه

دارد $\Delta > 0$.

-۱۲

آسان

حواستان باشهها! ۱- معادله درجه دوم زمانی دو ریشه حقیقی متمایز دارد که

$$\Delta > 0$$

۲- در معادله درجه دوم ضریب x^2 نباید صفر باشد.

$$\Delta > 0 \Rightarrow b^2 - 4ac > 0 \Rightarrow 36 - 4(2m^2 - 5m + 2) > 0$$

$$9 - 2m^2 + 5m - 2 > 0 \Rightarrow -2m^2 + 5m + 7 > 0$$

$$m = -1, m = \frac{7}{2}$$

x	$-\infty$	-1	$\frac{7}{2}$	$+\infty$
		$-$	$+$	$-$

$(-1, \frac{7}{2})$

$$a \neq 0 \Rightarrow m \neq \frac{1}{2}$$

با اشتراک دو شرط خواهیم داشت:

$$(-1, \frac{7}{2}) - \{\frac{1}{2}\}$$

-۱۳

دشوار

حواستان باشهها! معادله درجه ۴، زمانی ۴ ریشه حقیقی متمایز دارد که

$$\frac{x^2=t}{x^2=t} \Rightarrow t^2 - (m+2)t + m + 5 = 0 \quad \Delta > 0 \text{ و } P > 0, S > 0$$

$$1) S > 0 \Rightarrow \frac{m+2}{1} > 0 \Rightarrow m > -2$$

$$2) P > 0 \Rightarrow \frac{m+5}{1} > 0 \Rightarrow m > -5$$

$$3) \Delta > 0 \Rightarrow b^2 - 4ac > 0 \Rightarrow (m+2)^2 - 4(m+5) > 0$$

$$\Rightarrow m^2 + 4m + 4 - 4m - 20 > 0$$

$$m^2 - 16 > 0 \Rightarrow m > 4 \text{ یا } m < -4$$

از اشتراک این سه شرط خواهیم داشت: $m > 4$

-۱۴

متوسط

حواستان باشهها! در معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ مجموع مربعات ریشهها:

$$\alpha^2 + \beta^2 = s^2 - 2p$$

و در آخر همیشه شرط $\Delta > 0$ چک شود.

$$2x^2 + (m-1)x - 1 = 0$$

$$\alpha^2 + \beta^2 = s^2 - 2p = \left(\frac{-(m-1)}{2}\right)^2 - 2\left(\frac{-1}{2}\right) = \frac{13}{4}$$

$$\frac{m^2 - 2m + 1}{4} + 1 = \frac{13}{4} \Rightarrow \frac{m^2 - 2m + 1}{4} = \frac{9}{4}$$

$$\Rightarrow m^2 - 2m + 1 = 9 \Rightarrow m^2 - 2m - 8 = 0$$

$$(m-4)(m+2) = 0 \Rightarrow m = 4, m = -2$$

$$\text{اگر } m = 4 \Rightarrow 2x^2 + 3x - 1 = 0 \Rightarrow \Delta = 9 - 4(-2) = 9 + 8 = 17 > 0$$

$$\text{اگر } m = -2 \Rightarrow 2x^2 - 3x - 1 = 0 \Rightarrow \Delta = 9 - 4(-2) = 17 > 0$$

هر دو قابل قبول هستند چون $\Delta > 0$ را حفظ کرده‌اند.

-۱۵

دشوار

حواستان باشهها! اگر از فرمول‌های مربوط به α و β نتوانستیم استفاده کنیم از

تعریف ریشه استفاده می‌کنیم:

$$x^2 - 2x - 4 = 0 \quad s = 2, p = 4$$

چون α ریشه معادله است پس در آن صدق می‌کند در نتیجه:

$$\alpha^2 - 2\alpha - 4 = 0 \Rightarrow \alpha^2 - 4 = 2\alpha$$

در نتیجه در عبارت $(\alpha^2 - 4)^2 + 4\beta^2$ می‌توان 2α را جای‌گذاری کرد پس:

$$(2\alpha)^2 + 4\beta^2 = 4\alpha^2 + 4\beta^2 = 4(\alpha^2 + \beta^2) = 4(s^2 - 2p)$$

$$= 4(4 - 2(-4)) = 4(4 + 8) = 4(12) = 48$$

-۱۶

متوسط

حواستون باشهها! شرط آن که معادله درجه دو، ۲ ریشه حقیقی مثبت داشته

باشد:

$$\Delta > 0, s > 0, p > 0$$

$$1) s > 0 \Rightarrow \frac{2m+2}{1} > 0 \Rightarrow 2m > -2 \Rightarrow m > -1$$

$$2) p > 0 \Rightarrow \frac{m^2-4}{1} > 0 \Rightarrow m^2 > 4 \Rightarrow m > 2 \text{ یا } m < -2$$

$$3) \Delta > 0 \Rightarrow (2m+2)^2 - 4(m^2-4) > 0$$

$$\Rightarrow 4m^2 + 8m + 4 - 4m^2 + 16 > 0 \Rightarrow 8m > -20 \Rightarrow m > -\frac{5}{2}$$

با اشتراک سه شرط خواهیم داشت: $m > 2$

-۱۷

متوسط

حواستان باشهها! معادله درجه دو زمانی دو ریشه حقیقی متمایز منفی دارد که:

$$\Delta > 0, s < 0, p > 0$$

x	0	5
	$+$	$-$

$0 < a < 5$

$$1) s < 0 \Rightarrow \frac{2a}{a-5} < 0$$

$$2) p > 0 \Rightarrow \frac{-4}{a-5} > 0 \Rightarrow a-5 < 0 \Rightarrow a < 5$$

$$3) \Delta > 0 \Rightarrow 4a^2 - 4(-4a+20) > 0 \Rightarrow 4a^2 + 16a - 80 > 0 \xrightarrow{\div 4}$$

$$a^2 + 4a - 20 > 0$$

$$\Delta = 16 - 4(-20) = 16 + 80 = 96$$

$$a = \frac{-4 \pm 4\sqrt{6}}{2}$$

$$\{a < -2 - 2\sqrt{6}\} \cup \{a > -2 + 2\sqrt{6}\}$$

اشتراک این سه جواب جواب نهایی سوال است. $-2 + 2\sqrt{6} < a < 5$

۱۸-

دشوار

حواستون باشه‌ها! به معادلاتی به فرم $ax + b\sqrt{x} + c = 0$ معادلات نیم

مجذوری گفته می‌شود و زمانی این معادلات ۱ ریشه حقیقی دارند که $p < 0$

$$\sqrt{x}=t \rightarrow at^2 + bt + c = 0$$

$$p < 0 \Rightarrow \frac{-m+2}{m-1} < 0$$

$$m: (-\infty, 1) \cup (2, +\infty)$$

۱۹-

متوسط

حواستون باشه‌ها! از رابطه برای نوشتن معادله استفاده می‌کنیم.

$$x^2 - 6s + 1 = 0 \Rightarrow s = \alpha + \beta = -\frac{b}{a} = 6, \quad p = \alpha\beta = \frac{c}{a} = 1$$

ما به دنبال معادله‌ای هستیم که جواب‌های آن $1 - \frac{\alpha}{2}, 1 - \frac{\beta}{2}$ باشد پس:

$$s = \frac{\alpha}{2} - 1 + \frac{\beta}{2} - 1 = \frac{\alpha + \beta}{2} - 2 \xrightarrow{\alpha + \beta = 6} \frac{6}{2} - 2 = 1$$

$$p = \left(\frac{\alpha}{2} - 1\right)\left(\frac{\beta}{2} - 1\right) = \frac{\alpha\beta}{4} - \frac{\alpha}{2} - \frac{\beta}{2} + 1 = \frac{\alpha\beta}{4} - \left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) + 1$$

$$= \frac{1}{4} - 3 + 1 = -\frac{5}{4}$$

پس معادله به صورت:

$$x^2 - 1x - \frac{5}{4} = 0 \Rightarrow 4x^2 - 4x - 5 = 0$$

۲۰-

دشوار

اگر ریشه‌های معادله $3x^2 - 4x + 1 = 0$ را α, β در نظر بگیریم:

$$s = \alpha + \beta = -\frac{b}{a} = \frac{4}{3}$$

$$p = \alpha\beta = \frac{c}{a} = \frac{1}{3}$$

پس ریشه‌های معادله $3x^2 - 7mx + 2 = 0$ خواهد بود پس:

$$s = \alpha^3 + \beta^3 = (\alpha + \beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha + \beta) \xrightarrow{\alpha + \beta = \frac{4}{3}, \alpha\beta = \frac{1}{3}} \left(\frac{4}{3}\right)^3 - 3\left(\frac{1}{3} \times \frac{4}{3}\right) = \frac{64}{27} - \frac{4}{3} = \frac{28}{27}$$

از طرفی از روی معادله $s = -\frac{b}{a}$ داریم $s = \frac{7m}{3}$ جدید.

از تساوی این دو مقدار خواهیم داشت:

$$\frac{28}{27} = \frac{7m}{3} \Rightarrow m = \frac{4}{9}$$

۲۱-

آسان

حواستون باشه‌ها!

۱- پایین‌ترین نقطه سهمی، رأس سهمی است $x_s = -\frac{b}{2a}, y_s = -\frac{\Delta}{4a}$.

۲- در ناحیه دوم $x < 0$ و $y > 0$ است.

$$x_s = -\frac{b}{2a} = \frac{+2m}{2(m-1)} < 0$$

$$y_s = -\frac{\Delta}{4a} = \frac{-[4m^2 - 4(m^2 - 4m + 3)]}{4(m-1)} > 0$$

$$\frac{-4m^2 + 4m^2 - 16m + 12}{4(m-1)} > 0 \Rightarrow \frac{-16m + 12}{4(m-1)} > 0$$

$$m = 1, m = \frac{12}{16} = \frac{3}{4}$$

جواب نهایی اشتراک (۱) و (۲) است

$$\frac{3}{4} < m < 1$$

۲۲-

متوسط

حواستون باشه‌ها! سهمی زمانی از هر چهار ناحیه مختصات می‌گذرد که $p < 0$.

$$p < 0 \Rightarrow \frac{c}{a} < 0 \Rightarrow \frac{1}{2m-4} < 0 \Rightarrow 2m-4 < 0 \Rightarrow m < 2$$

۲۳-

متوسط

اگر یک ریشه ۵ واحد از ریشه دیگر بزرگ‌تر باشد می‌توان نوشت $\alpha = \beta + 5$.

از طرفی از روی معادله s و p را به دست آورده و $\alpha = \beta + 5$ را در آن‌ها جای‌گذاری می‌کنیم:

$$s = \frac{-b}{a} = \alpha + \beta \Rightarrow \frac{+3m}{m} = 5 + \beta + \beta \Rightarrow +3 = 5 + 2\beta$$

$$\Rightarrow -2 = 2\beta \Rightarrow \beta = -1, \alpha = 4$$

$$p = \frac{c}{a} = \alpha\beta \Rightarrow \frac{m^2}{m} = +4 \Rightarrow m^2 - 4m = 0 \Rightarrow m(m-4) = 0$$

$$m \neq 0, m = 4$$

۲۴-

آسان

چون یک ریشه ۲ برابر ریشه دیگر است پس: $\alpha = 2\beta$

$$s = \alpha + \beta = \frac{-b}{a}$$

$$2\beta + \beta = 9 \Rightarrow 3\beta = 9 \Rightarrow \beta = 3, \alpha = 6$$

$$p = \alpha\beta = \frac{c}{a} \Rightarrow 18 = \frac{m+1}{1} \Rightarrow m = 17$$

حواستون باشه‌ها! این سوال اگر تشریحی نبود می‌توانستیم از فرمول $\alpha = k\beta$

$$\frac{(k+1)^2}{k} = \frac{b^2}{ac}$$

متوسط

۲۸-



(آ) حداکثر ارتفاع توپ زمانی اتفاق می‌افتد که در رأس سهمی قرار داشته باشد

پس:

$$y_s = \frac{-\Delta}{2a} = \frac{-(1-4(0))}{2(-\frac{1}{4})} = \frac{-1}{-\frac{1}{2}} = 2$$

(ب) حداکثر مسافت طی شده زمانی اتفاق می‌افتد که توپ دوباره با زمین برخورد

کند یعنی:

$$-\frac{1}{4}x^2 + x = 0 \Rightarrow x(-\frac{1}{4}x + 1) = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ شروع}$$

$$-\frac{1}{4}x = -1 \Rightarrow x = 4$$

پس از ۴ متر، بیش‌ترین مسافت را طی کرده است.

دشوار

۲۹-

مرحله اول:

$$y = 100 - 2x \text{ و } 2x + y = 100 \text{ شده است پس}$$

در مرحله دوم درباره بیش‌ترین مساحت سوال پرسیده است پس:

$$S = xy$$

اما این معادله در طرف دوم برحسب دو مجهول نوشته شده است پس، از

اطلاعات مرحله اول استفاده می‌کنیم:

$$S = x(100 - 2x) \Rightarrow S = 100x - 2x^2$$

$$x_s = \frac{-b}{2a} = \frac{-100}{2(-2)} = \frac{100}{4} = 25$$

چون ابعاد مستطیل خواسته است پس x_s را در رابطه y جای‌گذاری می‌کنیم:

$$y = 100 - 2(25) = 100 - 50 = 50$$

متوسط

۲۵-

ابتدا معادله را مرتب می‌کنیم:

$$ax^2 + 3ax - a^2 + 2 = 0$$

حواستون باشه! ریشه‌ها معکوس یکدیگرند یعنی $\alpha = \frac{1}{\beta}$ و یا به عبارتی $a = c$

$$a = -a^2 + 2 \Rightarrow a^2 + a - 2 = 0 \Rightarrow (a+2)(a-1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = -2 \\ a = 1 \end{cases}$$

چون هر دو $\Delta > 0$ است پس قابل قبول هستند در نتیجه مجموع مقادیر a

$$a = -2 + 1 = -1$$

متوسط

۲۶-

حواستون باشه! ۱- معادله درجه دو زمانی دو ریشه قرینه دارد که $b = 0$ و

$$\frac{c}{a} < 0$$

$$1) 2m^2 - 3m = 0 \Rightarrow m(2m - 3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m = \frac{3}{2} \end{cases}$$

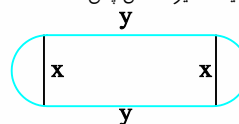
$$2) \frac{c}{a} < 0 \Rightarrow \frac{m-4}{3} < 0 \Rightarrow m < 4$$

پس $m = 0$ و $m = \frac{3}{2}$ هر دو قابل قبول است.

دشوار

۲۷-

محیط استادیوم تشکیل شده است از $2y$ و محیط یک دایره کامل پس:



$$\text{محیط} = 2\pi y + 2y$$

$$1500 = 2\pi(\frac{x}{2}) + 2y \Rightarrow 1500 = \pi x + 2y$$

$$y = \frac{1500 - \pi x}{2} = 750 - \frac{\pi}{2}x$$

$$1) S = xy \Rightarrow S = x(750 - \frac{\pi}{2}x) \Rightarrow S = 750x - \frac{\pi}{2}x^2$$

$$x_s = \frac{-b}{2a} = \frac{-750}{2(-\frac{\pi}{2})} = \frac{750}{\pi}$$

ابعاد مستطیل:

$$y_s = 750 - \frac{\pi}{2}(\frac{750}{\pi}) = 375$$

$S = \text{دایره} + S = \text{مستطیل}$ استادیوم (ب)

$$S = xy + \pi r^2 = xy + \pi(\frac{x}{2})^2$$

$$S = x(750 - \frac{\pi}{2}x) + \pi(\frac{x}{2})^2 = 750x - \frac{\pi}{2}x^2 + \frac{\pi}{4}x^2 = 750x - \frac{\pi}{4}x^2$$

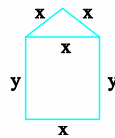
$$x_s = \frac{-750}{2(-\frac{\pi}{4})} = \frac{-750}{-\frac{\pi}{2}} = \frac{1500}{\pi}$$

$$y_s = 750 - \frac{\pi}{2}(\frac{1500}{\pi}) = 750 - 750 = 0$$

۳۰-

دشوار

حواستون باشه! مساحت مثلث متساوی الاضلاع از رابطه $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$ به دست می آید.



(۱) ابتدا درباره محیط پنجره صحبت شده است که $3x + 2y = 4 \Rightarrow y = \frac{4-3x}{2}$

سپس درباره حداکثر نوردهی صحبت شده که به مساحت پنجره بر می گردد.

مستطیل + متساوی الاضلاع = مساحت پنجره S

این مساحت چون طرف دوم بر حسب x و y نوشته شده است از اطلاعات (۱) استفاده می کنیم.

$$S_{\text{پنجره}} = \frac{\sqrt{3}}{4}x^2 + xy$$

$$S = \frac{\sqrt{3}}{4}x^2 + x\left(\frac{4-3x}{2}\right) \Rightarrow S = \frac{\sqrt{3}}{4}x^2 + 2x - \frac{3}{2}x^2$$

$$S = \left(\frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{3}{2}\right)x^2 + 2x$$

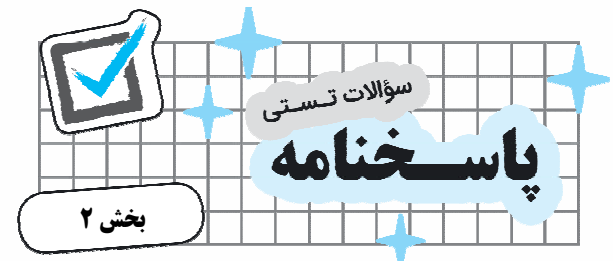
این معادل درجه دوم زمانی ماکسیم مقدار خود را می دهد که $x_S = \frac{-b}{2a}$

باشد پس:

$$x_S = \frac{-2}{2\left(\frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{3}{2}\right)} = \frac{-1}{\frac{\sqrt{3}-6}{4}} = \frac{-4}{\sqrt{3}-6} = \frac{4}{6-\sqrt{3}}$$

و با جای گذاری در رابطه y :

$$y = 2 - \frac{3}{2}\left(\frac{4}{6-\sqrt{3}}\right) = 2 - \frac{6}{6-\sqrt{3}} = \frac{12-2\sqrt{3}-6}{6-\sqrt{3}} = \frac{6-2\sqrt{3}}{6-\sqrt{3}}$$



متوسط

۴۰- گزینه

اگر $x + \frac{1}{x} = t$ در نظر بگیریم خواهیم داشت:

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = (t)^2 \Rightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} + 2\left(x \cdot \frac{1}{x}\right) = t^2 \Rightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} = t^2 - 2p$$

پس با جای گذاری در معادله خواهیم داشت:

$$t + t^2 - 2 = 4 \Rightarrow t^2 + t - 6 = 0 \Rightarrow (t+3)(t-2) = 0$$

$$t = -3, t = 2$$

$$x + \frac{1}{x} = 2 \Rightarrow x = 1$$

$$x + \frac{1}{x} = -3 \Rightarrow x^2 + 1 + 3x = 0 \Rightarrow x^2 + 3x + 1 = 0$$

$$\Delta = 9 - 4 = 5 \Rightarrow 2 \text{ ریشه دارد}$$

۲۰- گزینه

آسان

اگر $x^2 + 2x = t$ در نظر بگیریم:

$$t^2 + 10t - 39 = 0 \Rightarrow (t+13)(t-3) = 0 \Rightarrow t = -13, t = 3$$

$$\xrightarrow{t=3} x^2 + 2x = 3 \Rightarrow x^2 + 2x - 3 = 0 \Rightarrow x = 1, x = -3$$

$$\xrightarrow{t=-13} x^2 + 2x = -13 \Rightarrow x^2 + 2x + 13 = 0$$

$$\Delta = 4 - 4(13) \Rightarrow \Delta = 4 - 52 = -48. \text{ ریشه ندارد.}$$

۳۰- گزینه

دشوار

حواستون باشه!

(۱) ریشه، صفر کننده معادله است و اگر $x = a$ ریشه $f(x)$ باشد، $f(a) = 0$ بخش پذیر است.

$$\alpha^2 + \beta^2 = s^2 - 2p \quad (2)$$

چون یکی از ریشه های معادله را $x = 4$ داده است پس در ابتدا آن را صدق می دهیم.

$$(4)^3 - 8(4)^2 + a(4) + 4 = 0 \Rightarrow 64 - 128 + 4a + 4 = 0$$

$$\Rightarrow 4a = 60 \Rightarrow a = 15$$

پس:

$$\begin{array}{r|l} x^3 - 8x^2 + 15x + 4 & x - 4 \\ \hline -x^3 + 4x^2 & \\ \hline -6x^2 + 15x + 4 & \\ -6x^2 + 16x & \\ \hline -x + 4 & \\ -x + 4 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

پس تجزیه عبارت $(x-4)(x^2-4x-1) = 0$ خواهد بود با $p = 1, S = 4$

α, β ریشه های پرانتز دوم هستند پس:

$$\alpha^2 + \beta^2 = s^2 - 2p = 16 - 2(-1) = 16 + 2 = 18$$

$$\alpha^2 + \beta^2 + a = 18 + 15 = 33 \text{ در نتیجه پاسخ}$$

۴۰- گزینه

دشوار

چون $\sqrt{3} - \sqrt{5}$ یک ریشه معادله است پس:

$$x = \sqrt{3} - \sqrt{5} \xrightarrow{\text{طرفین به توان ۲}} x^2 = 3 + 5 - 2\sqrt{15} \Rightarrow x^2 = 8 - 2\sqrt{15}$$

$$2\sqrt{15} = 8 - x^2 \xrightarrow{\text{طرفین به توان ۲}} 60 = 64 + x^4 - 16x^2$$

با مرتب کردن معادله خواهیم داشت:

$$x^4 - 16x^2 + 64 - 60 = 0 \Rightarrow x^4 - 16x^2 + 4 = 0$$

$$\frac{a}{b} = \frac{-16}{4} = -4 \text{ خواهد بود و } b = 4, a = -16 \text{ در نتیجه پاسخ}$$

۵- گزینه «۱»

آسان

حواستون باشه! (۱) در هر معادله‌ای اگر جمع ضرایب صفر باشد یکی از ریشه‌های آن معادله $x=1$ است.

(۲) اگر $f(a)=0$ باشد $f(x)$ بر $x-a$ بخش پذیر است.

چون جمع ضرایب صفر است پس حتماً $x=1$ یکی از ریشه‌هاست و عبارت بر $x-1$ بخش پذیر است.

$$\begin{array}{r} 3x^3 - 11x^2 + 5x + 3 \mid x-1 \\ \underline{-3x^3 + 3x^2} \\ 8x^2 + 5x + 3 \\ \underline{-8x^2 + 8x} \\ -3x + 3 \\ \underline{+3x - 3} \\ 0 \end{array}$$

پس تجزیه عبارت $(x-1)(3x^2 - 8x - 3) = 0$

$$\begin{array}{ccc} (x-1)(3x^2-8x-3) & & (x-3) \\ \downarrow & & \downarrow \\ (x=1) & + & (x=-\frac{1}{3}) & + & (x=3) = \frac{11}{3} \end{array}$$

نکته: مجموع ریشه‌های معادله درجه سوم $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ برابر

$$-\frac{b}{a} \text{ و ضرب ریشه‌ها برابر } -\frac{d}{a} \text{ است.}$$

۶- گزینه «۱»

متوسط

حواستون باشه! اگر در معادله درجه دو $ax^2 + bx + c = 0$ با شرط $\Delta > 0$ یک ریشه k برابر ریشه دیگر باشد.

$$\begin{aligned} \frac{(k+1)^2}{k} &= \frac{b^2}{ac} \\ \frac{(2+1)^2}{2} &= \frac{3^2}{m^2-m} \Rightarrow \frac{9}{2} = \frac{9}{m^2-m} \Rightarrow m^2-m-2=0 \\ (m-2)(m+1) &= 0 \Rightarrow m=2, m=-1 \\ \Delta &> 0 \end{aligned}$$

$$m=-1 \Rightarrow -2x^2 + 3x - 1 = 0 \Rightarrow \Delta = 9 - 4(2) = 1 > 0$$

$$m=2 \Rightarrow x^2 + 3x + 2 = 0 \Rightarrow \Delta = 9 - 4(2) = 1 > 0$$

هر دو مقدار قابل قبول است.

مجموع مقادیر یک است.

۷- گزینه «۳»

آسان

حواستون باشه! در سهمی‌ها زمانی که رأس سهمی داده شده باشد.

$$y = a(x - x_s)^2 + y_s$$

$$y = ax^2 + 4 \text{ داده شده است پس } \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix} \text{ رأس سهمی}$$

با جای گذاری نقطه $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ در این معادله می‌توان a را یافت پس:

$$2 = a + 4 \Rightarrow -2 = a$$

$$\text{پس } y = -2x^2 + 4 \text{ در نتیجه } a = -2, b = 0, c = 4$$

$$2a - b + c = 2(-2) - 0 + 4 = 0$$

۸- گزینه «۲»

متوسط

در مرحله اول چون طول پاره خط AB داده شده است پس $x_B - x_A = 6$

در مرحله دوم چون x_s سهمی عدد ۲ داده شده است و می‌دانیم x_s وسط دو ریشه سهمی قرار دارد پس:

$$\frac{x_A + x_B}{2} = 2 \Rightarrow x_A + x_B = 4$$

از نتایج به دست آمده در مرحله اول و دوم خواهیم داشت:

$$\begin{cases} x_B - x_A = 6 \\ x_B + x_A = 4 \end{cases}$$

$$2x_B = 10 \Rightarrow x_B = 5, x_A = -1$$

در نتیجه ریشه‌های این سهمی -1 و 5 است پس می‌توان معادله سهمی نوشت:

$$y = a(x-5)(x+1) \xrightarrow{\text{جایگذاری } \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}} 3 = a(2-5)(2+1)$$

$$3 = a(-3)(3) \Rightarrow a = -\frac{1}{3}$$

در نتیجه معادله سهمی $y = -\frac{1}{3}(x-5)(x+1)$

$$\text{پس } y = -\frac{1}{3}x^2 + \frac{4}{3}x + \frac{5}{3}$$

$$b+c = \frac{4}{3} + \frac{5}{3} = \frac{9}{3} = 3$$

۹- گزینه «۲»

دشوار

چون نقاط $(5,4)$ و $(0,4)$ روی سهمی قرار دارند، رأس وسط این دو نقطه

قرار دارد، یعنی $x_s = \frac{0+5}{2} = \frac{5}{2}$ و تابع را به صورت $y = a(x - \frac{5}{2})^2 - 3$ می‌توان نوشت. با جایگذاری نقطه $(0,4)$ و a را به دست می‌آوریم.

$$4 = a(0 - \frac{5}{2})^2 - 3 \Rightarrow a = \frac{28}{25}$$

$$y = \frac{28}{25}(x - \frac{5}{2})^2 - 3$$

پس معادله سهمی به صورت $y = \frac{28}{25}x^2 + \frac{28}{5}x + 4$ است:

$$s = -5, p = \frac{5}{2}$$

حالا ما معادله سهمی می‌خواهیم که ریشه‌های آن $\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta}$ باشد از رابطه

$$x^2 - sx + p = 0$$

$$\text{جدید } s = \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = \frac{\alpha + \beta}{\alpha\beta} = \frac{-5}{\frac{5}{2}} = -2$$

$$\text{جدید } p = (\frac{1}{\alpha})(\frac{1}{\beta}) = \frac{1}{\alpha\beta} = \frac{1}{\frac{5}{2}} = \frac{2}{5}$$

پس معادله سهمی به صورت $x^2 + 2x + \frac{2}{5} = 0$ و یا مرتب شده آن:

$$5x^2 + 10x + 2 = 0$$

متوسط

۱۳- گزینه «۱»

$$2\alpha^2(\alpha\beta) - 5\beta \xrightarrow{p=\alpha\beta=1} 2\alpha^2 - 5\beta \xrightarrow{2\alpha^2 = -5\alpha - 2} -5\alpha - 2 - 5\beta$$

$$-5(\alpha + \beta) - 2 \xrightarrow{s=\alpha+\beta=-\frac{5}{2}} -5(-\frac{5}{2}) - 2 = \frac{25}{2} - 2 = \frac{21}{2}$$

دشوار

۱۴- گزینه «۲»

در این تیپ سوالات کمترین توان را به عنوان t بگیرید.

(با توجه به توان‌ها عبارت $x^2 + x$ مثبت در نظر گرفته شده است.)

$$(x^2 + x)^{\frac{1}{6}} = t \Rightarrow ((x^2 + x)^{\frac{1}{6}})^2 = t^2 \Rightarrow (x^2 + x)^{\frac{1}{3}} = t^2$$

$$((x^2 + x)^{\frac{1}{6}})^3 = t^3 \Rightarrow (x^2 + x)^{\frac{1}{2}} = t^3$$

در نتیجه:

$$t^3 - t^2 - 6t = 0 \Rightarrow t(t^2 - t - 6) = 0 \Rightarrow t(t - 3)(t + 2) = 0$$

$$t = 0 \Rightarrow (x^2 + x)^{\frac{1}{6}} = 0 \Rightarrow s = -1$$

$$t = 3 \Rightarrow (x^2 + x)^{\frac{1}{6}} = 3 \Rightarrow x^2 + x = 3^6 \Rightarrow x^2 + x - 3^6 = 0 \Rightarrow s = -1$$

$$t = -2 \Rightarrow (x^2 + x)^{\frac{1}{6}} = -2 \Rightarrow \text{ریشه ندارد}$$

پس مجموع ریشه‌های این معادله (-2) است.

آسان

۱۵- گزینه «۲»

حواستون باشه! بیشترین مقدار سهمی $y_s = -\frac{\Delta}{4a}$ است.

$$y_s = -\frac{\Delta}{4a} = 0 \Rightarrow \Delta = 0 \Rightarrow b^2 - 4ac = 0$$

$$16 - 4(m^2 - 3m) = 0 \Rightarrow m^2 - 3m - 4 = 0 \Rightarrow m = -1, m = 4$$

چون سهمی زمانی که $\Delta = 0$ (دهنه رو به پایین داشته باشد) بیشترین مقدار را دارد پس $m = -1$ قابل قبول است.

آسان

۱۶- گزینه «۳»

حواستون باشه! معادله درجه ۴ زمانی دو ریشه حقیقی دارد که $p < 0$ یا

$$\Delta = 0 \text{ و } -\frac{b}{2a} > 0 \text{ باشد.}$$

$$x^2 = t \rightarrow 2mt^2 + (m-1)t + m-1 = 0$$

$$p < 0 \Rightarrow \frac{c}{a} < 0 \Rightarrow \frac{m-1}{2m} < 0 \Rightarrow m \in (0, 1)$$

$$\Delta = 0 \Rightarrow (m-1)^2 - 4(m-1)(2m) = 0$$

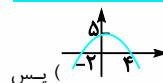
$$\Rightarrow (m-1)(m-1-8m) = 0 \Rightarrow m = 0, m = \frac{-1}{9}$$

$$-\frac{b}{2a} > 0 \Rightarrow \frac{-(m-1)}{4m} > 0 \Rightarrow 0 < m < 1$$

پس $m = 0$ و $m = \frac{-1}{9}$ هر دو غیر قابل قبول هستند.

دشوار

۱۰- گزینه «۳»



مرحله اول سوال به تعیین علامت سهمی برمی‌گردد (پس یعنی -2 و 4 ریشه‌های سهمی هستند و دهنه سهمی به سمت پایین است. از طرفی چون عرض از مبدأ آن با سهمی داده شده یکی است پس $\begin{bmatrix} 0 \\ 5 \end{bmatrix}$ در معادله صدق می‌کند. با استفاده از این اطلاعات داریم:

$$y = a(x-4)(x+2) \Rightarrow 5 = a(0-4)(0+2)$$

$$5 = a(-4)(2) \Rightarrow 5 = -8a \Rightarrow -\frac{5}{8} = a$$

$$y = -\frac{5}{8}(x-4)(x+2) \quad \text{در نتیجه معادله سهمی:}$$

$$y = -\frac{5}{8}x^2 + \frac{5}{4}x + 5$$

مرحله آخر مفهوم خط مماس در رأس سهمی است که به معنای y_s است پس:

$$y_s = -\frac{\Delta}{4a} \Rightarrow y_s = \frac{45}{8} \Rightarrow y - \frac{45}{8} = 0 \Rightarrow 8y - 45 = 0$$

دشوار

۱۱- گزینه «۲»

در مرحله اول با توجه به معادله $3x^2 - 6x - 2 = 0$ داریم:

$$s = \frac{\alpha}{3} + \frac{\beta}{3} = \frac{6}{3} \Rightarrow \frac{\alpha + \beta}{3} = \frac{6}{3} \Rightarrow \alpha + \beta = 6$$

$$p = (\frac{\alpha}{3})(\frac{\beta}{3}) = -\frac{2}{3} \Rightarrow \frac{\alpha\beta}{9} = -\frac{2}{3} \Rightarrow \frac{\alpha\beta}{9} = -\frac{2}{3} \Rightarrow \alpha\beta = -6$$

در مرحله دوم با توجه به ریشه‌های $3\beta - 1$ ، $3\alpha - 1$ ریشه‌های $x^2 - sx + p = 0$ می‌سازیم:

$$s = 3\alpha - 1 + 3\beta - 1 = 3(\alpha + \beta) - 2 = 3(6) - 2 = 16$$

$$p = (3\alpha - 1)(3\beta - 1) = 9\alpha\beta - 3\alpha - 3\beta + 1 = 9(-6) - 3(6) + 1 = -54 - 18 + 1 = -71$$

پس معادله سهمی به صورت $x^2 - 16x - 71 = 0$ است در نتیجه:

$$c = -71, b = -16$$

$$c - b = -71 + 16 = -55$$

متوسط

۱۲- گزینه «۳»

$$|\alpha - \beta| = \sqrt{s^2 - 4p} \quad \text{حواستون باشه! (۱)}$$

(۲) ریشه‌ها در معادله صدق می‌کند پس:

$$\alpha^2 + 3\alpha = 1 \xrightarrow{\alpha \text{ ضرب شود}} \alpha^3 + 3\alpha^2 = \alpha$$

$$\beta^2 + 3\beta = 1 \xrightarrow{\beta \text{ ضرب شود}} \beta^3 + 3\beta^2 = \beta$$

با جای گذاری این دو عبارت در صورت سوال داریم: $(\alpha - 1)(\beta + 1) = m - 2$

$$p = -1, s = -3 \text{ داریم } x^2 + 3x - 1 = 0 \text{ با توجه به}$$

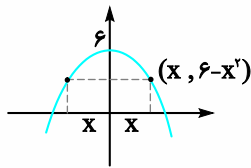
$$\alpha\beta + \alpha - \beta - 1 = m - 2$$

$$p \pm \sqrt{s^2 - 4p} - 1 = m - 2 \Rightarrow -1 \pm \sqrt{9 + 4} - 1 = m - 2 \Rightarrow \pm\sqrt{13} = m$$

دشوار

۱۷- گزینه «۳»

اول شکل رو بکشیم که بیشتر متوجه سوال بشویم.



پس مستطیل موردنظر دارای طول $2x$ و عرض $6-x^2$ است در نتیجه محیط آن:

$$p = 2(\text{طول} + \text{عرض})$$

$$p = 2(2x + 6 - x^2)$$

$$p = 2(-x^2 + 2x + 6) = -2x^2 + 4x + 12$$

چون سوال ماکزیمم محیط را پرسیده است پس $p_s = \frac{-\Delta}{4a}$

$$p_s = \frac{-[-16 - 4(-24)]}{-8} = \frac{16 + 96}{8} = \frac{112}{8} = 14$$

آسان

۱۸- گزینه «۱»

اگر طول قاعده را x و ارتفاع وارد بر آن را y در نظر بگیریم در نتیجه با فرض:

$$x + y = 8 \Rightarrow x + y = 8 \Rightarrow y = 8 - x$$

حالا چون درباره مساحت مثلث صحبت کرده بودیم:

$$S = \frac{xy}{2} \Rightarrow S = \frac{x(8-x)}{2} \Rightarrow S = 4x - \frac{1}{2}x^2$$

بیشترین مساحت یعنی $S_s = -\frac{\Delta}{4a}$

$$S_s = \frac{-[-16 - 4(0)]}{4(-\frac{1}{2})} = \frac{-16}{-2} = 8$$

روش دوم: هرگاه مجموع دو مقدار برابر مقداری ثابت باشد بیشترین

حاصل ضرب زمانی اتفاق می افتد که هر کدام نصف مقدار ثابت باشند.

$$x + y = 8$$

$$\text{پس } x = 4, y = 4$$

$$S = \frac{4 \times 4}{2} = 8$$

متوسط

۱۹- گزینه «۲»

حواستون باشه! اگر مجموع دو عبارت مقداری ثابت شود حاصل ضرب آن‌ها

زمانی بیشترین مقدار می شود که هر کدام نصف عدد ثابت باشند پس:

$$2x + 3y = 12 \xrightarrow[\text{طبق نکته}]{\text{پس}} \begin{cases} 2x = 6 \Rightarrow x = 3 \\ 3y = 6 \Rightarrow y = 2 \end{cases}$$

پس بیشترین حاصل ضرب این دو عدد $xy = 6$ است.

آسان

۱۷- گزینه «۳»

$$\begin{cases} \Delta > 0 & \sqrt{x} = t \Rightarrow 2t^2 - 2mt - \frac{m}{2} - \frac{1}{8} = 0 \\ s > 0 & \text{حواستون باشه! معادله نیم مجذوری زمانی دو ریشه حقیقی دارد که} \\ p > 0 & \end{cases}$$

$$1) s > 0 \Rightarrow \frac{+2m}{2} > 0 \Rightarrow m > 0$$

$$2) p > 0 \Rightarrow \frac{c}{a} > 0 \Rightarrow \frac{\frac{m}{2} - \frac{1}{8}}{2} > 0 \Rightarrow \frac{m}{2} > \frac{1}{8} \Rightarrow m > \frac{1}{4}$$

$$3) \Delta > 0 \Rightarrow 4m^2 - 4(m - \frac{1}{4}) > 0 \Rightarrow 4m^2 - 4m + 1 > 0$$

$$\Rightarrow (2m - 1)^2 > 0 \Rightarrow m \neq \frac{1}{2}$$

اشتراک بین این سه شرط جواب مسئله است. $m \neq \frac{1}{2}$ و $m > \frac{1}{4}$

آسان

۱۸- گزینه «۴»

حواستون باشه! معادله نیم مجذوری زمانی یک ریشه حقیقی دارد که $p < 0$ و

یا $\Delta = 0$ و $-\frac{b}{2a} > 0$ باشد.

$$p < 0 \Rightarrow \frac{c}{a} < 0 \Rightarrow \frac{-m-6}{m-2} < 0$$

x	-6	2
	$-$	$+$

 $m < -6$ یا $m > 2$

آسان

۱۹- گزینه «۲»

حواستون باشه! شرط آن که سهمی همواره بالای محور x باشد $\begin{cases} a > 0 \\ \Delta < 0 \end{cases}$

$$1) a > 0$$

$$2) \Delta < 0 \Rightarrow 18 - 4(2a^2 + \frac{5}{2}a) < 0 \Rightarrow 9 - 4a^2 - 5a < 0$$

$$-4a^2 - 5a + 9 < 0$$

$$a = 1, a = -\frac{9}{4}$$

x	$-\frac{9}{4}$	1
	$-$	$+$

 $(-\infty, -\frac{9}{4}) \cup (1, +\infty)$

از اشتراک شرط اول و دوم داریم: $(1, +\infty)$

دشوار

۲۰- گزینه «۲»

حواستون باشه! اگر $g(x), f(x)$ با هم برخورد داشته باشند پس از $f(x) = g(x)$ داریم:

$$A) \Delta > 0 \text{ محل برخورد دارند } 2$$

$$B) \Delta = 0 \text{ محل برخورد دارند } 1$$

$$C) \Delta < 0 \text{ محل برخورد ندارند } 0$$

در مرحله اول $y = ax - a, y = x^2$ را مساوی یکدیگر قرار می دهیم و

$$x^2 - ax + a = 0$$

$$\Delta = a^2 - 4a = 0 \Rightarrow a(a - 4) = 0 \Rightarrow a = 0 \text{ غ ق } a = 4$$

در مرحله دوم در معادله داده شده $a = 4$ را قرار می دهیم:

$$2x^2 - 4x + 2 = 0$$

$$\Delta = 16 - 4(4) = 16 - 16 = 0$$

پس معادله یک جواب برای x دارد.

متوسط

۲۷- گزینه «ا»

اول بیایید قسمت دوم سوال را معنی کنیم. «مجموع ریشه‌ها با معکوس حاصل ضرب آن دو ریشه برابر است».

$$s = \frac{1}{p}$$

$$\frac{-2m+1}{3} = \frac{3}{2-m} \Rightarrow (-2m+1)(2-m) = 9$$

$$\Rightarrow 2m^2 - 5m - 7 = 0 \Rightarrow (2m-7)(m+1) = 0$$

$$2m-7=0 \Rightarrow m = \frac{7}{2}, \Delta > 0$$

$$m+1=0 \Rightarrow m = -1, \Delta < 0$$

چون $m = -1$ دلتا را منفی می‌کند پس قابل قبول نیست.

متوسط

۲۸- گزینه «ا»

حواستون باشه! نکته اول سوال به ریاضی دهم مربوط می‌شه. اگر دو نقطه دارای y یکسان باشند در سهمی، x_s از میانگین x های دو نقطه به دست می‌آید. پس:

$$(0, 5), (-2, 5) \Rightarrow x_s = \frac{0+(-2)}{2} = \frac{-2}{2} = -1$$

نکته دو سوال مربوط می‌شه به نقطه $(0, 5)$ که چون $x = 0$ هست پس $y = 5$ عرض از مبدأ سهمی است پس $c = 5$

و در آخر این اطلاعات را در $y = ax^2 + bx + c$ جای گذاری می‌کنیم و متوجه می‌شویم که:

$$y = ax^2 + bx + 5 \xrightarrow{(1,1)} 11 = a + b + 5 \Rightarrow 6 = a + b$$

همچنین چون $x_s = -1$ پس $\frac{-b}{2a} = -1$ و در نتیجه $b = 2a$. از این دو اطلاعات داریم:

$$6 = a + 2a \xrightarrow{a+b=6} 6 = 3a \Rightarrow a = 2, b = 4$$

پس:

$$y = 2x^2 + 4x + 5$$

و در نهایت با جای گذاری گزینه‌ها در این معادله سهمی به گزینه ۱ می‌رسیم.

دشواری

۲۹- گزینه «ب»

حواستون باشه! از کنکور ۱۴۰۰ به بعد اعداد عجیب و غریب که دیدید اصلاً تعجب نکنید.

قسمت اول سوال از روش t می‌خواهیم استفاده کنیم:

$$x^2 = t \Rightarrow t^2 - 7t - 5 = 0$$

$$\Delta = 49 - 4(-5) = 49 + 20 = 69$$

$$t_{\text{ریشه}} = \frac{7 \pm \sqrt{69}}{2}$$

$$x^2 = \frac{7 \pm \sqrt{69}}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = \sqrt{\frac{7 \pm \sqrt{69}}{2}} \\ x = -\sqrt{\frac{7 \pm \sqrt{69}}{2}} \end{cases}$$

$$s = 0$$

$$p = \left(\sqrt{\frac{7 \pm \sqrt{69}}{2}}\right) \left(-\sqrt{\frac{7 \pm \sqrt{69}}{2}}\right) = -\frac{7 \pm \sqrt{69}}{2}, p^2 = \frac{49 + 69 + 14\sqrt{69}}{4}$$

$$2p^2 = 59 + 7\sqrt{69}$$

دشواری

۳۰- گزینه «ب»

در ابتدا پاره‌خطی به طول ۳ cm را از نقطه‌ای برش می‌دهیم.

با هر قسمت چون مثلث متساوی‌الاضلاع درست می‌کنیم پس:

خواهیم داشت:

از آنجا که می‌دانیم مساحت مثلث متساوی‌الاضلاع از رابطه $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$ به دست می‌آید مجموع مساحت این مثلث:

$$S = \frac{\sqrt{3}}{4} \left(\frac{1}{3}x\right)^2 + \frac{\sqrt{3}}{4} \left[\frac{1}{3}(3-x)\right]^2 = \frac{\sqrt{3}}{4} \times \frac{1}{9}x^2 + \frac{\sqrt{3}}{4} \times \frac{1}{9}(9-6x+x^2)$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{18}x^2 - \frac{\sqrt{3}}{6}x + \frac{\sqrt{3}}{4}$$

بیشترین این عبارت در $-\frac{\Delta}{4a}$ اتفاق می‌افتد پس:

$$\frac{-\left[\frac{3}{36} - 4\left(\frac{\sqrt{3}}{18} \times \frac{\sqrt{3}}{4}\right)\right]}{4\left(\frac{\sqrt{3}}{18}\right)} = \frac{-\left[\frac{1}{12} - \frac{1}{6}\right]}{\frac{2\sqrt{3}}{9}} = \frac{+\frac{1}{12}}{\frac{2\sqrt{3}}{9}} = \frac{9}{24\sqrt{3}}$$

$$= \frac{3}{8\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{8}$$

متوسط

۳۵- گزینه «ا»

حواستون باشه! در معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$

a دهنه سهمی

b محل x_s [و یا شیب سهمی در محور y ها]

پس b دهنه سهمی را نشان می‌دهد پس $b > 0$

$-a$ شیب محل برخورد با محور y ها است $-a > 0$ پس $a < 0$

درباره $c + 2$ چون محل برخورد با محور y ها منفی است پس $c + 2 < 0$ و $c < -2$ است.

متوسط

۳۶- گزینه «ب»

حواستون باشه! از سال دهم می‌دانیم که معادلات درجه ۲ زمانی ۲ ریشه حقیقی متمایز دارند که $\Delta > 0$.

پس با توجه به این که در این معادله درجه ۲، $a = 2m - 1$ و $b = 6$ هست پس:

$$\Delta = b^2 - 4ac > 0$$

$$\Delta = 36 - 4(2m^2 - 5m + 2) = 36 - 8m^2 + 20m - 8$$

$$= -8m^2 + 20m + 28 > 0$$

که در این مرحله با توجه به نامعادله بودن عبارت باید از تعیین علامت استفاده کنیم، ابتدا ریشه‌ها را به دست می‌آوریم:

$$m = -1, m = \frac{28}{8} = \frac{7}{2}$$

x	$-\infty$	-1	$\frac{7}{2}$	$+\infty$
		$-$	$+$	$-$

$-1 < m < 3.5$

البته که گزینه‌ها با توجه به $2m - 1 \neq 0$ نوشته شده است.

دشوار

۳۳- گزینه «ا»

این سوال سال ۱۴۰۱ بچه‌ها رو خیلی اذیت کرد!

$$\begin{cases} \alpha^2 + \beta^2 = S^2 - 2P \\ \alpha + \beta = S \\ |\alpha - \beta| = \sqrt{S^2 - 4P} \end{cases} \xrightarrow{\alpha < \beta \Rightarrow \alpha - \beta < 0} \alpha - \beta = -\sqrt{S^2 - 4P}$$

$$3\alpha^2 + 2\beta^2 = 12\sqrt{2} + 15 \Rightarrow 2/5\alpha^2 + 2/5\beta^2 + 0/5\alpha^2 - 0/5\alpha^2 - 0/5\beta^2 = 12\sqrt{2} + 15$$

$$2/5(\alpha^2 + \beta^2) + 0/5(\alpha^2 - \beta^2) = 12\sqrt{2} + 15$$

$$2/5(\alpha^2 + \beta^2) + 0/5(\alpha - \beta)(\alpha + \beta) = 12\sqrt{2} + 15$$

$$2/5(S^2 - 2P) + 0/5(S)(-\sqrt{S^2 - 4P}) = 12\sqrt{2} + 15$$

$$\xrightarrow{S=-6} \xrightarrow{P=a} 2/5(36 - 2a) + 0/5(-6)(-\sqrt{36 - 4a}) = 12\sqrt{2} + 15$$

$$90 - 5a + 3\sqrt{36 - 4a} = 12\sqrt{2} + 15$$

جای گذاری گزینه‌ها:

$$1) a = 1: 90 - 5 + 3\sqrt{32} = 12\sqrt{2} + 15$$

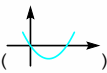
$$15 + 12\sqrt{2} = 12\sqrt{2} + 15 \quad \checkmark$$

متوسط

۳۴- گزینه «ا»

نکته اول: در معادله سهمی وقتی $c = 0$ است پس سهمی از مبدأ مختصات می‌گذرد.

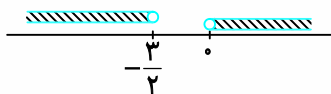
نکته دوم: سهمی که از مبدأ مختصات بگذرد و از ناحیه سوم نگذرد به صورت



() خواهد بود پس $a > 0$, $b < 0$, $c = 0$ است و همچنین $\Delta > 0$.

$$(1) a > 0 \quad (2) 3 + 2a < 0 \quad (3) b^2 - 4ac > 0 \Rightarrow (3 + 2a)^2 - 0 > 0$$

با توجه به شرط (۱) و (۲) داریم:



در نتیجه شرط اول و دوم هیچ اشتراکی ندارد پس هیچ مقدار a جواب سوال است.

متوسط

۳۵- گزینه «۳»

نکته سوال: اگر یک ریشه معادله درجه دو k برابر ریشه دیگری

$$\frac{b^2}{ac} = \frac{(k+1)^2}{k}$$

در نتیجه:

$$\frac{a^2}{12} = \frac{(3+1)^2}{3} \Rightarrow \frac{a^2}{12} = \frac{16}{3} \Rightarrow a^2 = 2^6 \Rightarrow a = \pm 8$$

پس اختلاف این دو مقدار ۱۶ واحد است.

$$|-8 - 8| = 16$$

دشوار

۳۰- گزینه «ا»

$$x^2 + x - 5 = 0 \Rightarrow s = -1, p = -5$$

خب حالا بریم به ایده داشته باشیم برای ساختن ریشه‌های جدید:
اگر معادله را مرتب کنیم خواهیم داشت:

$$x^2 + x = 5$$

$$x(x+1) = 5 \xrightarrow[\text{با شرط } x \neq 0]{\text{طرفین تقسیم بر } x} (x+1) = \frac{5}{x} \xrightarrow[\text{طرفین معکوس}]{\frac{1}{x+1}} \frac{1}{x+1} = \frac{x}{5}$$

$$\xrightarrow[\text{به توان ۳}]{\text{طرفین}} \frac{1}{(x+1)^3} = \frac{x^3}{125}$$

پس باید معادله درجه دومی ($x^3 - sx + p = 0$) بنویسیم که ریشه‌های آن

$$\frac{x_1^3}{125}, \frac{x_2^3}{125}$$

$$\text{جدید } s = \frac{x_1^3 + x_2^3}{125} = \frac{s^3 - 3ps}{125} = \frac{(-1)^3 - 3(-5)}{125} = \frac{-1 - 15}{125} = \frac{-16}{125}$$

$$\text{جدید } p = \frac{(x_1 x_2)^3}{(125)^2} = \frac{p^3}{(125)^2} = \frac{(-5)^3}{(125)^2} = \frac{-125}{(125)^2} = -\frac{1}{125}$$

$$x^2 - sx + p = 0 \Rightarrow x^2 + \frac{16}{125}x - \frac{1}{125} = 0 \Rightarrow 125x^2 + 16x - 1 = 0$$

دشوار

۳۱- گزینه «۴»

بارها گفتیم که از کنکور ۱۴۰۰ به بعد منتظر محاسبات عجیب و غریب باشید!
اول عبارت را مرتب کنید:

$$(\sqrt[3]{x^2} + \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} + 1)(\sqrt[3]{x^2} - 1) = 2\sqrt[3]{x}$$

$$\sqrt[3]{x^4} - \sqrt[3]{x^2} + 1 - \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} + \sqrt[3]{x^2} - 1 = 2\sqrt[3]{x}$$

$$x\sqrt[3]{x} - \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} - 2\sqrt[3]{x} = 0$$

$$(x-2)\sqrt[3]{x} = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} \xrightarrow[\text{طرفین وسطین}]{(x-2)x=1} (x-2)x=1 \Rightarrow x^2 - 2x - 1 = 0$$

حالا از رابطه $s = \frac{-b}{a}$ مجموع ریشه‌ها را به دست آوریم:

$$s = -\frac{b}{a} = -\frac{(-2)}{1} = 2$$

متوسط

۳۲- گزینه «ا»

اولین نکته این که مقدار تابع یعنی $y = -\frac{\Delta}{4a}$ پس:

$$2 = \frac{-(b^2 - 4ac)}{4a} \Rightarrow 2 = \frac{-(144 - 4(\Delta m^2 - m))}{4m}$$

$$4m = -144 + 4(\Delta m^2 - m) \Rightarrow 4m = -144 + 4\Delta m^2 - 4m$$

$$0 = 4\Delta m^2 - 8m - 144 \Rightarrow 0 = \Delta m^2 - 2m - 36 \Rightarrow (\Delta m + 12)(m - 3) = 0$$

$$m = -\frac{12}{\Delta}, m = 3$$

نکته دوم این که چون گفته کم‌ترین مقدار پس دهنه سهمی باید به سمت بالا باشد پس m باید مثبت باشد در نتیجه:

$$y = 3x^2 - 12x + 14$$

نکته سوم این که معادله محور تقارن همون معادله $x_s = -\frac{b}{2a}$ است پس

$$x_s = \frac{12}{6} = 2$$

دشوار

۳۹- گزینه «۳»

نکته اول سوال دو نقطه با عرض‌های یکسان هست پس: $x_S = \frac{-5+3}{2}$

نکته دوم نقطه رأس سهمی به مختصات $(1, -1)$ داده شده پس با توجه به معادله

$y = a(x - x_S)^2 + y_S$ خواهیم داشت: $y = a(x+1)^2 + 1$ که با توجه به اتحاد

مربع کامل $1 + 2ax + ax^2 = y$ در نتیجه $s = \frac{-2a}{a}$ و $p = \frac{a+1}{a}$

نکته سوم این که در سوال $\alpha^2 + \beta^2$ را که می‌دانیم با $s^2 - 2p$ برابر است

داده پس:

$$s^2 - 2p = 5 \Rightarrow 4 - 2\left(\frac{a+1}{a}\right) = 5 \Rightarrow 4a - 2a - 2 - 5a = 0$$

$$\Rightarrow -2 = 3a \Rightarrow a = -\frac{2}{3}$$

نکته چهارم: محل برخورد سهمی با محور y ها، همان c است پس:

$$c = a + 1 = -\frac{2}{3} + 1 = \frac{1}{3}$$

دشوار

۴۰- گزینه «۴»

در مرحله اول از معادله $ax^2 - ax - b = 0$ خواهیم داشت:

$$s = \alpha + \beta = 1$$

$$p = \alpha\beta = -\frac{b}{a}$$

همچنین از آن جایی که $\alpha = 1 - \beta$ با ضرب β در طرفین خواهیم

$$p = -\frac{b}{a} = \beta(1 - \beta) \text{ پس: } \alpha\beta = \beta(1 - \beta)$$

حالا می‌رویم سر اطلاعات دوم و ابتدا کار $40\beta^2$ را به $20\beta^2 + 20\beta^2$ تبدیل

می‌کنیم پس:

$$20\beta^2 + 20\alpha^2 + 20\beta^2 - 20\beta = 17 \Rightarrow 20(\alpha^2 + \beta^2) + 20\beta(\beta - 1) = 17$$

$$20(\alpha^2 + \beta^2) - 20\beta(1 - \beta) = 17 \Rightarrow 20(s^2 - 2p) - 20p = 17$$

$$20(1 - 2p) - 20p = 17 \Rightarrow 20 - 40p - 20p = 17 \Rightarrow 60p = 3$$

$$\Rightarrow p = \frac{3}{60} = \frac{1}{20}$$

$$\text{اختلاف ریشه‌ها} = \sqrt{s^2 - 4p} = \sqrt{1 - 4\left(\frac{1}{20}\right)} = \sqrt{\frac{4}{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

دشوار

۳۲- گزینه «۴»

اول x و y رأس سهمی را به دست آورید:

$$x_S = \frac{-b}{2a} = \frac{4}{2k} = \frac{2}{k}$$

$$y_S = \frac{-\Delta}{4a} = \frac{-b^2 + 4ac}{4a} = \frac{-16 + 4(-6k)}{4k} = \frac{-16 - 24k}{4k} = \frac{-4 - 6k}{k}$$

حال این x و y را در معادله خط جای گذاری می‌کنیم:

$$\frac{-4 - 6k}{k} = -4\left(\frac{2}{k}\right) - 4$$

$$\frac{-4 - 6k}{k} = \frac{-8}{k} - 4 \Rightarrow \frac{-4 - 6k}{k} = \frac{-8 - 4k}{k} \Rightarrow -2k = -4 \Rightarrow k = 2$$

$$\text{پس از رابطه } y_S = \frac{-4 - 6k}{k}$$

$$y_S = \frac{-4 - 12}{2} = \frac{-16}{2} = -8$$

دشوار

۳۷- گزینه «۳»

نکته سوال: حواستون باشه هر موقع ریشه‌های مشترک را خواستند

باید $y_1 = y_2$ پس:

$$x^2 + 2x - 3m = x^2 + 6x + m \Rightarrow -4m = 4x \Rightarrow -m = x$$

پس ریشه مشترک $-m$ است.

$$m^2 - 6m + m = 0 \Rightarrow m^2 - 5m = 0 \Rightarrow m(m - 5) = 0 \Rightarrow m = 0, m = 5$$

$m = 0$ غیر قابل قبول است. (ریشه مشترک مخالف صفر است) و اگر $m = 5$

را در نظر بگیریم $x^2 + 6x + 5 = 0$ که ریشه‌های آن $x = -1, x = -5$

اگر در معادله دیگر قرار دهیم $x^2 + 2x - 15 = 0$ که ریشه‌های آن

$$x = -5, x = 3$$

اختلاف ریشه‌های غیر مشترک ۴ واحد است.

متوسط

۳۸- گزینه «۳»

نکته اول سوال این که محور تقارن دو سهمی مشترک هستند پس x_S در دو

سهمی را مساوی قرار می‌دهیم پس:

$$x_S = -\frac{b}{2a} \Rightarrow \frac{-a}{2} = -1 \Rightarrow a = 2$$

نکته دوم سوال این هست که دو نقطه با عرض یکسان یعنی $y = 1$ در هر دو

معادله صدق می‌کند و x های یکسان تولید می‌کند پس:

$$x^2 + 2x - 2 = 1 \Rightarrow x^2 + 2x = 3$$

$$-x^2 - 2x + b = 1 \Rightarrow -(x^2 + 2x) + b = 1$$

$$\xrightarrow{x^2 + 2x = 3} -3 + b = 1 \Rightarrow b = 4$$

پس $ab = 8$

اون‌هایی قابل قبول هستند که مخرج هیچ کسری و صفر نکنند پس یادت نره
حتما چک کنی:

$$x = -2 \Rightarrow \text{مخرج کسر اول و سوم رو صفر میکنه}$$

$$x = 4 \Rightarrow \text{مخرج هیچ کسری و صفر نمیکنه}$$

پس فقط جواب معادله $x = 4$ است.

(ب) باز هم شبیه قسمت (ب) عمل می‌کنیم:

$$\frac{2x}{x^2-1} + \frac{2}{x+1} - \frac{2-x}{x^2-x} = 0$$

$$\left\{ \begin{array}{l} (x-1)(x+1) \\ x+1 \\ x(x-1) \end{array} \right\} \Rightarrow \text{مخرج‌ها} \Rightarrow x(x^2-1) = x(x-1)(x+1)$$

$$\frac{2x(x) + 2x(x-1) - (2-x)(x+1)}{x(x^2-1)} = 0$$

$$\Rightarrow 2x^2 + 2x^2 - 2x + x^2 - x - 2 = 0 \Rightarrow 5x^2 - 3x - 2 = 0$$

$$\xrightarrow{\text{جمع ضرایب}} x = 1, x = -\frac{2}{5}$$

$$x = -\frac{2}{5} \Rightarrow \text{ریشه مخرج کسر اول و سوم است پس (غ ق) است اما}$$

قابل قبول است.

(ت) باز هم اول همه رو بیارید یک طرف و مخرج مشترک بگیر فقط قبلش حواست

$$\text{باشه که } y^2 - 9 = (y-3)(y+3) \text{ اما نوی کسر آخر } (3-y) \text{ داریم پس}$$

همون اول قرینه کن و منفی رو نوی کسر تاثیر بده:

$$\frac{y+2}{y+3} - \frac{y^2}{y^2-9} - 1 - \frac{y-1}{y-3} = 0$$

$$\Rightarrow (y+2)(y-3) - y^2 - (y^2-9) - (y-1)(y+3) = 0$$

$$\Rightarrow -2y^2 - 3y + 6 = 0 \Rightarrow \Delta = 57 \Rightarrow y = \frac{3 \pm \sqrt{57}}{-4} = \frac{-3 \pm \sqrt{57}}{4}$$

هر دو جواب قابل قبول هستند زیرا ریشه هیچ مخرجی از کسرهای معادله نیستند.
(ث)

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x-2} - 5 = 0 \Rightarrow \frac{x-2+x-5x(x-2)}{x(x-2)} = 0$$

$$\Rightarrow 2x - 2 - 5x^2 + 10x = 0 \Rightarrow -5x^2 + 12x - 2 = 0$$

$$\Rightarrow 5x^2 - 12x + 2 = 0 \Rightarrow \Delta = 104 \Rightarrow x = \frac{12 \pm \sqrt{104}}{10} = \frac{6 \pm \sqrt{26}}{5}$$

هر دو جواب قابل قبول هستند.

(ج) حواست هست که مخرج دوتا کسر یکی هست!؟

$$\frac{2x}{x-3} + \frac{x+1}{x+4} - \frac{x-1}{x-3} = 0 \Rightarrow \frac{2x-x+1}{x-3} + \frac{x+1}{x+4} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{(x+1)(x+4) + (x+1)(x-3)}{(x-3)(x+4)} = 0 \Rightarrow 2x^2 + 3x + 1 = 0$$

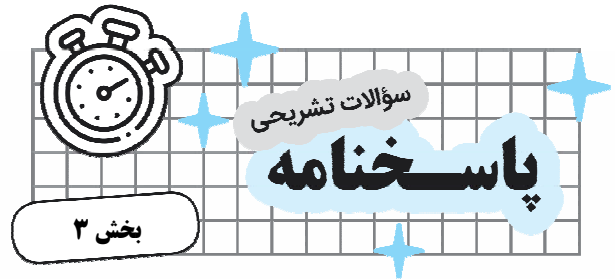
$$\Rightarrow x = -1, x = -\frac{1}{2} \Rightarrow \text{هر دو جواب قابل قبول هستند.}$$

(چ) اگر یکم دقت کنی می‌بینی که مخرج کسر سمت راستی از ضرب دوتا مخرج

کسرهای سمت چپی به دست میاد پس همون رو به عنوان مخرج مشترک در نظر بگیر:

$$\frac{x(x-1) + 2(2x-3) + 3x(1)}{2x^2-5x+3} = 0 \Rightarrow x^2 - x + 6x - 9 + 3x = 0$$

$$\Rightarrow x^2 + 8x - 9 = 0 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 1 \text{ ق ق} \\ x = -9 \text{ ق ق} \end{array} \right. \Rightarrow x = -9$$



آسان

-۱

(آ) برای حل معادلات کسری باید کسرها رو یکی کنیم. یادت باشه که راه حل یکی کردن کسرها مخرج مشترک گرفتنه. پس به مخرج کسرها نگاه کن و ببین ک.م.م (کوچک‌ترین مضرب مشترک) بین مخرج‌ها چی هست به عبارتی ببین چه عبارتی رو به عنوان مخرج کسری که بر همه مخرج‌ها بخش‌پذیر باشه می‌توان در نظر گرفت. اینجا چون مخرج کسر اول به مخرج کسر دوم بخش‌پذیر هست، همون میشه ک.م.م بین مخرج‌ها:

$$\frac{1}{(x-2)^2} + \frac{2(x-2)}{(x-2)(x-2)} \Rightarrow \frac{1+2x-4}{(x-2)^2} = 3 \Rightarrow \frac{2x-3}{x^2-4x+4} = \frac{3}{1}$$

حالا می‌توانم طرفین وسطین کنم. راه دیگه این بود که ۳ روهم به سمت چپ بیارم و مخرج مشترک با کسرها بگیرم.

$$3x^2 - 12x + 12 = 2x - 3 \Rightarrow 3x^2 - 14x + 15 = 0$$

$$\Rightarrow (x-3)(3x-5) = 0 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 3 \text{ ق ق} \\ x = \frac{5}{3} \text{ ق ق} \end{array} \right.$$

برای قسمت (آ) از تغییر متغیر هم می‌توان استفاده کرد:

$$\frac{1}{(x-2)} = t$$

$$t^2 + 2t = 3 \Rightarrow t^2 + 2t - 3 = 0 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} t = 1 \Rightarrow x = 3 \\ t = -3 \Rightarrow x = \frac{5}{3} \end{array} \right.$$

هر دو جواب قابل قبول هستند چون هیچ مخرجی رو صفر نمی‌کنند.

(ب) سه تا مخرج داریم، که بین دوتای اون، عبارت مشترک داریم پس بیا همه رو بیاریم یک طرف و ک.م.م بگیریم:

$$\frac{3}{x+2} + \frac{2}{x} - \frac{4x-4}{x^2-4} = 0$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x+2 \\ x \\ x^2-4 = (x-2)(x+2) \end{array} \right\} \Rightarrow \text{مخرج‌ها} \Rightarrow x(x-2)(x+2) = x(x-2)(x+2)$$

حالا صورت هر کسر رو در عبارتی ضرب می‌کنیم که مخرج کسرش اون عبارت رو نسبت به ک.م.م کم داشته باشه (دقیقا شبیه مخرج مشترک کسرهای عددی)

$$\frac{3x(x-2) + 2(x^2-4) - (4x-4)(x)}{x(x^2-4)} = 0$$

می‌دانیم کسری برابر صفر هست که صورت آن صفر باشه پس دیگه با مخرج کسر کار نداریم پس:

$$x^2 - 2x - 8 = 0 \Rightarrow (x-4)(x+2) = 0 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 4 \\ x = -2 \end{array} \right.$$

یه نکته مهم رو همین‌جا یاد بگیر: هر جوابی که از حل معادله کسری به دست میاد ممکنه قابل قبول نباشه.

متوسط

-۵

اگر بخواد این معادله جواب نداشته باشه پس به ازای هیچ مقداری از x نباید جوابی به ما بدهد، با طرفین وسطین کردن معادله داریم:

$$mx - m = 2x + 1$$

با مقایسه جمله به جمله سمت چپ و راست، باید گفت که برای این که معادله جواب نداشته باشه لازم هست که مقدار m برابر ۲ بشه. چرا؟

$$x(m - 2) = m + 1 \Rightarrow x = \frac{m+1}{m-2}$$

و اینکه زمانی فاقد معنی است (بی معنی است) که مخرج صفر بشه یعنی m برابر ۲ بشه پس $m = 2$

آسان

-۶

برای حل مسائلی از این قبیل لازم هست اول مسئله رو با دقت بخونی تا ببینی دقیقاً موضوع بر سر چی هست و بعد سه مورد رو در جدول در نظر بگیری، دو مورد تک تک افراد یا موضوعات مساله هست در مورد سوم افراد باهم یا موضوعات همزمان هست مثلاً تو این مساله نقاش اول، نقاش دوم و هر دو باهم سه مورد جدول هستند. صحبت از اتمام یک کار هست و زمان روز هشتش پس اول تعداد روزها رو مشخص می کنیم و بعد مقدار کاری که هر سه مورد در یک واحد زمانی (یک روز) رو کار می کنند در نظر می گیریم:

و معادله می نویسم و حل می کنیم:

مقدار کار در یک روز	تعداد روزها	
$\frac{1}{t-15}$	$t-15$	نقاش اول
$\frac{1}{t}$	t	نقاش دوم
$\frac{1}{4}$	4	باهم

$$\frac{1}{t-15} + \frac{1}{t} = \frac{1}{4} \Rightarrow 4t + 4t - 60 = t^2 - 15t \Rightarrow t^2 - 23t + 60 = 0$$

$$\Rightarrow (t-20)(t-3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} t=3 \text{ غ ق ق می کند.} \\ t=20 \text{ غ ق ق} \end{cases}$$

پس نقاش اول در ۵ روز و نقاش دوم در ۲۰ روز به تنهایی کار انجام می دهند.

آسان

-۷

مساله شبیه سوال ۶ هست با این تفاوت که به جای مدت زمان کار کردن، صحبت از سرعت کار هست و اصول حل سوال همون هست که در سوال ۶ داریم:

فرض کردیم سرعت کار ماشین B دو برابر سرعت کار ماشین A باشه پس تعداد ساعتی که ماشین A صرف انجام کار می کنه دو برابر همین زمان برای ماشین B هست.

مقدار کار در یک ساعت	تعداد ساعت	
$\frac{1}{2t}$	$2t$	ماشین A
$\frac{1}{t}$	t	ماشین B
$\frac{1}{4}$	4	باهم A, B

$$\Rightarrow \frac{1}{2t} + \frac{1}{t} = \frac{1}{4} \xrightarrow{\times 4t} 2 + 4 = t \Rightarrow t = 6 \Rightarrow 2t = 12$$

ماشین B در ۶ ساعت کار را تمام می کند.

ماشین A کار رو در ۱۲ ساعت تموم می کنه.

متوسط

-۲

(آ سوال اینه: آیا میشه تو معادلات کسری، صورت و مخرج رو به یک عبارت جبری ساده کرد؟ و پاسخ این هست که بله میشه ساده کرد و چون می دونیم در معادلات کسری مخرج باید مخالف صفر باشد و بنابراین قابلیت ساده کردن رو داره:

$$\frac{2x(x-4)}{x-4} = x^2 + x - 12 \Rightarrow 2x = x^2 + x - 12 \Rightarrow x^2 - x - 12 = 0$$

$$\Rightarrow (x+3)(x-4) = 0 \Rightarrow x = -3 \text{ غ ق ق}, x = 4 \text{ غ ق ق}$$

(ب) تو این قسمت هم سوال که پیش میاد اینه که آیا میشه از طرفین یک معادله (حالا

کسری یا غیر کسری) یک عبارت جبری رو ساده کرد؟ و پاسخ اینه که میشه ساده کرد و فقط یک شرط داره اونم اینه که ریشه آن عبارت (اگر ریشه داشت) هم یک

جواب معادله هشتش:

$$\frac{x+3}{x-1} = \frac{(x-3)(x+3)}{2} \Rightarrow \frac{1}{x-2} = \frac{x-3}{2}, x+3=0$$

$$\Rightarrow x = -3 \text{ (ریشه مخرج نیست) ق ق} \xrightarrow{\text{طرفین وسطین}} x^2 - 5x + 6 = 2$$

$$\Rightarrow x^2 - 5x + 4 = 0 \Rightarrow x = 1 \text{ غ ق ق}, x = 4 \text{ غ ق ق}$$

آسان

-۳

اگر $x = 2$ یک جواب برای معادله هست معنی این هشتش که در معادله صدق می کنه:

$$x = 2 \Rightarrow \frac{2}{2} + \frac{2k}{1} = 5 \Rightarrow 2k = 4 \Rightarrow k = 2$$

حالا k رو در معادله جایگزین کنیم و بریم سراغ محاسبه ریشه دیگر:

$$\frac{2}{x} + \frac{2x}{x-1} = 5$$

می دونی یک از روش های دیگر حل معادله گویا اینه که همه عبارت ها رو در همون ک.م.م ضرب کنی؟

مثلاً اینجا همه رو در $x(x-1)$ ضرب کن:

$$2(x-1) + 2x(x) - 5x(x-1) = 0$$

$$\Rightarrow 2x - 2 + 2x^2 - 5x^2 + 5x = 0 \Rightarrow -3x^2 + 7x - 2 = 0$$

$$\Rightarrow 3x^2 - 7x + 2 = 0 \Rightarrow (3x-1)(x-2) = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{3} \text{ ق ق}, x = 2 \text{ ق ق}$$

جواب ۲ رو که خود سوال داده بود پس جواب دیگر $(x = \frac{1}{3})$ است.

متوسط

-۴

اول کار بریم صورت و مخرج کسر اول رو به ۲ ساده کنیم:

$$\frac{x}{x+3} + \frac{3-x}{x-1} = \frac{ax+b}{x^2+2x-3}$$

حالا اگه به کم دقت کنیم می بینیم که مخرج کسر سمت راست تساوی دو ضرب مخرج های سمت چپ تساوی به دست میاد پس دو کسر سمت چپ رو هم مخرج کنیم:

$$\frac{x^2 - x^2 + 9}{(x+3)(x-1)} = \frac{ax+b}{x^2+2x-3} \Rightarrow \frac{-x+9}{x^2+2x-3} = \frac{ax+b}{x^2+2x-3}$$

از اونجایی که می دونیم کسر با مخرج های مساوی داریم، بنابراین زمانی معادله بی شمار جواب داره که صورت ها همواره برابر باشند (فارغ از اینکه مقدار x چی هست!) بنابراین a باید مساوی ۱- یعنی ضریب x باشه و b برابر با ۹ باشه پس:

$$a = -1, b = 9$$

آسان

-۱۱

حتما می‌دونی که به مستطیلی که طول و عرض اون، متناسب با نسبت طلایی باشه، مستطیل طلایی می‌گویم. معنی این تناسب این هست که نسبت طول به عرض، برابر با نسبت مجموع طول و عرض به طول باشه، به عبارتی:

L

ω

$$\frac{L}{\omega} = \frac{\omega + L}{L}$$

حالا در این مساله، طول و عرض زمین ورزشی متناسب با نسبت طلایی هستند

پس:

x

y

$$\frac{x}{y} = \frac{x+y}{x}$$

از طرفی محیط برابر ۴۴ هست یعنی:

$$x + y = 72 \text{ پس } 2(x + y) = 144$$

و به عبارتی $y = 72 - x$ با جایگذاری در تناسب داریم:

$$\frac{x}{72-x} = \frac{72}{x} \Rightarrow x^2 + 72x - (72)^2 = 0$$

$$\Rightarrow x = \frac{-72 \pm \sqrt{5 \times 72^2}}{2} = \frac{-72 \pm \sqrt{5} \times 72}{2}$$

$$\Rightarrow x = \frac{-72 + 72\sqrt{5}}{2} = 36\sqrt{5} - 36, \text{ منفی غیر قابل قبول است}$$

$$y = 72 - (36\sqrt{5} - 36) = 108 - 36\sqrt{5}$$

متوسط

-۱۲

فرض کنیم پدربزرگ تعداد n اسباب بازی با قیمت x تومان گرفته پس $nx = 120000$ یعنی:

$$n = \frac{120000}{x} \quad (1)$$

اگر برای هر اسباب بازی هزار تومان تخفیف بگیرد یعنی $x - 1000$ ، تعداد اسباب بازی‌ها به $(n + 4)$ می‌رسد:

$$n + 4 = \frac{120000}{x - 1000} \Rightarrow n = \frac{120000}{x - 1000} - 4 \quad (2)$$

با مقایسه (۱) و (۲) داریم:

$$\frac{120000}{x} = \frac{120000}{x - 1000} - 4 \Rightarrow \frac{120000x - 120000x + 12000000}{x(x - 1000)} = 4$$

$$\frac{\div 4}{\rightarrow} 3000000 = x^2 - 1000x \Rightarrow x^2 - 1000x - 3000000 = 0$$

$$\Rightarrow (x - 6000)(x + 5000) = 0 \Rightarrow x = 6000 \text{ یا } x = -5000 \text{ غ ق ق غ}$$

متوسط

-۸

اگر سرعت حرکت کشتی رو V در نظر بگیریم، از فیزیک می‌دونی که $V = \frac{x}{t}$ و

بنابراین $t = \frac{x}{V}$ مدت زمان رفت برابر $\frac{144}{V}$ هست اما طبق توضیحات مساله

مدت زمان برگشت برابر $\frac{144}{V-8}$ است پس از ۲ ساعت توقف و با در نظر گرفتن

اینکه مجموع مدت زمان سفر رفت و برگشت ۱۷ است داریم:

$$\frac{144}{V} + \frac{144}{V-8} + 2 = 17 \Rightarrow 144(V-8+V) = 15V(V-8)$$

$$\Rightarrow 288V - 1152 = 15V^2 - 120V \Rightarrow 15V^2 - 408V + 1152 = 0$$

$$\Delta = (-408)^2 - 4(15)(1152) = 97344 \Rightarrow V = \frac{408 \pm 312}{30}$$

سرعت حرکت کشتی در جهت آب ۲۴ کیلومتر بر ساعت است $\Rightarrow$ ق ق ۲۴ $V = 24$
زیرا سرعت در خلا جهت جریان آب ۸ کیلومتر کمتر است و غیرممکن است $\Rightarrow$ غ ق ۳ $V = 3$

متوسط

-۹

خب این مسئله رو به راحتی با تناسب حل می‌کنیم. پس بیا اول ببینیم تو آب نمکی، که کارگر درست کرده چقدر نمک وجود دارد و بعد نسبت نمک به محلول رو مقایسه کنیم. ۲۰۰ کیلوگرم آب نمک ۴ درصدی داریم:

$$\frac{4}{100} \times 200 = 8 \text{ kg مقدار نمک}$$

۵ کیلوگرم نمک موجود داریم، که اضافه می‌کنیم و فرض کنیم به مقدار x باید از محلول تبخیر کنیم، پس نسبت نمک محلول می‌شه:

$$\frac{8+5}{200+5-x}$$

(حواست باشه، که درسته ۵ کیلوگرم نمک اضافه کردیم اما به هر حال به مقدار وزن کل محلول هم ۵ کیلو اضافه شده پس ۵ روه‌م در صورت و هم مخرج اضافه کن!) حالا قرار هست این نسبت به ۷ درصد برسه پس:

$$\frac{13}{205-x} = \frac{7}{100} \Rightarrow 1435 - 7x = 1300 \Rightarrow 7x = 135 \Rightarrow x \cong 19/3$$

پس کارگر باید تقریباً ۳/۱۹ کیلوگرم آب را تبخیر کند.

متوسط

-۱۰

این مساله هم شبیه به مساله قبل هست فقط باید حواست به مجهول‌ها باشه:

$$A: \frac{50}{100} \times (3n + 10) = \frac{1}{2} (3n + 10) = \frac{3}{2}n + 5$$

$$B: \text{مقدار حل شونده در ظرف B} = \frac{n}{100} \times 50 = \frac{n}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{\frac{3}{2}n + 5 + \frac{n}{2} + 7n + \frac{5}{2}}{3n + 10 + 50 + 7n + \frac{5}{2}} = \frac{60}{100} \text{ (حل شونده) محلول}$$

$$\Rightarrow \frac{9n + \frac{15}{2}}{10n + \frac{125}{2}} = \frac{6}{10} \Rightarrow 90n + 75 = 60n + 375 \Rightarrow 30n = 300 \Rightarrow n = 10$$

۱۳-

آسان

از آنجایی که میانگین کل آزمون‌های آرمان رو داریم پس تعداد کل آزمون‌ها و تعداد کل امتیازات رو پیدا می‌کنیم:

اگر تعداد آزمون‌هایی که ۹ گرفته رو n در نظر بگیریم پس تعداد کل آزمون‌ها $(n+5)$ هست

از طرفی تعداد کل امتیازات برابر جمع ۳۶ با $9n$ (تعداد آزمون‌های ۹ امتیازی ضربدر امتیازش) است یعنی $36 + 9n$ پس داریم:

$$\frac{36 + 9n}{5 + n} = 8 \Rightarrow 36 + 9n = 8n + 40 \Rightarrow n = 4$$

جواب قابل قبول است پس آرمان در چهار آزمون متوالی امتیاز ۹ گرفته است.

۱۴-

متوسط

اول اینو بگم که برای حل معادلات گنگ (رادیکالی)، راه حل، توان رسانی هست حتی گاهی نیاز هست دوبار توان رسانی رو انجام بدیم، تنها نکته‌ای که این راه حل داره اینه که توان رسانی گاهی جواب‌های اضافی تولید می‌کنه، به همین دلیل باید جواب‌ها رو توی معادله صدق بدی (جایگذاری کنی) چون هم ممکنه زیر رادیکال رو منفی کنن هم عبارت جلوی رادیکال رو.

$$(A) \quad \sqrt{x+2} = x-4 \xrightarrow{\text{توان } 2} x+2 = (x-4)^2$$

$$\Rightarrow x+2 = x^2 - 8x + 16$$

$$\Rightarrow x^2 - 9x + 14 = 0 \Rightarrow (x-2)(x-7) = 0 \Rightarrow x=2, x=7$$

حالا جواب‌ها و امتحان می‌کنیم:

$$x=2 \Rightarrow \sqrt{2+2} = \sqrt{4} = 2-4 \Rightarrow \text{منفی غ ق ق}$$

$$x=7 \Rightarrow \sqrt{7+2} = \sqrt{9} = 7-4 \Rightarrow 3=3 \text{ ق ق ق}$$

$$2\sqrt{x} = \sqrt{3x+4} \xrightarrow{\text{توان } 2} 4x = 3x+4 \Rightarrow x=4 \text{ ق ق ق (ب)}$$

پ) از اونجایی که می‌دونیم برای حل معادله‌ی رادیکالی لازم هست زیر رادیکال نامنفی باشه پس می‌دونیم $x \geq 0$ و بنابراین می‌تونیم با کمک اتحاد برای حاصل، مزدوج بنویسیم:

$$1-x = (1-\sqrt{x})(1+\sqrt{x})$$

در این صورت طبق نکته‌ای که در پاسخ سوال ۲ اومده بود داریم:

$$\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}} = \frac{(1-\sqrt{x})(1+\sqrt{x})}{(1+\sqrt{x})(1+\sqrt{x})}$$

(یادت نره این معادله رو هم در نظر بگیر!) (یادت نره این معادله رو هم در نظر بگیر!)

$$\Rightarrow \frac{1}{1+\sqrt{x}} = 1+\sqrt{x} \text{ یا } 1-\sqrt{x} = 0$$

$$\begin{cases} 1-\sqrt{x} = 0 \Rightarrow \sqrt{x} = 1 \Rightarrow x=1 \text{ ق ق ق} \\ (1+\sqrt{x})^2 = 1 \Rightarrow 1+\sqrt{x} = 1 \Rightarrow \sqrt{x} = 0 \Rightarrow x=0 \text{ ق ق ق} \\ 1+\sqrt{x} = -1 \Rightarrow \sqrt{x} = -2 \text{ ق ق ق غ} \end{cases}$$

پس $x=0$ و $x=1$ جواب‌های مسئله هستند.

ت) یک معادله‌ی گویا و رادیکالی با هم داریم. اول مخرج مشترک بگیریم:

$$(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-2) = x-4$$

$$\Rightarrow 5(\sqrt{x}-2) - 2(x-4) + 1(\sqrt{x}+2) = 0 \Rightarrow 6\sqrt{x} - 2x = 0$$

$$2\sqrt{x}(3-\sqrt{x}) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{x} = 0 \Rightarrow x=0 \text{ ق ق ق} \\ 3-\sqrt{x} = 0 \Rightarrow \sqrt{x} = 3 \Rightarrow x=9 \text{ ق ق ق} \end{cases}$$

ث)

$$(\sqrt{x+3} + \sqrt{3x+1})^2 = 4^2$$

$$\Rightarrow x+3+3x+1+2\sqrt{(x+3)(3x+1)} = 16$$

$$\Rightarrow 2\sqrt{3x^2+10x+3} = 12-4x \Rightarrow \sqrt{3x^2+10x+3} = 6-2x$$

$$\xrightarrow{\text{توان } 2} 3x^2+10x+3 = 36-24x+4x^2 \Rightarrow x^2-24x+33 = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=1 \Rightarrow \sqrt{4} + \sqrt{4} = 4 \Rightarrow \text{ق ق ق} \\ x=23 \Rightarrow \sqrt{36} + \sqrt{100} = 4 \Rightarrow \text{غ ق ق} \end{cases}$$

ج) چون سمت راست تساوی عددی نداریم، بهتر است هر کسر رو در یک سمت تساوی نگه داریم و از طرفین وسطین استفاده کنیم:

$$\frac{1}{\sqrt{u-3}} = \frac{2}{\sqrt{u}} \Rightarrow 2\sqrt{u-3} = \sqrt{u} \Rightarrow 4(u-3) = u$$

$$\Rightarrow 4u-12=0 \Rightarrow 3u=12 \Rightarrow u=4$$

حواست باشه که $u=4$ ، هم نباید زیر رادیکال‌ها رو منفی کنه هم نباید مخرج کسرها رو صفر کنه!

$$\frac{1}{\sqrt{4-3}} = \frac{2}{\sqrt{4}} \Rightarrow 1 = \frac{2}{2} \Rightarrow u=4 \text{ قابل قبول هست.}$$

ج) بهتره رادیکال را تنها کنیم:

$$\sqrt{2x^2-5x+2} = x-2$$

$$\xrightarrow{\text{توان } 2} 2x^2-5x+2 = x^2-4x+4 \Rightarrow x^2-x-2 = 0 \xrightarrow{a+c=b}$$

$$\begin{cases} x=-1 \Rightarrow \sqrt{9} = -1-2 \Rightarrow \text{غ ق ق} \\ x=2 \Rightarrow \sqrt{10-10} = 2-2 \Rightarrow \text{ق ق ق} \end{cases} \Rightarrow x=2$$

ح)

$$\sqrt{m} + \frac{1}{\sqrt{m}} = 2$$

با در نظر گرفتن شرط، $m > 0$ (حواست باشه m زیر رادیکال و توی مخرج هست، همه‌ی عبارت‌ها رو در $\sqrt{m}$ ضرب می‌کنیم:

$$m+1-2\sqrt{m} = 0 \Rightarrow m+1 = 2\sqrt{m} \Rightarrow m^2+2m+1 = 4m$$

$$\Rightarrow m^2-2m+1 = 0 \Rightarrow (m-1)^2 = 0 \Rightarrow m=1 \text{ ق ق ق}$$

راه دوم حل این معادله این هست که می‌دونیم $x + \frac{1}{x} \geq 2$ برای x ‌های مثبت همواره برقرار هست و تساوی در حالتی اتفاق می‌افته که $x=1$ باشه پس:

$$\sqrt{m} = 1 \Rightarrow m=1$$

آسان

-۱۹

اول اینکه حواست باشه عدد صحیح خواسته و بعد بیا به صورت معادله آن را

بنویسیم:

$$\sqrt{x} - x = \frac{x}{2} \Rightarrow \sqrt{x} = \frac{3x}{2} \Rightarrow x = \frac{9}{4}x^2$$

$$\Rightarrow \frac{9}{4}x^2 - x = 0 \Rightarrow x(\frac{9}{4}x - 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \text{ ق ق} \\ x = \frac{4}{9} \text{ غ ق} \end{cases}$$

$\frac{4}{9}$ عدد غیر صحیح است.

مساله ۱ جواب دارد.

متوسط

-۲۰

(آ) اگر عدد را به سمت راست ببریم داریم:

$$\sqrt{t} = -2$$

اما امکان ندارد که مقدار رادیکالی منفی شود بنابراین ریشه حقیقی ندارد.

(ب) مجموع دو عبارت نامنفی برابر ۱ - نمی شود بنابراین معادله جواب ندارد.

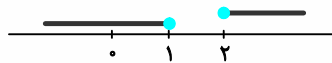
$$\sqrt{x-2} + \sqrt{2x+3} = -1$$

(پ) اشتراک این مجموعه تهی است بنابراین عددی وجود ندارد که همزمان

بتواند در دو رادیکال قرار گیرد پس فاقد جواب حقیقی است

$$1-x \geq 0 \Rightarrow 1 \geq x$$

$$x-2 \geq 0 \Rightarrow x \geq 2$$



دشوار

۱- گزینه «ا»

حواستون باشه! عبارت $t + \frac{1}{t} \geq 2$ خواهد بود اگر t مثبت باشد.

در این سوال کسر اول و آخر معکوس یکدیگرند و $0 < \frac{x^2 - x + 3}{2x^2 + x + 1}$ است.

پس مجموع آن تنها زمانی برابر ۲ خواهد شد که $\frac{x^2 - x + 3}{2x^2 + x + 1} = 1$ باشد

پس $2 > \frac{x^2 - x + 3}{2x^2 + x + 1} + \frac{2x^2 + x + 1}{x^2 - x + 3} + \frac{1}{\frac{x^2 + 1}{x^2 + 1}}$ در نتیجه طرف اول مثبت

تساوی مقداری بیش از دو تولید خواهد کرد و هیچ گاه با دو برابر نخواهد بود

پس این معادله جواب ندارد.

آسان

-۱۵

دقت کن جمع دو رادیکال برابر صفر شده و می‌دونیم رادیکال‌ها عبارت‌های

نامنفی هستند پس تنها زمانی این مجموع برابر صفر میشه که هر دو رادیکال

مساوی صفر باشند:

$$\sqrt{x^2 - 4} = 0 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2$$

$$\sqrt{x^2 - 7x + 10} = 0 \Rightarrow (x-2)(x-5) = 0 \Rightarrow x = 2, 5$$

که $x = 2$ جواب مشترک بین دو معادله است و هر دو رادیکال را صفر می‌کند

پس $x = 2$ جواب است.

متوسط

-۱۶

با توجه به اینکه زیر رادیکال‌ها عبارت‌های درجه ۲ داریم بهتر هست اول تعیین

دامنه کنیم و در صورت وجود دامنه، معادله رو حل کنیم:

$$3 - x^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 \leq 3 \Rightarrow |x| \leq \sqrt{3} \Rightarrow -\sqrt{3} \leq x \leq \sqrt{3}$$

$$x^2 - 25 \geq 0 \Rightarrow x^2 \geq 25 \Rightarrow |x| \geq 5 \Rightarrow x \leq -5 \text{ or } x \geq 5$$

همانطوری که می‌بینیم هیچ اشتراکی بین دامنه‌ها وجود ندارد پس هیچ عددی

نمی‌تونه توی هر دو رادیکال به طور همزمان قرار بگیره پس معادله جواب ندارد.

دشوار

-۱۷

همه عبارات را یک طرف تساوی می‌بریم:

$$\frac{x^2 - x + 1}{\sqrt{x - \sqrt{x+3}}} + \sqrt{x - \sqrt{x+3}} = 0$$

عبارت $(x^2 - x + 1)$ و $\sqrt{x - \sqrt{x+3}}$ هر دو مثبت هستند و جمع آن‌ها

زمانی صفر است که هر یک برابر صفر باشند و چون $(x^2 - x + 1)$ ریشه

ندارد، معادله جواب ندارد.

آسان

-۱۸

مختصات هر نقطه ای روی محور x باشه به صورت $(x, 0)$ هست. از طرفی

یادت هست که فرمول فاصله دو نقطه چی بود؟

$$|AB| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

$$\Rightarrow \sqrt{(x-2)^2 + (0-3)^2} = 5 \Rightarrow x^2 - 4x + 4 + 9 = 25$$

$$\Rightarrow x^2 - 4x - 12 = 0 \Rightarrow (x-6)(x+2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 6 \\ x = -2 \end{cases}$$

در نتیجه دو نقطه به صورت $(-2, 0)$ یا $(6, 0)$ جواب مساله است.

متوسط

۵- گزینه «پ»

در ابتدا مشخص می‌کنیم در ۴۰۰ کیلوگرم محلول چقدر نمک موجود است پس:

$$۴۰۰ \times \frac{۵}{۱۰۰} = ۲۰ \text{ کیلوگرم}$$

در ادامه ابتدا ۵ کیلوگرم نمک را به محلول اضافه می‌کنیم که خواهیم داشت:

$$\frac{۲۰+۵}{۴۰۰+۵}$$

سپس برای آنکه به غلظت مورد نظر برسیم باید آب تبخیر کنیم پس:

$$\frac{۲۵}{۴۰۵-x} = \frac{۸}{۱۰۰} \Rightarrow ۲۵۰۰ = ۳۲۴۰ - ۸x \Rightarrow ۸x = ۷۴۰$$

$$x = ۹۲/۵ \text{ کیلوگرم}$$

دشوار

۶- گزینه «ا»

$$\text{اگر } t = \sqrt{\frac{x^2+1}{x}} \text{ در نظر بگیریم خواهیم داشت:}$$

$$t^2 - 4t - 12 = 0 \Rightarrow (t-6)(t+2) = 0$$

$$t = 6, t = -2$$

$$\sqrt{\frac{x^2+1}{x}} = 6 \Rightarrow \frac{x^2+1}{x} = 36 \Rightarrow x^2+1 = 36x \Rightarrow x^2-36x+1=0$$

چون در این معادله $\Delta > 0$ و $S > 0$ و $P > 0$ پس این معادله دو ریشه مثبت دارد.

$$\sqrt{\frac{x^2+1}{x}} = -2 \text{ ریشه ندارد.}$$

دشوار

۷- گزینه «ا»

هر گاه حاصل ضرب دو پرانتز صفر شود باید تک تک پرانتزها را مساوی صفر

قرار دهیم پس:

$$x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$$

$$x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3$$

حواستون باشه! زمانی که دو عبارت در هم ضرب می‌شود ریشه مورد قبول

ریشه‌ای است که در اشتراک دامنه‌ها قرار داشته باشد و عبارتی را بی‌معنی نکند.

پس در اینجا $x = \pm 1$ قابل قبول نیستند چون در دامنه $\sqrt{x-3}$ صدق نمی‌کنند.

دشوار

۸- گزینه «پ»

عبارت رادیکال اول و دوم را به صورت اتحاد مربع کامل می‌نویسیم:

$$\sqrt{(\sqrt{x-3}+2)^2} + \sqrt{(\sqrt{x-3}-2)^2} = 8$$

$$|\sqrt{x-3}+2| + |\sqrt{x-3}-2| = 8$$

قدمت اول چون مجموع دو عبارت مثبت است پس عبارتی است مثبت:

با حل معادله قدمتقی داریم:

$$\sqrt{x-3}+2+|\sqrt{x-3}-2|=8 \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{x-3}-2 \geq 0 \Rightarrow x \geq 7 \text{ (I)} \\ \sqrt{x-3}-2 < 0 \Rightarrow x < 7 \text{ (II)} \end{cases}$$

$$\text{(I): } \sqrt{x-3}+2+\sqrt{x-3}-2=8 \Rightarrow x=19 \checkmark$$

$$\text{(II): } \sqrt{x-3}+2-\sqrt{x-3}+2=8 \Rightarrow 4=8$$

پس معادله در کل یک ریشه $x=19$ دارد.

متوسط

۲- گزینه «ا»

حواستون باشه! در عبارت گویا اگر عبارت داده شده در طرفین ریشه مخرج

باشد آن را حساب نمی‌کنیم!

در هر پرانتز مخرج مشترک بگیریم.

$$\left(\frac{2x-6-x-2}{x-3}\right)\left(\frac{x-8+x+2}{x-8}\right) = x^2-7$$

$$\left(\frac{x-8}{x-3}\right)\left(\frac{2x-6}{x-8}\right) = x^2-7 \Rightarrow \left(\frac{x-8}{x-3}\right)\left[\frac{2(x-3)}{x-8}\right] = x^2-7$$

$$2 = x^2-7 \Rightarrow 9 = x^2$$

$$\text{ق ق } x = -3 \text{ و } x = +3 \text{ غ ق (ریشه موج)}$$

چون $(x-3)$ و $(x-8)$ حاوی ریشه مخرج هستند در ریشه‌ها آن‌ها را

حساب نکردیم.

متوسط

۳- گزینه «ا»

$$\text{عبارت } t = \frac{4x-1}{x+2} \text{ پس:}$$

$$2t - \frac{3}{t} - 5 = 0 \xrightarrow{\times t} 2t^2 - 3 - 5t = 0$$

$$2t^2 - 5t - 3 = 0 \Rightarrow (2t+1)(t-3) = 0$$

$$t = -\frac{1}{2}, t = 3$$

$$\frac{4x-1}{x+2} = -\frac{1}{2} \Rightarrow 8x-2 = -x-2 \rightarrow 9x=0 \Rightarrow x=0$$

$$\frac{4x-1}{x+2} = 3 \Rightarrow 4x-1 = 3x+6 \Rightarrow x=7$$

پس اختلاف ریشه‌ها ۷ است.

دشوار

۴- گزینه «پ»

در ابتدا مدت زمان حل سوالات با هم را به ساعت تبدیل می‌کنیم، ۲۰ دقیقه

$$\text{معادل } \frac{20}{60} \text{ یعنی } \frac{1}{3} \text{ ساعت است که اگر } 1 \text{ ساعت آن را جمع کنیم } \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

ساعت است.

اگر حل شاگرد به تنهایی را با $t+2$ و مدت زمان حل دبیر را به تنهایی را با t

نمایش دهیم خواهیم داشت:

$$\frac{1}{t} + \frac{1}{t+2} = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{3}{t(t+2)} = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{2t+2}{t^2+2t} = \frac{2}{3}$$

$$3t^2 - 2t - 8 = 0 \Rightarrow (3t+4)(t-2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} t = -\frac{4}{3} \\ t = 2 \end{cases} \text{ غ ق ق}$$

پس شاگرد در $t+2=4$ ساعت کار را به تنهایی انجام می‌دهد.

۹- گزینه «۳»

دشوار

حواستون باشه! هر گاه حاصل جمع چند عبارت مثبت صفر باشد قطعا تک تک آن عبارت‌ها صفر بوده است. جواب‌های نهایی باید در اشتراک دامنه‌ها باشد.

$$x^3 - 1 = 0 \Rightarrow x^3 = 1 \Rightarrow x = 1$$

$$x^2 - 3x + 2 = 0 \Rightarrow (x-2)(x-1) = 0 \Rightarrow x = 2, x = 1$$

جواب مشترک $x = 1$ است. پس معادله یک جواب دارد.

۱۰- گزینه «۱»

متوسط

حواستون باشه! وقتی از معادلات رادیکالی صحبت می‌کنیم اگر رادیکال‌ها در دامنه خود اشتراک نداشته باشند آن معادله قطعا جواب ندارد پس:

$$1 - x \geq 0 \Rightarrow 1 \geq x$$

$$2x - 2 \geq 0 \Rightarrow x \geq 1$$

از اشتراک دامنه‌ها $x = 1$ تنها ریشه ممکن می‌تواند باشد اما با صدق $x = 1$ در معادله خواهیم داشت:

$$\sqrt{0+1} = 0 + 0 \Rightarrow 1 = 0$$

پس $x = 1$ در معادله صدق نمی‌کند در نتیجه این معادله جواب ندارد.

۱۱- گزینه «۱»

دشوار

دو ریشه به دست آمده را در رادیکال اول قرار می‌دهیم.

$$x^2 + x - 6 = 0 \Rightarrow (x+3)(x-2) = 0 \Rightarrow x = -3, x = 2$$

اشتراک پاسخ‌ها جواب مسئله است پس تنها $x = 2$ هر دو رادیکال را صفر می‌کند.

۱۲- گزینه «۴»

دشوار

با چک کردن دامنه‌ها داریم:

$$\sqrt{x-4} + \sqrt{5-x} = x-6$$

$$x-4 \geq 0 \Rightarrow x \geq 4$$

$$5-x \geq 0 \Rightarrow 5 \geq x$$

$$x-6 \geq 0 \Rightarrow x \geq 6$$

که این سه دامنه اشتراکی ندارند پس جواب تهی است.

۱۳- گزینه «۴»

آسان

چون $x = 4$ در معادله صدق می‌کند پس:

$$4 + a = \sqrt{20-16} \Rightarrow 4 + a = \sqrt{4}$$

$$4 + a = 2 \Rightarrow a = -2$$

پس معادله به صورت $x-2 = \sqrt{5x-x^2}$ با حل معادله گنگ داریم:

$$x^2 - 4x + 4 = 5x - x^2 \Rightarrow 2x^2 - 9x + 4 = 0 \Rightarrow (2x-1)(x-4) = 0$$

$$x = \frac{1}{2}, x = 4$$

$x = \frac{1}{2}$ در معادله صدق نمی‌کند پس معادله جواب دیگری ندارد.

۱۴- گزینه «۳»

دشوار

با به توان دو رساندن طرفین داریم:

$$\sqrt{1-\frac{15}{x}} + \sqrt{1+\frac{15}{x}} = \sqrt{2}$$

$$\cancel{\sqrt{1-\frac{15}{x}}} - \cancel{\sqrt{1-\frac{15}{x}}} + \cancel{\sqrt{1+\frac{15}{x}}} + \sqrt{1-\frac{225}{x^2}} = \cancel{\sqrt{1-\frac{15}{x}}}$$

$$\sqrt{1-\frac{225}{x^2}} = 0 \Rightarrow 1 - \frac{225}{x^2} = 0 \Rightarrow x^2 = 225 \begin{cases} x = +15 \text{ ق ق} \\ x = -15 \text{ ق ق} \end{cases}$$

۱۵- گزینه «۱»

متوسط

ما به دنبال حاصل

$$\sqrt{6+5\sqrt{6+5\sqrt{6+...}}}=A$$

هستیم پس می‌توانیم:

$$\sqrt{6+5\sqrt{6+5\sqrt{6+...}}}=A$$

$$\sqrt{6+5A} = A \Rightarrow 6+5A = A^2 \Rightarrow A^2 - 5A - 6 = 0$$

$$(A-6)(A+1) = 0$$

$$A = 6, A = -1$$

چون A حاصل رادیکال است منفی نمی‌تواند باشد پس $A = 6$ قابل قبول است.

۱۶- گزینه «۲»

دشوار

ابتدا طرف اول معادله را ساده و گویا می‌کنیم پس:

$$\frac{9(2-\sqrt{x})}{2+\sqrt{x}} \times \frac{2-\sqrt{x}}{2-\sqrt{x}} = \frac{9(2-\sqrt{x})^2}{4-x}$$

حاصل با جای گذاری رو طرفین و وسطین داریم:

$$\frac{9(2-\sqrt{x})^2}{4-x} = 4-x \Rightarrow 9(2-\sqrt{x})^2 = (4-x)^2$$

از طرفین جذر می‌گیریم:

$$|3(2-\sqrt{x})| = |4-x|$$

$$6-3\sqrt{x} = 4-x \Rightarrow x-3\sqrt{x}+2=0 \Rightarrow \sqrt{x}=1, \sqrt{x}=2$$

$$\text{ق ق } x=1, x=4$$

$$6-3\sqrt{x} = -4+x \Rightarrow x+3\sqrt{x}-10=0 \Rightarrow (\sqrt{x}+5)(\sqrt{x}-2)=0$$

$$\text{ق ق } \sqrt{x} = -5, \sqrt{x} = 2 \Rightarrow x = 4$$

۱۷- گزینه «۲»

آسان

با توجه به این که عبارت‌ها مزدوج هستند داریم:

$$\sqrt{x+3} - \sqrt{x-7} = A$$

$$\sqrt{x+3} + \sqrt{x-7} = 20$$

با ضرب طرفین در یکدیگر داریم:

$$(\sqrt{x+3} - \sqrt{x-7})(\sqrt{x+3} + \sqrt{x-7}) = 20A$$

$$x+3-x+7=20A \Rightarrow 10=20A \Rightarrow \frac{1}{2}=A$$

آسان

۲۰- گزینه «۴»

اگر در نظر بگیریم که بهروز کار را در t ساعت انجام داده است فرهاد چون ۹ ساعت آن را دیرتر انجام داده است پس ساعت انجام کار فرهاد $9+t$ خواهد بود.
پس:

$$\frac{1}{t} + \frac{1}{t+9} = \frac{1}{20} \Rightarrow \frac{t+9+t}{t(t+9)} = \frac{1}{20}$$

$$\frac{2t+9}{t^2+9t} = \frac{1}{20}$$

$$t^2+9t=40t+180 \Rightarrow t^2-31t-180=0$$

$$(t-36)(t+5)=0 \Rightarrow t=36 \text{ قی}$$

چون زمان منفی نمی‌شود $t=-5$ قابل قبول نیست.

دشوار

۲۱- گزینه «۲»

حواستون باشه! این سوال احتمالا شما رو اذیت کرده!

در طرف اول مخرج مشترک بگیرید و در طرف دوم مخرج رو ساده کنید:

$$\frac{3\sqrt{x+1}-\sqrt{x^2-1}-\sqrt{x^2-1}-3\sqrt{x+1}}{9-x+1} = \sqrt{x-1}$$

$$\frac{-2\sqrt{x^2-1}}{10-x} = \sqrt{x-1} \Rightarrow \frac{\sqrt{x^2-1}}{10-x} = \frac{-2\sqrt{x+1}}{10-x} = 1$$

شرط دامنه رادیکال‌ها این هست که $x > 1$
پس می‌توان $\sqrt{x-1} \neq 0$ را از طرفین ساده کرد

شرط دامنه رادیکال‌ها این است که $x > 1$ پس می‌توان $\sqrt{x-1} \neq 0$ را از طرفین ساده کرد

$$\frac{-2\sqrt{x^2-1}}{10-x} = \sqrt{x-1} \Rightarrow -2\sqrt{x+1} = 10-x$$

$$\frac{-2\sqrt{x^2-1}}{10-x} = \sqrt{x-1} \Rightarrow -2\sqrt{x+1} = 10-x$$

$$4x+4=100-20x+x^2 \Rightarrow 0=x^2-24x+96$$

$$\Delta = (-24)^2 - 4(96) = 192$$

$$\text{ریشه} = \frac{24 \pm 8\sqrt{3}}{2} = 12 \pm 4\sqrt{3}$$

حواستون باشه! $12-4\sqrt{3}$ بخاطر کوچک‌تر باز ۱۰ بودن قابل قبول نیست.

دشوار

۲۲- گزینه «۳»

حواستون باشه! این سوال در اصل برای کتاب دهم فصل سوم هست ولی چون ایده جالبی داشت بهتر دیدیم از چشم شما هم دور نماند.

اول اطلاعات مسئله رو مخرج مشترک بگیریم و ساده کنیم:

$$\frac{a^3-1+a^3+1}{a^6-1} = 2$$

$$\frac{2a^3}{a^6-1} = 2 \xrightarrow{\text{طرفین وسطین}} 2a^6-2=2a^3$$

$$\xrightarrow{\text{مرتب}} 2a^6-2a^3-2=0 \xrightarrow{\text{ساده}} a^6=a^3+1$$

حالا عبارتی که خواسته شده رو به صورت زیر ساده می‌کنیم:

$$\frac{1}{(a^3+1)-\sqrt{a^3}} + \frac{1}{(a^3+1)+\sqrt{a^3}} = \frac{a^3+1+\sqrt{a^3}+a^3+1-\sqrt{a^3}}{(a^3+1)^2-a^3}$$

$$= \frac{2a^3+2}{a^6+2a^3+1-a^3} = \frac{2a^3+2}{a^6+a^3+1}$$

$$\xrightarrow{\text{چون } a^6=a^3+1} \frac{2a^3+2}{a^3+1+a^3+1} = \frac{2a^3+2}{2a^3+2} = 1$$

و در آخر ۱ به توان هر عددی همچنان ۱ است.

متوسط

۱۸- گزینه «۴»

ابتدا شرط‌های معادلات گنگ را بررسی کنیم:

x	$-\infty$	-2	0	$+\infty$
		+	-	+

$$1) 2a^2+fa \geq 0 \Rightarrow 2a(a+2) \geq 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a \leq -2 \text{ یا } a \geq 0$$

$$2) 2-3a \geq 0 \Rightarrow 2 \geq 3a \Rightarrow \frac{2}{3} \geq a$$

اشتراک این جواب همواره $0 \leq a \leq \frac{2}{3}$ خواهد بود.

حال طرفین معادله را به توان می‌رسانیم:

$$\sqrt{2a^2+fa} = 2-3a \Rightarrow 2a^2+fa = 4+9a^2-12a$$

$$0 = 2a^2-16a+4 \Rightarrow 0 = (2a-2)(a-2) \Rightarrow a = \frac{2}{2}, a = 2$$

چون $\frac{2}{3}$ در شرط دامنه صدق می‌کند پس قابل قبول است در نتیجه:

$$\frac{a+1}{a} = \frac{\frac{2}{3}+1}{\frac{2}{3}} = \frac{\frac{5}{3}}{\frac{2}{3}} = \frac{5}{2} = 4/5$$

دشوار

۱۹- گزینه «۳»

با توجه به سوال، سرعت قایق موتوری در آب را که به تنهایی 100 متر-دقیقه است

پس در جهت رودخانه این سرعت به $100+V$ و در خلاف جهت رودخانه این

سرعت به $100-V$ می‌رسد که در V در آن سرعت آب رودخانه است. از

طرفی چون اختلاف زمان رفت و برگشت ۵ دقیقه است پس:

$$t_2-t_1=5 \xrightarrow{t=\frac{x}{V}} \frac{x_2}{V_2} - \frac{x_1}{V_1} = 5 \Rightarrow \frac{1200}{100-V} - \frac{1200}{100+V} = 5$$

در این مرحله با رد گزینه می‌توان به جواب رسید مثلا اگر گزینه ۳ را در این

عبارت جایگزین کنیم خواهیم داشت $V=20$ ولی اگر بخواهیم سوال را با

مخرج مشترک حل کنیم خواهیم داشت:

$$1200 \left(\frac{1}{100-V} - \frac{1}{100+V} \right) = 5$$

$$\frac{1}{100-V} - \frac{1}{100+V} = \frac{5}{1200} \Rightarrow \frac{100+V-100-V}{10000-V^2} = \frac{1}{240}$$

$$\Rightarrow \frac{2V}{10000-V^2} = \frac{1}{240}$$

$$V^2+480V-10000=0 \Rightarrow (V-20)(V+500)=0 \Rightarrow \begin{cases} V=20 \text{ قی} \\ V=-500 \text{ غ قی} \end{cases}$$

متوسط

۲۶- گزینه «۳»

حواستون باشه! حل این سوال به روش‌های مختلفی انجام می‌شه ما به انتخاب، یک روش رو براتون گذاشتیم.
اول بیایید مخرج مشترک طرف اول عبارت رو بگیرید.

$$\frac{(1-x)^2 + x^2}{[x(1-x)]^2} = \frac{160}{9}$$

صورت کسر اتحاد مربع کامل را باز کنید و در مخرج دو عبارت را در هم ضرب کنید:

$$\frac{1+x^2-2x+x^2}{(x-x^2)^2} = \frac{160}{9} \Rightarrow \frac{2x^2-2x+1}{(x-x^2)^2} = \frac{160}{9} \Rightarrow \frac{2(x^2-x)+1}{(x-x^2)^2} = \frac{160}{9}$$

حالا $x^2 - x = t$ در نظر بگیرید.

$$\frac{2t+1}{t^2} = \frac{160}{9} \xrightarrow{\text{طرفین وسطین}} 18t+9=160t^2$$

$$160t^2 - 18t - 9 = 0$$

$$(16t+3)(10t-3) = 0 \Rightarrow t_1 = -\frac{3}{16}, t_2 = \frac{3}{10}$$

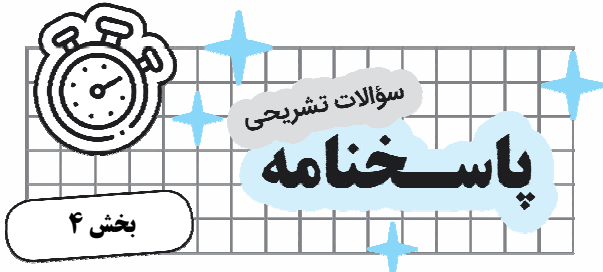
$$x^2 - x + \frac{3}{16} = 0 \Rightarrow 16x^2 - 16x + 3 = 0$$

$$\Rightarrow \Delta = 16^2 - 4(-48) = 64 \Rightarrow S_1 = 1 \quad (1)$$

$$x^2 - x - \frac{3}{10} = 0 \Rightarrow 10x^2 - 10x - 3 = 0$$

$$\Rightarrow \Delta = 100 - 4(-30) = 100 + 120 = 220 \Rightarrow S_2 = 1 \quad (2)$$

$$\xrightarrow{\text{از (1) و (2)}} S_1 + S_2 = 2$$



آسان

۱-

(آ) با کمی دقت می‌بینیم که عبارت زیر رادیکال به فرم اتحاد مربع هستش:

$$\sqrt{a^4 + 2a^2 + 1} = \sqrt{(a^2 + 1)^2}$$

یادت میاد از سال دهم که $\sqrt{(a^2 + 1)^2} = a^2 + 1$ وقتی رادیکال دارای فرجه زوج برابر با توان زوج عبارت زیر رادیکال باشه داخل قدرمطلق اونو بیرون بیاریم:

$$= |a^2 + 1|$$

$$= a^2 + 1$$
 عبارت $a^2 + 1$ همواره مثبت هست پس:

(ب) از سال‌های پیش می‌دونیم که عبارت زیر رادیکال رو باید به فرم مربع کامل دربیاریم:

$$7 - 4\sqrt{3} = \frac{7}{4+3} - 2(2)(\sqrt{3}) = (2)^2 + (\sqrt{3})^2 - 2(2)(\sqrt{3})$$

$$= (2 - \sqrt{3})^2 \Rightarrow \sqrt{7 - 4\sqrt{3}} = \sqrt{(2 - \sqrt{3})^2} = |2 - \sqrt{3}| = 2 - \sqrt{3}$$

متوسط

۲۳- گزینه «۴»

حواستون باشه! شرط آن که معادلات گنگ جواب حقیقی قابل قبول داشته باشند آن است که ≥ 0 زیر رادیکال باشد

$$1) 2x - 3 \geq 0 \Rightarrow x \geq \frac{3}{2}$$

$$2) x + \sqrt{x-2} \geq 0 \Rightarrow \sqrt{x-2} \geq -x \Rightarrow x-2 \geq x^2 \Rightarrow 0 \geq x^2 - x + 2$$
 ریشه ندارد و همواره مثبت است پس جواب تهی خواهد بود.

$$3) 2 - x \geq 0 \Rightarrow 2 \geq x$$

$$4) x - 2 \geq 0 \Rightarrow x \geq 2$$

این چهار شرط با توجه به شرط دوم که تهی است اشتراک ندارند پس این معادله دارای جواب نیست.

آسان

۲۴- گزینه «۴»

تمامی کسرها را در یک طرف جمع کرده و مخرج مشترک بگیریم.

$$\frac{1}{x+2} - \frac{x^2-9x-2}{x^2+8} - \frac{6x}{x^2-2x+4} = 0$$

$$\frac{1}{x+2} - \frac{x^2-9x-2}{(x+2)(x^2-2x+4)} - \frac{6x}{x^2-2x+4} = 0$$

$$\frac{x^2-2x+4-x^2+9x+2-6x^2-12x}{(x+2)(x^2-2x+4)} = 0$$

$$6x^2 + 5x - 6 = 0 \Rightarrow (2x+3)(3x-2) = 0 \Rightarrow x = -\frac{3}{2}, x = \frac{2}{3}$$

یک ریشه مثبت دارد.

متوسط

۲۵- گزینه «۴»

حواستون باشه! هر موقع از مستطیل طلایی صحبت کردن با توجه به تمرین کتاب درسی رابطه زیر در ذهن باید بیاد

$$\frac{\text{طول}}{\text{عرض}} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \frac{\text{طول} + \text{عرض}}{\text{طول}}$$

در مرحله اول: اگر طول مستطیل را ℓ و عرض مستطیل را w در نظر بگیریم $\frac{\ell}{w} = \frac{5}{4}$ است.

در مرحله دوم به طول مستطیل x اضافه می‌شود تا مستطیل طلایی شود پس:

$$\frac{\ell+x}{w} = \frac{\ell+x+w}{\ell+x} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

با جای‌گذاری رابطه مرحله اول ($w = \frac{4}{5}\ell$) در رابطه به دست آمده در مرحله

$$\text{دوم} \left(\frac{\ell+x}{w} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right) \text{ خواهیم داشت:}$$

$$\frac{\ell+x}{\frac{4}{5}\ell} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \xrightarrow{\text{طرفین وسطین}} \frac{\ell+x}{\ell} = \frac{4}{10}(1+\sqrt{5}) = \frac{2}{5}(1+\sqrt{5})$$

چون نسبت مساحت مستطیل طلایی ($S = (\ell+x)(w)$) را به مساحت

مستطیل اولیه ($S = \ell w$) خواسته است پس $\frac{\ell+x}{\ell}$ جواب مسئله است.

۲-

آسان

برای حل معادله قدرمطلق لازم هست ابتدا قدرمطلق رو تنها کنیم:

$$3|x+1|-2=4 \Rightarrow 3|x+1|=6 \Rightarrow |x+1|=2$$

حالا حواست باشه که:

اگر $|x|=a$ ، آن گاه $x=\pm a$. (چون قدرمطلق هر دو، برابر a میشه!) پس داریم:

$$x+1=\pm 2$$

با هر دو عدد معادله رو حل می کنیم و جوابها رو به دست می آریم:

$$\begin{cases} x+1=-2 \Rightarrow x=-3 \\ x+1=2 \Rightarrow x=1 \end{cases}$$

۳-

آسان

شبهه حل معادله، برای حل نامعادله قدرمطلق هم باید اول قدرمطلق تنها بشه:

$$|2x|+1 \geq 3 \Rightarrow |2x| \geq 2$$

حالا از سال دهم یادادت بیاد که اگر $|x| \geq a$ باشه ($a > 0$)، جواب به صورت $x \geq a$ یا $x \leq -a$ درمیاد پس:

$$\left. \begin{array}{l} 2x \geq 2 \Rightarrow x \geq 1 \\ \text{یا} \\ 2x \leq -2 \Rightarrow x \leq -1 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{مجموعه جواب} = (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$$

۴-

آسان

کاری به این نداریم که a و b چی هستند به هر حال به همون صورت قبل، نامعادله قدرمطلق رو حل می کنیم:

$$|x+1|+a < b \Rightarrow |x+1| < b-a$$

$$\Rightarrow -(b-a) \leq x+1 < b-a \Rightarrow a-b-1 < x < b-a-1$$

$$\Rightarrow \text{مجموعه جواب} = \left(\frac{a-b-1}{n}, \frac{b-a-1}{m} \right)$$

$$\Rightarrow m+n = \cancel{b} - \cancel{a} - 1 + \cancel{a} - \cancel{b} - 1 = -2$$

۵-

آسان

یادت بیاد که نامعادله قدرمطلق که مجموعه جوابش به صورت (a, b) باشد

$$\text{به صورت } \left| x - \frac{a+b}{2} \right| < \frac{b-a}{2} \text{ هستش پس داریم:}$$

$$\frac{a+b}{2} = \frac{-3+7}{2} = 2$$

$$\frac{b-a}{2} = \frac{7-(-3)}{2} = 5$$

و می توان نوشت:

$$|x-2| < 5$$

حواست باشه که اگه بازه به صورت $(b, +\infty) \cup (-\infty, a)$ بود، نامعادله به

$$\text{فرم } \left| x - \frac{a+b}{2} \right| > \frac{b-a}{2} \text{ نوشته می شد.}$$

۶-

متوسط

خب معادله به فرمهای معادله درجه ۲ هست با یه تغییر متغیر ریز!

$$3x^2 + |x| - 4 = 0 \Rightarrow 3|x|^2 + |x| - 4 = 0$$

حالا با تغییر متغیر $t=|x|$ داریم:

$$3t^2 + t - 4 = 0$$

و می دونی که چون $a+b+c=0$ پس $t=1$ ، $t=\frac{-4}{3}$ هست با

جای گذاری $t=|x|$ داریم:

$$|x|=1 \Rightarrow x=\pm 1$$

این معادله جواب نداره چون قدرمطلق هیچ وقت منفی نمیشه. $|x|=-\frac{4}{3} \Rightarrow$

۷-

متوسط

جواب معادله $|f(x)|=|g(x)|$ به صورت $f(x)=\pm g(x)$ هست پس:

$$3x+2=\pm(4x-4)$$

هر کدام را جداگانه حل می کنیم:

$$3x+2=4x-4 \Rightarrow x=6$$

یا

$$3x+2=-4x+4 \Rightarrow 7x=2 \Rightarrow x=\frac{2}{7}$$

هر دو جواب قابل قبول است.

۸-

آسان

می دونی که برای حل معادله رادیکالی باید دو طرف رو به توان ۲ برسونی پس:

$$|x+1|^2 = (\sqrt{x-2})^2$$

$$\Rightarrow x^2 + 2x + 1 = x - 2 \Rightarrow x^2 + x + 3 = 0$$

$$\Delta = 1 - 12 = -11 < 0 \Rightarrow \text{معادله جواب ندارد}$$

۹-

متوسط

می دونی که زیر رادیکال نمی تونه منفی باشه پس لازمه که عبارت زیر رادیکال

رو بزرگتر یا مساوی صفر قرار بدیم:

$$|x|-4 \geq 0$$

$$\Rightarrow |x| \geq 4 \Rightarrow x \geq 4 \text{ یا } x \leq -4$$

از طرفی مخرج کسر نباید صفر بشه پس بیا بریم سراغ مخرج کسر:

خب واضحه که مخرج به صورت یک عبارت مثبت اومده (قدرمطلق نامنفی

هست که ضریب ۲ گرفته و با ۱ جمع شده پس همواره مثبت هستش) و

بنابراین هیچ وقت صفر نمیشه. پس جواب همون بازه

$$(-\infty, -4] \cup [4, +\infty) \text{ هست.}$$

دشوار

-۱۱

یادت بماند که نمودار تابع های به فرمول $y = |x - a| + |x - b|$ به صورت

«گلدانی» در میاد یعنی این طوری: ()، کف گلدان

خط $y = |b - a|$ هست و دو خط شیب دار، یا شیب های قرینه هم هستند.

گوشه ها در $x = a$ ، $x = b$ هستند.

اما برای رسم دقیق سه بازه به صورت های زیر در نظر می گیریم:

$$x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1$$

$$x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3$$

(۱) کمتر از ریشه کوچکتر (هر دو منفی)

$$x < -1 \Rightarrow y = -x - 1 - x + 3 = -2x + 2$$

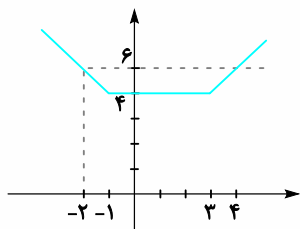
(۲) بین دو ریشه (اونی که ریشه کوچکتر داره مثبت میشه اون یکی منفی)

$$-1 \leq x \leq 3 \Rightarrow y = x + 1 - x + 3 = 4 \text{ کف گلدان}$$

(۳) بیشتر از ریشه بزرگتر (هر دو مثبت)

$$x > 3 \Rightarrow y = x + 1 + x - 3 = 2x - 2$$

با عدددهی به دو خط به دست آمده، نمودار را رسم می کنیم:



$$y(4) = 6$$

$$y(-2) = 6$$

دشوار

-۱۲

نمودار این تابع هم به نمودار «آبشاری» و یا سرسره ای معروف هست و

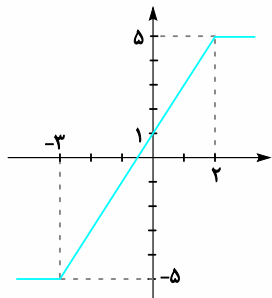
به صورت یا درمیاد. بازه بندی شبیه سوال ۱۱ انجام میشه:

$$x + 3 = 0 \Rightarrow x = -3, x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2$$

$$1) x < -3 \Rightarrow y = -x - 3 + x - 2 = -5$$

$$2) -3 \leq x \leq 2 \Rightarrow y = x + 3 + x - 2 = 2x + 1$$

$$3) x > 2 \Rightarrow y = x + 3 - x + 2 = 5$$



متوسط

-۱۰

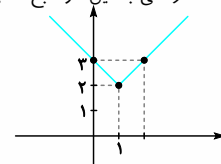
(آ) از سال دهم می دونم که میشه این نمودار رو به کمک انتقال رسم کرد اما برای رسم دقیق لازم هست قدرمطلق رو تعیین علامت کنیم:

$$|x - 1| = \begin{cases} x - 1 & x \geq 1 \\ -x + 1 & x < 1 \end{cases}$$

بنابراین با اضافه کردن ۲ داریم: (۱) $y = \begin{cases} x + 1 & x \geq 1 \\ 3 - x & x < 1 \end{cases}$ (۲)

با مقداردهی به این دو تابع خطی با توجه به بازه مربوطه داریم:

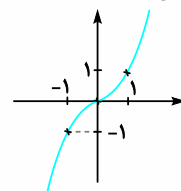
$$y = \begin{cases} x + 1 & x \geq 1 \\ 3 - x & x < 1 \end{cases} \quad \begin{array}{c|c|c} x & 1 & 2 \\ y & 2 & 3 \end{array} \quad \begin{array}{c|c|c} x & 1 & 0 \\ y & 2 & 3 \end{array}$$



(ب) باز هم با توجه به ریشه عبارت داخل قدرمطلق، تابع رو به صورت دو ضابطه ای می نویسیم:

$$f(x) = x|x| = \begin{cases} x^2 & x \geq 0 \\ -x^2 & x < 0 \end{cases} \quad (1) \quad (2)$$

حواست باشه که نمودار به فرم منحنی (بخش هایی از سهمی) هست.

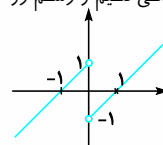


$$(1) \begin{array}{c|c|c} x & 0 & 1 \\ y & 0 & 1 \end{array} \quad (2) \begin{array}{c|c|c} x & -1 & 0 \\ y & -1 & 0 \end{array}$$

(پ) از آن جایی که $|x| = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$ پس داریم:

$$y = \begin{cases} x - 1 & x > 0 \\ x + 1 & x < 0 \end{cases} \quad (1) \quad (2)$$

حواست باشه! چون $|x|$ توی مخرج کسر هست پس x نمی تونه صفر باشه و علامت مساوی رو برای صفر در نظر نمی گیریم. نقطه یابی می کنیم و رسم رو انجام می دهیم:



$$(1) \begin{array}{c|c|c} x & 0 & 1 \\ y & -1 & 0 \end{array} \quad (2) \begin{array}{c|c|c} x & -1 & 0 \\ y & 0 & 1 \end{array}$$

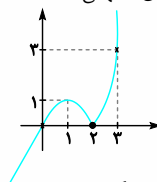
(ت) ریشه عبارت داخل قدرمطلق $x = 2$ هست پس:

$$|x - 2| = \begin{cases} x - 2 & x \geq 2 \\ -x + 2 & x < 2 \end{cases}$$

و بنابراین:

$$x|x - 2| = \begin{cases} x^2 - 2x & x \geq 2 \\ -x^2 + 2x & x < 2 \end{cases} \quad (1) \quad (2)$$

برای رسم فقط به یک نکته خیلی مهم توجه کن که توی سهمی ها حتماً مختصات رأس سهمی رو به دست بیاری.



$$(1): x_A = \frac{-b}{2a} = \frac{2}{2} = 1 \quad \begin{array}{c|c|c} x & 2 & 3 \\ y & 0 & 3 \end{array}$$

اما $x = 1$ در بازه نیست پس با خیال راحت عدد بده.

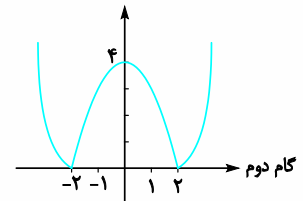
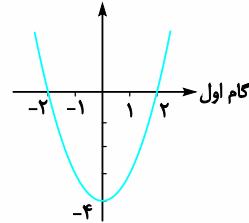
$$(2): x_A = 1 \Rightarrow y_A = 1 \quad (1 < 2) \Rightarrow \begin{array}{c|c|c} x & 0 & 2 \\ y & 0 & 0 \end{array}$$

۱۳-

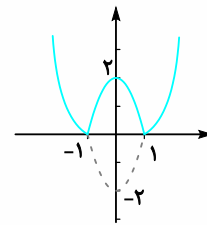
دشوار

یادت بگونه که اگر بدونی نمودار $y = f(x)$ رو چطور رسم کنی، می‌توننی نمودار تابع $y = |f(x)|$ رو به این صورت از روی اون رسم کنی. بخش‌هایی از نمودار که زیر محور x هست رو حذف کرده و به بالای محور x ها قرینه می‌کنیم.

(آ) اول نمودار $x^2 - 4$ رو رسم می‌کنیم (می‌توننی سهمی $y = x^2$ رو به اندازه ۴ واحد به پایین منتقل کنی) و بعد قدرمطلق رو درنظر می‌گیریم:



(ب)



$$y = |2x^2 - 2|$$

$$y = 2x^2 - 2$$

$$x_A = \frac{-0}{2} = 0 \Rightarrow y_A = -2$$

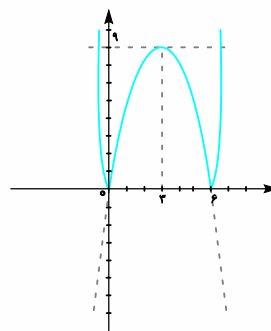
x	-1	0	1
y	0	-2	0

(پ)

$$y = |6x - x^2|$$

$$y = 6x - x^2 \quad 6x - x^2 = 0 \Rightarrow x(6 - x) = 0$$

$$\Rightarrow x = 0 \text{ یا } x = 6 \Rightarrow \text{صفرهای تابع: } x_A = \frac{0+6}{2} = 3 \Rightarrow y_A = 9$$

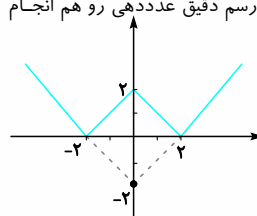


(ت)

$$y = ||x| - 2|$$

$$y = |x| - 2$$

می‌دونیم نمودار تابع $y = |x|$ به صورت (هشتش و می‌تونیم با انتقال $y = |x| - 2$ رو رسم کنیم اما برای رسم دقیق عدددهی رو هم انجام می‌دیم:



x	-2	0	2
y	0	2	0

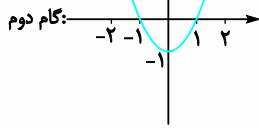
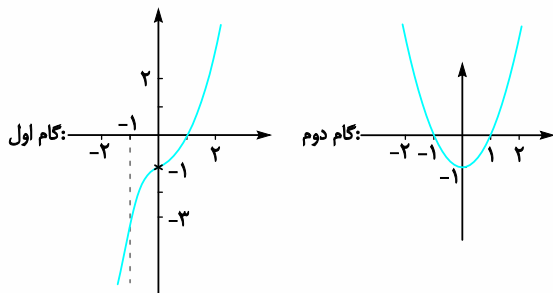
۱۴-

دشوار

اگر این تابع رو با تابع $f(x) = 2x^3 - 1$ مقایسه کنیم می‌بینیم که تابع داده شده، $f(|x|)$ هست.

برای رسم تابع $f(|x|)$ اول نمودار $f(x)$ رو رسم می‌کنیم و بعد بخش‌هایی از نمودار که سمت چپ محور y هست رو حذف کرده و نمودار سمت راست محور y رو به سمت چپ هم قرینه می‌کنیم. (چون رفتار f روی x های منفی شبیه رفتار f روی x های مثبت هست).

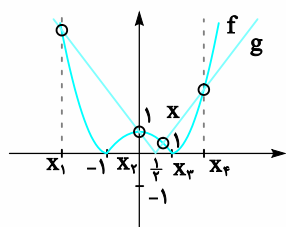
x	-1	0	1
y	-3	-1	1



۱۵-

دشوار

برای حل معادله به روش هندسی، سمت چپ نمودار رو به عنوان تابع f و سمت راست نمودار رو به عنوان تابع g درنظر می‌گیریم. هر دو تابع رو در یک، دستگاه مختصات رسم می‌کنیم، محل‌های برخورد دو تابع جواب‌های معادله $f(x) = g(x)$ است.



$$f(x) = |x^2 - 1|$$

$$g(x) = |2x - 1|$$

روش جبری:

$$|x^2 - 1| = |2x - 1| \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x^2 - 1 = 2x - 1 \Rightarrow x^2 - 2x = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ یا } x = 2 \\ x^2 - 1 = -2x + 1 \Rightarrow x^2 + 2x - 2 = 0 \Rightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 8}}{2} = -1 \pm \sqrt{3} \end{cases}$$

$$g(x) = x$$

همان طور که از روی شکل مشخص هست، دو برخورد روی دو بخش نمودار f داریم، پس با برخورد دادن تک تک نمودارها با خط $y = x$ ، محل های برخورد رو پیدا می کنیم:

(از روی نمودار هم دیدیم که خطها موازی هم هستند.) فاقد جواب

$$x - 5 = x \Rightarrow 3x - 3 = x \Rightarrow 2x = 3 \Rightarrow x = \frac{3}{2}$$

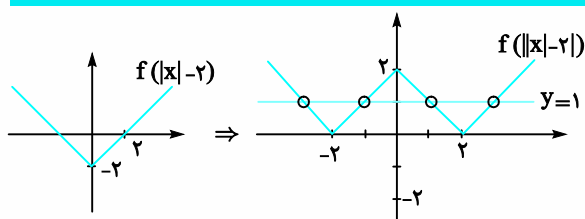
$$-x + 5 = x \Rightarrow 2x = 5 \Rightarrow x = \frac{5}{2}$$

حالا باید ببینیم کجاها، نمودار f پایین تر از g قرار گرفته که به صورت زیر هست:

$$(-\infty, \frac{3}{2}) \cup (\frac{5}{2}, +\infty)$$

دشوار

-۱۹



از روی نمودار پیداست که چهار جواب برای معادله داریم، با حدس می توان گفت:

$$x = 1 \Rightarrow |1-2| = 1 \quad x = 3 \Rightarrow |3-2| = 1$$

$$x = -1 \Rightarrow |-1-2| = 1 \quad x = -3 \Rightarrow |-3-2| = 1$$

با روش جبری:

$$||x|-2|=1 \Rightarrow \begin{cases} |x|-2=1 \Rightarrow |x|=3 \Rightarrow x=\pm 3 \\ |x|-2=-1 \Rightarrow |x|=1 \Rightarrow x=\pm 1 \end{cases}$$

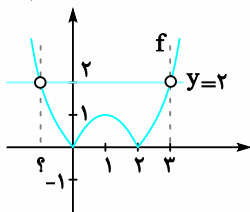
متوسط

-۲۰

$$y = x^2 - 2x \Rightarrow x^2 - 2x = 0 \Rightarrow x(x-2) = 0$$

$$\Rightarrow x = 0, 2 \quad x_A = \frac{0+2}{2} = 1 \Rightarrow y_A = -1$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix}$$



روش جبری:

$$|x^2 - 2x| = 2 \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x^2 - 2x = 2 \Rightarrow x^2 - 2x - 2 = 0 \\ x^2 - 2x = -2 \Rightarrow x^2 - 2x + 2 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \Delta = \sqrt{12} \Rightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{12}}{2} \Rightarrow x = 1 \pm \sqrt{3} \text{ جواب های معادله}$$

$$x^2 - 2x = -2 \Rightarrow x^2 - 2x + 2 = 0$$

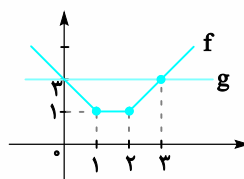
$$\Rightarrow \Delta = 4 - 8 < 0 \Rightarrow \text{جواب ندارد}$$

متوسط

-۱۶

$$f(x) = |x-1| + |x-2| \quad a=1, b=2$$

$$\text{کف گلدان: } y = |2-1| = 1$$



$$g(x) = 3$$

از روی نمودار مشخص هست که جواب های معادله $x = 3, x = 0$ هست. با

روش جبری هم داریم:

$$1) x < 1 \Rightarrow -x + 1 - x + 2 = 3 \Rightarrow -2x + 3 = 3$$

$$\Rightarrow -2x = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ ق ق}$$

$$2) 1 \leq x \leq 2 \Rightarrow x - 1 - x + 2 = 3 \Rightarrow 1 = 3 \text{ غ ق ق}$$

$$3) x > 2 \Rightarrow x - 1 + x - 2 = 3 \Rightarrow 2x - 3 = 3$$

$$\Rightarrow 2x = 6 \Rightarrow x = 3 \text{ ق ق}$$

خواست باشه که جوابها رو در بازه مربوط به خودش صدق بدی.

متوسط

-۱۷

$$\sqrt{x+1} - |x-2| = 0$$

ابتدا دامنه عبارت رادیکالی رو به دست میاریم:

$$x+1 \geq 0 \Rightarrow x \geq -1$$

قدرمطلق رو به سمت راست منتقل می کنیم و به توان ۲ می رسونیم:

$$\sqrt{x+1} = |x-2| \Rightarrow x+1 = x^2 - 4x + 4$$

$$\Rightarrow x^2 - 5x + 3 = 0 \Rightarrow \Delta = 13 \Rightarrow x = \frac{5 \pm \sqrt{13}}{2}$$

با توجه به این که جواب های به دست آمده هر دو در بازه دامنه هستند پس هر دو قابل قبول اند.

دشوار

-۱۸

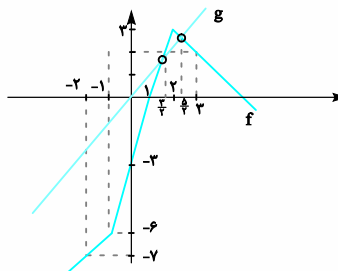
حل نامعادله به روش هندسی شبیه حل معادله به این روش هست، با این تفاوت که پس از یافتن ریشه ها، مجموعه نامعادله $f(x) < g(x)$ ، بازه ای است که نمودار f پایین تر از نمودار g قرار بگیرد.

$$f(x) = |x+1| - |2x-4| \Rightarrow x = -1, x = 2$$

$$x < -1 \Rightarrow y = -x - 1 + 2x - 4 = x - 5$$

$$-1 \leq x \leq 2 \Rightarrow y = x + 1 + 2x - 4 = 3x - 3$$

$$x > 2 \Rightarrow y = x + 1 - 2x + 4 = -x + 5$$



متوسط

۲۴-

در مثلثی به اضلاع a, b, c ، طبق نامساوی مثلثی داریم:

$$a + b > c, a + c > b, b + c > a$$

پس:

$$|a + b + c| = a + b + c \text{ (طول عددی مثبت است)}$$

$$|a - b - c| = |a - (b + c)| = -a + b + c$$

$$|a - b + c| = |a + c - b| = a + c - b$$

$$|a + b - c| = a + b - c$$

با جای گذاری داریم:

$$\cancel{a} + \cancel{b} + \cancel{c} + \cancel{a} - \cancel{b} - \cancel{c} - \cancel{a} - \cancel{c} + \cancel{b} - \cancel{a} - \cancel{b} + \cancel{c} = 0$$

دشوار

۲۵-

(آ) دو حالت را در نظر می گیریم:

$$\left. \begin{aligned} a \geq 0 &\Rightarrow |a| = a \Rightarrow a \leq |a| \text{ (تساوی رخ می دهد)} \\ a < 0 &\Rightarrow |a| = -a \Rightarrow a \leq |a| \end{aligned} \right\} \Rightarrow a \leq |a|$$

$$\left. \begin{aligned} a \geq 0 &\Rightarrow |a| = a \Rightarrow -|a| \leq a \\ a < 0 &\Rightarrow |a| = -a \Rightarrow -|a| = a \Rightarrow |a| \leq a \text{ (تساوی)} \end{aligned} \right\} \Rightarrow -|a| \leq a$$

(ب) طبق قسمت (آ) داریم:

$$\begin{aligned} -|a| \leq a \leq |a| &\xrightarrow{+} -|a| - |b| \leq a + b \leq |a| + |b| \\ -|b| \leq b \leq |b| &\end{aligned}$$

(پ) طبق قسمت (ب) داریم:

$$-(|a| + |b|) \leq a + b \leq |a| + |b|$$

$$\Rightarrow |a + b| \leq |a| + |b|$$

آسان

۲۶-

$$\text{آ)} |x - 3| = 7 \Rightarrow x - 3 = \pm 7 \Rightarrow x = -4, 10$$

$$\text{ب)} 2|x - 6| = 4 \Rightarrow |x - 6| = 2 \Rightarrow x - 6 = \pm 2 \Rightarrow x = 4, 8$$

$$|x - (-3)| \geq 2 \Rightarrow |x + 3| \geq 2 \Rightarrow$$

$$x + 3 \leq -2 \cup x + 3 \geq 2 \Rightarrow x \leq -5 \cup x \geq -1$$

متوسط

۲۷-

با طرفین وسطین کردن داریم:

$$\text{آ)} 2 - x = |x - 3|, x \neq 3$$

$$2 - x \geq 0 \Rightarrow x \leq 2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x - 3 = 2 - x \Rightarrow 2x = 5 \Rightarrow x = \frac{5}{2} \text{ غ ق ق} \\ x - 3 = x - 2 \Rightarrow -3 = -2 \text{ غ ق ق} \end{cases}$$

(در بازه دامنه نیست) معادله فاقد جواب است.

$$\text{ب)} \sqrt{x^2 - 2x + 1} = \sqrt{(x - 1)^2} = |x - 1|$$

$$\Rightarrow |x - 1| = 2x + 1 \Rightarrow \begin{cases} x - 1 = 2x + 1 \Rightarrow x = -2 \text{ غ ق ق} \\ x - 1 = -2x - 1 \Rightarrow 3x = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ ق ق} \end{cases}$$

$$\text{شرط: } 2x + 1 \geq 0 \Rightarrow x \geq -\frac{1}{2}$$

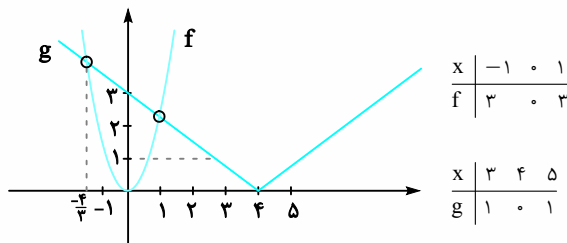
دشوار

۲۱-

$$f(x) = 3x^2, \quad g(x) = |x - 4|$$

منظور سوال، بازه‌ای است که نمودار تابع f پایین‌تر یا مساوی نمودار g باشد:

$$f \leq g$$



$$\text{مجموعه جواب} = \left[-\frac{4}{3}, 1\right]$$

$$f(x) = g(x) \Rightarrow \begin{cases} 3x^2 = x - 4 \text{ غ ق ق} \\ 3x^2 = -x + 4 \Rightarrow 3x^2 + x - 4 = 0 \Rightarrow x = 1, -\frac{4}{3} \end{cases}$$

متوسط

۲۲-

عدد دلخواه را x فرض می کنیم، فاصله دو عدد دلخواه را با قدرمطلق تفاضل

آن‌ها نشان می دهیم پس داریم:

$$|x - 2| + |x + 1| = 4$$

$\downarrow \quad \quad \downarrow$
 $x = 2 \quad x = -1$

$$1) x \leq -1 \Rightarrow -x + 2 - x - 1 = 4 \Rightarrow -2x = 3 \Rightarrow x = -\frac{3}{2}$$

$$2) -1 \leq x \leq 2 \Rightarrow -\cancel{x} + 2 + \cancel{x} + 1 = 4 \text{ غ ق ق}$$

$$3) x \geq 2 \Rightarrow x - 2 + x + 1 = 4 \Rightarrow 2x = 5 \Rightarrow x = \frac{5}{2}$$

این دو عدد $\frac{5}{2}, -\frac{3}{2}$ هستند.

آسان

۲۳-

نقطه مورد نظر روی محور طول است پس به فرم $(x, 0)$ است و نقاط دیگر هم روی

محور x هستند پس کافی است قدرمطلق تفاضل طول‌های آن‌ها را مقایسه کنیم:

$$|x + 1| + |x - 3| = 6$$

$\downarrow \quad \quad \downarrow$
 $x = -1 \quad x = 3$

$$x < -1 \Rightarrow -x - 1 - x + 3 = 6 \Rightarrow -2x = 4 \Rightarrow x = -2$$

$$-1 \leq x \leq 3 \Rightarrow x + 1 - x + 3 = 6 \text{ غ ق ق}$$

$$x > 3 \Rightarrow x + 1 + x - 3 = 6 \Rightarrow 2x = 8 \Rightarrow x = 4$$

این نقاط $x = 4, x = -2$ روی محور طول‌ها هستند.

دشوار

۳- گزینه «ا»

حواستون باشه‌ها در نامعادلات اگر از مثبت بودن عبارتی در هر دو طرف

نامعادله مطمئن بودیم می‌توان آن‌ها را از طرفین ساده کرد. پس:

$$|x-2| \leq x^2 + 2x + 4 < x^2 + 2x + 4$$

چون عبارت $x^2 + 2x + 4$ دارای Δ منفی است و ضریب x^2 آن مثبت است. پس عبارتی است همواره مثبت که می‌توان آن را از طرفین ساده

کرد پس:

$$|x-2| < 1 \Rightarrow -1 < x-2 < 1 \Rightarrow 1 < x < 3$$

متوسط

۴- گزینه «ا»

در نامعادلات قدرمطلق از بسط قدرمطلق استفاده می‌کنیم:

$$x \geq 0: (x-2)(x) < 3x-4 \Rightarrow x^2 - 2x - 3x + 4 < 0$$

$$\Rightarrow x^2 - 5x + 4 < 0 \Rightarrow x \in (1, 4)$$

$$x < 0: (x-2)(-x) < 3x-4 \Rightarrow -x^2 + 2x < 3x-4 \Rightarrow 0 < x^2 + x - 4$$

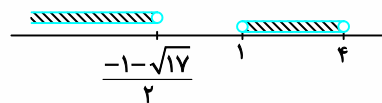
$$\Delta = 1 - 4(-4) = 1 + 16 = 17$$

$$\text{ریشه} = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{2}$$

$\frac{-1-\sqrt{17}}{2}$	$\frac{-1+\sqrt{17}}{2}$
+	+
ج	ج

$$(-\infty, \frac{-1-\sqrt{17}}{2}) \cup (\frac{-1+\sqrt{17}}{2}, +\infty)$$

است با توجه به $x < 0$



از اجتماع شرط اول و دوم $(-\infty, \frac{-1-\sqrt{17}}{2}) \cup (1, 4)$ خواهیم داشت که

در $(1, 4)$ گزینه‌ها هست.

دشوار

۵- گزینه «ا»

با توجه به نکته سوال ۳، مخرج‌ها همواره مثبت هستند پس می‌توان آن‌ها را از

طرفین ساده کرد پس:

$$|4x+5| > 3 \Rightarrow 4x+5 > 3 \text{ یا } 4x+5 < -3$$

$$4x > -2 \text{ یا } 4x < -8$$

$$x > -\frac{1}{2} \text{ یا } x < -2$$

$$(-\frac{1}{2}, +\infty) \text{ یا } (-\infty, -2)$$

پس مجموعه جواب به صورت $\mathbb{R} - [-2, -\frac{1}{2}]$ است در نتیجه

$$a+b = -2 + (-\frac{1}{2}) = -\frac{5}{2} \quad \text{پس: } b = -\frac{1}{2}, a = -2$$

آسان

۲۸-

$$|x-7| = 3 \Rightarrow x-7 = \pm 3 \Rightarrow x = 4, 10$$

متوسط

۲۹-

$$3x-2 = x-4 \Rightarrow 2x = -2 \Rightarrow x = -1$$

$$\text{یا } 3x-2 = -x+4 \Rightarrow 4x = 6 \Rightarrow x = \frac{3}{2}$$

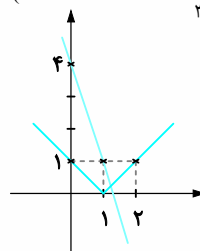
هر دو جواب قابل قبول است.

متوسط

۳۰-

$$|x-1| = 4-3x \Rightarrow \begin{cases} x-1 = 4-3x \Rightarrow 4x = 5 \Rightarrow x = \frac{5}{4} \text{ ق ق} \\ x-1 = 3x-4 \Rightarrow 2x = 3 \Rightarrow x = \frac{3}{2} \text{ غ ق} \end{cases}$$

$$(4-3x > 0 \Rightarrow x < \frac{4}{3})$$



$$f(x) = |x-1| \Rightarrow \text{ریشه: } x = 1 \quad \begin{array}{c|c|c} 0 & 1 & 2 \\ \hline 1 & 0 & 1 \end{array}$$

$$g(x) = -4-3x \quad \begin{array}{c|c|c} x & 0 & 1 \\ \hline y & -4 & -7 \end{array}$$



آسان

۱- گزینه «ا»

از سال دهم می‌دانیم که در نامعادلات قدرمطلق، قدرمطلق کوچک‌تر از عبارتی

منفی نمی‌تواند باشد پس در گزینه اول که $|x+3| \leq -1$ است مجموعه

جواب تهی خواهد بود.

متوسط

۲- گزینه «ب»

در نامعادله قدرمطلق $|x-a| > b$ ، ریشه داخل قدرمطلق مرکز و b شعاع

جواب‌های ما خواهد بود.

به بررسی گزینه‌ها می‌پردازیم:

(۱) مرکز این قدرمطلق $(-\frac{1}{2})$ است پس نمی‌تواند جواب مسئله باشد.

(۲) مرکز قدرمطلق $\frac{1}{2}$ است و قدرمطلق همواره مثبت است پس تمام اعداد

حقیقی جواب مسئله به جز $x = \frac{1}{2}$ که حاصل قدرمطلق را صفر می‌کند.

(۳) قدرمطلق هیچ‌گاه منفی نخواهد شد پس این گزینه جواب تهی دارد و تنها

به‌ازای $x = \frac{1}{2}$ صفر خواهد شد.

(۴) در این گزینه مجموعه جواب $\mathbb{R}$ است و همواره برقرار است.

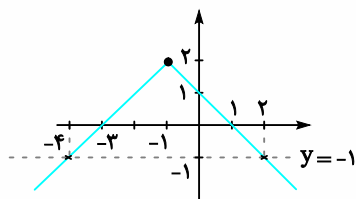
متوسط

۹- گزینه «ا»

ابتدا نمودار $y = -|x+1|+2$ را رسم می‌کنیم که با توجه به سال دهم $y = -|x|$ را یک واحد به سمت چپ و ۲ واحد به سمت بالا انتقال داده‌ایم.

محل برخورد شاخه‌های قدرمطلق با $y = -1$ را به دست می‌آوریم:

$$-x-1+2=-1 \Rightarrow x=2$$



مساحت ناحیه محدود مثلثی است به ارتفاع ۳ و قاعده ۶ واحد است پس مساحت مثلث:

$$S = \frac{6 \times 3}{2} = 9$$

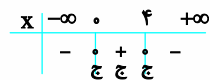
دشوار

۱۰- گزینه «ب»

با مرتب کردن معادله خواهیم داشت:

$$|4x - x^2| = 4x - x^2$$

از ویژگی‌های قدرمطلق این را داریم که اگر عبارت خودش از قدرمطلق خارج شود به معنای مثبت بودن عبارت است پس:



$$4x - x^2 \geq 0 \Rightarrow x(4 - x) = 0$$

$$x = 0, x = 4$$

پس یعنی در بازه $[0, 4]$ بی‌شمار ریشه دارد.

آسان

۱۱- گزینه «ب»

حواستون باشه! برای یافتن تعداد جواب‌های معادله به صورت

$$|x-a|+|x-b|=k \text{ می‌توان از دستور زیر استفاده کرد:}$$

$$(1) \text{ اگر } |a-b| > k \text{ معادله جواب ندارد.}$$

$$(2) \text{ اگر } |a-b| < k \text{ معادله دو جواب دارد}$$

$$(3) \text{ اگر } |a-b| = k \text{ باشد معادله بی‌شمار جواب دارد پس:}$$

$$\begin{array}{ccc} |x+1|+|x-2| & = & 3 \\ \downarrow & & \downarrow \\ a=-1 & & b=2 \\ & & k=3 \end{array}$$

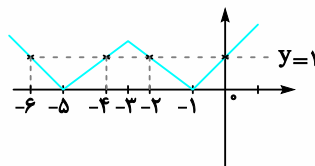
$$|a-b| = |-1-2| = 3 = k$$

پس معادله بی‌شمار جواب دارد.

متوسط

۶- گزینه «ب»

حل این تیپ از تست‌ها راه حل مختلفی دارد که ما به دو روش از آن‌ها می‌پردازیم:
راه اول: شکل را رسم کنید.



که با توجه به گزینه‌ها گزینه ۲ جواب است.

راه دوم: می‌توان از خاصیت‌های قدرمطلق استفاده کرد:

$$-1 < |x+3| - 2 < 1 \Rightarrow 1 < |x+3| < 3$$

$$1 < |x+3| \text{ و } |x+3| < 3$$

$$x+3 > 1 \text{ یا } x+3 < -1 \text{ و } -3 < x+3 < 3$$

$$x > -2 \text{ یا } x < -4 \text{ و } -6 < x < 0$$

از اشتراک دوباره به وجود آمده داریم $(-2, 0) \cup (-4, -6)$.

متوسط

۷- گزینه «ب»

با توجه به نامساوی مثلث در کتاب درسی گزینه ۲ نادرست است.

با جای‌گذاری مقادیر مختلف به رد گزینه‌ها هم می‌توان رسید.

(۲) اگر $a = -2, b = 4$ درنظر بگیریم

$$|-2| - |-4| \geq |-2-4|$$

$$2-4 \geq 6$$

$$-2 \geq 6 \text{ نادرست}$$

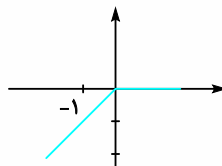
دشوار

۸- گزینه «ب»

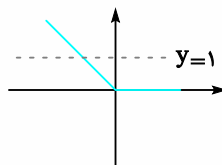
حواستون باشه! برای یافتن تعداد ریشه‌ها یک معادله روش هندسی بسیار مناسب است.

اگر $y_1 = |x-|x||$ درنظر بگیریم و $y_2 = 1$ را درنظر بگیریم محل برخورد این دو نمودار جواب معادله است.

$|f(x)|$: به معنای رسم $f(x)$ و سپس منتقل کردن قسمت‌های منفی شکل به بالای محور x هاست پس:



$$x-|x| = \begin{cases} 0 & x \geq 0 \\ 2x & x < 0 \end{cases}$$



محل برخورد y_1 و y_2 تنها یک نقطه در قسمت x ‌های منفی است پس یک

ریشه منفی دارد.

دشوار

۱۵- گزینه «ا»

ابتدا دامنه عبارت را به دست می آوریم:

$$\sqrt{x} - |x| = 0 \Rightarrow \sqrt{x} = x \Rightarrow x = x^2 \Rightarrow x^2 - x = 0$$

$$x(x-1) = 0 \Rightarrow x = 0, x = 1 \Rightarrow D: \mathbb{R} - \{0, 1\}, x \geq 0$$

از اشتراک دو قسمت برای دامنه خواهیم داشت:

$$D: (0, +\infty) - \{1\}$$

حال با طرفین وسط عبارت ادامه می دهیم:

$$1 - |x| = 2\sqrt{x} - 2|x| \Rightarrow 1 - 2\sqrt{x} = -|x|$$

با بسط قدرمطلق داریم:

$$x \geq 0: 1 - 2\sqrt{x} = -x \Rightarrow x - 2\sqrt{x} + 1 = 0 \Rightarrow (\sqrt{x} - 1)^2 = 0$$

$$\Rightarrow \sqrt{x} = 1 \Rightarrow x = 1 \text{ غ ق } 1$$

$$x < 0: 1 - 2\sqrt{x} = x \Rightarrow x + 2\sqrt{x} - 1 = 0 \Rightarrow \Delta = 4 - 4(-1) = 8$$

$$\sqrt{x} = \frac{-2 \pm 2\sqrt{2}}{2}$$

$$\sqrt{x} = -1 + \sqrt{2} \Rightarrow x = 3 - 2\sqrt{2}$$

$$\sqrt{x} = -1 - \sqrt{2} \Rightarrow \text{غ ق } 1$$

با شرط $x < 0$ جواب غیر قابل قبول است. توجه داشته باشید که $x = 1$ چون

در دامنه عبارت نیست قابل قبول نیست.

متوسط

۱۶- گزینه «ا»

نمودار گلدانی به صورت $|x-a| + |x-b| = k$ زمانی بی شمار جواب دارد

که $|a-b| = k$ باشد.

ابتدا از ضریب x در قدرمطلق ها فاکتور می گیریم:

$$2\left(x - \frac{1}{3} + \left|x + \frac{5}{3}\right|\right) = 6k \Rightarrow \left|x - \frac{1}{3}\right| + \left|x + \frac{5}{3}\right| = 3k$$

$$\begin{matrix} \downarrow & \downarrow \\ a = \frac{1}{3} & b = -\frac{5}{3} \end{matrix}$$

$$\left|\frac{1}{3} + \frac{5}{3}\right| = 2k \Rightarrow 2 = 2k \Rightarrow 1 = k$$

متوسط

۱۷- گزینه «ا»

با توجه به نمودار $f(x)$ آن را تعیین علامت می کنیم.

x	-1
$f(x)$	$+$ 0 $+$

پس $f(x)$ همواره مثبت است و تنها در $x = -1$ صفر می شود. حال به بررسی

ضابطه $g(x)$ می پردازیم:

$$g(x) = \frac{f(x)}{|f(x)|} \Rightarrow D_g: \mathbb{R} - \{f(x) = 0\} \Rightarrow D_g = \mathbb{R} - \{-1\}$$

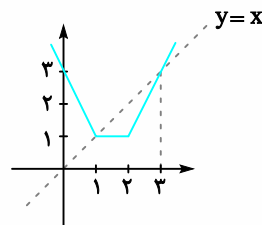
$$g(x) = \frac{f(x)}{|f(x)|} \xrightarrow[\text{مثبت است } f(x)]{\text{چون } f \text{ همواره}} g(x) = \frac{f(x)}{f(x)} = 1$$

پس نمودار $g(x) = 1$ با دامنه $\mathbb{R} - \{-1\}$ است.

دشوار

۱۲- گزینه «۴»

ابتدا به روش هندسی نمودار $y = x$, $y = |x-1| + |x-2|$ را رسم می کنیم و سپس از روی نمودار محدوده های که نمودار گلدانی از نیمساز ناحیه اول و سوم بالاتر بود را به عنوان جواب اعلام می کنیم.



محل برخورد دو نمودار $x = 1$ و دومین محل برخورد در $x > 2$ پس:

$$x - 1 + x - 2 = x \Rightarrow 2x - 3 = x \Rightarrow x = 3$$

در نتیجه در بازه $(-\infty, 1) \cup (3, +\infty)$ نمودار گلدانی بالاتر از نیمساز

است. (گزینه ها را نیز می توان امتحان کرد)

دشوار

۱۳- گزینه «ا»

حواستون باشه! در نامساوی مثلث زمانی $|a+b| = |a| + |b|$ خواهد بود که $ab \geq 0$ یعنی a و b هم علامت باشند.

با کمی نگاه دقیق تر به عبارت ها متوجه می شویم:

چون عبارت $x^2 + 4x + 9$ دارای Δ منفی است و ضریب x^2 مثبت است.

همواره مثبت است پس: $|a| = a$

$$|x^2 + 6x + 6| = |2x - 3| + |x^2 + 4x + 9|$$

$$|x^2 + 6x + 6| = |2x - 3| + |x^2 + 4x + 9|$$

در نتیجه $ab \geq 0$ پس:

$$(x^2 + 4x + 9)(2x - 3) \geq 0$$

همواره مثبت

$$2x - 3 \geq 0 \Rightarrow x \geq \frac{3}{2}$$

دشوار

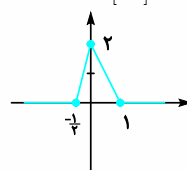
۱۴- گزینه «۲»

حواستون باشه! ریشه های داخل قدرمطلق نقاط شکست نمودار است پس

می توان با توجه به نقاط شکست نمودار را رسم کرد.

$$|1-x| + |2x+1| - 3|x| > 0$$

$$\begin{matrix} \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ \left[\begin{matrix} 1 \\ 0 \end{matrix} \right] & \left[\begin{matrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \end{matrix} \right] & \left[\begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} \right] \end{matrix}$$



حال قسمت هایی از نمودار که بالای محور x ها است جواب مسئله است

که $-\frac{1}{2} < x < 1$ است. (به روش نامساوی مثلثی نیز می توان حل کرد)

۱۸- گزینه «۲»

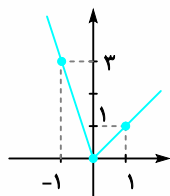
دشوار

با تعیین علامت قدرمطلق عبارت را ساده کنید:

$$x \geq 0: f(x) = |x - |x - x|| = |x| = x \quad \begin{array}{c|c} x & 1 \\ \hline y & 1 \end{array}$$

$$x < 0: f(x) = |x - |2x|| = |-3x| = -3x \quad \begin{array}{c|c} x & -1 \\ \hline y & 3 \end{array}$$

با استفاده از نقطه دهی به رسم نمودار می‌پردازیم:



۱۹- گزینه «۳»

دشوار

در ابتدا چون x خروجی قدرمطلق است پس $x > 0$ با این شرط شروع به بسط قدرمطلق می‌کنیم:

$$|x - 4| - 3x = x$$

حال با استفاده از ویژگی‌های قدرمطلق این معادله را دوباره حل می‌کنیم:

$$|x - 4| - 3x = x \Rightarrow |x - 4| = 4x$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x - 4 = 4x \Rightarrow -4 = 3x \Rightarrow -\frac{4}{3} = x \text{ ق ق} \\ x - 4 = -4x \Rightarrow -4 = -5x \Rightarrow x = \frac{4}{5} \text{ ق ق} \end{cases}$$

$$|x - 4| - 3x = -x \Rightarrow |x - 4| = 2x$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x - 4 = 2x \Rightarrow -4 = x \text{ ق ق} \\ x - 4 = -2x \Rightarrow -4 = -3x \Rightarrow x = \frac{4}{3} \text{ ق ق} \end{cases}$$

پس معادله دو جواب حقیقی دارد.

۲۰- گزینه «۱»

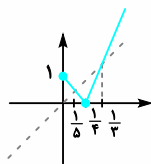
متوسط

با مرتب کردن معادله به $|4x - 1| > x$ خواهیم رسید. ابتدا

نمودار $y_1 = |4x - 1|$ و $y_2 = x$ را رسم می‌کنیم سپس قسمت‌هایی

که $y_2 = x$ بالاتر از قدرمطلق بود را به‌عنوان جواب مسئله اعلام می‌کنیم.

محل برخورد دو نمودار را از $|4x - 1| = x$ به دست می‌آوریم:



$$4x - 1 = x \Rightarrow 3x = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{3}$$

$$4x - 1 = -x \Rightarrow 5x = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{5}$$

پس جواب مسئله $(\frac{1}{5}, \frac{1}{3})$ است در نتیجه:

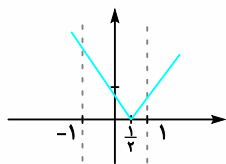
$$5a + 3b = 5(\frac{1}{5}) + 3(\frac{1}{3}) = 1 + 1 = 2$$

۲۱- گزینه «۳»

متوسط

با رسم نمودار $f(x) = |2x - 1|$, $x = 1$, $x = -1$ خواهیم داشت:

با توجه به شکل دو مثلث قائم‌الزاویه خواهیم داشت:



که مثلث کوچک‌تر دارای قاعده $\frac{1}{2}$ و ارتفاع:

$$2(1) - 1 = 2 - 1 = 1$$

و مثلث بزرگ‌تر دارای قاعده $\frac{3}{2}$ و ارتفاع:

$$-2x + 1 = -2(-1) + 1 = 3$$

پس:

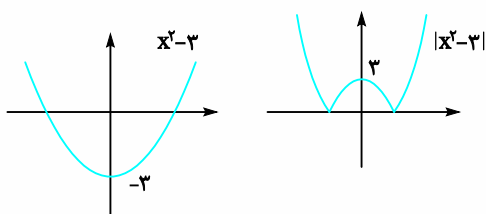
$$S_1 + S_2 = \frac{\frac{1}{2} \times 1}{2} + \frac{\frac{3}{2} \times 3}{2} = \frac{1}{4} + \frac{9}{4} = \frac{10}{4} = \frac{5}{2}$$

۲۲- گزینه «۳»

آسان

نمودار $|f(x)|$ بدان معناست که ابتدا $f(x)$ را رسم می‌کنیم سپس هر قسمت

از شکل که زیر محور x ها است را قرینه به سمت بالای محور x ها می‌کنیم.



۲۳- گزینه «۳»

آسان

حواستون باشه! کم‌ترین مقدار نمودار گلدانی در $|a - b|$ اتفاق می‌افتد پس:

$$y = |x - 3| + |x - a|$$

$$\text{پس } |3 - a| = 6$$

$$3 - a = 6 \Rightarrow 3 - 6 = a \Rightarrow a = -3$$

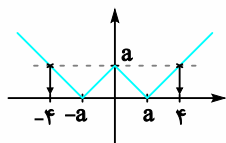
$$3 - a = -6 \Rightarrow 3 + 6 = a \Rightarrow a = 9$$

۲۴- گزینه «۲»

دشوار

ابتدا به طور حدودی نمودار $y = ||x| - a|$ را رسم می‌کنیم و با نمودار $y = 3$

آن را قطع می‌دهیم تا دارای سه جواب شود.



با توجه به شکل نقطه $(4, a)$ در معادله فوق صدق می‌کند پس:

$$a = ||4| - a| \Rightarrow a = |4 - a| \Rightarrow 4 - a = a \Rightarrow 4 = 2a \Rightarrow 2 = a$$

دشوار

۲۸- گزینه «ا»

$$|x^2 - 1| + 3|x - 1| \leq |x - 1||x - 2|$$

$$|x - 1||x + 1| + 3|x - 1| - |x - 1||x - 2| \leq 0$$

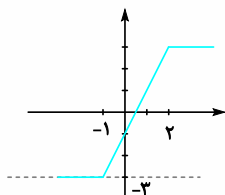
$$|x - 1|(|x + 1| + 3 - |x - 2|) \leq 0 \Rightarrow |x - 1| = 0 \Rightarrow x = 1$$

چون $|x - 1|$ مثبت است پس $|x + 1| + 3 - |x - 2|$ باید منفی باشد.

$$|x + 1| - |x - 2| \leq -3$$

$$\begin{bmatrix} -1 \\ -3 \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

با توجه به شکل قسمت اول جواب $x \leq -1$ و $x = 1$ است.



دشوار

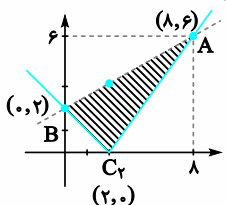
۲۹- گزینه «ب»

ابتدا نمودار $y = \sqrt{x^2 - 4x + 4} = |x - 2|$ را رسم می‌کنیم.

$$y = \sqrt{x^2 - 4x + 4} \Rightarrow y = \sqrt{(x - 2)^2}$$

$$y = |x - 2|$$

حالا مساحت ناحیه محدود $y = \frac{1}{2}x + 2$, $y = |x - 2|$ خواسته شده پس:



چون دو خط AC و BC دارای شیب‌های قرینه و معکوس یکدیگرند پس مثلث ABC قائم الزاویه است در نتیجه مساحت:

$$S = \frac{AC \times BC}{2}$$

$$AC = \sqrt{3^2 + 3^2} = 3\sqrt{2}$$

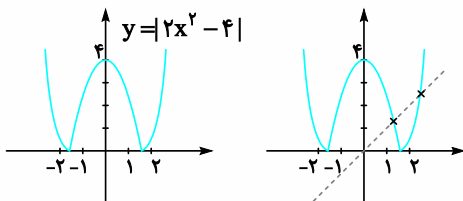
$$BC = \sqrt{4^2 + 4^2} = 2\sqrt{2}$$

$$S = \frac{3\sqrt{2} \times 2\sqrt{2}}{2} = 12$$

دشوار

۳۰- گزینه «ا»

با توجه به تعریف $|f(x)|$ می‌توان شکل $y = |2x^2 - 4|$ را رسم کرد سپس نواحی که $|2x^2 - 4| < 2x$ است به عنوان جواب اعلام کرد.
 $|f(x)|$ به معنای آن است که ابتدا $f(x)$ را رسم کنیم سپس قسمت‌های زیر محور x را به بالای محور x منتقل کنیم پس:



محل برخورد شکل در $x_1 = 1$, $x_2 = 2$ است پس بازه $(1, 2)$ جواب مسئله است پس:
 $b - a = 2 - 1 = 1$

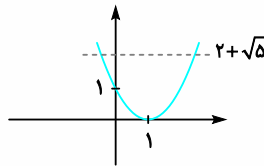
متوسط

۲۵- گزینه «ب»

طرف اول و دوم را به صورت اتحاد مربع کامل می‌نویسیم:

$$\sqrt{(2 + \sqrt{5})^2} = (x - 1)^2 \Rightarrow 2 + \sqrt{5} = (x - 1)^2$$

حال با استفاده از روش هندسی تعداد جواب‌های معادله را به دست می‌آوریم:



پس معادله ۲ جواب دارد.

متوسط

۲۶- گزینه «ب»

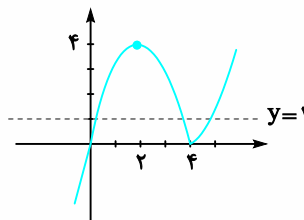
حاصل ضرب عددی در فاصله خودش از ۴ برابر $|x - 4|$ خواهد بود پس:

$$x|x - 4| = 4$$

با توجه به روش هندسی خواهیم داشت:

$$x \geq 4: x(x - 4)$$

$$x < 4: -x(x - 4)$$

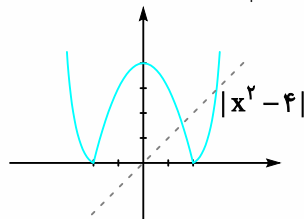


این معادله سه محل برخورد دارد پس سه عدد حقیقی این ویژگی را خواهند داشت.

دشوار

۲۷- گزینه «ب»

با توجه بازه بندی قدرمطلق و رسم شکل داریم:



جاهایی که قدرمطلق پایین‌تر از ۳ قرار دارد در قسمت مثبت اتفاق افتاده است پس:

$$0 \leq x < 2: -x^2 + 4 \leq 3x \Rightarrow 0 \leq x^2 + 3x - 4$$

$$(-\infty, -4] \cup [1, +\infty)$$

شکل جواب کل $[1, 2)$

$$x \geq 2: x^2 - 4 \leq 3x \Rightarrow x^2 - 3x - 4 \leq 0$$

$$\begin{array}{c|c|c|c|} -4 & 1 & & \\ \hline + & - & + & \\ \hline \end{array}$$

جواب کل $[2, 4]$

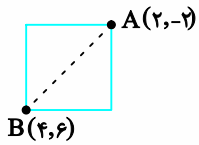
از اجتماع دو جواب به $[1, 4]$ می‌رسیم پس:

$$a = 1, b = 4 \Rightarrow 1 + 16 = 17$$

متوسط

۴-

حواستون باشه‌ها! برای به‌دست آوردن فاصله دو نقطه $A(x_1, y_1)$ و $B(x_2, y_2)$ از رابطه $AB = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$ استفاده می‌کنیم.
پس:
۲ رأس مقابل در مربع به‌صورت شکل مقابل است.



فاصله AB قطر مربع را می‌دهد و می‌دانیم (طول ضلع) $\times (\sqrt{2}) =$ قطر

$$AB = \sqrt{(4-2)^2 + (6-(-2))^2} = \sqrt{4+64} = \sqrt{68} = 2\sqrt{17}$$

پس طول ضلع مربع $\frac{2\sqrt{17}}{\sqrt{2}}$ خواهد بود در نتیجه مساحت مربع:

$$S = (2\sqrt{\frac{17}{2}})^2 = 4 \times \frac{17}{2} = 34$$

آسان

۵-

فاصله نقطه‌ای روی دایره تا مرکز دایره را شعاع دایره می‌نامند پس:

$$r = \sqrt{(2-1)^2 + (-3-2)^2} = \sqrt{1+25} = \sqrt{26}$$

دشوار

۶-

حواستون باشه‌ها!

نقاط روی نیمساز ربع اول و سوم از رابطه $y = x$ پیروی می‌کنند پس نقاط به‌صورت (α, α) .

فاصله (α, α) تا $(0, 3)$ را برابر ۴ قرار می‌دهیم:

$$\sqrt{(\alpha-0)^2 + (\alpha-3)^2} = 4 \Rightarrow \alpha^2 + \alpha^2 - 6\alpha + 9 = 16$$

$$\Rightarrow 2\alpha^2 - 6\alpha - 7 = 0$$

مجموع طول‌های خواسته شده بنا به معادلات درجه ۲ از رابطه $\frac{-b}{a}$ به دست

$$\text{می‌آید پس } 3 = \frac{-(-6)}{2}$$

آسان

۷-

حواستون باشه‌ها! بنا به فرمول یافتن نقطه وسط پاره‌خط اگر

$$\begin{matrix} & M & \\ & \bullet & \rightarrow B \\ A(x_A, y_A) & (e, f) & ?(x_B, y_B) \end{matrix}$$

$$\text{تصویر } x_B = 2e - x_A$$

$$\text{تصویر } y_B = 2f - y_A$$

پس بنا به فرمول داریم:

$$\text{تصویر } x = 2(2) - 3 = 1$$

$$\text{تصویر } y = 2(1) - (-1) = 3$$

پس نقطه تصویر (۳ و ۱) است.



سوالات تشریحی

پاسخنامه

بخش ۵

آسان

۱-

حواستون باشه‌ها!

(۱) فرمول معادله خط به‌صورت $y = ax + b$ و یا $y - y_0 = m(x - x_0)$ است.

(۲) محل تلاقی به معنای حل دستگاه و یا جای‌گذاری است.

(۳) شرط موازی بودن دو خط برابر بودن شیب‌ها و شرط عمود بودن دو خط قرینه و معکوس بودن شیب‌هاست.

ابتدا محل تلاقی خط $2y = x - 2$ و محور x را به دست می‌آوریم.

$$y = 0 \Rightarrow 2(0) = x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2$$

پس نقطه $\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$ در معادله خط جدید صدق می‌کند و با خط $3y = x + 2$ موازی

است پس شیب‌های برابر دارند. شیب خط $3y = x + 2$ برابر $\frac{1}{3}$ است پس:

$$y - 0 = \frac{1}{3}(x - 2) \Rightarrow y = \frac{1}{3}x - \frac{2}{3}$$

آسان

۲-

ابتدا فرمول معادله خط $y - y_1 = m(x - x_1)$ را می‌نویسیم. شرط عمود بودن دو خط قرینه و معکوس بودن شیب‌هاست پس:

$$\text{شیب} = \frac{-2}{3} \rightarrow \text{عمود (ضریب } x) = \frac{-(-3)}{2} = \frac{3}{2} \text{ شیب} = \frac{-(-3)}{2} = \frac{3}{2}$$

نقطه موردنظر با $x = 2$ را در معادله خط $y + 2x = 3$ جای‌گذاری می‌کنیم
تا $y = -1$ به دست آید:

$$y - (-1) = \frac{-2}{3}(x - 2) \Rightarrow y + 1 = \frac{-2}{3}x + \frac{4}{3} \Rightarrow y = \frac{-2}{3}x + \frac{1}{3}$$

دشوار

۳-

(آ) با مشخص کردن نوع مثلث داریم: [طول اضلاع و شیب‌ها را بیابید]

$$AB = \sqrt{(5-2)^2 + (4-0)^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$$

$$AC = \sqrt{(2+2)^2 + (0-3)^2} = \sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5$$

$$BC = \sqrt{(-2-5)^2 + (3-4)^2} = \sqrt{49+1} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$$

چون $5\sqrt{2}$ از بقیه اضلاع بزرگ‌تر است و رابطه فیثاغورس بین اضلاع برقرار است پس مثلث قائم‌الزاویه متساوی‌الساقین است.

(ب) چون مثلث قائم‌الزاویه متساوی‌الساقین است پس:



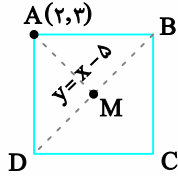
$$\text{محیط} = 5 + 5 + 5\sqrt{2} = 10 + 5\sqrt{2}$$

$$\text{مساحت} = \frac{5 \times 5}{2} = \frac{25}{2}$$

دشوار

-۱۱

با توجه به این که نقطه در خط صدق نمی‌کند پس ابتدا معادله خط AM را به دست می‌آوریم. چون شیب AM قرینه و معکوس قطر است پس شیب AM (-۱) است.



$$y - y_0 = m(x - x_0) \Rightarrow y - 3 = -1(x - 2)$$

$$y - 3 = -x + 2 \Rightarrow y = -x + 5$$

محل برخورد AM و قطر BD جواب مسئله است.

$$\begin{cases} y + x = 5 \\ y - x = -5 \end{cases}$$

$$2y = 0 \Rightarrow y = 0, x = 5$$

$$M(5, 0)$$

متوسط

-۱۲

با استفاده از فاصله نقطه از خط داریم: $A(1, 2)$ و $ax + 4y - 1 = 0$

$$\frac{|a + 8 - 1|}{\sqrt{a^2 + 16}} = 2 \Rightarrow \frac{|a + 7|}{\sqrt{a^2 + 16}} = 2 \Rightarrow |a + 7| = 2\sqrt{a^2 + 16}$$

$$a^2 + 14a + 49 = 4(a^2 + 16) \Rightarrow a^2 + 14a + 49 = 4a^2 + 64$$

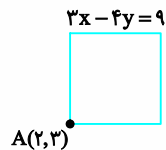
$$3a^2 - 14a + 15 = 0 \Rightarrow (3a - 5)(a - 3) = 0$$

$$\begin{matrix} \downarrow & \downarrow \\ a = \frac{5}{3} & a = 3 \end{matrix}$$

آسان

-۱۳

چون نقطه A در ضلع داده شده صدق نمی‌کند پس:



پس فاصله A تا خط $3x - 4y = 9$ طول ضلع مربع را می‌دهد پس:

$$3x - 4y - 9 = 0$$

$$\text{طول ضلع} = \frac{|3(2) - 4(3) - 9|}{\sqrt{9 + 16}} = \frac{|6 - 12 - 9|}{\sqrt{25}} = \frac{15}{5} = 3$$

$$S = 3^2 = 9 \text{ پس مساحت مربع}$$

دشوار

-۸

اگر نقطه‌ای روی خط $y = 2x$ باشد یعنی نقاطی به صورت $(\alpha, 2\alpha)$ خواهد بود حالا فاصله این نقطه از مبدأ مختصات و نقطه $A(2, 4)$ می‌یابیم:

$$\sqrt{(\alpha - 0)^2 + (2\alpha - 0)^2} + \sqrt{(\alpha - 2)^2 + (2\alpha - 4)^2} = 5$$

$$\sqrt{\alpha^2 + 4\alpha^2} + \sqrt{\alpha^2 - 4\alpha + 4 + 4\alpha^2 - 16\alpha + 16} = 5$$

$$\sqrt{5\alpha^2} + \sqrt{5\alpha^2 - 20\alpha + 20} = 5 \Rightarrow \sqrt{5}|\alpha| + \sqrt{5}|\alpha - 2| = 5$$

با توجه به بسط قدرمطلق‌ها داریم:

$$\alpha < 0: -\sqrt{5}\alpha - \sqrt{5}\alpha + 2\sqrt{5} = 5 \Rightarrow -2\sqrt{5}\alpha = 5 - 2\sqrt{5}$$

$$\Rightarrow \alpha = \frac{5 - 2\sqrt{5}}{-2\sqrt{5}}$$

$$0 \leq \alpha \leq 2: \sqrt{5}\alpha - \sqrt{5}\alpha + 2\sqrt{5} = 5 \Rightarrow 2\sqrt{5} \neq 5$$

$$\alpha > 2: \sqrt{5}\alpha + \sqrt{5}\alpha - 2\sqrt{5} = 5 \Rightarrow 2\sqrt{5}\alpha = 5 + 2\sqrt{5} \Rightarrow \alpha = \frac{5 + 2\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}$$

آسان

-۹

جوابتون باشه! با توجه به تمرین کتاب درسی اگر A, B, C, D چهار رأس متوازی‌الضلاع باشد داریم:

$$x_A + x_C = x_B + x_D$$

$$y_A + y_C = y_B + y_D$$

ابتدا رأس D را پیدا می‌کنیم:

$$x_A + x_C = x_B + x_D \Rightarrow 3 + 4 = 2 + x_D \Rightarrow 5 = x_D$$

$$y_A + y_C = y_B + y_D \Rightarrow 1 + (-2) = 0 + y_D \Rightarrow y_D = -1$$

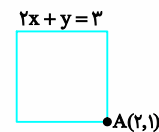
حال فاصله نقطه B و D را پیدا می‌کنیم:

$$BD = \sqrt{(2 - 5)^2 + (0 + 1)^2} \Rightarrow BD = \sqrt{9 + 1} = \sqrt{10}$$

متوسط

-۱۰

چون نقطه داده شده در خط صدق نمی‌کند پس روی ضلع قرار ندارد و در نتیجه



فاصله نقطه A تا خط $2x + y - 3 = 0$ طول ضلع مربع است پس:

$$\text{طول ضلع} = \frac{|2(2) + 1 - 3|}{\sqrt{4 + 1}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$S = \left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2 = \frac{4}{5}$$

دشوار

۱۷-

ابتدا برای یافتن H معادله خط AH و معادله خط BC را به دست می‌آوریم تا دستگاه حل کنیم:

معادله خط BC :

$$\text{شیب } BC: \frac{-2 - (-1)}{8 - 1} = \frac{-1}{7}, y + 1 = \frac{-1}{7}(x - 1)$$

$$y + 1 = \frac{-1}{7}x + \frac{1}{7} \Rightarrow y = \frac{-1}{7}x - \frac{6}{7}$$

معادله خط AH :

$$\text{شیب } AH = 7$$

$$y - 2 = 7(x - 4) \Rightarrow y = 7x - 28 + 2 \Rightarrow y = 7x - 26$$

دستگاه حل می‌کنیم تا محل برخورد BC و AH را بیابیم که همان نقطه H است.

$$\begin{cases} y = -\frac{1}{7}x - \frac{6}{7} \\ y = 7x - 26 \end{cases}$$

$$0 = -\frac{50}{7}x + \frac{176}{7}$$

$$\Rightarrow 176 = 50x \Rightarrow x = \frac{176}{50} = \frac{88}{25}, y = \frac{34}{25} H\left(\frac{88}{25}, \frac{34}{25}\right)$$

برای یافتن M نقطه وسط BC را می‌یابیم:

$$M\left(\frac{9}{2}, -\frac{3}{2}\right)$$

$$MH = \sqrt{\left(\frac{88}{25} - \frac{9}{2}\right)^2 + \left(\frac{34}{25} + \frac{3}{2}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{49}{50}\right)^2 + \left(\frac{143}{50}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{22850}{2500}} = \sqrt{9/14}$$

متوسط

۱۸-

(آ)

$$\text{وسط } AB = O = \left(\frac{6+2}{2}, \frac{4+(-2)}{2}\right) = (4, 1)$$

$$r = OA = \sqrt{(2-4)^2 + (-2-1)^2} = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}$$

(ب) اگر اندازه OC به اندازه شعاع دایره باشد یعنی C روی محیط دایره قرار دارد.

$$OC = \sqrt{(4-7)^2 + (1-3)^2} = \sqrt{9+4} = \sqrt{13} = r$$

پس C روی محیط دایره قرار دارد.

متوسط

۱۴-

حواستون باشه! عمودمنصف دارای دو ویژگی عمود بودن (شیب‌های قرینه و معکوس) و میانه بودن پاره‌خط است. $AB = \frac{-3-15}{0-6} = \frac{-18}{-6} = 3$ پس شیب عمودمنصف $-\frac{1}{3}$ خواهد بود.

$$AB \text{ وسط پاره‌خط } M: \left(\frac{0+6}{2}, \frac{-3+15}{2}\right) = (3, 6) = M$$

پس معادله عمودمنصف:

$$y - y_0 = m(x - x_0) \Rightarrow y - 6 = -\frac{1}{3}(x - 3) \Rightarrow y - 6 = -\frac{1}{3}x + 1$$

از صدق دادن نقطه P در معادله متوجه می‌شویم:

$$y = -\frac{1}{3}x + 7 \Rightarrow 11 = -\frac{1}{3}(-12) + 7 = 4 + 7 = 11$$

نقطه P روی خط قرار دارد.

متوسط

۱۵-

حواستون باشه! وقتی حرف از میانه باشه به نقطه وسط پاره‌خط احتیاج داریم. (آ) چون طول میانه خواسته شده ابتدا نقطه M پیدا می‌کنیم سپس از فاصله دو نقطه طول AM را پیدا می‌کنیم.

$$M \xrightarrow{\text{وسط } BC} \left(\frac{3+7}{2}, \frac{11+1}{2}\right) = (5, 6)$$

$$AM = \sqrt{(5-1)^2 + (6-9)^2} = \sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5$$

(ب) معادله میانه به معنای نوشتن معادله خط است پس:

$$\text{شیب } AM = \frac{6-9}{5-1} = \frac{-3}{4}$$

$$y - y_1 = m(x - x_1) \Rightarrow y - 6 = \frac{-3}{4}(x - 5) \Rightarrow y - 6 = \frac{-3}{4}x + \frac{15}{4}$$

$$y = -\frac{3}{4}x + \frac{39}{4}$$

متوسط

۱۶-

(آ) مثلث متساوی‌الساقین دو ضلع برابر دارد پس طول اضلاع را به دست می‌آوریم:

$$AB = \sqrt{(-6+1)^2 + (-2-7)^2} = \sqrt{25+81} = \sqrt{106}$$

$$AC = \sqrt{(3+1)^2 + (3-7)^2} = \sqrt{16+16} = 4\sqrt{2}$$

$$BC = \sqrt{(3+6)^2 + (3+2)^2} = \sqrt{81+25} = \sqrt{106}$$

پس چون $BC = AB$ ، مثلث متساوی‌الساقین است.

(ب) حواستون باشه! عمودمنصف و ارتفاع به فاصله نقطه از خط و شیب‌های

قرینه و معکوس مربوط است. عمودمنصف BC شیبی قرینه معکوس BC خواهد داشت پس:

$$\text{شیب } BC = \frac{-2-3}{-6-3} = \frac{-5}{-9} = \frac{5}{9} \xrightarrow{\text{قرینه و معکوس}} \frac{-9}{5}$$

عمودمنصف از وسط ضلع BC نیز می‌گذرد پس:

$$\text{وسط } BC: \left(\frac{-6+3}{2}, \frac{3+(-2)}{2}\right) = \left(-\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

$$\text{معادله } BC: y - \frac{1}{2} = -\frac{9}{5}\left(x + \frac{3}{2}\right) \Rightarrow y = -\frac{9}{5}x - \frac{11}{5}$$

(ب) فاصله نقطه A تا خط BC را به دست می‌آوریم:

$$AH = \frac{\left|7 + \frac{9}{5}(-1) + \frac{11}{5}\right|}{\sqrt{\frac{81}{25} + 1}} = \frac{\frac{37}{5}}{\frac{\sqrt{106}}{5}} = \frac{37}{\sqrt{106}}$$

متوسط

۲۳-

با توجه به شیب‌های خطوط داریم:

$$\begin{array}{ccc} A & 2x+3y+5=0 & B \\ x-2y-1=0 & \square & x-2y-3=0 \\ D & 2x+3y-1=0 & C \end{array}$$

ابتدا فاصله دو ضلع موازی AB و DC را می‌یابیم:

$$BC = AD = \frac{|5 - (-1)|}{\sqrt{4+9}} = \frac{6}{\sqrt{13}}$$

سپس فاصله دو ضلع موازی BC و AD را می‌یابیم:

$$AB = DC = \frac{|-1 - (-3)|}{\sqrt{1+4}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$\text{محیط} = 2\left(\frac{6}{\sqrt{13}} + \frac{2}{\sqrt{5}}\right)$$

متوسط

۲۴-

فاصله مرکز دایره از خطوط مماس برابر شعاع دایره است پس در نتیجه با

یکدیگر برابر است فاصله $(-1, 4)$ تا خط $3x + 4y + 2 = 0$

$$\frac{|3(-1) + 4(4) + 2|}{\sqrt{9+16}} = \frac{|-3 + 16 + 2|}{\sqrt{25}} = \frac{15}{5} = 3$$

فاصله $(-1, 4)$ تا خط $5x - 12y - k = 0$

$$\frac{|5(-1) - 12(4) - k|}{\sqrt{25+144}} = \frac{|-5 - 48 - k|}{\sqrt{169}} = \frac{|-53 - k|}{13}$$

$$\frac{|-53 - k|}{13} = 3 \Rightarrow |-53 - k| = 39 \Rightarrow \begin{cases} -53 - k = 39 \\ -53 - k = -39 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -53 - k = 39 \Rightarrow -92 = k \\ -53 - k = -39 \Rightarrow -14 = k \end{cases}$$

متوسط

۲۵-

(آ) محل برخورد سهمی با محور xها یعنی $y = 0$

$$x^2 - 8x - 20 = 0 \Rightarrow (x - 10)(x + 2) = 0$$

$$x = 10 \quad x = -2$$

(ب) طول AB فاصله xهای به دست آورده:

$$|x_B - x_A| = |10 - (-2)| = 12$$

(پ) بیش‌ترین ضخامت در y_s به دست می‌آید:

$$y_s = \frac{-\Delta}{4a} = \frac{-(64 + 80)}{4} = \frac{-144}{4} = -36$$

پس بیش‌ترین ضخامت ۳۶ است.

متوسط

۱۹-

ابتدا با توجه به شیب دو ضلع متوجه می‌شویم چون قرینه و معکوس یکدیگر

هستند پس حتماً ابتدا با حل کردن دستگاه مختصات C را می‌یابیم.

$$\begin{array}{ccc} A(5, 2) & & B \\ & \square & 3x + y = 3 \\ D & x - 2y = 1 & C \end{array}$$

$$\begin{cases} 3x + y = 3 \\ x - 2y = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} 3x + y = 3 \\ \quad \quad \quad \times 2 \quad \quad \quad 2x - 4y = 2 \\ \hline 10y = 0 \Rightarrow y = 0, x = 1 \end{array}$$

$$C(1, 0)$$

مختصات محل برخورد قطرها، نقطه وسط قطر AC است پس:

$$M = \left(\frac{5+1}{2}, \frac{2+0}{2}\right)$$

$$M = (3, 1)$$

متوسط

۲۰-

حواستون باشه! این فرمول را حتماً به خاطر بسپارید:

$$\text{فاصله دو خط موازی} = \frac{|C - C'|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$\text{اگر } d := ax + by + c = 0$$

$$\text{باشد. } d' : ax + by + c' = 0$$

اثبات: (۱) ابتدا نقطه‌ای از خط $ax + by + c = 0$ در نظر می‌گیریم:

$$\left(\alpha, -\frac{a}{b}\alpha - \frac{c}{b}\right)$$

(۲) فاصله این نقطه را از خط $ax + by + c' = 0$ به دست می‌آوریم:

$$\frac{|a\alpha + b\left(-\frac{a}{b}\alpha - \frac{c}{b}\right) + c'|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|a\alpha - a\alpha - c + c'|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|c' - c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

متوسط

۲۱-

با توجه به فرمول به دست آورده در سؤال قبل:

$$\sqrt{3}y - 3x + 5 = 0 \Rightarrow \sqrt{3}y - 3x + 5 = 0$$

$$y - \sqrt{3}x + 1 = 0 \xrightarrow{\times \sqrt{3}} \sqrt{3}y - 3x + \sqrt{3} = 0$$

$$\frac{|5 - \sqrt{3}|}{\sqrt{(\sqrt{3})^2 + (-3)^2}} = \frac{|5 - \sqrt{3}|}{\sqrt{3+9}} = \frac{5 - \sqrt{3}}{\sqrt{12}} = \frac{5 - \sqrt{3}}{2\sqrt{3}}$$

آسان

۲۲-

نقطه روی خط $y = x + 1$ به صورت $(\alpha, \alpha + 1)$ است.

$$\frac{|2\alpha - \alpha - 1 + 3|}{\sqrt{4+1}} = \sqrt{5} \Rightarrow \frac{|\alpha + 2|}{\sqrt{5}} = \sqrt{5} \Rightarrow |\alpha + 2| = 5$$

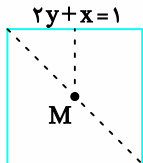
$$\alpha + 2 = 5 \Rightarrow \alpha = 3$$

$$\alpha + 2 = -5 \Rightarrow \alpha = -7$$

آسان

۳۰-

فاصله نقطه M تا خط $2y + x = 1$ نصف طول مربع است پس:



$$\frac{|2(4) + 0 - 1|}{\sqrt{4 + 1}} = \frac{7}{\sqrt{5}}$$

یعنی طول ضلع مربع $\frac{14}{\sqrt{5}}$ است پس مساحت مربع $S = (\frac{14}{\sqrt{5}})^2 = \frac{196}{5}$



آسان

۱- گزینه «۳»

$$x_A = 2n - 3, y_A = \frac{1}{2} - 3n$$

$$x_A = 3y_A + 1 \Rightarrow 2n - 3 = 3(\frac{1}{2} - 3n) + 1$$

$$\Rightarrow 2n - 3 = \frac{3}{2} - 9n + 1 \Rightarrow 11n = \frac{11}{2} \Rightarrow n = \frac{1}{2}$$

A در ربع سوم قرار دارد. $\Rightarrow A(-2, -1)$

آسان

۲- گزینه «۳»

A در ربع دوم است بنابراین x منفی و y مثبت است.

$$-2m < 0 \Rightarrow m > 0, 3x - 1 > 0 \Rightarrow m > \frac{1}{3} \Rightarrow m > \frac{1}{3}$$

با توجه به گزینه‌ها تنها، گزینه ۳ می‌تواند جواب باشد اما ادامه با حل آن داریم:

اگر بخواهد فاصله A تا محورهای یکسان باشد یعنی باید قدرمطلق طول و عرض آن برابر باشند:

$$|x| = |y| \Rightarrow \begin{cases} 3m - 1 = -2m \Rightarrow \Delta m = 1 \Rightarrow m = \frac{1}{5} \text{ ق ق} \\ 3m - 1 = 2m \Rightarrow m = 1 \text{ ق ق} \end{cases}$$

آسان

۳- گزینه «۳»

در ربع چهارم طول مثبت و عرض منفی است.

$$m + 2 > 0 \Rightarrow m > -2$$

$$2m + 1 < 0 \Rightarrow m < -\frac{1}{2} \xrightarrow{\cap} -2 < m < -\frac{1}{2}$$

دشوار

۲۶-

ابتدا شیب خط $ax + by + c = 0$ را می‌یابیم که برابر با $(-\frac{a}{b})$ است در

نتیجه خط AH که عمود بر آن است $(\frac{b}{a})$ است. در نتیجه معادله خط AH

برابر است با $y - y_0 = \frac{b}{a}(x - x_0)$ و در نتیجه $\frac{y - y_0}{b} = \frac{x - x_0}{a}$ که در

آن H محل برخورد خط $ax + by + c = 0$ و AH است. پس با حل دستگاه خواهیم داشت $\Leftarrow$

$$a(at + x_0) + b(bt + y_0) + c = 0 \Rightarrow t = -\frac{ax_0 + by_0 + c}{a^2 + b^2}$$

و نوشتن فاصله دو نقطه داریم:

$$AH = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

دشوار

۲۷-

$$r = OS = \sqrt{x^2 + 64} = 10 \quad (A)$$

$$x^2 + 64 = 100 \Rightarrow x^2 = 36 \Rightarrow x = 6$$

$$P(-10, 0) \Rightarrow \text{شیب PS} = \frac{8 - 0}{6 - (-10)} = \frac{8}{16} = \frac{1}{2} \quad (B)$$

$$Q(10, 0) \Rightarrow \text{شیب SQ} = \frac{8 - 0}{6 - 10} = \frac{8}{-4} = -2$$

(پ) چون شیب‌های قرینه و معکوس یکدیگرند پس در رأس S قائمه است.

آسان

۲۸-

فاصله PA و PB را حساب کرده فاصله کمتر جواب مسئله است.

$$PA = \sqrt{(50 - 10)^2 + (30 + 20)^2} = \sqrt{1600 + 2500} = \sqrt{4100}$$

$$PB = \sqrt{(50 - 80)^2 + (30 - 90)^2} = \sqrt{900 + 3600} = \sqrt{4500}$$

چون $PA < PB$ است پس پایگاه A مناسب‌تر است.

متوسط

۲۹-

(۱) ابتدا معادله خط AM را می‌یابیم: چون $x - y = 2$ عمود بر AM است شیب آن قرینه و معکوس است.

$$\text{شیب} = -1, A(2, 1) \xrightarrow{\text{معادله خط}} y - 1 = -1(x - 2) \Rightarrow y = -x + 3$$

محل تلاقی $x - y = 2$ و $y = -x + 3$ نقطه M خواهد بود.

$$y = -x + 3$$

$$\frac{y = -x + 3}{2y = 1}$$

$$y = \frac{1}{2}, x = \frac{5}{2}$$

$$M = (\frac{5}{2}, \frac{1}{2})$$

حال قرینه $A(2, 1)$ را نسبت به $M(\frac{5}{2}, \frac{1}{2})$ پیدا می‌کنیم.

$$x = 2(\frac{5}{2}) - 2 = 3 \quad (3, 0)$$

$$y = 2(\frac{1}{2}) - 1 = 0$$

دشوار

۸- گزینه «ا»

$$\begin{aligned} \begin{cases} y=0 \\ \sqrt{3}y=x \end{cases} &\Rightarrow x=0 \Rightarrow A(0,0) \\ \begin{cases} y=0 \\ y+\sqrt{3}x=3\sqrt{3} \end{cases} &\Rightarrow \sqrt{3}x=3\sqrt{3} \Rightarrow x=3 \Rightarrow B(3,0) \\ \begin{cases} \sqrt{3}y=x \\ y+\sqrt{3}x=3\sqrt{3} \end{cases} &\Rightarrow y+\sqrt{3}(\sqrt{3}y)=3\sqrt{3} \Rightarrow y+3y=3\sqrt{3} \\ &\Rightarrow 4y=3\sqrt{3} \Rightarrow y=\frac{3\sqrt{3}}{4} \\ &\Rightarrow x=\sqrt{3}\left(\frac{3\sqrt{3}}{4}\right)=\frac{9}{4} \Rightarrow C\left(\frac{9}{4}, \frac{3\sqrt{3}}{4}\right) \\ AB &= 3 \\ AC &= \sqrt{\frac{36}{16} + \frac{27}{16}} = \sqrt{\frac{63}{16}} = \frac{\sqrt{63}}{4} \\ BC &= \sqrt{\left(3-\frac{9}{4}\right)^2 + \frac{27}{16}} = \sqrt{\frac{9}{16} + \frac{27}{16}} = \sqrt{\frac{36}{16}} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2} \end{aligned}$$

طول ضلع AB از همه بیشتر است که برابر ۳ است.

متوسط

۹- گزینه «ب»

چون نقطه C روی خط $y=2x+1$ است پس مختصات آن $C(x, 2x+1)$ است:

$$\begin{aligned} AC=5 &\Rightarrow \sqrt{(x-2)^2 + (2x+1)^2} = 5 \\ &\Rightarrow x^2 - 4x + 4 + 4x^2 + 4x + 1 = 25 \Rightarrow 5x^2 = 20 \Rightarrow x^2 = 4 \\ &\Rightarrow x = \pm 2 \Rightarrow \begin{cases} C_1(2, 5) \\ C_2(-2, -3) \end{cases} \\ OC_1 &= \sqrt{4+25} = \sqrt{29} \\ OC_2 &= \sqrt{4+9} = \sqrt{13} \end{aligned}$$

پس $\sqrt{29}$ بزرگ تر است.

حواست باشد فاصله نقطه $A(x_A, y_A)$ از مبدأ $\sqrt{x_A^2 + y_A^2}$ است.

متوسط

۱۰- گزینه «ب»

$$\begin{aligned} AB &= \sqrt{(2+\sqrt{2}-2)^2 + (4-5)^2} = \sqrt{2+1} = \sqrt{3} \\ AC &= \sqrt{(3-2)^2 + (5+\sqrt{2}-5)^2} = \sqrt{1+2} = \sqrt{3} \\ BC &= \sqrt{(3-2-\sqrt{2})^2 + (5+\sqrt{2}-4)^2} = \sqrt{(1-\sqrt{2})^2 + (1+\sqrt{2})^2} \\ &= \sqrt{1+2-2\sqrt{2}+1+2+2\sqrt{2}} = \sqrt{6} \end{aligned}$$

از برابری $AB=AC$ نتیجه می گیریم مثلث متساوی الساقین است، اما از آن جایی که درگزینه ها قائم الزاویه اومده پس بررسی می کنیم رابطه فیثاغورس برقرار هست یا نه BC بزرگ ترین ضلع هست پس ممکنه وتر باشه.

$$(\sqrt{6})^2 = (\sqrt{3})^2 + (\sqrt{3})^2 \Rightarrow 6 = 3 + 3 \quad \checkmark$$

متساوی الساقین قائم الزاویه است.

آسان

۱۳- گزینه «ب»

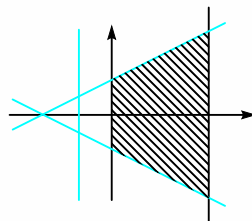
طول نقطه M متشکل از یک عبارت نامنفی و یک عدد مثبت است پس همواره مثبت است. پس تا این جا نواحی ۲ و ۳ حذف هستند.

اما در مورد علامت n^2-1 نمی توان نظری داد یعنی ممکن است مثبت، منفی یا صفر باشد طبق گفته سؤال روی مرز است پس $n^2-1=0$ ، $n=\pm 1$ است و نقطه روی مرز نواحی ۱ و ۴ قرار دارد.

آسان

۵- گزینه «ب»

با کمی دقت در معادله های خطوط می بینیم که دو خط $x=2$ و $x=-1$ موازی هم هستند اما دو خط دیگر با شیب های $\frac{2}{3}$ و $-\frac{2}{3}$ ارتباط خاصی با هم ندارند. چهارضلعی که فقط دو ضلع موازی دارد دوزنقه است.



متوسط

۶- گزینه «ا»

دو خط $y=3x$ و $y+x=4$ دو خط با شیب های ۳، ۱- هستند. محل تقاطع این دو خط، یک رأس مثلث را به ما می دهد:

$$\begin{aligned} \begin{cases} x+y=4 \\ 3x-y=0 \end{cases} &\Rightarrow \begin{matrix} 4x=4 \\ 4x=4 \end{matrix} \\ &\Rightarrow x=1 \quad y=3(1)=3 \Rightarrow A(1, 3) \end{aligned}$$

از آن جایی که ضلع سوم محور x ها است پس فاصله A تا محور x، ارتفاع مثلث رو به ما می دهد که همون عرض A هست پس $AH=3$.

محل برخورد در خط با محور x رو هم به دست بیاریم:

$$\begin{aligned} y=0 &\Rightarrow 3x=0 \Rightarrow x=0 \Rightarrow BC=4-0=4 \Rightarrow S=\frac{1}{2}BC \times AH \\ y=0 &\Rightarrow x=4 \\ &= \frac{1}{2} \times 4 \times 3 = 6 \end{aligned}$$

آسان

۷- گزینه «ا»

$$\begin{aligned} AB &= \sqrt{(2+1)^2 + (3+1)^2} = \sqrt{9+16} = 5 \\ S &= \text{طول} \times \text{عرض} \Rightarrow 15 = 5 \times x \Rightarrow x=3 \end{aligned}$$

پس طول مستطیل ۵ و عرض آن ۳ هست.

دشوار

۱۵- گزینه «۴»

اگر شیب‌های این دو خط را m و m' بنامیم:

$$m + m' = 1$$

از طرفی می‌دانیم که دو خط عمود بر هم دارای شیب‌های عکس و قرینه هم

$$mm' = -1 \text{ پس می‌شه گفت: } S = 1, p = -1$$

$$m^2 - Sm + p = 0 \Rightarrow m^2 - m - 1 = 0 \Rightarrow m = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y = \frac{1+\sqrt{5}}{2}x + b \\ y = \frac{1-\sqrt{5}}{2}x + b' \end{cases}$$

با شیب منفی کار داریم پس معادله دوم را در نظر گرفته و A را در آن قرار می‌دهیم:

$$\frac{1-\sqrt{5}}{2}(2) + b' = 1 \Rightarrow 1 - \sqrt{5} + b' = 1 \Rightarrow b' = \sqrt{5} \text{ (عرض از مبدأ)}$$

دشوار

۱۶- گزینه «۲»

شیب خط برابر $\frac{3}{4}$ هستش پس شیب MH برابر $\frac{4}{3}$ هست که میشه:

$$H(x, y) \Rightarrow \frac{y-2}{x-1} = \frac{4}{3}$$

$$\Rightarrow 3y - 6 = 4x - 4 \Rightarrow 4x - 3y + 2 = 0$$

از طرفی H نقطه‌ای روی خط هست پس در معادله صدق می‌کنه:

$$\begin{cases} 4 \times 4x - 3y = -2 \\ 3 \times 3x + 4y = 36 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 16x - 12y = -8 \\ 9x + 12y = 108 \end{cases} \Rightarrow \frac{25x = 100}{25} \Rightarrow x = 4$$

$$\xrightarrow{\text{معادله اول}} 16 - 3y = -2 \Rightarrow 16 + 2 = 3y = 18$$

$$\Rightarrow y = 6 \Rightarrow H(4, 6)$$

البته خواسته سؤال فقط $x = 4$ است.

متوسط

۱۷- گزینه «۲»

$$x = 2y - 1 \xrightarrow{y=2} x = 3 \Rightarrow A(3, 2)$$

شیب خط $x = 2y - 1$ برابر $\frac{1}{2}$ است پس شیب AB برابر 2 است اگر فرض

کنیم $B(x, y)$ باشد:

$$m_{AB} = \frac{y-2}{x-3}$$

$$\frac{y-2}{x-3} = 2 \Rightarrow y-2 = 2x-6 \Rightarrow 2x+y=4$$

از طرفی B روی خط $y = 2x$ قرار دارد پس:

$$2x + y = 4 \xrightarrow{y=2x} 2x + 2x = 4 \Rightarrow 4x = 4 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow B(1, 2)$$

$$\Rightarrow AB = \sqrt{(2-1)^2 + (4-2)^2} = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}$$

آسان

۱۱- گزینه «۳»

$$A(-2, 0), B(x, y), O(0, 0)$$

$$AB = \sqrt{(x+2)^2 + y^2}$$

$$AO = \sqrt{(-2)^2 + 0^2} = \sqrt{4} = 2$$

$$BO = \sqrt{x^2 + y^2}$$

شرط متساوی‌الضلاع بودن یک مثلث این هست که هر سه ضلع مساوی باشند:

$$\sqrt{(x+2)^2 + y^2} = 2 \Rightarrow x^2 + 4x + 4 + y^2 = 4 \quad (1)$$

$$\sqrt{x^2 + y^2} = 2 \Rightarrow x^2 + y^2 = 4 \quad (2)$$

(۲) را در (۱) جاگذاری می‌کنیم:

$$4x + 4 + \cancel{y^2} = \cancel{y^2}$$

$$\Rightarrow 4x = -4 \Rightarrow x = -1 \xrightarrow{(2)} 1 + y^2 = 4 \Rightarrow y^2 = 3 \Rightarrow y = \pm\sqrt{3}$$

در گزینه‌ها نیست. $B(-1, \sqrt{3})$ یا $B(-1, -\sqrt{3})$

آسان

۱۲- گزینه «۱»

مختصات M به صورت $(x, 4x+2)$ نوشته می‌شود.

$$MA = MB \Rightarrow \sqrt{(x-0)^2 + (4x+2-0)^2} = \sqrt{(x-0)^2 + (4x+2-\cancel{4})^2}$$

$$\xrightarrow{\text{توان ۲}} \cancel{x^2} + \cancel{16x^2} + 8x + 4 = \cancel{x^2} + \cancel{16x^2}$$

$$\Rightarrow 8x + 4 = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{2}$$

آسان

۱۳- گزینه «۴»

میانۀ وارد بر ضلع BC همان میانه‌ای است که از رأس A به وسط BC وصل

شده. پس ابتدا M وسط BC رو پیدا می‌کنیم و بعد طول AM رو به دست

بیاریم.

$$M \left| \begin{array}{c} x_B + x_C \\ 2 \\ y_B + y_C \\ 2 \end{array} \right| \Rightarrow M \left| \begin{array}{c} 2+0 \\ 2 \\ 1+5 \\ 2 \end{array} \right| = 1 \Rightarrow M(1, 3)$$

$$AM = \sqrt{(1+1)^2 + (3-0)^2} = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}$$

متوسط

۱۴- گزینه «۳»

نقاط A و B نیز روی خط قرار دارند و $C(x, x-2)$ نقطه C از A و B به

یک فاصله است بنابراین C وسط پاره خط AB است یعنی:

$$x_C = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{y-1}{2} = 3 \Rightarrow C(3, 1)$$

$$y_C = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{5-3}{2} = 1$$

عرض نقطه C برابر ۱ است.

۱۸- گزینه «۳»

آسان

اگر خط d عمود منصف پاره خط AB باشد، آن گاه هم بر آن عمود است یعنی

شیب آن عکس و قرینه شیب AB است هم از وسط آن یعنی M می گذرد:

$$M\left(\frac{3-1}{2}, \frac{4+0}{2}\right) = (1, 2)$$

$$m_{AB} = \frac{4-0}{3-(-1)} = \frac{4}{4} = 1 \Rightarrow m_d = -1$$

$$\Rightarrow y - y_0 = m_d(x - x_0)$$

$$\Rightarrow y - 2 = -1(x - 1) \Rightarrow y = -x + 1 + 2$$

$$\Rightarrow y = -x + 3 \quad \text{یا} \quad x + y = 3$$

۱۹- گزینه «۴»

آسان

$$\begin{aligned} AB: & \begin{cases} x + 2y = 3 \\ 2x - y = 1 \end{cases} \Rightarrow A(1, 1) \\ AC: & \end{aligned}$$

برای محاسبه طول ارتفاع AH کافی فاصله A رو از BC به دست بیاریم.

$$AH = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|1(1) + 1(1) - 4|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

۲۰- گزینه «۱»

دشواری

قاعده را AC و ارتفاع BH در نظر می گیریم:

$$AC = \sqrt{(-2-1)^2 + (2-1)^2} = \sqrt{9+1} = \sqrt{10}$$

فاصله نقطه B از قاعده BH

بنابراین اول معادله خط AC رو می نویسیم:

$$m_{AC} = \frac{2-1}{-2-1} = \frac{-1}{3}$$

حالا با نقطه A ، m_{AC} معادله می نویسیم:

$$y - 1 = \frac{-1}{3}(x - 1)$$

$$\Rightarrow y = \frac{-1}{3}x + \frac{1}{3} + 1 \Rightarrow y = \frac{-1}{3}x + \frac{4}{3} \xrightarrow{\times 3} 3y = -x + 4$$

$$\Rightarrow x + 3y - 4 = 0 \Rightarrow BH = \frac{|4 + 3 - 4|}{\sqrt{1+9}} = \frac{3}{\sqrt{10}}$$

$$\Rightarrow \delta = \frac{1}{3}AC \times BH = \frac{1}{3} \times \sqrt{10} \times \frac{3}{\sqrt{10}} = \frac{3}{3} = 1/5$$

نوجه: راه حل تستی دیگری در تست شماره ۳۱ آورده شده که با داشتن

مختصات سه رأس یک مثلث بتوانیم مساحت رو پیدا کنیم. حتماً بهش سر بزن

که خیلی جذابه!

۲۱- گزینه «۱»

دشواری

$$\begin{aligned} d_1: & \begin{cases} x + y = 1 \\ x - y = 3 \end{cases} \Rightarrow A(2, -1) \\ d_2: & \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d_1: & \begin{cases} x + y = 1 \\ 2x + y = -1 \end{cases} \Rightarrow B(-2, 2) \\ d_2: & \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d_2: & \begin{cases} x - y = 3 \\ 2x + y = -1 \end{cases} \Rightarrow C\left(\frac{2}{3}, -\frac{7}{3}\right) \\ d_3: & \end{aligned}$$

$$AC = \sqrt{\left(\frac{2}{3} - 2\right)^2 + \left(-\frac{7}{3} + 1\right)^2} = \sqrt{\frac{16}{9} + \frac{16}{9}} = \sqrt{\frac{32}{9}} = \frac{4}{3}\sqrt{2}$$

$$m_{AC} = \frac{-\frac{7}{3} - (-1)}{\frac{2}{3} - 2} = \frac{-\frac{4}{3}}{-\frac{4}{3}} = 1 \Rightarrow y + 1 = x - 2 \quad \text{معادله } AC$$

$$BH = \frac{|-2 - 3 - 3|}{\sqrt{1+1}} = \frac{8}{\sqrt{2}} \Rightarrow S = \frac{1}{2} \times \frac{4}{3} \times \sqrt{2} \times \frac{8}{\sqrt{2}} = \frac{16}{3}$$

۲۲- گزینه «۱»

دشواری

پس فرض می کنیم مختصات نقطه به صورت $(x, -\frac{x}{2})$ باشد:

خط $y = x$ را به فرم استاندارد فاصله نقطه از خط می نویسیم:

$$x - y = 0 \Rightarrow \text{فاصله} = \frac{|x - (-\frac{x}{2})|}{\sqrt{1+1}} = 2\sqrt{5}$$

$$\Rightarrow \left|\frac{3x}{2}\right| = 2\sqrt{5} \Rightarrow \frac{3x}{2} = \pm 2\sqrt{5}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{3x}{2} = 2\sqrt{5} \Rightarrow 3x = 4\sqrt{5} \Rightarrow x = \frac{4\sqrt{5}}{3} \Rightarrow A\left(\frac{4\sqrt{5}}{3}, -\frac{2\sqrt{5}}{3}\right) \\ \frac{3x}{2} = -2\sqrt{5} \Rightarrow x = \frac{-4\sqrt{5}}{3} \Rightarrow B\left(\frac{-4\sqrt{5}}{3}, \frac{2\sqrt{5}}{3}\right) \end{cases}$$

$$\Rightarrow AB = \sqrt{\left(\frac{8\sqrt{5}}{3}\right)^2 + \left(\frac{4\sqrt{5}}{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{10}}{3} \times \sqrt{80} = \frac{20\sqrt{2}}{3}$$

$$CH = \frac{|1(0) + 2(3)|}{\sqrt{1^2 + 2^2}} = \frac{6}{\sqrt{5}} \Rightarrow S = \frac{1}{2} \times \frac{20\sqrt{2}}{3} \times \frac{6}{\sqrt{5}} = \frac{20\sqrt{10}}{5} = 4\sqrt{10}$$

۲۳- گزینه «۲»

متوسط

نقطه بر خط $y = x - 1$ را به صورت $A(x, x - 1)$ در نظر می گیریم:

$$AH = \frac{|2x - 3(x - 1) - 5|}{\sqrt{4+9}} = \frac{|2x - 3x + 3 - 5|}{\sqrt{13}} = \frac{|-x - 2|}{\sqrt{13}}$$

فاصله برابر $\sqrt{13}$ شده پس داریم:

$$\frac{|x + 2|}{\sqrt{13}} = \sqrt{13}$$

$$\Rightarrow |x + 2| = 13 \Rightarrow \begin{cases} x + 2 = 13 \Rightarrow x = 11 \\ x + 2 = -13 \Rightarrow x = -15 \end{cases}$$

دشوار

۲۷- گزینه «ا»

معادله خط به فرم استاندارد به صورت $mx - 2y + b = 0$ هست و از طرفی $(1, 2)$ نقطه‌ای از خط است پس در معادله صدق می‌دهیم:

$$m(1) - 2(2) + b = 0 \Rightarrow m + b = 4 \quad (1)$$

فاصله $O(0, 0)$ تا خط رو به دست بیاریم:

$$OH = \frac{|b|}{\sqrt{m^2 + 4}} = \frac{|b|}{\sqrt{m^2 + 4}} \xrightarrow{\text{توان ۲}} m^2 + 4 = b^2$$

$$\Rightarrow b^2 - m^2 = 4 \Rightarrow (b - m)(b + m) = 4 \xrightarrow{(1)} b - m = 1$$

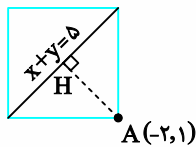
$$\Rightarrow \begin{cases} b + m = 4 \\ b - m = 1 \end{cases} \Rightarrow b = \frac{5}{2} \xrightarrow{\text{اولی}} \frac{5}{2} + m = 4 \Rightarrow m = 4 - \frac{5}{2} = \frac{3}{2}$$

$$2b = 5$$

متوسط

۲۸- گزینه «ب»

می‌دانیم که در مربع قطرهای بر همدیگر عمودند و هم یکدیگر را نصف می‌کنند. پس فاصله رأس A تا قطر رو به دست می‌اریم:



$$AH = \frac{|-2+1-5|}{\sqrt{1+1}} = \frac{6}{\sqrt{2}} = \frac{6\sqrt{2}}{2} = 3\sqrt{2}$$

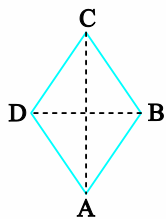
$3\sqrt{2}$ AH نصف یک قطر است پس طول قطر دو برابر AH است یعنی:

متوسط

۲۹- گزینه «ا»

حواست باشه اگه خود سؤال ترتیب اسم گذاری رأس‌های یک چندضلعی رو بهت نداد، خودت به ترتیب به صورت ساعتگرد یا پادساعتگرد اسم گذاری کنی پس $ABCD$ اسم لوزی ما هست.

لوزی یک نوع متوازی‌الضلاع هست پس ویژگی رئوس متوازی‌الضلاع رو داره:



$$x_A + x_C = x_B + x_D \Rightarrow 6 + 6 = 5 + x_D \Rightarrow x_D = 7$$

$$y_A + y_C = y_B + y_D \Rightarrow 2 + 8 = 5 + y_D \Rightarrow y_D = 5$$

$$\Rightarrow D(7, 5) \quad AC = \text{هم طول} = |8-2| = 6 \quad BD = \text{هم عرض} = |7-5| = 2$$

$$\Rightarrow S = \frac{1}{2} (\text{محصول ضرب قطرها}) = \frac{1}{2} \times 6 \times 2 = 6$$

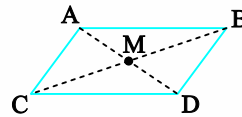
متوسط

۳۰- گزینه «ب»

نو این مدل سؤال‌ها اول چک می‌کنیم A در دو خط داده شده صدق می‌کنه یا نقطه‌ای خارج از این دو ضلع است؟

$A(7, 6)$ در هیچ کدوم از خطوط صدق نمی‌کنه پس A خارج از دو خط

هست. پس معادله خطوط داده شده مربوط به BD و DC هست.



$$\begin{cases} 2y - 3x = 11 \\ 3y + 4x = 8 \end{cases} \Rightarrow x = -1, y = 4$$

بنابراین:

$$A \begin{vmatrix} 7 \\ 6 \end{vmatrix}, C \begin{vmatrix} -1 \\ 4 \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow AC \text{ وسط } M \begin{vmatrix} \frac{7-1}{2} \\ \frac{6+4}{2} \end{vmatrix} \Rightarrow M(3, 5)$$

آسان

۳۱- گزینه «ب»

مختصات نقطه A رو با برخورد دادن AB و AC پیدا می‌کنیم و بعد به کمک شیب BC ، شیب خط AH به دست می‌آوریم و معادله می‌نویسیم:

$$\begin{aligned} AB: & \begin{cases} 2y - x = 3 \\ y - 2x = -3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2y - x = 3 \\ -3y + 4x = 6 \end{cases} \\ AC: & \end{aligned}$$

$$\frac{3x = 9 \Rightarrow x = 3 \Rightarrow y = 3 \Rightarrow A \begin{vmatrix} 3 \\ 3 \end{vmatrix}}$$

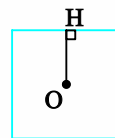
$$m_{BC} = \frac{-3}{2} \Rightarrow m_{AH} = \frac{2}{3}$$

$$AH: y - 3 = \frac{2}{3}(x - 3) \xrightarrow{\times 3} 3y - 9 = 2x - 6 \Rightarrow 3y - 2x = 3$$

متوسط

۳۲- گزینه «ب»

معادله رو به فرم استاندارد بنویسیم:



$$x - 2y + 5 = 0$$

$$OH = \frac{|3+2+5|}{\sqrt{1+4}} = \frac{10}{\sqrt{5}} \Rightarrow \text{طول ضلع} = \frac{20}{\sqrt{5}}$$

$$\Rightarrow S = \left(\frac{20}{\sqrt{5}}\right)^2 = \frac{400}{5} = 80$$

۳۰- گزینه «۳»

دشوار

برای محاسبه مختصات محل تلاقی میانه‌های یک مثلث کافیست بین x ها و y ها سه رأس میانگین بگیری:

$$G\left(\frac{x_A + x_B + x_C}{3}, \frac{y_A + y_B + y_C}{3}\right) = (2, 0)$$

$$\Rightarrow GM = \sqrt{(2+1)^2 + (0-1)^2} = \sqrt{9+1} = \sqrt{10}$$

۳۱- گزینه «۲»

دشوار

برای محاسبه مساحت یک مثلث با داشتن مختصات سه رأس A و B و C از فرمول زیر استفاده می‌کنیم:

$$S = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_A & y_A \\ x_B & y_B \\ x_C & y_C \end{vmatrix} = \frac{1}{2} |(1+2+3) - (4+5+6)|$$

در این سؤال داریم:

$$S = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 4 & -1 \\ 0 & -3 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} |(-2-12+0) - (0+0-6)| = \frac{1}{2} |-14 - (-6)| = \frac{1}{2} |-8| = 4$$

۳۲- گزینه «۳»

دشوار

طبق فرمولی که توی تست ۳۱ داشتیم، مساحت مثلث MNP را به دست می‌آوریم:

$$S_{MNP} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} |(8-6+3) - (9+4-4)| = \frac{1}{2} (4) = 2$$

از طرفی مثلثی که رئوسش نقاط میانی یک مثلث دیگر باشند، مساحتش $\frac{1}{4}$ مساحت مثلث اصلی است پس:

$$S_{ABC} = 4S_{MNP} = 4(2) = 8$$

۳۳- گزینه «۱»

دشوار

ابتدا برای یافتن رأس B دستگاه بین خطوط AB و BC می‌نویسیم:

$$\begin{cases} y + 2x = 7 \\ 2y - 7x = -19 \end{cases} \xrightarrow{\times -2} \begin{cases} y + 2x = 7 \\ 2y - 4x = -14 \end{cases} \xrightarrow{-} \begin{cases} y + 2x = 7 \\ -6x = -33 \end{cases}$$

$$x = 3, \quad y = 1, \quad B(3, 1)$$

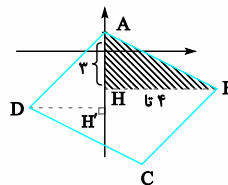
حال فاصله رأس B از خط AC طول ارتفاع BH را به ما می‌دهد:

$$BH = \frac{|4 - 9 - 17|}{\sqrt{16+9}} = \frac{22}{5} = 4.4$$

۳۴- گزینه «۳»

دشوار

با استفاده از موقعیت نقاط روی دستگاه مختصات:



چون دو مثلث ABH و ADH' هم‌نهشت هستند پس:

$$DH' = AH = 3 \Rightarrow x_D = -3$$

روش دوم:

$$AB = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$$

$$AB = \frac{-3}{4} \Rightarrow \text{شیب } AD = \frac{4}{3}$$

$$AD = \frac{4}{3} \Rightarrow y - 1 = \frac{4}{3}(x - 0) \Rightarrow y = \frac{4x+3}{3} \Rightarrow D(x, \frac{4x+3}{3})$$

$$AB = \frac{-3}{4} \Rightarrow y - 1 = \frac{-3}{4}(x - 0) \Rightarrow 3x + 4y - 4 = 0$$

AB = ضلع مربع = فاصله نقطه D تا خط AB

$$\frac{|3x + 4y - 4|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = 5 \Rightarrow \frac{|3x + 4(\frac{4x+3}{3}) - 4|}{5} = 5$$

$$\Rightarrow |3x + \frac{16x+12}{3} - 4| = 25 \Rightarrow \frac{|9x + 16x + 12 - 12|}{3} = 25$$

$$|25x| = 25 \Rightarrow \begin{cases} 25x = 25 \Rightarrow x = 1 \\ 25x = -25 \Rightarrow x = -1 \end{cases}$$

D ربع سوم است پس $x < 0$

متوسط

۳۵- گزینه «۴»

با توجه به فرمول نقطه از خط در مثلث ABC ، باید فاصله نقطه A تا خط BC را به دست آوریم پس ابتدا معادله BC را می‌نویسیم:

$$BC = \frac{y_C - y_B}{x_C - x_B} = \frac{-2 - 3}{2 - 7} = \frac{-5}{-5} = 1$$

$$y - x + 4 = 0 \Rightarrow y - x = -4 \Rightarrow y = x - 4$$

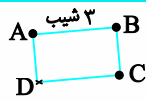
BC

$$d = AH = \frac{|ae + bf + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \Rightarrow \frac{|5(-1) + 4|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2} = 4\sqrt{2}$$

دشوار

۳۶- گزینه «۳»



با توجه به D ابتدا معادله خط AB را می‌نویسیم:

$$AB = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{3 - 4}{3 - 2} = -1$$

$$y - 4 = -1(x - 2) \Rightarrow y - 4 = -x + 2 \Rightarrow y = -x + 6$$

چون ضلع BC بر ضلع AB عمود است پس شیب‌های آن قرینه و معکوس

$$BC = \frac{1}{3}$$

$$C(-3, -1)$$

$$y + 1 = \frac{1}{3}(x + 3) \Rightarrow y = \frac{1}{3}x - 2$$

حال اگر فاصله نقطه C از ضلع AB را به دست آوریم طول ضلع BC حساب می‌شود پس:

$$y - 3x + 2 = 0, \quad C(-3, -1) \Rightarrow BC = \frac{|-1 + 9 + 2|}{\sqrt{1+9}}$$

$$= \frac{10}{\sqrt{10}} \times \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{10}} = \frac{10\sqrt{10}}{10} = \sqrt{10}$$

از طرفی با حل دستگاه معادلات خط BC و AB می‌توان مختصات B را به دست آورد پس:

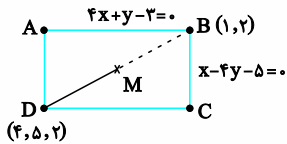
$$3x - 2 = \frac{1}{3}x - 2$$

$$x = 0, y = -2 \quad B(0, -2) \Rightarrow AB = \sqrt{4 + 36} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$$

پس محیط مستطیل (عرض + طول) $\cdot 2 = 2(3\sqrt{10}) = 6\sqrt{10}$

دشوار

۱۴- گزینه «ا»



بیشترین فاصله M از اضلاع، فاصله نقطه M تا ضلع BC خواهد بود پس می‌توان با محاسبه طول‌های مستطیل و نصف کردن آن‌ها به بیشترین فاصله M از اضلاع رسید پس ابتدا فاصله D تا خط BC را محاسبه می‌کنیم تا طول ضلع DC حساب شود.

$$DC = \frac{|4/5 - 8 - 5|}{\sqrt{1+16}} = \frac{8/5}{\sqrt{17}} = \frac{17}{2\sqrt{17}}$$

با گویا کردن جواب و نصف کردن آن به جواب مسئله می‌رسیم:

$$\frac{17}{2\sqrt{17}} \times \frac{\sqrt{17}}{\sqrt{17}} = \frac{17\sqrt{17}}{2 \times 17} = \frac{\sqrt{17}}{2} \xrightarrow{\text{نصف}} \frac{\sqrt{17}}{4}$$

$$AD = \frac{|4(4/5) + 2 - 3|}{\sqrt{16+1}} = \frac{17}{\sqrt{17}} \times \frac{\sqrt{17}}{\sqrt{17}} = \sqrt{17} \xrightarrow{\text{نصف}} \frac{\sqrt{17}}{2}$$



آسان

-۱

با توجه به کتاب یازدهم نقطه اول با ۴۹ نقطه دیگر پاره‌خط تشکیل می‌دهد نقطه دوم با ۴۸ نقطه دیگر و به همین صورت ادامه دارد پس تعداد پاره‌خط‌های تولید شده:

$$49 + 48 + \dots + 1 = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\frac{49 \times 50}{2} = 49 \times 25 = 1225$$

متوسط

-۲

در فرمول S_n در دنباله‌های حسابی می‌دانیم که $S_1 = a_1$ پس:

$$S_1 = \frac{3(1)^2}{2} + \frac{7(1)}{2} = \frac{3}{2} + \frac{7}{2} = \frac{10}{2} = 5 = a_1$$

همچنین می‌دانیم $S_2 = a_1 + a_2$ پس:

$$S_2 = \frac{3(2)^2}{2} + \frac{7(2)}{2} = 6 + 7 = 13 = a_1 + a_2$$

$$13 = 5 + a_2 \Rightarrow a_2 = 8$$

با توجه به اطلاعات دنباله ۵, ۸, ... در فرمول جمله عمومی

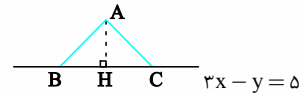
$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

$$a_n = 5 + (n-1)(3) \Rightarrow a_n = 5 + 3n - 3 \Rightarrow a_n = 3n + 2$$

دشوار

۱۳- گزینه «ب»

محیط مثلث مورد سؤال $\sqrt{270} = 3\sqrt{30}$ است پس طول هر ضلع آن $\sqrt{30}$ خواهد بود و از طرفی می‌دانیم در مثلث متساوی‌الضلاع ارتفاع (ضلع) $(\frac{\sqrt{3}}{2})$ است یعنی:



$$AH = \frac{\sqrt{3}}{2} \times \sqrt{30} = \frac{\sqrt{90}}{2}$$

فاصله نقطه A تا خط $3x - y = 5$ برابر $\frac{\sqrt{90}}{2}$ است. پس با نوشتن معادله خط AH نقطه A را به صورت پارامتری نوشته و فاصله آن را از خط $3x - y = 5$ برابر $\frac{\sqrt{90}}{2}$ قرار می‌دهیم:

$$AH = \frac{-1}{3} \quad \text{شیب: معادله خط} \quad H = (2, 1)$$

$$y - 1 = \frac{-1}{3}(x - 2) \Rightarrow y - 1 = \frac{-1}{3}x + \frac{2}{3} \Rightarrow y = -\frac{1}{3}x + \frac{5}{3}$$

$$\xrightarrow{\text{نقطه } A} (\alpha, \frac{5-\alpha}{3}) \Rightarrow AH: \frac{|3\alpha - \frac{5-\alpha}{3} - 5|}{\sqrt{9+1}} = \frac{\sqrt{90}}{2}$$

$$\Rightarrow (\alpha - 2)^2 = \frac{81}{4} \Rightarrow \alpha - 2 = \pm \frac{9}{2} \Rightarrow \alpha = \frac{13}{2}$$

متوسط

۱۳- گزینه «ا»

نقطه A به صورت $(x, -x + a)$ است فاصله AB و AC را می‌نویسیم:

$$\sqrt{(x+3)^2 + (-x+a-2)^2} = \sqrt{a} \Rightarrow 2x^2 + (10-2a)x + (a-2)^2 = 20$$

$$\sqrt{(x+1)^2 + (-x+a-4)^2} = 5 \Rightarrow 2x^2 + (10-2a)x + (a-4)^2 = 24$$

$$20 - (a-2)^2 = 24 - (a-4)^2$$

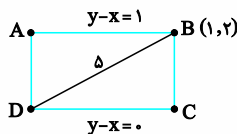
$$20 - (a^2 - 4a + 4) = 24 - (a^2 - 8a + 16)$$

$$20 - a^2 + 4a - 4 = 24 - a^2 + 8a - 16 \Rightarrow 8 = 4a \Rightarrow 2 = a$$

دشوار

۱۳- گزینه «ب»

در ابتدا چون دو ضلع مقابل مستطیل داده شده است پس شیب دو خط با هم برابر هستند پس توجه کنید $a = -1$ نمی‌تواند اتفاق بیفتد چون در جای‌گذاری نقطه $(1, 2)$ روی رأس صدق نمی‌کند پس معادلات ضلع به صورت مقابل خواهد بود.



با استفاده از فاصله نقطه از خط طول ضلع BC را به دست می‌آوریم پس:

$$BC = \frac{|2-1|}{\sqrt{1+1}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

حال با استفاده از فیثاغورس در مثلث BCD داریم:

$$BD^2 = BC^2 + DC^2$$

$$5^2 = (\frac{1}{\sqrt{2}})^2 + DC^2 \Rightarrow 25 = \frac{1}{2} + DC^2 \Rightarrow 25 - \frac{1}{2} = DC^2 \Rightarrow \frac{49}{2} = DC^2$$

$$DC = \frac{7}{\sqrt{2}} \xrightarrow{\text{در نتیجه مساحت مستطیل}} S = BC \times DC = \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{7}{\sqrt{2}} = \frac{7}{2} = 3.5$$

متوسط

-۷

با توجه به معادله سهمی $y = a(x - \alpha)(x - \beta)$ و ریشه‌های مشخص شده در شکل ۱ و ۲

$$y = a(x - (-1))(x - 2)$$

$$y = a(x + 1)(x - 2) \xrightarrow[\text{و جایگذاری آن در معادله}]{\text{با استفاده از نقطه } \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}} -1 = a(0 + 1)(0 - 2)$$

$$-1 = -2a \Rightarrow a = \frac{1}{2}$$

$$y = \frac{1}{2}(x + 1)(x - 2) \Rightarrow y = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - 1 \quad \text{پس ضابطه سهمی}$$

دشوار

-۸

حواستون باشه! ایده حل این سؤال را در ذهن نگه دارید.

$$x^2 - x - 5\sqrt{x^2 - x + 5} + 9 = 0$$

$$x^2 - x + 5 - 5\sqrt{x^2 - x + 5} + 4 = 0 \quad \xrightarrow{x^2 - x + 5 = t}$$

$$t - 5\sqrt{t} + 4 = 0 \quad \xrightarrow{\text{جمع ضرایب صفر است}} \sqrt{t} = 1, \sqrt{t} = 4$$

$$t = 1, t = 16 \xrightarrow{t=1} x^2 - x + 5 = 1 \Rightarrow x^2 - x + 4 = 0$$

$$\Delta = 1 - 4(4) \Rightarrow \Delta = -15 \quad \text{ریشه ندارد}$$

$$\xrightarrow{t=16} x^2 - x + 5 = 16 \Rightarrow x^2 - x - 11 = 0$$

$$\Delta = 1 - 4(-11) \Rightarrow \Delta = 1 + 44 = 45$$

$$\text{ریشه} = \frac{1 \pm \sqrt{45}}{2}$$

دشوار

-۹

$$\begin{array}{c} 7:45 \quad t+30 \quad t \quad 8:15 \\ A \times \quad V_A \quad M \quad V_B \times B \end{array}$$

قطار A چون ۷:۴۵ شروع به حرکت کرده است در رسیدن به M که نقطه برخورد دو قطار است ۳۰ دقیقه بیشتر حرکت کرده است.

$$\begin{array}{c} 100 \text{ min} \quad M \quad 40 \text{ min} \\ A \times \quad V_B \quad x \quad V_A \times B \end{array}$$

حالا در شکل دوم با توجه به صورت سؤال قطار M / iA ، ۴۰ دقیقه طول می‌کشد تا به B برسد و قطار B ۱۰۰ دقیقه طول می‌کشد که از M به A برسد. با توجه به رابطه $x = Vt$ ، مسافت طی شده از A تا M در دو شکل برابر است پس $(V_A)(t + 30) = 100 V_B$ همچنین طول مسافت طی شده در رسیدن B تا M نیز با یکدیگر برابر است پس $t V_B = (V_A)(40)$ از تقسیم دو رابطه به دست آمده داریم.

$$\frac{V_A(t + 30)}{V_A(40)} = \frac{100 V_B}{t V_B} \Rightarrow \frac{t + 30}{40} = \frac{100}{t} \Rightarrow t^2 + 30t - 4000 = 0$$

$$(t + 80)(t - 50) = 0$$

$$t = -80 \quad t = 50$$

ق ق غ ق

پس اگر از سمت B به مسئله نگاه کنیم از ساعت ۸:۱۵ اگر ۵۰ دقیقه جلو بیاییم ساعت ۹:۰۵ خواهد بود و همچنین اگر از سمت A به مسئله نگاه کنیم از ساعت ۷:۴۵ اگر $t + 30 = 80$ دقیقه جلو بیاییم ۹:۰۵ خواهد بود.

متوسط

-۱۰

$$a_1 + a_3 = 1 \Rightarrow a_1 + a_1 q^2 = 1 \Rightarrow a_1(1 + q^2) = 1 \Rightarrow a_1 = \frac{1}{1 + q^2} \quad (*)$$

$$S_4 = 3 \Rightarrow a_1 \frac{1 - q^4}{1 - q} = 3 \quad \xrightarrow{\text{با توجه به } (*)}$$

$$\frac{1}{1 + q^2} \times \frac{(1 - q^2)(1 + q^2)}{1 - q} = 3 \Rightarrow \frac{(1 - q)(1 + q)}{1 - q} = 3$$

$$1 + q = 3 \Rightarrow q = 2$$

$$S_5 = \frac{1}{5} \times \frac{1 - 2^5}{1 - 2} \quad \text{پس: } a_1 = \frac{1}{1 + 4} = \frac{1}{5} \quad * \quad \text{در } q = 2$$

$$S_5 = \frac{1}{5} \times \frac{1 - 64}{-1} = \frac{-63}{-5} = \frac{63}{5}$$

آسان

-۱۱

صفر تابع یعنی عددی که اگر در معادله صدق کند آن را صفر کند.

$$5^3 - a(5)^2 - 8(5) - 10 = 0 \Rightarrow 125 - 25a - 40 - 10 = 0$$

$$75 = 25a \Rightarrow 3 = a$$

با جای گذاری a در معادله $F(x) = x^3 - 3x^2 - 8x - 10$ چون $x = 5$ یک

ریشه آن است پس در نتیجه تجزیه عبارت $(x - 5)(x^2 + 2x + 2) = 0$.

$$x - 5 = 0 \Rightarrow x = 5$$

$$x^2 + 2x + 2 = 0 \Rightarrow \Delta = 4 - 4(2) = -4 \quad \text{ریشه ندارد.}$$

$$\begin{array}{r} x^3 - 3x^2 - 8x - 10 \quad | \quad x - 5 \\ \underline{x^3 + 2x + 2} \\ 2x^2 - 8x - 10 \\ \underline{2x^2 + 10x} \\ 2x - 10 \\ \underline{2x - 10} \\ 0 \end{array}$$

متوسط

-۱۲

$$P = \frac{c}{a} = 1 \quad S = \frac{-b}{a} = 4 \quad \text{با توجه به معادله داده شده:}$$

$$I) \frac{\alpha^3 + \alpha^2 + \beta^3 + \beta^2}{(\alpha + 1)(\beta + 1)} = \frac{\alpha^3 + \beta^3 + \alpha^2 + \beta^2}{\alpha\beta + \alpha + \beta + 1}$$

$$= \frac{S^3 - 3PS + S^2 - 2P}{P + S + 1}$$

$$= \frac{4^3 - 3(4) + 16 - 2}{1 + 4 + 1} = \frac{64 - 12 + 16 - 2}{5} = \frac{66}{5}$$

$$\text{ب) } \sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta} = A \xrightarrow{\text{طرفین توان } 2} \alpha + \beta + 2\sqrt{\alpha\beta} = A^2$$

$$S + 2\sqrt{P} = A^2 \Rightarrow \sqrt{S + 2\sqrt{P}} = A \Rightarrow \sqrt{4 + 2} = A \Rightarrow \sqrt{6} = A$$

آسان

-۱۳

برای نوشتن معادله درجه ۲ از رابطه $x^2 - Sx + P = 0$ استفاده می‌کنیم:

$$S = 3 - \sqrt{2} + 3 + \sqrt{2} = 6$$

$$P = (3 - \sqrt{2})(3 + \sqrt{2}) = 9 - 2 = 7$$

پس معادله $x^2 - 6x + 7 = 0$ است.

دشوار

-۱۳

(آ)

$$AB = \sqrt{(-1-3)^2 + (3-0)^2} = \sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5$$

$$AC = \sqrt{(1+1)^2 + (2-3)^2} = \sqrt{4+1} = \sqrt{5}$$

$$BC = \sqrt{(1-3)^2 + (2-0)^2} = \sqrt{4+4} = 2\sqrt{2}$$

ب) M میانه BC است پس نقطه وسط پاره خط BC. M خواهد بود.

$$M = \left(\frac{1+3}{2}, \frac{0+2}{2} \right) = (2, 1)$$

H نقطه برخورد ارتفاع با ضلع BC است پس ابتدا معادله خط AH را نوشته و با BC دستگاه حل می کنیم:

$$BC \text{ شیب} = \frac{0-2}{3-1} = \frac{-2}{2} = -1 \rightarrow \text{قرینه و معکوس}$$

$$y-3 = -1(x+1) \Rightarrow y = x+4 \text{ و } BC \text{ معادله خط } y-0 = -1(x-3)$$

معادله خط AH

$$y = -x+3$$

$$\begin{cases} y = x+4 \\ y = -x+3 \end{cases}$$

$$2y = 7 \Rightarrow y = \frac{7}{2}, x = -\frac{1}{2}$$

$$H = \left(-\frac{1}{2}, \frac{7}{2} \right)$$

$$MH = \sqrt{\left(2+\frac{1}{2} \right)^2 + \left(1-\frac{7}{2} \right)^2} = \sqrt{\frac{25}{4} + \frac{25}{4}} = \frac{5}{2}\sqrt{2}$$

متوسط

-۱۴

برای یافتن معادله ابتدا فاصله نقطه A تا خط BC را به عنوان اندازه ارتفاع و فاصله دو نقطه B و C را به عنوان اندازه قاعده می یابیم.

$$BC \text{ معادله خط} : \frac{0-2}{3-1} = \frac{-2}{2} = -1$$

$$y-0 = -1(x-3) \Rightarrow y = -x+3 \Rightarrow y+x-3=0$$

$$BC \text{ فاصله A تا} AH = \frac{|3-1-3|}{\sqrt{1+1}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$BC = \sqrt{(3-1)^2 + (0-2)^2} = \sqrt{4+4} = 2\sqrt{2}$$

$$A = \frac{2\sqrt{2} \times \frac{1}{\sqrt{2}}}{2} = 1$$

دشوار

-۱۰

ابتدا باید بفهمیم در محلول ۲۰۰ گرم جای ۴ درصدی چقدر شکر موجود بوده است.

$$200 \times \frac{4}{100} = 8 \text{ گرم شکر}$$

حالا با توجه به فرمول غلظت:

$$\text{حل شونده} = \frac{\text{غلظت} \times \text{تبخیر شدن آب برای رسیدن به محلول حلال}}{}$$

$$7 \text{ درصدی} : \frac{7}{100} = \frac{8}{200-x} \Rightarrow 1400 - 7x = 800$$

$$600 = 7x \Rightarrow x = \frac{600}{7}$$

متوسط

-۱۱

با توجه به ریشه های داخل قدرمطلق $x = -4$ و $x = \frac{1}{4}$ و تعیین علامت

قدرمطلق ها

$$x < -4 \Rightarrow -x-4-4x+1=8x \Rightarrow -13x=3 \Rightarrow x = \frac{-3}{13}$$

چون در بازه $x < -4$ قرار ندارد.

$$-4 \leq x \leq \frac{1}{4} \Rightarrow x+4-4x+1=8x \Rightarrow -11x=-5 \Rightarrow x = \frac{5}{11}$$

چون در بازه $-4 \leq x \leq \frac{1}{4}$ قرار ندارد.

$$x > \frac{1}{4} \Rightarrow x+4+4x-1=8x \Rightarrow -3x=-3 \Rightarrow x=1$$

پس معادله ۱ ریشه دارد.

متوسط

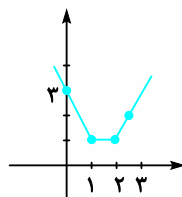
-۱۲

ابتدا با استفاده از تعیین علامت قدرمطلق ها آن را به تابع چند ضابطه ای تبدیل می کنیم:

$$x < 1 \Rightarrow -x+1-x+2 \Rightarrow y = -2x+3$$

$$1 \leq x \leq 2 \Rightarrow x-1-x+2 \Rightarrow y = 1$$

$$x \geq 2 \Rightarrow x-1+x-2 \Rightarrow y = 2x-3$$



متوسط

-۴

با توجه به ارتباط بین ریشه‌ها $\alpha = 2\beta - 1$

حالا S و P را از روی معادله به دست می‌آوریم و در آن‌ها به جای $\alpha = 2\beta - 1$ قرار می‌دهیم:

$$S = \frac{-b}{a} = \frac{-(-1)}{4} = \alpha + \beta \Rightarrow \frac{-1}{4} = 2\beta - 1 + \beta \Rightarrow \frac{3}{4} = 3\beta \Rightarrow \beta = \frac{1}{4}$$

$$\alpha = 2\left(\frac{1}{4}\right) - 1 = -\frac{1}{2} \quad \text{با جای گذاری } \beta \text{ در } \alpha = 2\beta - 1 \text{ داریم:}$$

$$P = \frac{c}{a} = \frac{m}{4} = \alpha\beta \Rightarrow \frac{1}{4m} = \left(-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{4}\right) \Rightarrow \frac{1}{4m} = \frac{-1}{8} \Rightarrow -4m = 8 \Rightarrow m = -2$$

متوسط

-۵

ابتدا تمام کسرهای را در مخرج مشترک آن‌ها ضرب می‌کنیم.

$$\frac{2x}{x-2} - \frac{6}{1} = \frac{2}{x} \quad \times(x)(x-2) \rightarrow$$

$$(x)(x-2)\left(\frac{2x}{x-2} - \frac{6}{1}\right) = (x)(x-2)\left(\frac{2}{x}\right)$$

$$2x^2 - 6x^2 + 12x = 2x - 4$$

$$4x^2 - 10x - 4 = 0 \Rightarrow 2x^2 - 5x - 2 = 0$$

$$S = \frac{-b}{a} = \frac{5}{2} \quad \text{چون حاصل جمع ریشه را خواسته است پس:}$$

آسان

-۶

شیر اول در $\frac{1}{3}$ ساعت، شیر دوم در $\frac{1}{4}$ ساعت و شیر سوم در $\frac{1}{x}$ ساعت استخر را پر می‌کنند.

پس:

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{x} = \frac{3}{4}$$

$$\Rightarrow \frac{4x + 3x + 12}{12x} = \frac{3}{4}$$

$$\frac{7x + 12}{12x} = \frac{3}{4} \Rightarrow 28x + 48 = 36x \Rightarrow 48 = 8x \Rightarrow x = 6$$

دشواری

-۷

اگر $\sqrt{x} = t$ را در نظر بگیریم آن‌گاه $x = t^2$ خواهد بود. پس:

$$\frac{4-t}{t-t^2} = 2+t \xrightarrow{\text{طرفین وسطین}} 4-t = (2+t)(2-t^2)$$

$$t^3 - 3t + 2t^2 = 0 \Rightarrow t(t^2 + 2t - 3) = 0 \Rightarrow t(t+3)(t-1) = 0$$

$$t = 0 \Rightarrow \sqrt{x} = 0 \Rightarrow x = 0$$

$$t + 3 = 0 \Rightarrow t = -3 \Rightarrow \sqrt{x} = -3 \quad \text{ریشه ندارد.}$$

$$t - 1 = 0 \Rightarrow t = 1 \Rightarrow \sqrt{x} = 1 \Rightarrow x = 1 \quad \text{پس معادله دو ریشه دارد.}$$



سؤالات تشریحی

پاسخنامه

آزمون تشریحی ۲

متوسط

-۱

اولین عدد سه رقمی که باقی‌مانده آن بر ۹ برابر ۲ است عدد ۱۰۱ است پس جمله بعدی دنباله ۱۱۰ خواهد بود. در نتیجه دنباله حاصل:

$$101 + 110 + 119 + \dots + 992 =$$

ابتدا تعداد جملات این دنباله را حساب می‌کنیم پس:

$$n = \frac{\text{جمله اول} - \text{جمله آخر}}{\text{قدر نسبت}} + 1$$

در نتیجه مجموع ۱۰۰ جمله اول دنباله را خواهیم خواست پس:

$$S_{100} = \frac{100}{2} [101 + 992] = 54650$$

متوسط

-۲

شدت تابش پس از عبور از لایه اول $\frac{1}{4}$ و پس از عبور از لایه دوم $\frac{1}{8}$ می‌شود در نتیجه دنباله هندسی روبه‌رو را خواهیم داشت:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots$$

$$S_n = a_1 \frac{1-q^n}{1-q} = \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{\frac{1}{2}} = 2 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

حال با توجه به صورت سؤال مجموع این تابش‌ها باید ۹۸ درصد کاهش یابد پس:

$$1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n \geq \frac{98}{100} \Rightarrow \frac{1}{2^n} \leq \frac{2}{100} \Rightarrow 2^n \geq 50 \xrightarrow{\text{با آزمایش اعداد مختلف}} n = 6$$

آسان

-۳

ابتدا $x^2 - 1$ برابر با t در نظر می‌گیریم:

$$x^2 - 1 = t \Rightarrow t^2 - t - 6 = 0 \Rightarrow (t-3)(t+2) = 0$$

$$t = 3 \xrightarrow{t=x^2-1} x^2 - 1 = 3 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2$$

$$t = -2 \xrightarrow{t=x^2-1} x^2 - 1 = -2 \Rightarrow x^2 = -1$$

حاصل عبارت توان زوج منفی نمی‌تواند باشد پس این معادله ریشه ندارد.

در نتیجه صفرهای تابع تنها $x = \pm 2$ خواهد بود.

-۸

آسان

حواستون باشه! اگر زیر رادیکال جمع و تفریق داشتید حتماً آن را به مربع کامل تبدیل کنید:

$$\sqrt{6-2\sqrt{5}} = \sqrt{(\sqrt{5}-1)^2} = |\sqrt{5}-1| = \sqrt{5}-1$$

-۹

متوسط

می‌توان طرفین معادله را به توان ۲ رساند.

$$|x+2| = 3-2x \Rightarrow x^2 + 4x + 4 = 9 + 4x^2 - 12x$$

$$0 = 3x^2 - 16x + 5 \Rightarrow 0 = (3x-1)(x-5) \Rightarrow x = \frac{1}{3}, x = 5$$

$x = 5$ چون طرف دوم معادله را منفی می‌کند. غ ق است.

$x = \frac{1}{3}$ چون در معادله صدق می‌کند ق است.

-۱۰

آسان

میانۀ AM وارد بر ضلع BC به وسط ضلع BC وارد می‌شود پس ابتدا وسط BC را تعیین می‌کنیم.

$$M = \left(\frac{4+7}{2}, \frac{3+2}{2} \right) = \left(\frac{11}{2}, \frac{5}{2} \right)$$

فاصله دو نقطه A و M را می‌یابیم.

$$AM = \sqrt{\left(\frac{11}{2} - 5 \right)^2 + \left(\frac{5}{2} - 0 \right)^2}$$

$$AM = \sqrt{\left(\frac{11}{2} - 5 \right)^2 + \left(\frac{5}{2} \right)^2} = \sqrt{\frac{441}{4} + \frac{25}{4}} = \sqrt{\frac{466}{4}} = \sqrt{116/5}$$

-۱۱

آسان

ابتدا محل برخورد دو خط را با استفاده از دستگاه به دست می‌آوریم:

$$\begin{cases} y - x = 7 \\ 2y + x = 17 \end{cases} \Rightarrow 3y = 24 \Rightarrow y = 8, x = 1$$

حال فاصله نقطه $(1, 8)$ را از خط $y - 2x - 1 = 0$ به دست می‌آوریم:

$$d = \frac{|8 - 2(1) - 1|}{\sqrt{4+1}} = \frac{5}{\sqrt{5}}$$

-۱۲

متوسط

محل برخورد میانۀ مثلث مرکز ثقل مثلث خواهد بود پس:

$$G = \left(\frac{3+0+4}{3}, \frac{1+2+0}{3} \right) = \left(\frac{7}{3}, \frac{3}{3} \right)$$

در مرحله بعد معادله خط AC را باید پیدا کنیم:

$$AC \text{ شیب} = \frac{0-1}{-4-3} = \frac{-1}{-4-3} = \frac{-1}{-7} = \frac{1}{7}$$

$$AC \text{ معادله خط } y - 0 = \frac{1}{7}(x + 4) \Rightarrow y = \frac{1}{7}x + \frac{4}{7} \Rightarrow 7y - x - 4 = 0$$

حال فاصله نقطه G با خط AC را به دست می‌آوریم:

$$d = \frac{\left| 7\left(\frac{7}{3}\right) - \left(-\frac{1}{3}\right) - 4 \right|}{\sqrt{49+1}} = \frac{\left| \frac{49}{3} + \frac{1}{3} - 4 \right|}{\sqrt{50}} = \frac{\frac{46}{3}}{\sqrt{50}} = \frac{17}{3\sqrt{50}}$$

-۱۳

دشوار

(آ)

$$G = \left(\frac{4+(-2)+1}{3}, \frac{1+(-2)+4}{3} \right) = \left(1, 1 \right)$$

$$AM \text{ میانۀ} \Rightarrow M = \left(\frac{-2+4}{2}, \frac{1+(-2)}{2} \right) = \left(1, -\frac{1}{2} \right) \quad (\text{ب})$$

AM معادله: $x = 1$

معادله ارتفاع BH

$$AC \text{ شیب} = \frac{4-1}{1-4} = \frac{3}{-3} = -1 \xrightarrow{\text{شیب BH}} m_{BH} = 1$$

$$BH \text{ معادله: } y + 2 = 1(x - 2) \Rightarrow y = x - 4$$

D محل تلاقی BH و AM است پس دستگاه حل می‌کنیم

$$y = 1 - 4 \Rightarrow y = -3$$

$$D(1, -3) \Rightarrow OD = \sqrt{1^2 + 3^2} = \sqrt{10}$$

(پ)

$$x_A + x_C = x_B + x_{D'} \Rightarrow 1 + 1 = -2 + x_{D'} \Rightarrow 4 = x_{D'}$$

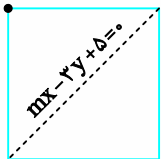
$$y_A + y_C = y_B + y_{D'} \Rightarrow 4 + 1 = -2 + y_{D'} \Rightarrow 7 = y_{D'}$$

$$BD' = \sqrt{(-2-4)^2 + (-2-7)^2} = \sqrt{36+81} = \sqrt{117}$$

-۱۴

دشوار

$A(1, 2)$



فاصله رأس A تا قطر به اندازه نصف قطر مربع خواهد بود.

$$\text{نصف قطر} = \frac{|m(1) - 2(2) + 5|}{\sqrt{m^2 + 9}} = \frac{|m + 1|}{\sqrt{m^2 + 9}} \xrightarrow{\text{کل قطر}} \frac{2|m + 1|}{\sqrt{m^2 + 9}}$$

رابطه قطر مربع و مساحت مربع از رابطه $(\sqrt{2})$ (طول ضلع) = قطر و در نتیجه

$$\text{مساحت} = \left(\frac{\text{قطر}}{\sqrt{2}} \right)^2 = \frac{(\text{قطر})^2}{2}$$

$$\frac{\left(\frac{2|m+1|}{\sqrt{m^2+9}} \right)^2}{2} = 2 \Rightarrow \frac{4(m^2+2m+1)}{m^2+9} = 4$$

$$\Rightarrow m^2 + 2m + 1 = m^2 + 9 \Rightarrow 2m = 8 \Rightarrow m = 4$$

متوسط

۴- گزینه «پ»

می‌توان هر جمله را به صورت:

$$\begin{aligned} & 3 + 3^3 + 3^3 + \dots + \underbrace{3^3}_{\text{بار } 20} \\ & \frac{10-1}{3} + \frac{10^2-1}{3} + \frac{10^3-1}{3} + \dots + \frac{10^{20}-1}{3} \\ & \frac{1}{3} [10-1 + 10^2-1 + 10^3-1 + \dots + 10^{20}-1] \\ & \frac{1}{3} [10 + 10^2 + 10^3 + \dots + 10^{20} - 20] \\ & \text{مجموع دنباله هندسی} \\ & \frac{1}{3} [10 \frac{10^{20}-1}{10-1} - 20] = \frac{1}{3} [\frac{10^{21}-10}{9} - 20] = \frac{1}{3} [\frac{10^{21}-10-180}{9}] = \\ & \frac{1}{3} [\frac{10^{21}-190}{9}] = \frac{10^{21}-190}{27} \end{aligned}$$

متوسط

۵- گزینه «پ»

با جمع کردن دو رابطه داریم:

$$\begin{aligned} a_1 + a_2 + a_3 + a_4 &= 3 + \sqrt{5} \\ a_{100} + a_{99} + a_{98} + a_{97} &= 17 - \sqrt{5} \\ (a_1 + a_{100}) + (a_2 + a_{99}) + (a_3 + a_{98}) + (a_4 + a_{97}) &= 20 \\ \text{طبق قانون اندیس‌ها که اگر } p+q &= m+n \text{ آنگاه:} \\ a_m + a_n &= a_p + a_q \\ 4(a_1 + a_{100}) &= 20 \Rightarrow a_1 + a_{100} = 5 \\ S_{100} &= \frac{100}{2} (a_1 + a_{100}) = 50 \times 5 = 250 \end{aligned}$$

آسان

۶- گزینه «پ»

قبلاً گفتیم که طول اضلاع چنین مثلثی به صورت $3d$ ، $4d$ ، $5d$ هستند که d طول وتر است. پس وتر مضربی از ۵ است. اگر به گزینه‌ها دقت کنیم تنها گزینه‌ای که می‌تواند جواب باشد گزینه ۳ است.

متوسط

۷- گزینه «پ»

دو ریشه قرینه داره پس اولاً دو ریشه داره یعنی $\Delta > 0$ و دوماً قرینه هستند.

این یعنی این که $p < 0$ و $S = 0$ نتیجه $S = 0$ یعنی $b = 0$ زیرا $S = \frac{-b}{a}$ هستند. پس:

$$\begin{aligned} m^3 - 4m &= 0 \Rightarrow m(m^2 - 4) = 0 \Rightarrow m = 0, \pm 2 \quad (1) \\ p < 0 \Rightarrow \frac{m+3}{m} < 0 \Rightarrow -3 < m < 0 \quad (2) \\ \Delta > 0 \Rightarrow b^2 - 4ac > 0 \xrightarrow{b=0} -4ac > 0 \Rightarrow ac < 0 \\ \text{که همان معنی } p < 0 \text{ را دارد که در قسمت ۲ حل شد.} \\ \text{از بین اعدادی که برای } m \text{ به دست آمدند تنها } m = -2 \text{ شرط (۲) را دارد} \\ \text{پس فقط یک مقدار برای } m \text{ داریم.} \end{aligned}$$



سوالات تستی

پاسخنامه

آزمون تستی پایانی

آسان

۱- گزینه «ا»

$-3, 4, 11, 18, 25, 32$

$2, 7, 12, 17, 22, 27, 32$

اولین جمله مشترک بین دو دنباله ۳۲ هست.

$$\begin{aligned} d_1 &= 7 \\ d_2 &= 5 \Rightarrow [5, 7] = 35 \end{aligned}$$

پس دنباله جملات مشترک به صورت دنباله‌ای با جمله اول ۳۲ و قدرنسبت ۳۵ است.

$$\Rightarrow a_n = a_1 + (n-1)d = 32 + (n-1)(35) = 35n - 3$$

برای یافتن تعداد جملات کمتر از ۲۰۰:

$$35n - 3 < 200$$

$$\Rightarrow 35n < 203 \Rightarrow n < \frac{203}{35} \Rightarrow n < 5.8$$

پس n برابر ۵ است. (n عدد طبیعی است).

آسان

۲- گزینه «پ»

$$S_8 = 28S_3 \Rightarrow \frac{2(1-q^8)}{1-q} = 28 \times \frac{2(1-q^3)}{1-q}$$

$$\Rightarrow (1-q^5)(1+q^3) = 28(1-q^3) \Rightarrow 1+q^3 = 28 \Rightarrow q^3 = 27 \Rightarrow q = 3$$

$$\frac{a_5}{a_2} = \frac{a_1 q^4}{a_1 q} = q^3 = 27$$

آسان

۳- گزینه «۴»

دنباله حسابی با $a_1 = 3$ و $d = 6$ است پس:

$$S_n = \frac{n}{2} [2a_1 + (n-1)d] = \frac{n}{2} [6 + 6(n-1)]$$

$$= 3n + 3n^2 - 3n = 3n^2$$

$$3n^2 > 365 \Rightarrow n^2 > 121.7 \xrightarrow{n \text{ طبیعی}} n > 11$$

پس حداقل باید ۱۲ جمله را جمع کنیم.

آسان

۱۳- گزینه «۴»

اگر بخواهیم نمودار همواره بالای محور x ها باشد پس باید $\Delta < 0$ ، $a > 0$ باشد.

$$a > 0 \Rightarrow 1 - a > 0 \Rightarrow a < 1 \quad (1)$$

$$\Delta < 0 \Rightarrow 24 - 4(1 - a)(-a) < 0$$

$$\Rightarrow 24 + 4a - 4a^2 < 0 \Rightarrow 4a^2 - 4a - 24 < 0$$

$$\Rightarrow a^2 - a - 6 < 0 \Rightarrow -2 < a < 3 \quad (2)$$

$$\xrightarrow{1 \cap 2} -2 < a < 1$$

متوسط

۱۴- گزینه «۳»

محور x را در نقطه‌ای به طول ۲ قطع می‌کند پس $(2, 0)$ نقطه‌ای از نمودار است:

$$f(2) = 0 \Rightarrow 16 - 20 - 2 + m = 0$$

$$\Rightarrow m = 6 \Rightarrow f(x) = 2x^3 - 5x^2 - x + 6$$

$$\begin{array}{r} 2x^3 - 5x^2 - x + 6 \quad | \quad x - 2 \\ \underline{2x^3 - 4x^2} \\ - x^2 - x + 6 \\ \underline{-x^2 + 2x} \\ -3x + 6 \\ \underline{-3x + 6} \\ 0 \end{array}$$

$$2x^2 - x - 3 = 0 \xrightarrow{a+c=b} \begin{cases} x = -1 \\ x = \frac{-c}{a} = \frac{3}{2} \end{cases}$$

دشوار

۱۵- گزینه «۱»

کسر اول و کسر سوم معکوس هم هستند با تغییر متغیر داریم:

$$t = \frac{x^2 - x + 3}{2x^2 + x + 1} \Rightarrow t + \frac{1}{t} = 2 - \frac{1}{x^2 + 1}$$

می‌دانیم که $\frac{1}{x^2 + 1}$ همواره عددی مثبت است و بنابراین $2 - \frac{1}{x^2 + 1}$ همواره عددی کوچکتر از ۲ است. در صورتی که داریم:

$$t + \frac{1}{t} \geq 2 \quad \text{یا} \quad t + \frac{1}{t} \leq -2$$

پس این معادله جواب ندارد.

متوسط

۱۶- گزینه «۲»

با تغییر متغیر حل می‌کنیم:

$$t = x^2 + 4x + 3$$

$$t = \sqrt{t+2} \xrightarrow{\text{توان ۲}} t^2 = t+2 \Rightarrow t^2 - t - 2 = 0 \xrightarrow{a+c=b}$$

$$t = -1 \text{ غ قق } ۱, \quad t = -\frac{c}{a} = \frac{+2}{1} = 2$$

$$x^2 + 4x + 3 = 2 \Rightarrow x^2 + 4x + 1 = 0 \Rightarrow P = \frac{c}{a} = 1$$

متوسط

۸- گزینه «۲»

دو ریشه مختلف‌العلامت یعنی $p < 0$

$$p < 0 \Rightarrow \frac{m}{m+1} < 0 \Rightarrow -1 < m < 0$$

متوسط

۹- گزینه «۲»

با در نظر گرفتن تغییر متغیر $t = x^2 - 4x$ داریم:

$$t - \frac{20}{t} - 1 = 0 \xrightarrow{\text{توان } t} t^2 - t - 20 = 0 \Rightarrow (t-5)(t+4) = 0 \Rightarrow t = 5, -4$$

$$1) t = 5 \Rightarrow x^2 - 4x = 5 \Rightarrow x^2 - 4x - 5 = 0$$

$$\Rightarrow (x-5)(x+1) = 0 \Rightarrow x = -1, 5$$

$$x^2 - 4x = -4 \Rightarrow x^2 - 4x + 4 = 0 \Rightarrow (x-2)^2 = 0 \Rightarrow x = 2$$

دشوار

۱۰- گزینه «۲»

$$x = 2 \xrightarrow{\text{جایگذاری}} 2(4a-7) = 2 \Rightarrow 4a-7=1$$

$$\Rightarrow 4a = 8 \Rightarrow a = 2$$

$$\Rightarrow x(2x^2 - x - 5) = 2 \Rightarrow 2x^3 - x^2 - 5x - 2 = 0$$

یکی از جواب‌ها $x = 2$ است پس معادله بر $(x-2)$ بخش‌پذیر است. با تقسیم

بر این عامل بقیه جملات را به دست می‌آوریم:

$$\begin{array}{r} 2x^3 - x^2 - 5x - 2 \quad | \quad x - 2 \\ \underline{2x^3 - 4x^2} \\ 3x^2 - 5x - 2 \\ \underline{3x^2 - 6x} \\ x - 2 \\ \underline{x - 2} \\ 0 \end{array} \Rightarrow 2x^2 + 3x + 1 = 0$$

$$\text{مجموع دوریسه} = -\frac{b}{a} = -\frac{3}{2}$$

متوسط

۱۱- گزینه «۲»

$$5x^2 + 3x - 2 = 0 \Rightarrow S = \frac{-3}{5}, P = \frac{-2}{5}$$

$$4x^2 - kx + 25 = 0, \quad S' = \frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\beta^2} = \frac{\alpha^2 + \beta^2}{\alpha^2 \beta^2} = \frac{S'^2 - 2P}{P^2}$$

$$= \frac{\frac{9}{25} + \frac{4}{25}}{\frac{4}{25}} = \frac{\frac{13}{25}}{\frac{4}{25}} = \frac{13}{4} = \frac{29}{4} \Rightarrow \frac{-b}{a} = \frac{29}{4} \Rightarrow \frac{k}{4} = \frac{29}{4} \Rightarrow k = 29$$

متوسط

۱۲- گزینه «۱»

می‌دانیم که α و β ریشه‌های معادله هستند پس در معادله صدق می‌کنند.

$$x^2 - 2x - 4 = 0 \Rightarrow \alpha^2 - 2\alpha - 4 = 0 \Rightarrow \alpha^2 - 2\alpha - 4 = 0 \Rightarrow \alpha^2 - 4 = 2\alpha$$

$$(\alpha^2 - 4)^2 + 4\beta^2 = (2\alpha)^2 + 4\beta^2 = 4\alpha^2 + 4\beta^2 = 4(\alpha^2 + \beta^2)$$

$$= 4(S'^2 - 2P) = 4(4 + 8) = 48$$

$$S = 2, \quad P = -4$$

۲- گزینه «۲»

$$\frac{a_1 a_2 a_3}{(a_1)^3} = 64 \Rightarrow \frac{a_1 \times a_1 r \times a_1 r^2}{(a_1 r^3)^3} = 64$$

$$\Rightarrow \frac{a_1^3 \times r^3}{a_1^3 \times r^9} = 64 \Rightarrow \frac{1}{r^6} = 64 \Rightarrow r^6 = \frac{1}{64} \Rightarrow r = \frac{1}{2}$$

$$S_6 = \frac{a_1 \frac{1-r^6}{1-r}}{a_1} = \frac{1-\frac{1}{64}}{1-\frac{1}{2}} = \frac{\frac{63}{64}}{\frac{1}{2}} = \frac{63}{32}$$

۳- گزینه «۱»

$$S = (98^2 - 97^2) + (96^2 - 95^2) + \dots + (2^2 - 1)$$

حالا به کمک اتحاد مزدوج هر پرانتز رو تجزیه می کنیم:

$$S = \underbrace{(98-97)}_1 (\underbrace{98+97}_{195}) + \underbrace{(96-95)}_1 (\underbrace{96+95}_{191}) + \dots + \underbrace{(2-1)}_1 (\underbrace{2+1}_{3})$$

$$S = 98 + 97 + 96 + 95 + \dots + 2 + 1$$

که این مجموع جمع ۹۸ جمله از یک دنباله حسابی با $a_1 = 1$ و $d = 1$ است:

$$S_n = \frac{n(n+1)}{2} \Rightarrow S_{98} = \frac{98(99)}{2} = 4851$$

۴- گزینه «۲»

$$d = a_2 - a_1 \Rightarrow d = p - 1 - 1 - 2p = -p - 2$$

$$S_8 = \frac{1}{2} [2(1+2p) + 7(-p-2)] = 60$$

$$\Rightarrow \cancel{2} [2 + 4p - 7p - 14] = \cancel{15} \Rightarrow -3p - 12 = 15$$

$$\Rightarrow -3p = 27 \Rightarrow p = -9 \Rightarrow d = -(-9) - 2 = 9 - 2 = 7$$

۵- گزینه «۱»

دنباله حسابی داریم با اطلاعات $d = 90$ و $a_1 = 800$ که S_p را از ما می خواهد:

$$S_p = \frac{p}{2} [2(800) + 19(90)] = 10 [1600 + 1710] = 10(3310) = 33100$$

۶- گزینه «۴»

$$x^2 - 2x - 1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} \alpha + \beta = 2 \rightarrow s \\ \alpha\beta = -1 \rightarrow p \end{cases}$$

$$\frac{\alpha^3 - \beta^3}{\alpha^2 - \beta^2} = \frac{(\cancel{\alpha} - \cancel{\beta})(\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2)}{(\cancel{\alpha} - \cancel{\beta})(\alpha + \beta)} = \frac{\alpha^2 + \beta^2 + \alpha\beta}{\alpha + \beta}$$

$$= \frac{S^2 - 2P + P}{S} = \frac{S^2 - P}{S} = \frac{4+1}{2} = \frac{5}{2}$$

متوسط

۱۷- گزینه «۴»

با در نظر گرفتن t به صورت: $t = x^2 - 3x + 2$ می بینیم که داریم:

$$|t| = -t$$

این رابطه در صورتی صحیح است که t عددی نامثبت باشد یعنی:

$$t \leq 0 \Rightarrow x^2 - 3x + 2 \leq 0 \Rightarrow (x-1)(x-2) \leq 0 \Rightarrow 1 \leq x \leq 2$$

بی شمار عدد حقیقی دارد.

آسان

۱۸- گزینه «۳»

$$d = \frac{|C - C'|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|1 - (-1)|}{\sqrt{5^2 + 12^2}} = \frac{2}{13}$$

دشواری

۱۹- گزینه «۳»

$$\frac{9(2-\sqrt{x})}{2+\sqrt{x}} = 4-x$$

از آن جایی که می دونیم x زیر رادیکال قرار گرفته پس $x \geq 0$ و بنابراین میشه عبارت سمت راست رو تجزیه کرد.

$$4-x = (2-\sqrt{x})(2+\sqrt{x}) \Rightarrow \frac{9(2-\sqrt{x})}{2+\sqrt{x}} = (2-\sqrt{x})(2+\sqrt{x})$$

با شرط $2-\sqrt{x} = 0$ ساده می کنیم:

$$2-\sqrt{x} = 0 \Rightarrow 2 = \sqrt{x} \Rightarrow x = 4$$

$$(2+\sqrt{x})^2 = 9 \Rightarrow 4+x+4\sqrt{x} = 9 \Rightarrow x+4\sqrt{x}-5 = 0$$

$$t = \sqrt{x} \Rightarrow t^2 + 4t - 5 = 0 \Rightarrow \begin{cases} t = -5 \text{ غلط} \\ t = 1 \Rightarrow \sqrt{x} = 1 \Rightarrow x = 1 \end{cases}$$

دشواری

۲۰- گزینه «۱»

$$G\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}, \frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right) = \left(\frac{0+1+(-2)}{3}, \frac{3+2+1}{3}\right) = \left(\frac{-1}{3}, 2\right)$$



۱- گزینه «۱»

مجموع جملات صورت در واقع مجموع جملات یک دنباله هندسی با $a_1 = 1$ و $r = t$ هست ($n = 12$)

مخرج مجموع جملات یک دنباله هندسی با $a_1 = 1$ و $r = t^3$ هست. ($n = 4$)

$$\Rightarrow \frac{1+t+\dots+t^{11}}{1+t^3+t^6+t^9} = \frac{\frac{1-t^{12}}{1-t}}{\frac{1-(t^3)^4}{1-t^3}} = \frac{\frac{1-t^{12}}{1-t}}{\frac{1-t^{12}}{1-t^3}} = \frac{1-t^{12}}{1-t} \cdot \frac{1-t^3}{1-t^{12}}$$

$$= \frac{(\cancel{1-t^{12}})(1+t+t^2)}{\cancel{1-t^3}} = 1+t+t^2 = t^2+t+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+1$$

$$= (t+\frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4} \xrightarrow{t=\frac{\sqrt{5}-1}{2} \Rightarrow t+\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{5}}{2}} = (\frac{\sqrt{5}}{2})^2 + \frac{3}{4} = \frac{5}{4} + \frac{3}{4} = \frac{8}{4} = 2$$

۱۱- گزینه «۳»

سمت چپ معادله رو مخرج مشترک می گیریم:

$$\frac{3x+2x+4}{x+2} = \frac{2}{1+ax} \Rightarrow \frac{5x+4}{x+2} = \frac{2}{1+ax}$$

حالا طرفین وسطین کنیم:

$$(5x+4)(1+ax) = 2(x+2)$$

$$5x + 5ax^2 + 4ax = 2x + 4 \Rightarrow 5ax^2 + (4a+5)x = 2x$$

$$\Rightarrow 5ax^2 + (4a+3)x = 0 \Rightarrow x(5ax + 4a + 3) = 0$$

همان طور که مشخص است $x=0$ یک ریشه برای معادله است و چون می خواهیم معادله فقط یک جواب داشته باشد پس سراغ داخل پراتنز می رویم:

حالت اول: $a=0$

$$5ax + 4a + 3 = 0 \Rightarrow x = \frac{-(4a+3)}{5a}$$

حالت دوم: $4a+3=0$ و در نتیجه $a = -\frac{3}{4}$ که در این صورت که باز هم ریشه

آن $x=0$ است.

حالت سوم: اگر ریشه به دست آمده ریشه مخرج کسر باشد غیر قابل قبول است.

$$\left\{ \begin{array}{l} x = -2 \Rightarrow \frac{-(4a+3)}{5a} = -2 \Rightarrow a = \frac{1}{2} \\ x = \frac{-1}{a} \Rightarrow \frac{-(4a+3)}{5a} = \frac{-1}{a} \Rightarrow a = \frac{1}{2} \end{array} \right.$$

پس ۳ مقدار برای a داریم.

۱۲- گزینه «۳»

یازده کیلوگرم رنگ با غلظت ۴۰٪ داریم پس ۴/۴ حل شونده داریم زیرا:

$$11 \times \frac{40}{100} = 4/4$$

به همین ترتیب چهار کیلوگرم رنگ با غلظت ۷۰٪ یعنی وجود ۲/۸ حل شونده

محلول نهایی ۴/۴ + ۲/۸ حل شونده دارد یعنی ۷/۲ حل شونده از طرفی محلول

نهایی ۱۵ = ۴ + ۱۱ کیلوگرم است و اگر مقدار تبخیر شده را x فرض کنیم داریم:

$$\frac{7/2}{15-x} = \frac{50}{100} \Rightarrow \frac{7/2}{15-x} = \frac{1}{2} \Rightarrow 15-x = 14/4 \Rightarrow 0/6 = x$$

۱۳- گزینه «۲»

$$\sqrt{x^3 + 5x^2 - 10x - 8} + \sqrt{x^2 + x - 6} = 0$$

تعداد این معادله، مجموع دو رادیکال با فرجه زوج برابر با صفر شده است. می دونیم

که رادیکال همواره نامنفی هست. و اگر جمع دو رادیکال نامنفی برابر صفر شده، معنی

اون این هست که هر دو رادیکال برابر صفر هستند و معادله در صورتی دارای جواب

هست که هر دو رادیکال هم زمان صفر بشن.

صفرهای رادیکال دوم رو به دست میاریم ببینیم آیا هیچ کدوم رادیکال اول رو

صفر می کنند یا خیر؟

$$x^2 + x - 6 = 0 \Rightarrow (x+3)(x-2) = 0 \Rightarrow x = 2, x = -3$$

$$x = 2 \Rightarrow 8 + 20 - 20 - 8 = 0 \quad \checkmark$$

پس تنها جواب معادله $x=2$ است. $\Rightarrow$

$$x = -3 \Rightarrow -27 + 45 + 30 - 8 \neq 0$$

۷- گزینه «۴»

$$\alpha B = -3 \Rightarrow B = \frac{-3}{\alpha} \Rightarrow B^3 = \frac{-27}{\alpha^3}$$

$$\alpha^3 - \frac{27}{\alpha^3} = \alpha^3 + B^3 = S^3 - 3pS = 1^3 - 3(-3)(1) = 1 + 9 = 10$$

۸- گزینه «۱»

اگر کمی دقت کنیم می بینیم که $x=1$ در معادله درجه سه صدق می کنه.

$$x=1 \Rightarrow 1^3 + 4 - 1^2 - 4 = 0 \quad \checkmark$$

پس $(x-1)$ یک عامل برای عبارت است.

$$x^3 + (a-1)x^2 + (4-a)x - 4 \div \frac{x-1}{x^2 + ax + 4}$$

$$\frac{x^3 \pm x^2}{ax^2 + (4-a)x} \div \frac{ax^2 \pm ax}{4x - 4}$$

حالا این عبارت باید دو ریشه حقیقی متمایز مثبت داشته باشد. پس:

$$\Delta > 0 \Rightarrow a^2 - 16 > 0 \Rightarrow a^2 > 16 \Rightarrow |a| > 4 \Rightarrow a < -4 \cup a > 4 \quad (1)$$

$$S > 0 \Rightarrow \frac{-a}{1} > 0 \Rightarrow a < 0 \quad (2)$$

$$p > 0 \quad \checkmark \quad 1 \cap 2 \Rightarrow a < -4$$

۹- گزینه «۱»

اگر نمودار بخواد بر محور x ها مماس بشه باید $\Delta = 0$ باشه. به عبارتی باید

از $y=0$ ، دو ریشه برابر (ریشه تکراری) به دست بیاد.

$$y=0 \Rightarrow \begin{cases} 3 - \frac{x}{m} = 0 \Rightarrow \frac{x}{m} = 3 \Rightarrow x = 3m \\ mx - 1 = 0 \Rightarrow mx = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{m} \end{cases}$$

$$\Rightarrow 3m = \frac{1}{m} \Rightarrow 3m^2 = 1 \Rightarrow m^2 = \frac{1}{3} \Rightarrow \pm \sqrt{\frac{1}{3}}$$

پس دو جواب برای m داریم.

۱۰- گزینه «۲»

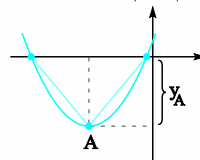
$$y = x^2 + 2mx \Rightarrow x_A = \frac{-b}{2a} = \frac{-2m}{2} = -m$$

$$y_A = (-m)^2 + 2m(-m) = m^2 - 2m^2 = -m^2 \Rightarrow \Delta \begin{cases} -m \\ -m^2 \end{cases}$$

تلاقی با محور x ها یعنی $y=0$ پس:

$$x^2 + 2mx = 0 \Rightarrow x(x+2m) = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ یا } x = -2m$$

از آن جا که رأس سهمی دقیقاً وسط ریشه ها است پس مثلث حاصل، متساوی الساقین است و $h = |y_A|$ و طول قاعده برابر $|x_2 - x_1|$ است.



$$h = |-m^2| = m^2 \Rightarrow S = \frac{1}{2}(m^2) \cdot |-2m - 0|$$

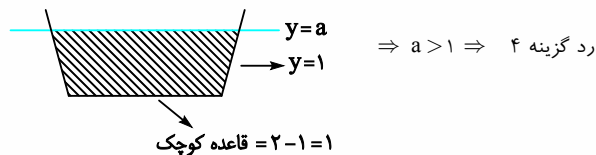
$$\Rightarrow \frac{1}{2}m^2 \cdot (2m) = 8 \Rightarrow m^3 = 8 \Rightarrow m = 2$$

۱۸- گزینه «۲»

$y = a$ نمودار تابع را که به شکل گلدانی هست در دو نقطه قطع کرده است

بنابراین مقدار a از کف گلدان بزرگتر است.

کف گلدان: $y = |1-2| = 1$



برای محاسبه طول قاعده بزرگ لازم است خط $y = a$ را با خطوط گلدان

برخورد دهیم.

$$x < 1 \Rightarrow y = -x + 1 - x + 2 = -2x + 3$$

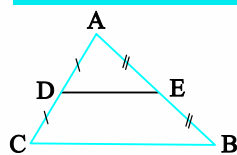
$$-2x + 3 = a \Rightarrow -2x = a - 3 \Rightarrow x = \frac{3-a}{2}$$

$$x > 2 \Rightarrow y = x - 1 + x - 2 = 2x - 3 \Rightarrow 2x - 3 = a \Rightarrow x = \frac{a+3}{2}$$

$$\text{طول قاعده بزرگ} = \frac{a+3}{2} - \frac{3-a}{2} = \frac{a+3-3+a}{2} = \frac{2a}{2} = a$$

$$\Rightarrow S = \frac{1}{2}(1+a)(a-1) = 4 \Rightarrow a^2 - 1 = 8 \Rightarrow a^2 = 9 \Rightarrow a = 3$$

۱۹- گزینه «۲»



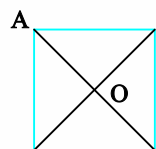
$$D\left(\frac{0+1}{2}, \frac{0+2}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}, 1\right)$$

$$E\left(\frac{-2+0}{2}, \frac{0+1}{2}\right) = \left(-1, \frac{1}{2}\right)$$

$$DE = \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{9}{4} + \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{10}}{2}$$

۲۰- گزینه «۳»

$$OA = \sqrt{(3+1)^2 + (1-4)^2} = \sqrt{16+9} = 5 \Rightarrow \text{قطر مربع} = 5 \times 2 = 10$$



$$S = \frac{(\text{قطر})^2}{2} = \frac{10^2}{2} = 50$$

۱۴- گزینه «۱»

بین دو کسر سمت چپی مخرج مشترک می گیریم:

$$\frac{x^2 + \sqrt{x} + x^2 - \sqrt{x}}{x^4 - x} = \frac{4}{x^2 + x + 1} \Rightarrow \frac{2x^2}{x^4 - x} = \frac{4}{x^2 + x + 1}$$

$$\Rightarrow \frac{2x^2}{x(x-1)(x^2+x+1)} = \frac{4}{x^2+x+1}$$

جملات $x^2 + x + 1$ را از مخرج های کسرها ساده می کنیم و می دانیم فاقد ریشه ($\Delta < 0$) و همواره مثبت هستند.

$$\Rightarrow 2x^2 = 4x^2 - 4x \Rightarrow 2x^2 - 4x = 0 \Rightarrow 2x(x-2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=2 \end{cases}$$

یک ریشه دارد.

۱۵- گزینه «۲»

چون $x > 0$ است با طرفین وسطین کردن داریم:

$$1-x = 2\sqrt{x} - 2x \Rightarrow 1+x = 2\sqrt{x} \xrightarrow{\text{توان ۲}} 1+2x+x^2 = 4x$$

$$\Rightarrow x^2 - 2x + 1 = 0 \Rightarrow (x-1)^2 = 0 \Rightarrow x = 1$$

۱۶- گزینه «۳»

$$|2x-3| \geq \sqrt{x}$$

یادت باشه: دو نامعادله، اگر طرفین نامعادله مثبت باشند، می توانیم به توان ۲ برسوئیم.

$$|2x-3|^2 \geq (\sqrt{x})^2 \Rightarrow 4x^2 - 12x + 9 \geq x$$

$$\Rightarrow 4x^2 - 13x + 9 \geq 0 \Rightarrow x = 1, x = \frac{9}{4} \Rightarrow x \leq 1 \cup x \geq \frac{9}{4}$$

از طرفی x زیر رادیکال هست پس $x \geq 0$

اشتراک این دو مجموعه به صورت $0 \leq x \leq 1 \cup x \geq \frac{9}{4}$ هست.

۱۷- گزینه «۱»

با کمک تغییر متغیر $t = x - \sqrt{x}$ داریم:

$$t^2 - \frac{11}{10}t + \frac{1}{10} = 0 \xrightarrow{\times 10} 10t^2 - 11t + 1 = 0$$

$$\frac{a+b+c=0}{a} \rightarrow t=1, t=\frac{c}{a} = \frac{1}{10}$$

$$x - \sqrt{x} = 1 \Rightarrow x - 1 = \sqrt{x} \Rightarrow x^2 - 2x + 1 = x \Rightarrow x^2 - 3x + 1 = 0$$

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2} \text{ هر دو قابل قبول}$$

$$x - \sqrt{x} = \frac{1}{10} \Rightarrow x - \frac{1}{10} = \sqrt{x} \Rightarrow x^2 - \frac{1}{10}x + \frac{1}{100} = x$$

$$\Rightarrow x^2 - \frac{11}{10}x + \frac{1}{100} = 0 \xrightarrow{\times 100} 100x^2 - 110x + 1 = 0 \Rightarrow \Delta > 0$$

دو ریشه غیر صفر مثبت دارد پس هر دو قابل قبول هستند.

پس معادله چهار جواب حقیقی دارد.