۱- آسان

تابع $y=a^x$ رو نمایی می‌گوییم که دارای دو شرط $a>0$ و $a\neq 1$ باشه. همین دو شرط رو برای این تابع **f** هم درنظر می‌گیریم:

$$f(x)=(2a-3)^x \Rightarrow (1)\ 2a-3>0 \Rightarrow 2a>3 \Rightarrow a>\frac{3}{2} \quad (1)$$

$$(2)\ 2a-3\neq 1 \Rightarrow 2a\neq 4 \Rightarrow a\neq 2 \quad (2)$$

$$\xrightarrow{(1)\cap(2)} a\in(\frac{3}{2},+\infty)-\{2\}$$

۲- آسان

با توجه به نکتهٔ سؤال اول:

$$2a-3>0$$

$$\Rightarrow 2a>3 \Rightarrow a>\frac{3}{2}, 2a-3\neq 1 \Rightarrow a\neq 2$$

اما باید دقت کنیم که ضریب (a^2-2a-3) به‌ازای هیچ مقادیری از این بازه صفر نشود پس ریشه‌هاشو پیدا می‌کنیم:

$$a^2-2a-3=0 \xrightarrow{a+c=b} \begin{cases} a=-1 \\ a=3 \end{cases}$$

که $a=3$ در بازه هست و باید از بازه حذف شود:

$$a\in(\frac{3}{2},+\infty)-\{2,3\}$$

حواست باشه که اگه ضریب صفر بشه تابع دیگه از حالت نمایی به تابع ثابت صفر تبدیل میشه.

۳- آسان

برای راحتی کار می‌تونی با معکوس کردن پایه، توان **x** رو قرینه کنی تا مثبت بشه:

$$f(x)=(\frac{2a-1}{3})^{-x}=(\frac{3}{2a-1})^x$$

با توجه به این‌که پایه نمی‌تونه نامثبت و یا برابر ۱ بشه پس:

$$\left.\begin{array}{l} \frac{3}{2a-1}>0 \xrightarrow{3>0} 2a-1>0 \Rightarrow a>\frac{1}{2} \\ \frac{3}{2a-1}\neq 1 \Rightarrow 2a-1\neq 3 \Rightarrow 2a\neq 4 \Rightarrow a\neq 2 \end{array}\right\} \Rightarrow a\in(\frac{1}{2},+\infty)-\{2\}$$

۴- آسان

تابع نمایی $y=a^x$ در صورتی صعودی هست که $a>1$ پس:

$$2a^2-a>1 \Rightarrow \underbrace{2a^2-a-1>0}_{a+b+c=0 \Rightarrow \begin{cases} a=+1 \\ a=\frac{-1}{2} \end{cases}} \Rightarrow a<\frac{-1}{2} \cup a>1$$

یادت باشه:

تابع $y=a^x$ به ازای $0<a<1$ نزولی و به ازای $a>1$ صعودی هست.

۵- دشوار

فرم کلی تابع‌نمایی به‌صورت زیر هست:

$$f(x)=ka^x$$

اما برای درک ضرایب لازم به فرم جواب‌ها در جدول توجه کنیم:

آ)

x	۰	۱	۲	۳	x
y	۳	۱۵	۷۵	۳۷۵	3×5^x
		↓	↓	↓	
		3×5	3×5^2	3×5^3	

$$\Rightarrow f(x)=3\times5^x$$

با بررسی و مقایسهٔ هر مقدار با **x** مربوط به اون داریم:

ب)

	۰	۱	۲	۳	۴
	۴	۷	۱۳	۲۵	۴۹
	↓	↓	↓	↓	↓
	$3(2^0)+1$	$3(2^1)+1$	$3(2^2)+1$	$3(2^3)+1$	$3(2^4)+1$

$$f(x)=3(2^x)+1$$

۶- آسان

آ) درست ـ توابع نمایی همواره یک‌به‌یک و وارون‌پذیر هستند.

ب) نادرست ـ شرط تعریف شدن توابع نمایی، مثبت بودن و مخالف ۱ بودن عدد پایه هست. همچنین درصورتی‌که ضریب **K** وجود دارد برای جلوگیری از تبدیل شدن به عدد ثابت باید $K\neq 0$ باشد. پس نادرست است.

پ) درست ـ برد توابع نمایی با **k** مثبت، $\mathbb{R}^+$ هست پس اگر **k** منفی شود، برد به R^- تبدیل می‌شود.

ت) نادرست ـ نمودار $y=ka^x$، کنار محور **x** رسم می‌شود و با کاهش یا افزایش **x** در حالت‌های متفاوت به محور **x** نزدیک‌تر می‌شود اما هیچ‌گاه به آن نمی‌رسد (به اصطلاح محور **x** مجانب افقی آن است.) پس هیچ‌گاه نقطه تماسی نخواهد داشت و بنابراین مماس نمی‌شود.

۷- متوسط

آ) R^+ یا $(0,+\infty)$

ب) $\mathbb{R}^+$ ،$\mathbb{R}$

پ) ۱،را قطع نمی‌کند. (مجانب افقی آن‌هاست یعنی نمودار تا کنار آن پایین می‌آید و خیلی خیلی نزدیک می‌شود، اما با آن برخورد نمی‌کند.)

ت) هستند، یک

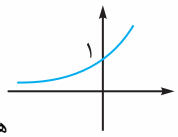
ث) ۱

ج) سه تا، دو برخورد در ناحیه اول و یک برخورد در ناحیه دوم است.

۸- متوسط

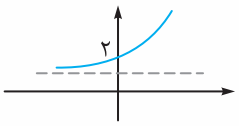
برای توابع نمایی، محدودیتی برای جاگذاری x نداریم پس دامنه کل اعداد حقیقی هست. به برد توابع توجه کنیم:

آ) تابع $y=a^x$ در حالتی که $a>1$، بالای محور x و به‌صورت صعودی به فرم



کلی هست پس $\mathbb{R}=(0,+\infty)$.

ب) حالا اگه نمودار $y=2^x$ رو یک واحد به بالا منتقل کنیم، نمودار به فرم



درمیاد پس: $\mathbb{R}=(1,+\infty)$

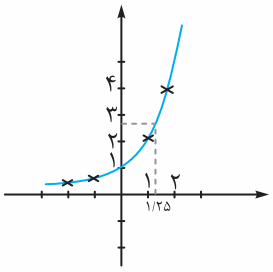
پ) به همین ترتیب $\mathbb{R}=(-1,+\infty)$

۹- متوسط

برای حل این سؤال به نمودارهای دقیق دو تابع $y=2^x$ و $y=3^x$ نیاز داریم.

برای رسم هر تابع نمایی از ۵ نقطه اصلی کمک بگیر:

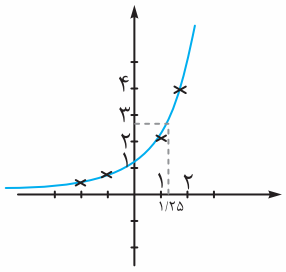
x	2^x
-2	$\frac{1}{4}$
-1	$\frac{1}{2}$
0	1
1	2
2	4



از روی نمودار مشخص هست که مقدار y به‌ازای $x=1/25$ تقریباً $2/5$ به دست می‌آید.

با ماشین حساب: $2^{1/25}\cong 2/37$

x	3^x
-2	$\frac{1}{9}$
-1	$\frac{1}{3}$
0	0
1	3
2	9



ماشین حساب: $3^{1-\sqrt{2}}=3^{1-1/4}=3^{-0/6}=\frac{1}{3^{0/6}}\cong 0/63$

ماشین حساب: $3^{\frac{3}{2}}=3^{1/5}\cong 5/19$

۱۰- آسان

مقدار تقریبی $\sqrt{10}$ برابر $3/1$ هست و از اون‌جایی که تابع‌نمایی $y=3^x$ تابعی اکیداً صعودی هست پس کافیه سه عدد بین $2/5$ تا $3/1$ در نظر بگیریم تا اگر در توان ۳ هم قرار بگیرند بین $3^{2/5}$ تا $3^{\sqrt{10}}$ باشند:

مثلاً $3^{2/7}$ و $3^{\sqrt{8}}$ و 3^3.

۱۱- متوسط

حواست باشه که تابع $y=a^x$ به‌ازای $a>1$ صعودی هست و با افزایش x مقدارش افزایش پیدا می‌کنه و توی نامعادله، علامت نامعادله تغییر نمی‌کنه. اما تابع $y=a^x$ به‌ازای $0<a<1$ نزولی هست و با افزایش x مقدارش کاهش پیدا می‌کنه و توی نامعادله علامت نامعادله تغییر می‌کنه.

آ) $2^{\sqrt{2}}=2^{1/4}<2^{2/5}$ $\quad(1/4<2/5)$

ب) $29/4=5^{2/1}<4^3=64$ اگر پایه‌ها یکی نباشند ناچار به محاسبه هستیم:

پ) $-3<-1 \xrightarrow{\frac{1}{5}<1} (\frac{1}{5})^{-3}>(\frac{1}{5})^{-1}$ یا $5^3>5^1$

ت) $(1/7)^{0/4}\bigcirc(0/4)^{1/2} \Rightarrow 1/24>0/33$

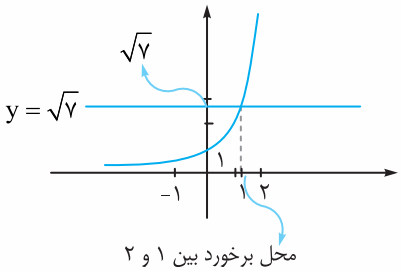
۱۲- متوسط

می‌دونیم که $\sqrt{7}$ عددی بین ۲ تا ۳ هست و بنابراین:

$2<2^x<3 \Rightarrow 2^1<2^x<3<2^2$

و با توجه به صعودی بودن تابع $y=2^x$ پس: $1<x<2$

برای حل این سؤال از نمودار هم می‌تونی استفاده کنی:



محل برخورد بین ۱ و ۲

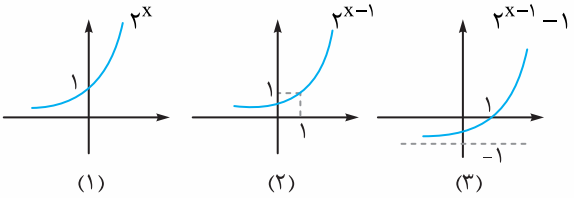
$$\begin{cases} y=2^x \\ y=\sqrt{7}\cong 2/6 \end{cases}$$

۱۳- متوسط

آ)

$y = ۲^{x-۱} - ۱$

۱ واحد به راست — ۱ واحد به پایین

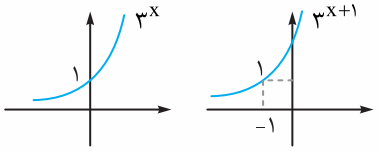


(۱) (۲) (۳)

ب)

$y = ۳^{x+۱}$

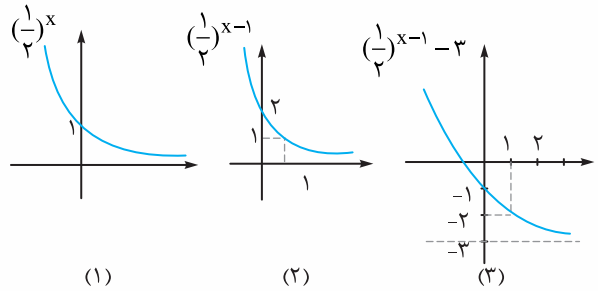
۱ واحد به چپ



(۱) (۲)

پ)

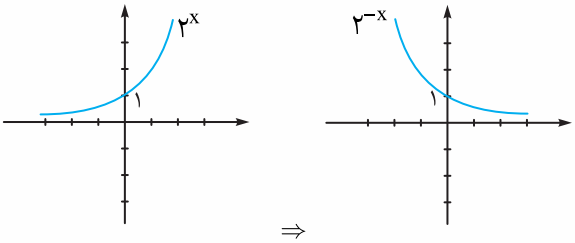
$y = -۳ + ۲^{۱-x} = (\frac{۱}{۲})^{x-۱} - ۳$



(۱) (۲) (۳)

۱۴- دشوار

آ) $y = ۲ - ۲^{۱-x} = -۲(۲^{-x}) + ۲$



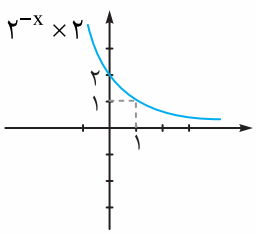
$\Rightarrow$

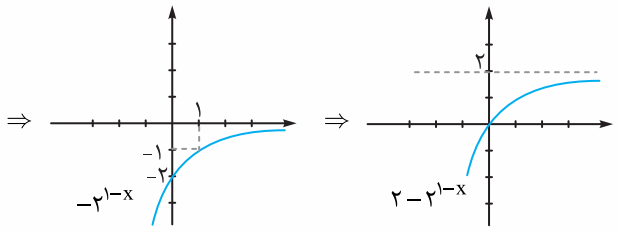
قرینه نسبت به محور y

$۲^{-x+۱} = ۲^{-x} \times ۲$

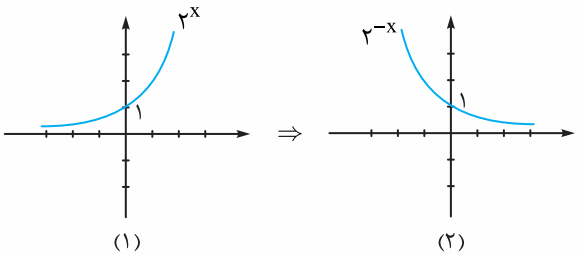
$\Rightarrow$

یک واحد به چپ

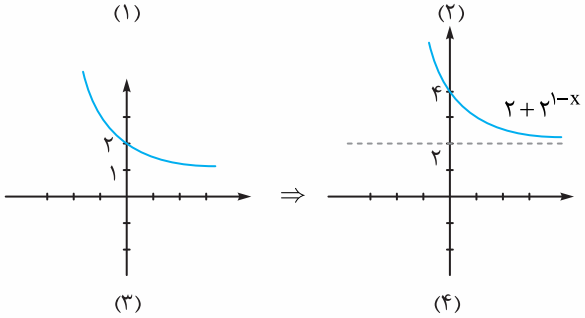




ب) $y = ۲ + ۲^{۱-x} = ۲(۲^{-x}) + ۲$



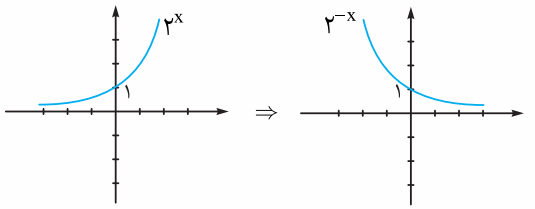
(۱) (۲)

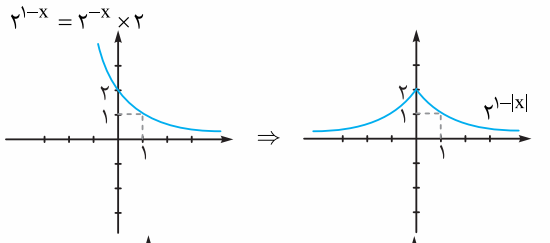


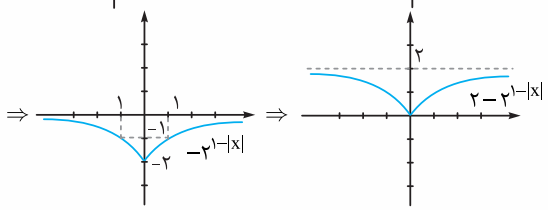
(۳) (۴)

$۲^{۱-x} = ۲^{-x} \times ۲$

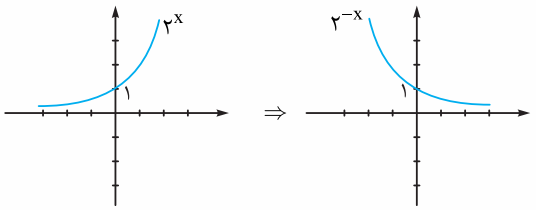
پ) $y = ۲ - ۲^{۱-|x|}$

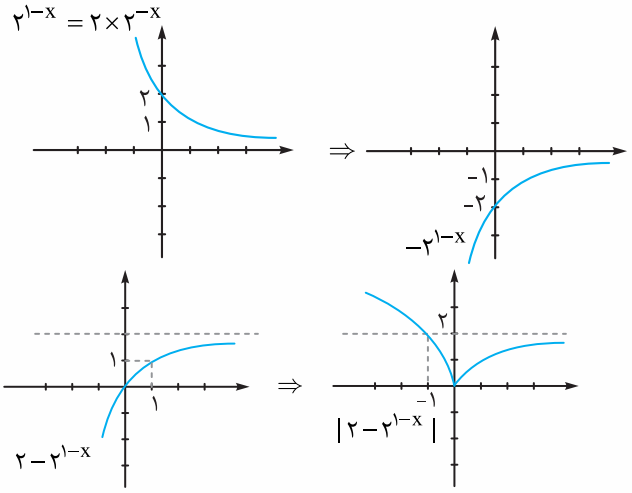






ت) $y = |۲ - ۲^{۱-x}|$





یادآوری انتقال‌ها: $(k>۰)$

$f(x)+k$: جابه‌جایی به بالا

$f(x)-k$: جابه‌جایی به پایین

$f(x+k)$: انتقال به چپ

$f(x-k)$: انتقال به راست

$f(-x)$: قرینه نسبت به محور y

$-f(x)$: قرینه نسبت به محور x

$f(|x|)$: حذف بخش سمت چپ محور y و قرینه کردن بخش سمت راست با نگه داشتن خود بخش.

$|f(x)|$: حذف بخش زیرمحور x و قرینه به بالای محور x

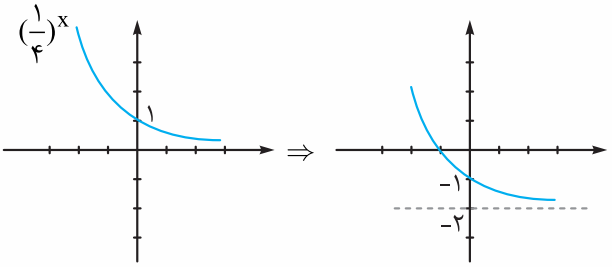
۱۵- متوسط

محدودیتی برای x نداریم و دامنه برابر کل اعداد حقیقی است:

$$y=۴^{-x}-۲$$

$$D=\mathbb{R}$$

برای تعیین برد، هم می‌تونی نمودار رسم کنی هم به‌صورت جبری به دستش بیاری:



(۱) (۲)

جبری: $۴^{-x}=(\frac{۱}{۴})^x$

$$(\frac{۱}{۴})^x>۰\Rightarrow(\frac{۱}{۴})^x-۲>-۲\Rightarrow y>-۲\Rightarrow R=(-۲,+\infty)$$

پس $R=(-۲,+\infty)$ این تابع نیز همانند بقیه توابع نمایی معکوس‌پذیر است.

زیرا هرخط افقی موازی محور x، نمودار را حداکثر در یک نقطه قطع می‌کند.

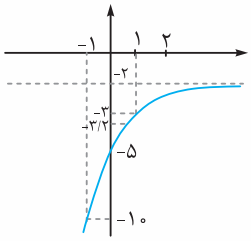
۱۶- متوسط

$$g(۰)=-۳(\underbrace{\frac{۲}{۵}}_{۱})^{۰}-۲=-۵\Rightarrow \text{محل برخورد با محور}y=\begin{bmatrix}۰\\-۵\end{bmatrix}$$

$$g(۱)=-۳(\frac{۲}{۵})-۲=\frac{-۶}{۵}-۲=\frac{-۱۶}{۵}=-۳/۲$$

$$g(-۱)=-۳(\frac{۵}{۲})-۲=\frac{-۱۵}{۲}-۲=\frac{-۱۹}{۲}\cong-۱۰$$

$$g(۲)=-۳(\frac{۴}{۲۵})-۲=\frac{-۱۲}{۲۵}-۲=\frac{-۶۲}{۲۵}$$



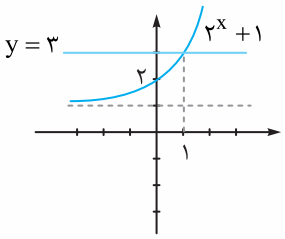
x	-۱	۰	۱
$g(x)$	-۱۰	-۵	$-۳/۲$

$$D=\mathbb{R}$$

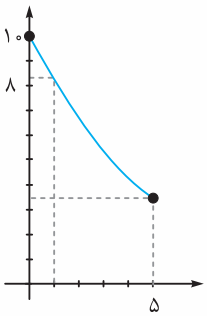
$$(\frac{۲}{۵})^x>۰\Rightarrow-۳(\frac{۲}{۵})^x<۰\Rightarrow-۳(\frac{۲}{۵})^x-۲<-۲\Rightarrow R=(-\infty,-۲)$$

۱۷- آسان

$$۲^x+۱=۳\Rightarrow۲^x=۲\Rightarrow x=۱$$



۱۸- آسان



$$q(t)=۱۰(\frac{۴}{۵})^t\Rightarrow q(۴)=۱۰(\frac{۴}{۵})^۴=۱۰(\frac{۲۵۶}{۶۲۵})\cong۴/۱$$

ب)

$$q(t)=۱۰(\frac{۴}{۵})^t$$

$$۰\le t\le۵$$

t	۰	۱	$\dots$	۵
$q(t)$	۱۰	۸		$۳/۳$

۱۹- متوسط

نیم‌عمر یک ماده یعنی مدت زمانی که آن ماده نسبت به مقدار اولیهٔ خود نصف می‌شود. اگر Q با متغیر زمان $\mathbf{t}$ نشان‌دهندهٔ جرم این نوع کربن باشد داریم:

$$Q(t)=Q_{\circ}\times(\frac{۱}{۲})^{\frac{t}{T}}=Q_{\circ}\times ۲^{-\frac{t}{T}}$$

که در آن $\mathbf{T}$ نشان‌دهندهٔ نیم‌عمر و $Q_{\circ}$ مقدار اولیه است پس:

$$Q(t)=۱۰\times ۲^{(\frac{-t}{۵۷۳۰})}$$

حال بعد از گذشت ۳۰۰۰ سال داریم:

$$Q(۳۰۰۰)=۱۰\times ۲^{\frac{-۳۰۰۰}{۵۷۳۰}}=۱۰\times ۲^{-۰/۵۲}\cong ۰/۶۹ \quad \text{گرم}$$

به طور کلی در مسائل مربوط به نیم‌عمر یک ماده: $f(t)=f_{\circ}\times ۲^{-\frac{t}{T}}$

۲۰- دشوار

آ) لایهٔ اول باعث از بین رفتن ۳۰٪ ناخالصی‌ها میشه و بنابراین ۷۰٪ یا ۰/۷ باقی می‌مونه. اگر از دو لایه استفاده کنیم ۰/۷×۰/۷ یعنی ۰/۴۹ از ناخالصی باقی می‌مونه. پس اگر به تعداد $\mathbf{n}$ لایه استفاده شود، $(۰/۷)^n$ مقدار از ناخالصی‌ها باقی می‌ماند. حال درصد ناخالصی به‌صورت زیر است:

$$(۰/۷)^n\times ۱۰۰=(\frac{۷}{۱۰})^n\times ۱۰^۲=\frac{۷^n}{۱۰^n}\times ۱۰^۲=\frac{۷^n}{۱۰^{n-۲}}\Rightarrow f(n)=\frac{۷^n}{۱۰^{n-۲}}$$

ب) این فرمول درصد ناخالصی را می‌دهد اما اگر بخواهیم ۹۶٪ ناخالصی‌ها از بین برود یعنی درصد ناخالصی باید کمتر از ۰/۰۴ یا ۴٪ باشد پس یعنی $f(n)<۴$.

$$\frac{۷^n}{۱۰^{n-۲}}<۴\Rightarrow (۰/۷)^n<۰/۰۴\Rightarrow$$

$$\begin{cases} n=۹\Rightarrow (۰/۷)^۹\cong ۰/۰۴۰۳ \\ n=۱۰\Rightarrow (۰/۷)^{۱۰}\cong ۰/۰۲۸۲ \end{cases}\Rightarrow \text{حداقل ۱۰ لایه لازم است.}$$

۲۱- متوسط

t	۰	۱	۲	۳	...	t
m	۲۰	۴۰ ↓ ۲۰×۲	۸۰ ↓ ۲۰×۴	۱۶۰ ↓ ۲۰×۸		۲۰×۲^t

پس $m(t)$ یعنی جرم باکتری بعد از گذشت زمان $\mathbf{t}$ به‌صورت زیر است:

که $m_{\circ}$ جرم اولیه است و $\mathbf{t}$ زمان برحسب ساعت. $m(t)=m_{\circ}\times ۲^t$

پس: $m(t)=۲۰\times ۲^t$

$m(۳/۵)=۲۰\times ۲^{۳/۵}\cong ۲۰\times ۱۱/۳\cong ۲۲۶$ گرم

۲۲- آسان

آ) اگر مقدار این توده دارای جرم $m_{\circ}$ باشد، بعد از گذشت ۱ ساعت مقدار آن $۲m_{\circ}$ و بعد از گذشت ۲ ساعت $۴m_{\circ}$ می‌شود یعنی:

$$m(t)=m_{\circ}\times ۲^t \xrightarrow{m_{\circ}=۱۰۰} m(t)=۱۰۰\times ۲^t$$

که در آن $\mathbf{t}$ زمان برحسب ساعت است.

ب) میلی‌گرم $t=۲۰\Rightarrow m(۲۰)=۱۰۰\times ۲^{۲۰}=۱۰۴/۸۵۷/۶۰۰$

۲۳- متوسط

آ) پس از ۸ ساعت یعنی $A(۸)$:

$A(t)=۱۰(۰/۸)^t\Rightarrow A(۸)=۱۰(۰/۸)^۸\cong ۱/۷$ میلی‌گرم

ب) عددی که در رابطه به توان $\mathbf{t}$ رسیده ۰/۸ است و این یعنی در هر ساعت مقدار داروی باقی‌مانده ۸۰٪ مقدار اولیه است و بنابراین در هر ساعت ۲۰٪ از بین می‌رود.

روش دیگر تقسیم $\frac{A_۱}{A_{\circ}}$ است: $\frac{A_۱}{A_{\circ}}=\frac{۱۰(۰/۸)}{۱۰}=۰/۸\Rightarrow ٪۸۰$

که مقدار باقی‌مانده را می‌دهد.

۲۴- توسط

جرم باکتری پس از ۳ ساعت ۷۲۹ برابر جرم اولیه شده یعنی:

$$A_۳=۷۲۹A_{\circ}\Rightarrow ۷۲۹\cancel{A_{\circ}}=\cancel{A_{\circ}}\times a^۳\Rightarrow a^۳=۷۲۹\Rightarrow a=۹$$

۲۵- متوسط

ساعت	۳	۴	۶	t
تعداد سلول ها	۳۲ ↓ $۲^۵$	۶۴ ↓ $۲^۶$	?	$۲^{t+۲}$

در مقایسهٔ هر تعداد سلول با ساعت مربوط به خودش می‌بینیم عدد ۲ دارای توان $t+۲$ (دو تا بیشتر از زمان) هست پس در زمان ۶ ساعت $۲^{۶+۲}$ یعنی $۲^۸$ سلول داریم پس تعداد سلول‌ها در ۶ ساعت برابر ۲۵۶ است.

۲۶- دشوار

جدول مربوط به پس‌انداز در چند سال را ببینیم:

سال	۰	۱
پس انداز	۴۰۰۰۰۰	۴۴۸۰۰۰

در سال اول مقدار سودی که تعلق می‌گیرد برابر $۰/۱۲\times ۴۰۰۰۰۰=۴۸۰۰۰$ است و بنابراین مقدار پس‌انداز به‌صورت $۴۰۰۰۰۰+۴۸۰۰۰=۴۴۸۰۰۰$ است به عبارتی $۱/۱۲\times ۴۰۰۰۰۰$ در سال دوم سود به همان پس‌انداز سال قبل تعلق می‌گیرد پس $۱/۱۲\times ۴۴۸۰۰۰=۵۰۱/۷۶۰$ در سال دوم سود به همان پس‌انداز سال قبل تعلق می‌گیرد، پس $۱/۱۲\times ۴۴۸۰۰۰=۵۰۱/۷۶۰$ و در سال سوم:

$$۱/۱۲\times ۵۰۱/۷۶۰=۵۶۱۹۷۱/۲$$

اما در حالت کلی مبلغ پس‌انداز در سال $\mathbf{n}$ام با رابطهٔ $p(n)=۴۰۰(۱/۱۲)^n$ محاسبه می‌شود. پس:

$$p(۳)=۴۰۰(۱/۱۲)^۳=۵۶۱۹۷۱/۲$$

۲۷- متوسط

برای حل معادلات توانی (نمایی) لازم هست عدد پایه در طرفین مساوی برابر شود تا با مساوی قرار دادن توان‌ها، مجهول پیدا شود.

آ) $۳^{۲x-۳}=۳^{۴} \Rightarrow ۲x-۳=۴ \Rightarrow ۲x=۷ \Rightarrow x=\frac{۷}{۲}$

ب) $(۲^{۲})^{۲x-۱}=(۲^{۳})^{x+۱} \Rightarrow ۲^{۴x-۲}=۲^{۳x+۳} \Rightarrow ۴x-۲=۳x+۳ \Rightarrow x=۵$

پ) $۵^{۳n-۱}=(۵^{۳})^{۲n+۱} \Rightarrow ۳n-۱=۶n+۳ \Rightarrow -۴=۳n \Rightarrow n=-\frac{۴}{۳}$

ت) $۲^{۳n+۲}=(۲^{-۵})^{۲} \Rightarrow ۳n+۲=-۱۰ \Rightarrow ۳n=-۱۲ \Rightarrow n=-۴$

ث) $۳^{۲x}=۳^{x^{۲}-۴x} \Rightarrow x^{۲}-۴x=۲x \Rightarrow x^{۲}-۶x=۰ \Rightarrow x=۰$ یا $x=۶$

ج) $۲^{۶x+۴}=۲^{-۱۸} \Rightarrow ۶x+۴=-۱۸ \Rightarrow ۶x=-۲۲ \Rightarrow x=-\frac{۱۱}{۳}$

چ) $(\frac{۳}{۵})^{x+۱}=(\frac{۵}{۳})^{۲} \Rightarrow (\frac{۳}{۵})^{x+۱}=(\frac{۳}{۵})^{-۲} \Rightarrow x+۱=-۲ \Rightarrow x=-۳$

ح) $(\frac{۲^{۲}\sqrt{۳۲}}{۲\sqrt{۸}})^{۲}=۲^{A} \Rightarrow (\frac{۲^{۸}\sqrt{۲}}{۲^{۲}\sqrt{۲}})^{۲}=۲^{A} \Rightarrow (۲^{۶}\sqrt{۲})^{۲}=۲^{A}$

$\Rightarrow ۲^{۱۲}\sqrt{۲}=۲^{A} \Rightarrow A=۱۲\sqrt{۲}$

خ) $(۳^{۲})^{x-۱}=((۳^{-۳})^{x-۱})^{۲x+۲}$

$\Rightarrow ۳^{۲(x-۱)}=۳^{-۳(x-۱)(۲x+۲)} \Rightarrow \cancel{۲}\,\cancel{(x-۱)}^{۱}=-۳\,\cancel{(x-۱)}^{۱}\,\cancel{(۲)}(x+۱)$

$\Rightarrow \begin{cases} x-۱=۰ \Rightarrow x=۱ \\ -۳x-۳=۱ \Rightarrow -۳x=۴ \Rightarrow x=-\frac{۴}{۳} \end{cases}$

د) $۲^{۲x}-۲^{x+۳}-۹=۰ \Rightarrow ۲^{۲x}-۲^{x}\times ۲^{۳}-۹=۰$

$\Rightarrow (۲^{x})^{۲}-۸\times ۲^{x}-۹=۰ \xrightarrow{a+c=b}$

معادله یک جواب داره و بعداً از لگاریتم یاد می‌گیریم که: $x=\log_{۲}^{۹}$ $۲^{x}=۹$

(امکان نداره ۲ به توان برسه و برابر عدد منفی بشه!) غ ق ق $۲^{x}=-۱$

۲۸- دشوار

حفظ کن: $۲^{۱۰}=۱۰۲۴$

آ) $۲^{۴x-۲}>۲^{-۱۰}$

در حل نامعادلات نمایی اگر عدد پایه‌ها بزرگ‌تر از ۱ باشند، بدون تغییر علامت نامعادله، توان‌ها را در نامعادله قرار می‌دهیم و حل می‌کنیم:

$\xrightarrow{۲>۱} ۴x-۲>-۱۰ \Rightarrow ۴x>-۸ \Rightarrow x>-۲$

ب) $\frac{۱}{\sqrt{۲}+۱}\times\frac{\sqrt{۲}-۱}{\sqrt{۲}-۱}=\frac{\sqrt{۲}-۱}{۲-۱}=\sqrt{۲}-۱ \Rightarrow (\sqrt{۲}-۱)^{۴-۳x}>(\sqrt{۲}-۱)^{x+۲}$

$\xrightarrow[\text{علامت عوض میشه}]{۰<\sqrt{۲}-۱\cong ۰/۴<۱} ۴-۳x<x+۲ \Rightarrow ۲<۴x \Rightarrow \frac{۱}{۲}<x$

در حل نامعادلات نمایی اگر عدد پایه‌ها بین صفر و یک باشد، توان‌ها را در نامعادله قرار داده و علامت را عوض می‌کنیم.

پ) $(۲-\sqrt{۳})^{x}<(۷+۴\sqrt{۳})^{x+۲}$

توجه کنیم که:

$(۲-\sqrt{۳})^{۲}=۴-۴\sqrt{۳}+۳=۷-۴\sqrt{۳}$

بنابراین داریم:

$(۲-\sqrt{۳})^{x}<(۲+\sqrt{۳})^{۲x+۴}$

از طرفی:

$۲-\sqrt{۳}=(۲-\sqrt{۳})\times\frac{(۲+\sqrt{۳})}{۲+\sqrt{۳}}=\frac{۴-۳}{۲+\sqrt{۳}}=\frac{۱}{۲+\sqrt{۳}}=(۲+\sqrt{۳})^{-۱}$

پس داریم:

$(۲+\sqrt{۳})^{-x}<(۲+\sqrt{۳})^{۲x+۴}$

$\xrightarrow{۲+\sqrt{۳}>۱} -x<۲x+۴ \Rightarrow -۴<۳x \Rightarrow x>\frac{-۴}{۳}$

۲۹- دشوار

آ) $\begin{cases} ۰/۲۵=\frac{۲۵}{۱۰۰}=\frac{۱}{۴}=۲^{-۲} \\ ۲\sqrt{۲}=۲\times ۲^{\frac{۱}{۲}}=۲^{\frac{۳}{۲}} \end{cases}$

$(۲^{-۲})^{x^{۲}-۳x+\frac{۵}{۴}}=۲^{\frac{۳}{۲}} \Rightarrow -۲x^{۲}+۶x-\frac{۵}{۲}=\frac{۳}{۲}$

$\Rightarrow -۲x^{۲}+۶x-۴=۰ \xrightarrow{a+b+c=۰} x=۱, x=۲$

ب) $۳-۲\sqrt{۲}\times\frac{۳+۲\sqrt{۲}}{۳+۲\sqrt{۲}}=\frac{۹-۸}{۳+۲\sqrt{۲}}=\frac{۱}{۳+۲\sqrt{۲}}=(۳+۲\sqrt{۲})^{-۱}$

$(۳+۲\sqrt{۲})^{-x}-۵(۳+۲\sqrt{۲})^{x}=۴$

$(۳+۲\sqrt{۲})^{x}=t \Rightarrow \frac{۱}{t}-۵t-۴=۰ \xrightarrow{\times t} ۱-۵t^{۲}-۴t=۰$

$\Rightarrow -۵t^{۲}-۴t+۱=۰ \xrightarrow{a+c=b} t=-۱$ یا $t=\frac{۱}{۵}$

$(۳+۲\sqrt{۲})^{x}=-۱$ غیرقابل قبول یا $(۳+۲\sqrt{۲})^{x}=\frac{۱}{۵}$

معادله یک جواب دارد.

۳۰- دشوار

$۰/۰۴=\frac{۴}{۱۰۰}=\frac{۱}{۲۵}=۵^{-۲}$

$(-۵^{-۲})^{x^{۲}-۳x}<۵^{۴} \xrightarrow[۵>۱]{} -۲x^{۲}+۶x<۴$

$\Rightarrow -۲x^{۲}+۶x-۴<۰ \Rightarrow x=۱$ یا $x=۲$

	۱		۲	
−	۰	+	۰	−

$\Rightarrow x<۱ \cup x>۲$

مجموعه جواب $=(-\infty,-۱)\cup(۲,+\infty)$

۱- گزینه «۴» آسان

$$۲^x=۷ \xrightarrow{\text{به توان } y} ۲^{xy}=۷^y \Rightarrow ۲^{xy}=۵$$

$$\xrightarrow{\text{به توان}} ۸^{xy}=۵^۳ \Rightarrow ۸^{xy}-۴=۱۲۵-۴=۱۲۱$$

۲- گزینه «۲» آسان

مورد (۱): درست برخورد با محور **y** یعنی $x=۰$ پس:

$$\begin{matrix} f(۰)=۲^۱-۱=۱ \\ g(۰)=۳^۱-۲=۱ \end{matrix} \Rightarrow$$ هر دو محور y را به عرض ۱ قطع می‌کنند.

مورد (۲): درست. دامنه هر دو تابع $\mathbb{R}$ است.

مورد (۳): نادرست.

$$f: ۲^{۱-x}>۰ \Rightarrow ۲^{۱-x}-۱>-۱ \Rightarrow R_f=(-۱,+\infty)$$

$$g: ۳^{۱+x}>۰ \Rightarrow ۳^{۱+x}-۲>-۲ \Rightarrow Rg=(-۲,+\infty)$$

مورد (۴): نادرست. در تابع **f** ضریب **x** منفی است پس **f** نزولی است. در تابع **g** ضریب **x** مثبت است پس **g** صعودی است.

۳- گزینه «۳» آسان

با جاگذاری داریم:

$$f(x)=ab^x$$

$$f(۰)=\frac{۳}{۲} \Rightarrow a\underbrace{b^۰}_{۱}=\frac{۳}{۲} \Rightarrow a=\frac{۳}{۲}$$

$$f(-۲)=\frac{۳}{۳۲} \Rightarrow \frac{۳}{۲}\times b^{-۲}=\frac{۳}{۳۲} \Rightarrow \frac{\cancel{۳}}{\cancel{۲}b^۲}=\frac{\cancel{۳}}{\cancel{۳۲}}$$

$$\Rightarrow b^۲=۱۶ \xrightarrow{b>۰} b=۴ \Rightarrow f(x)=\frac{۳}{۲}\times ۴^x$$

$$f(\frac{۳}{۲})=\frac{۳}{۲}\times ۴^{\frac{۳}{۲}}=\frac{۳}{۲}\times ۲^{\cancel{۲}\times\frac{۳}{\cancel{۲}}}=\frac{۳}{۲}\times ۸=۱۲$$

۴- گزینه «۳» متوسط

$$x=۱ \Rightarrow \begin{cases} \text{گزینه ۱ } y=۲ & \times \\ \text{گزینه ۲ } y=۲ & \times \\ \text{گزینه ۳ } y=\frac{۱}{۲} & \checkmark \\ \text{گزینه ۴ } y=\frac{۱}{۲} & \checkmark \end{cases}$$

$f(۰)=۱$ پس حداکثر مقدار تابع ۱ است و گزینه‌های ۱ و ۲ رد می‌شوند.

$$x=-۱ \Rightarrow \begin{matrix} \text{گ۳: } y=۲^{-|-۱|}=۲^{-۱}=\frac{۱}{۲} & \checkmark \\ \text{گ۴: } y=|۲^۱|=۲ & \times \end{matrix}$$

پس جواب گزینه ۳ است.

۵- گزینه «۳» متوسط

با جاگذاری داریم:

$$f(x)=a^x+bx^۲+c$$

$$f(۰)=۰ \Rightarrow ۱+C=۰ \Rightarrow C=-۱$$

$$f(۱)=۰ \Rightarrow a+b-۱=۰ \Rightarrow a+b=۱$$

$$f(-۱)=\frac{-۳}{۲} \Rightarrow \frac{۱}{a}+b-۱=\frac{-۳}{۲} \Rightarrow \frac{۱}{a}+b=-\frac{۱}{۲} \xrightarrow{\text{منها}} a-\frac{۱}{a}=\frac{۳}{۲}$$

$$\Rightarrow ۲a^۲-۲-۳a=۰ \Rightarrow ۲a^۲-۳a-۲=۰$$

$$\Rightarrow (۲a+۱)(a-۲)=۰ \Rightarrow a=\frac{-۱}{۲}\text{ق ق غ ق ق},a=۲ \Rightarrow b=-۱$$

$$\Rightarrow a-b+c=۲+۱-۱=۲$$

۶- گزینه «۱» متوسط

$y(۰)=۱-۲^{۱-۰}=۱-۲=-۱ \Rightarrow$ رد گزینه‌های ۳ و ۴

$y(۱)=۱-۲^{۱-۱}=۱-۲^۰=۱-۱=۰ \Rightarrow$ رد گزینه ۲

گزینه ۱ درست است.

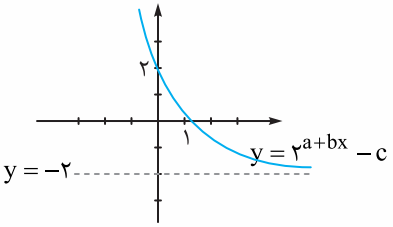
۷- گزینه «۲» آسان

$$۵^x+۵\times ۵^x+\underbrace{۵^۲}_{۲۵}\times ۵^x+\underbrace{۵^۳}_{۱۲۵}\times ۵^x=۳۹۰۰$$

$$۱۵۶\times ۵^x=۳۹۰۰ \Rightarrow ۵^x=۲۵ \Rightarrow x=۲$$

۸- گزینه «۳» متوسط

اگر نمودار را قبل از اعمال قدرمطلق رسم کنیم با توجه به این که تابع نمایی است و می‌دونیم قدرمطلق بخش‌های زیر محور **x** رو به بالا قرینه می‌کنه، داریم:



از مقایسه با نمودار اصلی $C=۲$، زیرا نمودار ۲ واحد به پایین منتقل شده.

از طرفی نمودار از $\begin{bmatrix} ۰ \\ ۲ \end{bmatrix}$ گذشته پس:

$$y=۲^{a+bx}-۲$$

$$۲^a-۲=۲ \Rightarrow ۲a=۴ \Rightarrow a=۲ \Rightarrow y=۲^{bx+۲}-۲$$

$$f(۱)=۰ \Rightarrow ۲^{b+۲}-۲=۰ \Rightarrow ۲^{b+۲}=۲ \Rightarrow b+۲=۱ \Rightarrow b=-۱$$

$$\frac{ac}{b}=\frac{۲\times ۲}{-۱}=-۴$$

۹- گزینه «۳» آسان

$$x=۱ \Rightarrow ۳^{A+B}=۱ \Rightarrow A+B=۰$$

$$x=۳ \Rightarrow ۳^{۳A+B}=۹ \Rightarrow ۳A+B=۲$$

$$\begin{cases} ۳A+B=۲ \\ A+B=۰ \end{cases}$$

$$۲A=۲ \Rightarrow A=۱ \Rightarrow ۱+B=۰ \Rightarrow B=-۱ \Rightarrow f(x)=۳^{x-۱}$$

y تلاقی با محور $\Rightarrow x=۰ \Rightarrow f(۰)=۳^{۰-۱}=\frac{۱}{۳}$

۱۰- گزینه «۳» دشوار

$f(x)=A\times ۲^{Bx}\quad ,\quad y=\frac{۵}{۴}x$

$x=۲ \Rightarrow A\times ۲^{۲B}=\frac{۵}{۴}\times ۲ \Rightarrow A\times ۲^{۲B}=\frac{۵}{۲}$

$x=۴ \Rightarrow A\times ۲^{۴B}=\frac{۵}{۴}\times ۴ \Rightarrow A\times ۲^{۴B}=۵$

از تقسیم طرفین دو رابطه داریم:

$$\frac{A\times ۲^{۴B}}{A\times ۲^{۲B}}=\frac{۵}{۵/۲}\Rightarrow ۲^{۲B}=۲\Rightarrow B=۱\Rightarrow B=\frac{۱}{۲}\Rightarrow A\times ۲^{۲(\frac{۱}{۲})}=\frac{۵}{۲}$$

$$\Rightarrow A\times ۲=\frac{۵}{۲}\Rightarrow A=\frac{۵}{۴}\Rightarrow f(x)=\frac{۵}{۴}\times ۲^{\frac{۱}{۲}x}$$

$$f^{-۱}(۱۰)\Rightarrow f(x)=۱۰\Rightarrow \frac{۵}{۴}\times ۲^{\frac{x}{۲}}=۱۰\Rightarrow ۲^{\frac{x}{۲}}=۸\Rightarrow \frac{x}{۲}=۳\Rightarrow x=۶$$

۱۱- گزینه «۳» متوسط

$$f(x)=(\frac{a-۲}{۳})^{-x}=(\frac{۳}{a-۲})^{x}$$

با توجه به این که نمودار تابع f صعودی هست، پس:

$$\frac{۳}{a-۲}>۱ \Rightarrow a-۲<۳ \Rightarrow a<۵$$

از طرفی شیب نمودار f نسبت به نمودار $y=۳^x$ کمتر است، بنابراین:

$$\frac{۳}{a-۲}<۳ \Rightarrow a-۲>۱ \Rightarrow a>۳$$

با اشتراک این دو شرط داریم:

$$۳<a<۵$$

۱۲- گزینه «۱» دشوار

$$-۳-a(۲^x)-(۲^{۲x})\times ۴=۰$$

$$\xrightarrow{\text{قرینه}} ۴(۲^x)^۲+a(۲^x)+۳=۰$$

چون $\frac{c}{a}>۰$ است پس دو ریشه هم علامت دارد پس برای داشتن یک جواب فقط می‌توان یک جواب مثبت داشته باشد پس: $\Delta=۰$

$$۲^x=t\Rightarrow ۴t^۲+at+۳=۰$$

$$a^۲-۴(۴)(۳)=۰$$

$$a^۲=+۴۸ \Rightarrow a=\pm ۴\sqrt{۳}$$

۱۳- گزینه «۳» دشوار

$f(۰)=۳ \Rightarrow a(۱-c)=۳ \Rightarrow a-ac=۳ \quad (۱)$

$f(۲)=۰ \Rightarrow a(۲^{۲b}-c)=۰\xrightarrow{a\neq ۰}۲^{۲b}=c \quad (۲)$

از طرفی نمودار به‌اندازه ۱ واحد به پایین منتقل شده پس $ac=۱$. پس با جاگذاری در (۱) داریم:

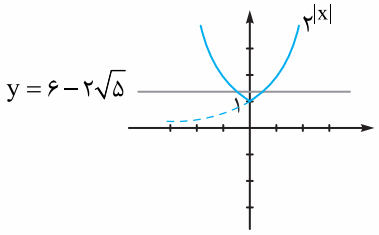
$$a-۱=۳ \Rightarrow a=۴ \xrightarrow{ac=۱} c=\frac{۱}{۴}$$

$$\xrightarrow{(۲)}۲^{۲b}=۲^{-۲}\Rightarrow ۲b=-۲\Rightarrow b=-۱\Rightarrow abc=۴\times(-۱)\times\frac{۱}{۴}=-۱$$

۱۴- گزینه «۲» متوسط

به روش هندسی حل می‌کنیم زیرا جواب دقیق نخواسته و فقط تعداد ریشه‌ها را خواسته.

$$۲^{|x|-۱}=۳-\sqrt{۵} \Rightarrow \frac{۲^{|x|}}{۲}=۳-\sqrt{۵} \Rightarrow ۲^{|x|}=۶-۲\sqrt{۵}$$



حواست باشه که برای رسم $۲^{|x|}$ ابتدا نمودار ۲^x رو رسم می‌کنیم بعد سمت چپ محور y رو پاک کرده سمت راست رو به چپ هم قرینه می‌کنیم.

مقدار حدودی $۶-۲\sqrt{۵}$ برابر ۱/۵۴ هست که این دو نمودار در دو نقطه متقاطع هستند پس تعداد ریشه ۲ است.

۱۵- گزینه «۳» متوسط

$$۹^x-۳^{-۲x}-\frac{۸}{۳}=۰$$

$$\Rightarrow ۳^{۲x}-۳^{-۲x}-\frac{۸}{۳}=۰\xrightarrow{\times ۳^{۲x}}۳^{۴x}-\frac{۸}{۳}\times ۳^{۲x}-۱=۰$$

$$\xrightarrow{\times ۳}۳\times(۳^{۲x})^۲-۸\times(۳^{۲x})-۳=۰$$

$$\Delta=۶۴+۳۶=۱۰۰ \Rightarrow ۳^{۲x}=\frac{۸\pm ۱۰}{۶}=\begin{cases}۳ & \text{ق}\\ -\frac{۱}{۳} & \text{غ ق ق}\end{cases}$$

$$\Rightarrow ۳^{۲x}=۳ \Rightarrow ۲x=۱ \Rightarrow x=\frac{۱}{۲}$$

۱۶- گزینه «۱» دشوار

$$۴^x+۲^x-۶=۰ \Rightarrow (۲^x)^۲+۲^x-۶=۰$$

$$t=۲^x \Rightarrow t^۲+t-۶=۰ \Rightarrow (t+۳)(t-۲)=۰$$

$$\Rightarrow\begin{cases}۲^x=-۳ & \text{غ ق ق}\\ ۲^x=۲ & \text{ق ق}\end{cases}\Rightarrow x=۱ \Rightarrow \alpha=۱$$

$$۲^x-x^۲=۰ \Rightarrow ۲^x=x^۲$$

می‌دونیم ریشه‌های مثبت این معادله $x=۲$ و $x=۴$ هستند، پس:

$$\beta=۲$$

$$\gamma=۴$$

$$\alpha\cdot\beta\cdot\gamma=۱\times ۲\times ۴=۸$$

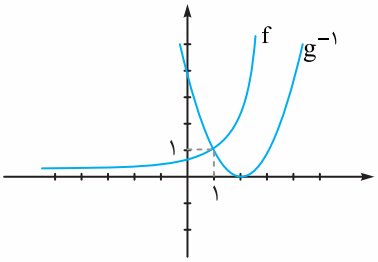
۱۷- گزینه «۳» دشوار

$g(x)=-\sqrt{x}+۲ \Rightarrow y=-\sqrt{x}+۲$

$y-۲=-\sqrt{x} \xrightarrow{\text{توان ۲}} (y-۲)^۲=x \Rightarrow g^{-۱}(x)=(x-۲)^۲$

$D_{g^{-۱}}=(-\infty,۲]$

از رسم کمک بگیریم:



برخورد دو تابع در $x=۱$ است.

پس $\alpha=۱$

با جاگذاری در **h** داریم:

$h(x)=۳^{-x+۱}-۲۷ \Rightarrow ۳^{-x+۱}-۲۷=۰$

برخورد با محور **x** یعنی $y=۰$ پس:

$۳^{-x+۱}-۲۷=۰$

$\Rightarrow ۳^{-x+۱}=۲۷ \Rightarrow -x+۱=۳ \Rightarrow ۱-۳=x \Rightarrow x=-۲$

۱۸- گزینه «۱» متوسط

$D_g=(-\infty,۰], R_g=[-۱,+\infty)$

پس دامنه $g^{-۱}$ برابر $[-۱,+\infty)$ است.

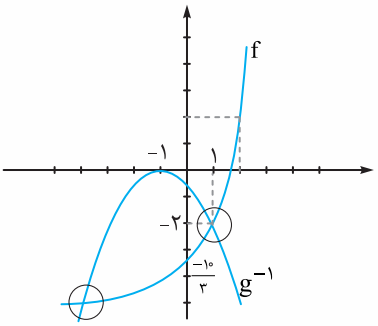
ابتدا وارون نمودار **g** را پیدا کنیم:

$y=\sqrt{-x}-۱ \Rightarrow y+۱=\sqrt{-x} \xrightarrow{\text{توان ۲}} (y+۱)^۲=-x$

$\Rightarrow x=-(y+۱)^۲ \Rightarrow g^{-۱}(x)=-(x+۱)^۲ \Rightarrow x\in[-۱,+\infty)$

$f(x)=g^{-۱}(x) \Rightarrow ۲\times ۳^{x-۱}-۴=-(x+۱)^۲$

فقط تعداد برخوردها رو خواسته پس از رسم کمک می‌گیریم:



$f:$ x	۰	۱	۲
y	$\frac{-۱۰}{۳}$	-۲	۲

نمودار **f** و $g^{-۱}$ دو برخورد دارند چون دامنه $g^{-۱}$، $x\geq -۱$ هست، پس فقط یکی از نقاط برخورد قابل قبول است.

۱۹- گزینه «۱» آسان

$f(x)=۲^{x+۱}$

$۲f(x-۱)=۲\times ۲^{(x-۱)+۱}=۲\times ۲^x=۲^{x+۱}=f(x)$

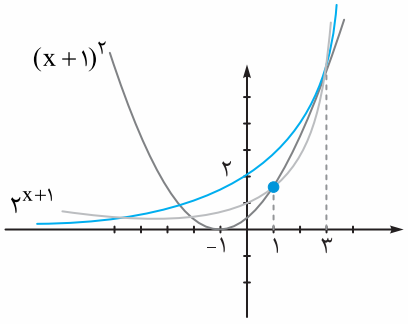
۲۰- گزینه «۲» دشوار

$f(x)=\frac{۲^{-x}+۸}{۲^{-x+۲}}=\frac{۲^{-x}+۸}{۴\times ۲^{-x}}=\frac{\cancel{۲^{-x}}}{۴\times \cancel{۲^{-x}}}+\frac{۸}{۴\times ۲^{-x}}$

$\frac{۱}{۴}+\frac{۲}{۲^{-x}}=\frac{۱}{۴}+۲^{x+۱}$

$f(x)=g(x) \Rightarrow (x+۱)^۲+\frac{\cancel{۱}}{\cancel{۴}}=\frac{\cancel{۱}}{\cancel{۴}}+۲^{x+۱} \Rightarrow (x+۱)^۲=۲^{x+۱}$

پس با برخورد دادن دو تابع $y=(x+۱)^۲$ و $y=۲^{x+۱}$ مقدار **A** و **B** را می‌یابیم.



یکی از جواب‌ها در $x=۱$ است و جواب دیگر $x=۳$.

$AB=۳-۱=۲$

۲۱- گزینه «۲» دشوار

$۴^x+۱۶^x+۲^{۳x+۱}=۶ \Rightarrow ۲^{۲x}+۲^{۴x}+۲\times ۲^{۳x}=۶$

$\Rightarrow (۲^x)^۲+۲\times ۲^{۲x}\times ۲^x+(۲^{۲x})^۲=۶$

$\Rightarrow (۲^x+۲^{۲x})^۲=۶ \Rightarrow ۲^x+۲^{۲x}=\sqrt{۶}$

$\xrightarrow{t=۲^x} t+t^۲=\sqrt{۶} \Rightarrow t^۲+t-\sqrt{۶}=۰$

$\Rightarrow \Delta=۱+۴\sqrt{۶} \Rightarrow t=\frac{-۱\pm\sqrt{۱+۴\sqrt{۶}}}{۲}$

$\Rightarrow \begin{cases} ۲^x=\frac{-۱+\sqrt{۱+۴\sqrt{۶}}}{۲} & \Rightarrow \text{ق ق یک ریشه دارد.} \\ ۲^x=\frac{-۱-\sqrt{۱+۴\sqrt{۶}}}{۲} & \Rightarrow \text{غ ق ق مقدار } ۲^x \text{ منفی نمی شود.} \end{cases}$

۲۲- گزینه «۳» دشوار

$(۴+۲\sqrt{۳})^x<(\frac{\sqrt{۳}-۱}{۲})^{-x^۲}$

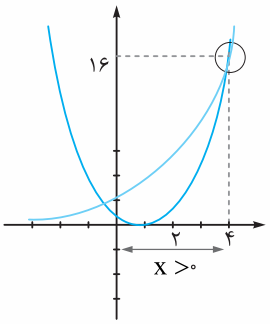
$۴+۲\sqrt{۳}=(۱+\sqrt{۳})^۲ \;,\; \frac{\sqrt{۳}-۱}{۲}\times\frac{\sqrt{۳}+۱}{\sqrt{۳}+۱}=\frac{\cancel{۳-۱}}{\cancel{۲}(\sqrt{۳}+۱)}=\frac{۱}{\sqrt{۳}+۱}$

$\Rightarrow (۱+\sqrt{۳})^{۲x}<(\sqrt{۳}+۱)^{x^۲}$

عدد پایه یعنی $\sqrt{۳}+۱$ عددی بزرگ‌تر از ۱ است پس بدون تغییر علامت نامعادله، پایه‌ها را حذف می‌کنیم.

$۲x<x^۲ \Rightarrow x^۲-۲x>۰ \Rightarrow x(x-۲)>۰ \Rightarrow x<۰ \cup x>۲$

۲۳- گزینه «۲» دشوار



$f(x)=۲^x$

x	−۱	۰	۱	...
۲^x	$\frac{۱}{۲}$	۱	۲	...

$g(x)=x^۲$

x	−۱	۰	۱	...
$x^۲$	−۱	۰	۱	...

محل‌های برخورد در $x=۲$ و $x=۴$ است. یعنی نقاط $A\begin{bmatrix}۲\\۴\end{bmatrix}$ و $B\begin{bmatrix}۴\\۱۶\end{bmatrix}$

$$AB=\sqrt{(۴-۲)^۲+(۱۶-۴)^۲}=\sqrt{۴+۱۴۴}=\sqrt{۱۴۸}=\sqrt{۴\times ۳۷}=۲\sqrt{۳۷}$$

۲۴- گزینه «۲» متوسط

نمودار $g(x)=a^x$ خط افقی $y=۱$ است پس $a^x=۱$ یعنی $a=۱$ با جاگذاری در **f** داریم:

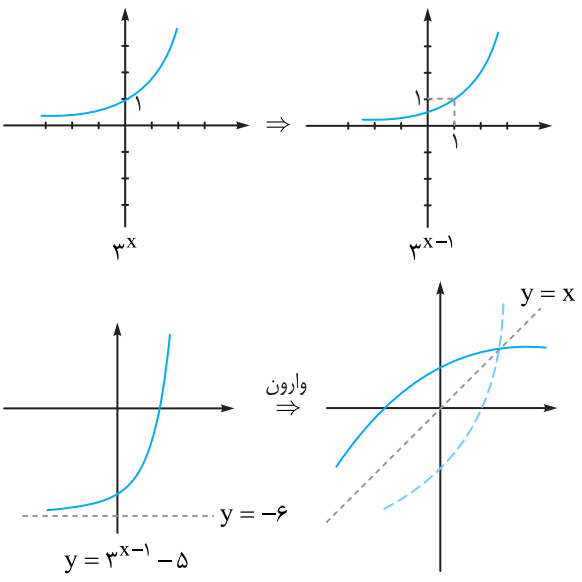
$$f(x)=۲(\frac{۳}{۲})^x$$

F یک تابع نمایی با پایهٔ بزرگ‌تر از ۱ است پس تابع صعودی است و از طرفی $f(۰)=۲(\frac{۳}{۲})^۰=۲$ پس محل برخورد با محور **y** در $y=۲$ است. پس گزینه ۲ درست است.

۲۵- گزینه «۴» متوسط

ابتدا نمودار $f(x)$ را به کمک انتقال رسم می‌کنیم:

$$f(x)=\underset{\text{تاثیر روی برد}}{\frac{۳}{۵}}(۳^{x-۱}\underset{\text{۱ واحد به راست}}{}-\underset{\text{۵ واحد به پایین}}{۵})$$



تأثیر $\frac{۳}{۵}$ روی شیب است و ناحیه را عوض نمی‌کند.

نمودار وارون از ناحیه چهارم نمی‌گذرد.

۲۶- گزینه «۱» متوسط

نمودار گذرنده از مبدأ یعنی $(۰,۰)$ است، پس:

$$۲^a-b=۰ \Rightarrow ۲^a=b$$

از طرفی نمودار ۴ واحد به پایین منتقل شده، پس: $b=۴$

$$۲^a=۴ \Rightarrow a=۲$$

$$a-b=۲-۴=-۲$$

۲۷- گزینه «۳» دشوار

$$f(x)=(\frac{۲}{۳})^{۲x-۱}\times a^{x-۱}=\frac{(\frac{۴}{۹})^x}{\frac{۲}{۳}}\times\frac{a^x}{a}=\frac{۳}{۲a}(\frac{۴}{۹}a)^x$$

تابع نمایی در صورتی نزولی است که عدد پایه بین صفر و یک باشد، بنابراین:

$$۰<\frac{۴}{۹}a<۱ \Rightarrow ۰<a<\frac{۹}{۴}$$

۲۸- گزینه «۱» متوسط

$$۱۶^x-۳۳(۴^x)+۳۲<۰$$

بین دو ریشه جواب است. $\rightarrow (۴^x)^۲-۳۳(۴^x)+۳۲<۰$

$$\xrightarrow{a+b+c=۰}\begin{cases}۴^x=۱\rightarrow x=۰\\ ۴^x=۳۲ \Rightarrow ۲^{۲x}=۲^۵ \Rightarrow ۲x=۵ \Rightarrow x=\frac{۵}{۲}\end{cases}$$

$$\Rightarrow ۰<x<\frac{۵}{۲}$$

۲۹- گزینه «۴» آسان

برای یافتن محل تلاقی دو نمودار، ضابطهٔ تابع آن‌ها را مساوی هم قرار می‌دهیم:

$$(\sqrt{۲})^{x+۱}+۴=۲^x \Rightarrow (\sqrt{۲})\times(\sqrt{۲})^x-(\sqrt{۲})^{۲x}+۴=۰$$

$$t=(\sqrt{۲})^x \Rightarrow -t^۲+\sqrt{۲}t+۴=۰ \Rightarrow \Delta=۱۸$$

$$t=\frac{\sqrt{۲}\pm\sqrt{۱۸}}{+۲}=\begin{cases}\frac{\sqrt{۲}+۳\sqrt{۲}}{۲}=۲\sqrt{۲} & \text{ق ق}\\ \frac{\sqrt{۲}-۳\sqrt{۲}}{۲}=\frac{-۲\sqrt{۲}}{۲}=-\sqrt{۲} & \text{غ ق ق}\end{cases}$$

$$\Rightarrow \sqrt{۲}^x=۲^{\frac{۳}{۲}} \Rightarrow x=۳ \Rightarrow y=۲^۳=۸ \Rightarrow \begin{bmatrix}۳\\۸\end{bmatrix}$$ نقطه تلاقی

$$\text{فاصله از A}=\sqrt{(۳-۰)^۲+(۸-۴)^۲}=\sqrt{۹+۱۶}=\sqrt{۲۵}=۵$$

۳۰- گزینه «۲» متوسط

$$(\frac{۴}{۳})^{-x} \geq (\frac{۲۷}{۶۴})^{۲x-۱}(\frac{۹}{۱۶})^{۱-x}$$

$$(\frac{۳}{۴})^{x} \geq (\frac{۳}{۴})^{۳(۲x-۱)}(\frac{۳}{۴})^{۲(۱-x)} \Rightarrow (\frac{۳}{۴})^{x} \geq (\frac{۳}{۴})^{۶x-۳+۲-۲x}$$

$$\xrightarrow[\text{علامت عوض میشه}]{\frac{۳}{۴}<۱} x \leq ۴x-۱ \Rightarrow ۱ \leq ۳x \Rightarrow x \geq \frac{۱}{۳}$$

۳۱- گزینه «۱» دشوار

برای یافتن محل تقاطع دو نمودار، ضابطه‌ها را مساوی هم قرار می‌دهیم:

$$۳^{x}+\frac{۸}{۳}=(\frac{\sqrt{۳}}{۳})^{۲x} \Rightarrow ۳^{x}+\frac{۸}{۳}=(\frac{۱}{۳})^{x} \Rightarrow ۳^{x}+\frac{۸}{۳}=۳^{-x}$$

$$\xrightarrow{\times ۳^{x}} ۳^{۲x}+\frac{۸}{۳}\times ۳^{x}=۱ \xrightarrow{\times ۳} ۳\times(۳^{x})^{۲}+۸\times(۳^{x})-۳=۰$$

$$\Rightarrow \Delta=۶۴+۳۶=۱۰۰ \Rightarrow ۳^{x}=\frac{-۸\pm ۱۰}{۶}=\begin{cases}\frac{-۱۸}{۶}=-۳ & \text{غ ق ق}\\ \frac{۲}{۶}=\frac{۱}{۳}=۳^{-۱} & \text{ق ق}\end{cases}$$

$$۳^{x}=۳^{-۱} \Rightarrow x=-۱ \Rightarrow y=۳^{-۱}+\frac{۸}{۳}=\frac{۱}{۳}+\frac{۸}{۳}=۳ \Rightarrow \text{تقاطع } \begin{bmatrix}-۱\\ ۳\end{bmatrix}$$

طول دو نقطه برابر است، پس داریم: $\text{فاصله از A} = |۳-۱| = ۲$

۳۲- گزینه «۴» متوسط

دو نمودار در نقطه‌ای به طول ۲ متقاطع‌اند، یعنی اگر $x=۲$ را در دو تابع جاگذاری کنیم مقدار **y** آن‌ها برابر می‌شود پس:

$$f(۲)=g(۲)$$

$$۲^{۲a+b}=(\frac{۱}{۸})^{۲}=(\frac{۱}{۲^{۳}})^{۲}=۲^{-۶} \Rightarrow ۲a+b=-۶$$

$$f(۳)=\frac{۱}{۲} \Rightarrow ۲^{۳a+b}=۲^{-۱} \Rightarrow ۳a+b=-۱$$

$$\begin{cases}۲a+b=-۶\\ ۳a+b=-۱\end{cases}$$

$$a=۵ \xrightarrow{\text{معادله دوم}} ۱۵+b=-۱ \Rightarrow b=-۱۶$$

$$\Rightarrow f(x)=۲^{۵x-۱۶}$$

$f^{-۱}(۱۶)$ یعنی عددی که مقدار **f** به ازای آن مساوی ۱۶ شده:

$$۲^{۵x-۱۶}=۱۶=۲^{۴}$$

$$\Rightarrow ۵x-۱۶=۴ \Rightarrow ۵x=۲۰ \Rightarrow x=۴ \Rightarrow f^{-۱}(۱۶)=۴$$

۳۳- گزینه «۳» آسان

نمودار $۳^{-۲x}$ بالاتر از نمودار $۲^{-۴x}$ قرار بگیرد، یعنی:

$$۳^{-۲x}>۲^{-۴x} \xrightarrow{\text{معکوس}} ۳^{۲x}<۲^{۴x} \Rightarrow ۹^{x}<۱۶^{x}$$

اگر $x=۰$، نامعادله برقرار نیست، پس هر بازه شامل ۰ حذف است.

یعنی رد گزینه‌های ۱ و ۲.

اگر $x=۲$ آن‌گاه نامعادله برقرار است پس گزینه ۴ هم رد می‌شود.

پس تنها گزینهٔ ۳ باقی می‌ماند.

۳۴- گزینه «۱» آسان

$$f(x)=۲^{ax-۱}$$

$$f(۴)=۲\sqrt{۲} \Rightarrow ۲^{۴a-۱}=۲^{\frac{۳}{۲}} \Rightarrow ۴a-۱=\frac{۳}{۲}$$

$$\Rightarrow ۴a=\frac{۵}{۲} \Rightarrow a=\frac{۵}{۸} \Rightarrow f(x)=۲^{\frac{۵}{۸}x-۱}$$

برای یافتن محل تقاطع، ضابطه‌ها را مساوی هم قرار می‌دهیم:

$$۲^{\frac{۵}{۸}x-۱}=\sqrt[۴]{۲} \Rightarrow ۲^{\frac{۵}{۸}x-۱}=۲^{\frac{۹}{۴}}$$

$$\Rightarrow \frac{۵}{۸}x-۱=\frac{۹}{۴} \Rightarrow \frac{۵}{\cancel{۸}_{۲}}x=\frac{۱۳}{\cancel{۴}} \Rightarrow x=\frac{۲۶}{۵}$$

۳۵- گزینه «۴» آسان

$$۶^{x-۱}=\frac{۶^{x}}{۶}=\frac{(۲\times ۳)^{x}}{۶}=\frac{۲^{x}\times ۳^{x}}{۶}=\frac{۵\times ۴}{۶}=\frac{۲۰}{۶}=\frac{۱۰}{۳}$$

۳۶- گزینه «۳» دشوار

$$f(x)=(۲^{-x+۳}-۱)^{۳}$$

به مدل تابع **f** نگاه کنید؛ $y=۲^{-x+۳}-۱$ یک تابع نمایی نزولی هست و وقتی به توان ۳ می‌رسه باز هم نزولی باقی می‌مونه (تابع درجه ۳ علامت را حفظ می‌کنه).

در تابع نزولی داریم:

$$f(\text{☺}) < f(\text{△}) \Leftrightarrow \text{☺} > \text{△}$$

پس اگر طبق اطلاعات مسأله داریم:

$$f(f(x)) < f(۲^{-۳x})$$

آنگاه داریم:

$$f(x) > ۲^{-۳x}$$

با جایگذاری **f** داریم:

$$(۲^{-x+۳}-۱)^{۳} > ۲^{-۳x} \xrightarrow{\text{رادیکال با فرجه سوم بگیریم}} ۲^{-x+۳}-۱ > ۲^{-x}$$

$$\Rightarrow ۸\times ۲^{-x}-۲^{-x}>۱ \Rightarrow ۷\times ۲^{-x}>۱ \Rightarrow ۲^{-x}>\frac{۱}{۷} \xrightarrow{\text{معکوس}} ۲^{x}<۷$$

که با توجه به گزینه‌ها تنها گزینه ۳ می‌تواند جواب باشد.

۳۷- گزینه «۲» دشوار

$$۵\times(۵^{x})^{۲}-۲۴(۵^{x})-۵<۰$$

$$t=۵^{x} \Rightarrow ۵t^{۲}-۲۴t-۵<۰ \Rightarrow (۵t+۱)(t-۵)<۰ \Rightarrow \frac{-۱}{۵}<t<۵$$

$$\Rightarrow \underbrace{\frac{-۱}{۵}<۵^{x}}_{\text{بدیهی}}<۵ \Rightarrow ۵^{x}<۵^{۱} \Rightarrow x<۱$$

۳۸- گزینه «۳» آسان

تومان $p(n)=p_{\circ}(۱/۲)^{n} \Rightarrow p(۳)=۱۰۰۰۰۰۰(۱/۲)^{۳}=۱۷۲۸۰۰۰$

حواست باشه اگر سود سالانه یک بانک برابر r باشه، مقدار پس‌انداز بعد از یک سال برابر ضرب مقدار اولیه در $(۱+r)$ هستش.

۳۹- گزینه «۳» آسان

تابع مربوط به نیم‌عمر:

$$f(t)=f_{\circ}\times ۲^{\frac{-t}{T}} \quad \text{یا} \quad f(t)=f_{\circ}(\frac{۱}{۲})^{\frac{t}{T}}$$

$$f(۲۵۸)=۲۴۰\times ۲^{-\frac{۲۵۸}{۴۳}}=۲۴۰\times ۲^{-۶}=\frac{۲۴۰}{۶۴}=۳/۷۵$$ میلی‌گرم

۴۰- گزینه «۳» متوسط

تعداد باکتری‌ها در شروع کشت ۸۰۰ است یعنی $A=۸۰۰$ پس:

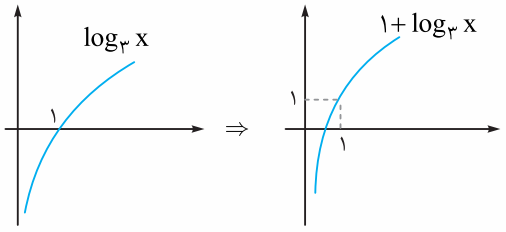
$$f(t)=۸۰۰e^{kt}$$

$$f(۲۰)=۳۲۰۰ \Rightarrow ۸۰۰e^{۲۰K}=۳۲۰۰ \Rightarrow e^{۲۰K}=۴ \Rightarrow e^{۱۰K}=۲$$

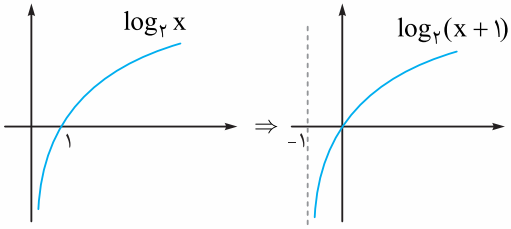
$$f(۳۰)=۸۰۰e^{۳۰K}=۸۰۰e^{۲۰K}\times e^{۱۰k}=۸۰۰\times ۴\times ۲=۶۴۰۰$$

۱- متوسط

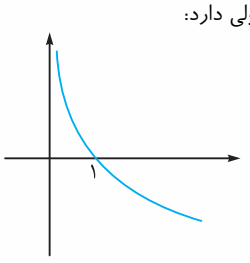
آ) مبنای لگاریتم بزرگ‌تر از ۱ هست پس فرم صعودی لگاریتم رو داره:



ب)

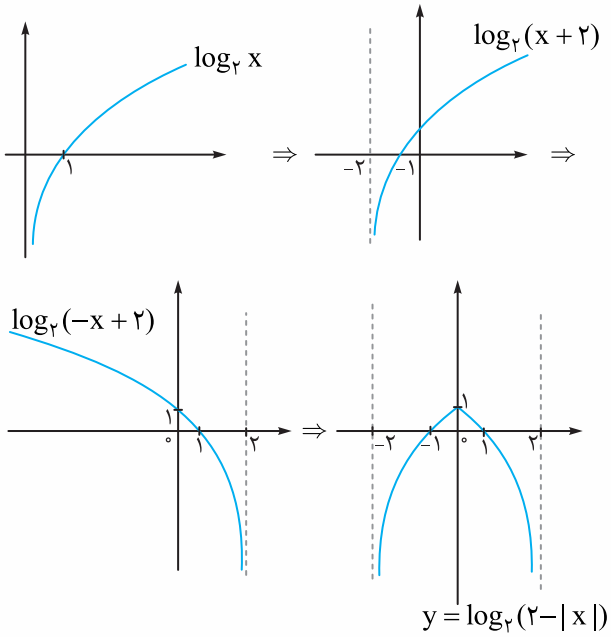


پ) مبنای لگاریتم کمتر از ۱ هست پس فرم نزولی دارد:



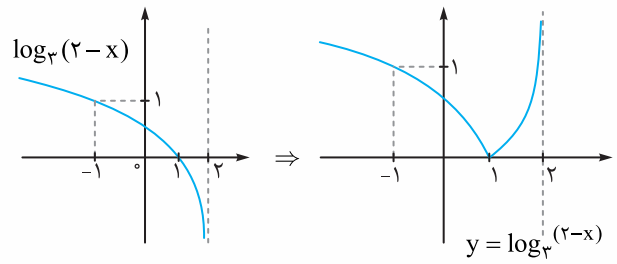
۲- دشوار

آ) نمودار $y=\log_{۲}(۲-x)$ را رسم می‌کنیم سپس تغییرات $|x|$ را اعمال می‌کنیم:



ب) ابتدا نمودار $y=\log_{۳}۲-x$ را رسم می‌کنیم سپس قدرمطلق را روی نمودار اعمال می‌کنیم:

از سومین نمودار بالا داریم:



۳- آسان

$$f(۴۲)=۳-۲\log_{۴}(\frac{۴۲}{۲}-۵)=۳-۲\log_{۴}۱۶$$

$$=۳-۲(۲)=۳-۴=-۱$$

۴- آسان

$$f(x)=\log_{a}x$$

$$f(\frac{۱}{۲})=-۴ \Rightarrow \log_{a}\frac{۱}{۲}=-۴ \xrightarrow{\text{تبدیل به فرم نمایی}} a^{-۴}=\frac{۱}{۲} \Rightarrow (a^{۴})^{-۱}$$

$$=۲^{-۱} \text{یک} \Rightarrow a^{۴}=۲ \Rightarrow a=\pm\sqrt[۴]{۲}$$

غ ق ق

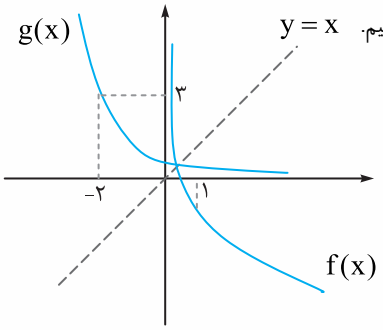
(مبنای لگاریتم منفی نمی شود.)

۵- متوسط

$g \Rightarrow y=(\frac{۱}{۳})^{x+۱} \Rightarrow x+۱=\log_{\frac{۱}{۳}} y \Rightarrow x=(\log_{\frac{۱}{۳}} y)-۱$

$\Rightarrow g^{-۱}(x)=(\log_{\frac{۱}{۳}} x)-۱$

پس نمودار **f** همان نمودار وارون **g** است پس کافیه **g** رو رسم کنیم و سپس نسبت به خط $y=x$ قرینه کنیم.



x	-۲	-۱	۰	۱
y	۳	۱	$\frac{۱}{۳}$	$\frac{۱}{۹}$

$(\log_{\frac{۱}{۳}} ۳)-۱$ همان $f(۳)$ و به عبارتی $g^{-۱}(۳)$ هست یعنی $g(x)=۳$ و از روی نمودار واضح هست که به‌ازای $x=-۲$ داریم $g(-۲)=۳$ یعنی $g^{-۱}(۳)=-۲$.

۶- آسان

آ) $\log_۲ \sqrt[۵]{۲^۴}=\log_۲ ۲^{\frac{۴}{۵}}=\frac{۴}{۵}\underbrace{\log_۲ ۲}_{۱}=\frac{۴}{۵}$

ب) $\log_۳ \frac{۱}{۸۱}=\log_۳ ۳^{-۴}=-۴\underbrace{\log_۳ ۳}_{۱}=-۴$

پ) $\log_{۱۷} ۲۸۹=\log_{۱۷} ۱۷^۲=۲\underbrace{\log_{۱۷} ۱۷}_{۱}=۲$

یادت باشه: $\log_b a^n = n\log_b a$

۷- متوسط

دامنهٔ تابع لگاریتمی با اشتراک بین این سه شرط تعیین می‌شود:

$y=\log$ ☺ $\Rightarrow \begin{cases} ☺ > ۰ \\ △ > ۰ \\ △ \neq ۱ \end{cases}$

آ) $x+۲>۰ \Rightarrow x>-۲$

$۵-x>۰ \Rightarrow x<۵$

$۵-x\neq ۱ \Rightarrow x\neq ۴ \Rightarrow D_f=(-۲,۵)-\{۴\}$

ب) $x-۱>۰ \Rightarrow x>۱$

$۴-x>۰ \Rightarrow x<۴$

$۴-x\neq ۱ \Rightarrow x\neq ۳ \Rightarrow Dg=(۱,۴)-\{۳\}$

پ) $x^۲-۳x+۲>۰ \Rightarrow (x-۲)(x-۱)>۰ \Rightarrow x<۱ \cup x>۲$

$x+۱>۰ \Rightarrow x>-۱$
$x+۱\neq ۱ \Rightarrow x\neq ۰$
$\xrightarrow{\cap} D_h=(-۱,۰)\cup(۰,۱)\cup(۲,+\infty)$

۸- آسان

آ) $\log_{۱۰۲۴}\frac{۱}{۲۵۶}=\log_{۲^{۱۰}} ۲^{-۸}=-\frac{۸}{۱۰}\underbrace{\log_۲ ۲}_{۱}=-\frac{۴}{۵}$

ب) $۳^{\log ۱۰۰۰}=۳^{\log ۱۰^۳}=۳^{۳\log ۱۰}=۳^۳=۲۷$

یادت باشه:

$\log_{b^m} a^n=\frac{n}{m}\log_b a$

۹- متوسط

آ) $\log_۴ ۲۵\times\log_{\sqrt{۵}} ۱۲۸=\log_{۲^۲} ۵^۲\times\log_{۵^{\frac{۱}{۳}}} ۲^۷$

$=\frac{۲}{۲}\log_۲ ۵\times\frac{۷}{\frac{۱}{۳}}\log_۵ ۲=\log_۲ ۵\times ۲۱\log_۵ ۲=\underbrace{۲۱\log_۲ ۵\times\log_۵ ۲}_{۱}=۲۱$

یادت باشه:

$\log_a^b=\frac{۱}{\log_b^a}$

ب) $\log\frac{۱}{۲}+\log\frac{۲}{۳}+\ldots+\log\frac{n}{n+۱}$

$=\underbrace{\log ۱}_{۰}-\log ۲+\log ۲-\log ۳+\ldots+\log n-\log(n+۱)$

$=-\log(n+۱)$

یادت باشه: $\log\frac{a}{b}=\log a-\log b$

۱۰- دشوار

برای تعیین تعداد ارقام یک عدد کافی است لگاریتم عدد در مبنای ۱۰ را حساب کنیم و در فرمول زیر قرار می‌دهیم:

تعداد رقم‌های عدد $a=[\log_{۱۰}^a]+۱$

آ) $\log_{۱۰} ۲^{۴۰۰}=۴۰۰\log ۲=۴۰۰(۰/۳۰۱۰)=۱۲۰/۴$

تعداد رقم‌های $۲^{۴۰۰}=[۱۲۰/۴]+۱=۱۲۰+۱=۱۲۱$

ب) $\log_{۱۰} ۲^{۲۲}=۲۲\log_{۱۰} ۲=۲۲(۱-\log_{۱۰} ۵)=۲۲(۱-۰/۷)=۶/۶$

تعداد رقم‌های $۲^{۲۲}=[۶/۶]+۱=۶+۱=۷$

این یه رابطهٔ کاربردیه، یادش بگیر:

$\log ۱۰=\log(۲\times ۵)=\log ۲+\log ۵$

$\Rightarrow ۱=\log ۲+\log ۵ \Rightarrow \log ۲=۱-\log ۵\ ,\ \log ۵=۱-\log ۲$

۱۱- آسان

تو مبحث تابع نمایی گفتیم که مسأله نیمه‌عمر با فرمول زیر حل می‌شه:

$$m(t)=m_{\circ}\times ۲^{-\frac{t}{T}}$$

با توجه به اطلاعات مسأله: $m(t)=۲\times ۲^{-\frac{t}{۱۰}}$

آ) $t=۲ \Rightarrow m(t)=۲\times ۲^{-\frac{۲}{۱۰}}=۲\times ۲^{-\frac{۱}{۵}}=۲^{\frac{۴}{۵}}\approx ۱/۷۴$

ب) $m(t)=۰/۵ \Rightarrow ۲\times ۲^{-\frac{t}{۱۰}}=\frac{۱}{۲} \Rightarrow ۲^{-\frac{t}{۱۰}}=۲^{-۲}$

$$\Rightarrow \frac{t}{۱۰}=۲ \Rightarrow t=۲۰$$

یادت باشه هر زمانی که مجهول در توان باشه میشه از لگاریتم برای حل استفاده کرد. مثلاً توی همین مسأله:

$$\Rightarrow ۲^{-\frac{t}{۱۰}}=\frac{۱}{۴} \Rightarrow -\frac{t}{۱۰}=\log_{۲}\frac{۱}{۴}=\log_{۲}۲^{-۲}=-۲ \Rightarrow \frac{-t}{۱۰}=-۲ \Rightarrow t=۲۰$$

۱۲- آسان

$$\log_{\sqrt{b}}a^{۲}b^{۳}=\log_{\sqrt{b}}a^{۲}+\log_{\sqrt{b}}b^{۳}=\frac{۲}{\frac{۱}{۲}}\log_{b}a+\frac{۳}{\frac{۱}{۲}}\log_{b}b$$

$$=۴(\frac{۱}{۴})+۶(۱)=۱+۶=۷$$

۱۳- متوسط

کافیه تشخیص بدیم مقدار هر لگاریتم بین کدام دو عدد صحیح قرار می‌گیره.

$$\log_{۳}۳<\log_{۳}۵<\log_{۳}۹ \Rightarrow ۱<\log_{۳}۵<۲ \Rightarrow [\log_{۳}۵]=۱$$

$$\log_{۵}۱<\log_{۵}۳<\log_{۵}۵ \Rightarrow ۰<\log_{۵}۳<۱ \Rightarrow [\log_{۵}۳]=۰$$

$$[\log_{۳}۵]+[\log_{۵}۳]=۱+۰=۱$$

۱۴- آسان

$$\log ۱۹۶-\log ۱۷۵=\log ۱۴^{۲}-\log ۷\times ۲۵$$

$$=۲[\log ۲+\log ۷]-[\log ۷+\log ۵^{۲}]$$

$$=۲[۰/۳۰۱+۰/۸۴۵]-[۰/۸۴۵+۲(۱-۰/۳۰۱)]$$

$$=۲/۲۹۲-۲/۲۴۳=۰/۰۴۹$$

۱۵- دشوار

$$m(t)=۲۰\times ۲^{-\frac{t}{۱۰۰}}$$

$$۰/۰۰۵=۲۰\times ۲^{-\frac{t}{۱۰۰}} \Rightarrow ۰/۰۰۰۲۵=۲^{-\frac{t}{۱۰۰}} \Rightarrow -\frac{t}{۱۰۰}=\log_{۲}۰/۰۰۰۲۵$$

حواست باشه که:

$$\frac{۲۵}{۱۰۰۰۰۰}=\frac{۱}{۴۰۰۰}$$

پس:

$$-\frac{t}{۱۰۰}=\log_{۲}\frac{۱}{۴\times ۱۰۰۰}=-(\log_{۲}۴+\log_{۲}۱۰۰۰)$$

$$\Rightarrow \frac{t}{۱۰۰}=۲+\log_{۲}۱۰^{۳}=۲+۳\log_{۲}۱۰=۲+\frac{۳}{\log_{۱۰}۲}=۲+\frac{۳}{۰/۳}$$

$$\Rightarrow \frac{t}{۱۰۰}=۲+۱۰=۱۲ \Rightarrow t=۱۲۰۰$$

۱۶- متوسط

آ) $y=(\frac{۱}{۲})^{x+۱}-۱ \Rightarrow y+۱=(\frac{۱}{۲})^{x+۱} \Rightarrow y+۱=۲^{-x-۱}$

$$\Rightarrow -x-۱=\log_{۲}(y+۱) \Rightarrow -x=\log_{۲}(y+۱)+۱$$

$$\Rightarrow x=-\log_{۲}(y+۱)-۱ \Rightarrow f^{-۱}(x)=-\log_{۲}(x+۱)-۱$$

ب) $y=۲۴\times ۵^{x-۱}-۱ \Rightarrow y+۱=۲۴\times ۵^{x-۱}$

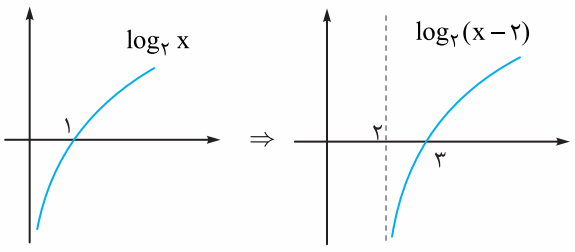
$$\Rightarrow ۵^{x-۱}=\frac{y+۱}{۲۴} \Rightarrow x-۱=\log_{۵}\frac{y+۱}{۲۴} \Rightarrow x=\log_{۵}(\frac{y+۱}{۲۴})+۱$$

$$\Rightarrow g^{-۱}(x)=۱+\log_{۵}\frac{x+۱}{۲۴}$$

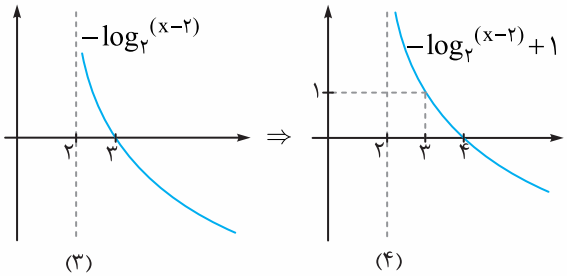
۱۷- متوسط

$$f(x)=\log_{۰/۵}(x-۲)+۱=\log_{\frac{۱}{۲}}(x-۲)+۱=-\log_{۲}(x-۲)+۱$$

پس به کمک نمودار $y=\log_{۲}x$ نمودار **f** رو رسم می‌کنیم.



(۱) (۲)



(۳) (۴)

۱۸- آسان

محل برخورد نمودار تابع با محور طول‌ها نقطه‌ای با عرض صفر است، پس:

$$y=۰ \Rightarrow ۱+\log_۵(x-۲)=۰ \Rightarrow \log_۵(x-۲)=-۱$$

$$\Rightarrow x-۲=۵^{-۱} \Rightarrow x-۲=\frac{۱}{۵} \Rightarrow x=۲+\frac{۱}{۵} \Rightarrow x=\frac{۱۱}{۵}$$

پس نمودار تابع، محور طول‌ها را در نقطه‌ای به طول $\frac{۱۱}{۵}$ و با مختصات $(\frac{۱۱}{۵},۰)$ قطع می‌کند.

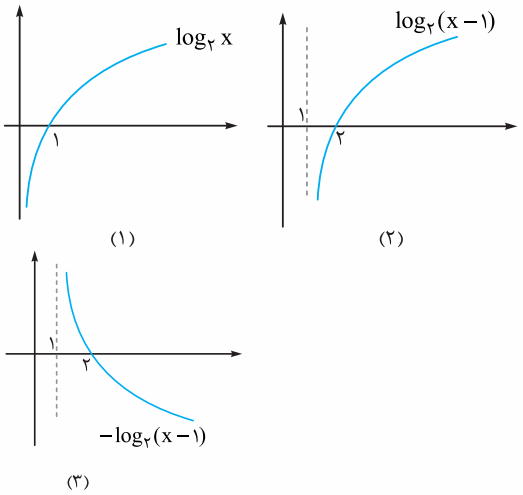
۱۹- آسان

$$A=\log_۳ ۹+\log_۳ \sqrt{\sqrt[۴]{۳^۵}}-(\log_۲ ۴-\log_۲ \sqrt[۳]{۲})$$

$$=\log_۳ ۳^۲+\log_۳ ۳^{\frac{۵}{۸}}-\log_۲ ۲^۲+\log_۲ ۲^{\frac{۱}{۳}}=۲+\frac{۵}{۸}-۲+\frac{۱}{۳}=\frac{۲۳}{۲۴}$$

۲۰- متوسط

$$y=\log_۲ \frac{۱}{x-۱}=-\log_۲(x-۱)$$



۲۱- آسان

آ) $\log ۰/۰۰۰۶=\log ۶\times ۱۰^{-۴}=\log ۲\times ۳\times ۱۰^{-۴}$

$$=\log ۲+\log ۳+\log ۱۰^{-۴}=a+b-۴$$

$\log ۱۰^n=n$ یادت باشه

ب) $\log ۶۰=\log ۲\times ۳\times ۱۰=\log ۲+\log ۳+\log ۱۰=a+b+۱$

$\log ۱۰=۱$ یادت باشه

۲۲- آسان

$$\log_{۲۵} ۴۵=\log_{۵^۲} ۵\times ۹=\log_{۵^۲} ۵+\log_{۵^۲} ۳^۲$$

$$=\frac{۱}{۲}\underbrace{\log_۵ ۵}_{۱}+\frac{۲}{۲}\log_۵ ۳=\frac{۱}{۲}+\log_۵ ۳$$

در مسأله مقدار $\log_۵ ۳$ برابر **a** داده شده است، پس:

$$\log_{۲۵} ۴۵=\frac{۱}{۲}+a$$

۲۳- متوسط

در حل معادلات ابتدا دامنهٔ لگاریتم‌ها رو مشخص می‌کنیم:

آ)
$$\begin{cases} x^۲+x>۰ \Rightarrow (x<-۱)\cup(x>۰) \\ x>۰ \\ x\neq ۱ \\ ۷x-۵>۰ \Rightarrow x>\frac{۵}{۷} \end{cases} \xrightarrow{\cap} x>\frac{۵}{۷},\ x\neq ۱$$

با داشتن این بازه معادله رو حل می‌کنیم:

$$\log_x(x^۲+x)=\log_x(۷x-۵) \Rightarrow x^۲+x=۷x-۵$$

$$\Rightarrow x^۲-۶x+۵=۰$$

$$\Rightarrow (x-۱)(x-۵)=۰ \Rightarrow x=۱ \text{ غ ق ق} \quad \text{و} \quad x=۵ \text{ ق ق}$$

ب) $\log^x+\log(x-۴)=\log_۵ \Rightarrow \log x(x-۴)=\log ۵$

$$\Rightarrow x^۲-۴x=۵ \Rightarrow x^۲-۴x-۵=۰ \Rightarrow x=-۱,۵ \Rightarrow x=۵ \text{ ق ق}$$

پ) $x+۱>۰ \Rightarrow x>-۱,\ x^۲-x+۱>۰ \Rightarrow \Delta<۰, a>۰ \Rightarrow$ همواره مثبت

$$\log_۳(x+۱)(x^۲-x+۱)=۲$$

$$(x+۱)(x^۲-x+۱)=۹ \xrightarrow{\text{اتحاد چاق و لاغر}} x^۳+۱=۹$$

$$\Rightarrow x^۳=۸ \Rightarrow x=۲ \text{ ق ق}$$

۲۴- دشوار

آ) طبق قانونی از لگاریتم داریم:

$$a^{\log_x b}=b^{\log_x a}$$

پس داریم:

$$۳^{\log x}+۳^{\log x}=۱۶۲ \Rightarrow ۲\times ۳^{\log x}=۱۶۲ \Rightarrow ۳^{\log x}=۸۱ \Rightarrow ۳^{\log x}=۳^۴$$

$$\Rightarrow \log x=۴ \Rightarrow x=۱۰^۴=۱۰۰۰۰$$

ب) $۵^{۲+\log_{۲۵} ۳}=x \Rightarrow ۵^۲\times ۵^{\log_{۵^۲} ۳}=x$

$$\Rightarrow x=۲۵\times ۵^{\frac{۱}{۲}\log_۵ ۳}=۲۵\times ۵^{\log_۵ \sqrt{۳}}=۲۵\times \sqrt{۳} \Rightarrow x=۲۵\sqrt{۳}$$

یادت باشه که:

$$a^{\log_a x}=x$$

۲۵- آسان

$$\log_x \sqrt{۷}=\frac{-۱}{۲} \Rightarrow x^{-\frac{۱}{۲}}=\sqrt{۷} \Rightarrow \frac{۱}{\sqrt{x}}=\sqrt{۷} \Rightarrow x=\frac{۱}{۷}$$

$$\log_۲(۱+\frac{۱}{x})=\log_۲ ۱+۷=\log_۲ ۸=۳$$

۲۶- دشوار

حواست هم به رادیکال باشه هم به لگاریتم:

$$f(x)=\sqrt{\log\frac{5x-x^2}{4}}$$

$$(1)\ \frac{5x-x^2}{4}>0 \Rightarrow 5x-x^2>0 \Rightarrow x(5-x)>0 \Rightarrow 0<x<5 \quad (1)$$

$$(2)\ \log\frac{5x-x^2}{4}\geq 0$$

$$\Rightarrow \log\frac{5x-x^2}{4}\geq \log 1 \xrightarrow{\text{مبنا بزرگ‌تر از ۱}} \frac{5x-x^2}{4}\geq 1$$

$$\Rightarrow 5x-x^2\geq 4 \Rightarrow x^2-5x+4\leq 0 \Rightarrow (x-1)(x-4)\leq 0$$

$$\Rightarrow 1\leq x\leq 4 \quad (2)$$

$$\xrightarrow{(1)\cap(2)} 1\leq x\leq 4 \Rightarrow D_f=[1,4]$$

۲۷- آسان

$$625<626<3125 \Rightarrow 5^4<626<5^5$$

مبنا بزرگ‌تر از ۱ هست پس علامت تغییر نمی‌کنه.

$$\log_5 5^4<\log_5 626<\log_5 5^5$$

$$4<\log 626<5$$

پس بین ۴ و ۵ قرار دارد.

۲۸- متوسط

رابطه رشد جمعیت رو به کمک فرمول $f(t)=f_0(1+r)^t$ به دست میاریم.

ضریب رشد $=2\%$ یا $0/02$

$$f(t)=f_0(1+0/02)^t$$

جمعیت دو برابر می‌شود یعنی $f(t)=2f_0$ پس:

$$2\cancel{f_0}=\cancel{f_0}(1/02)^t \Rightarrow (1/02)^t=2 \Rightarrow t=\log_{1/02}2$$

$$\Rightarrow t=\frac{\log_{10}2}{\log_{10}1/02}=\frac{0/301}{0/079}=3/81$$

یعنی حدود ۳ سال و ۲۹۱ روز زمان لازم هست یا به طور تقریبی ۴ سال.

۲۹- آسان

اگر عدد را x فرض کنیم داریم:

$$\log_9 x-\log_9\frac{1}{x^2}=4/5 \Rightarrow \log_9 x-\log_9 x^{-2}=4/5$$

$$\log_9 x+2\log_9 x=4/5 \Rightarrow 3\log_9 x=4/5 \Rightarrow \log_9 x=1/5$$

$$x=9^{\frac{3}{2}}=3^{2\times\frac{3}{2}}=3^3=27$$

۳۰- دشوار

$x=5$ جواب معادله است، پس در معادله صدق می‌کند:

$$\log 10-\frac{1}{2}\log(5-a)=\log 5 \Rightarrow \log 10-\log 5=\frac{1}{2}\log(5-a)$$

$$\Rightarrow \log\frac{10}{5}=\log(5-a)^{\frac{1}{2}} \Rightarrow 2=\sqrt{5-a}$$

$$\xrightarrow{\text{توان ۲}} 4=5-a \Rightarrow a=5-4 \Rightarrow a=1$$

$$\xrightarrow{\text{جاگذاری در معادله}} \log(x+5)-\frac{1}{2}\log(x-1)=\log 5 \Rightarrow \log\frac{x+5}{\sqrt{x-1}}=\log 5$$

$$\Rightarrow \frac{x+5}{\sqrt{x-1}}=5 \Rightarrow x+5=5\sqrt{x-1} \xrightarrow{\text{توان ۲}} x^2+10x+25=25x-25$$

$$\Rightarrow x^2-15x+50=0 \Rightarrow (x-10)(x-5)=0 \Rightarrow x=10$$ جواب دیگر

$$\Rightarrow b=10 \Rightarrow \log b\sqrt{b}=\log 10\sqrt{10}=\log 10^{\frac{3}{2}}=\frac{3}{2}$$

۱- گزینه «۳» آسان

$$\log a^3b^2c=\log a^2b^2ac=\log a^2b^2+\log ac$$

$$=2\log ab+\log ac=2k_1+k_3$$

۲- گزینه «۲» آسان

$$\frac{3\log 6+2\log 8}{\log 2400}=\frac{3\log 2\times 3+2\log 2^3}{\log 8\times 3\times 100}$$

$$=\frac{3(\log 2+\log 3)+6\log 2}{3\log 2+\log 3+\log 10^2}=\frac{9\log 2+3\log 3}{3\log 2+\log 3+2}$$

طبق اطلاعات مسأله داریم:

$$\log 2+\log 3+\log 2^2=a \Rightarrow 3\log 2+\log 3=a$$

با جاگذاری در کسر داریم:

$$\frac{3(3\log 2+\log 3)}{(3\log 2+\log 3)+2}=\frac{3a}{a+2}$$

پس گزینه ۲ صحیح است.

۳- گزینه «۲» دشوار

$$\begin{cases}\log xy^2=2\\ \log x^2y=4\end{cases}\Rightarrow \log xy^2+\log x^2y=6$$

$$\Rightarrow \log(xy^2)(x^2y)=6\Rightarrow \log x^3y^3=6$$
$$\Rightarrow 3\log xy=6\Rightarrow \log xy=2$$

$$\begin{cases}\log xy^2=2\\ \log xy=2\end{cases}\Rightarrow \log xy^2-\log xy=0\Rightarrow \log y=0$$

$$\log xy^4=\log(xy)(y^3)=\log xy+3\log y=2+3(0)=2$$

یادت باشه:

$$\log ab=\log a+\log b$$

$$\log\frac{a}{b}=\log a-\log b$$

۴- گزینه «۳» متوسط

$$\log\frac{49}{9}+\log 20\sqrt{21}=\log 49-\log 9+\log 20+\log\sqrt{21}$$

$$=\log 7^2-\log 3^2+\log 2\times 10+\frac{1}{2}\log 21$$

$$=2\log 7-2\log 3+\log 2+\log 10+\frac{1}{2}[\log 3+\log 7]$$

طبق اطلاعات مسأله:

$$\log 14=b\Rightarrow \log 2+\log 7=b\Rightarrow \log 7=b-\log 2$$
$$\log 6=a\Rightarrow \log 2+\log 3=a\Rightarrow \log 3=a-\log 2$$

$$=2b-\cancel{2\log 2}-2a+\cancel{2\log 2}+\cancel{\log 2}+1+\frac{1}{2}a-\frac{1}{\cancel{2}}\cancel{\log 2}$$

$$+\frac{b}{2}-\frac{1}{\cancel{2}}\cancel{\log 2}=\frac{5}{2}b-\frac{3}{2}a+1$$

۵- گزینه «۲» آسان

$$\frac{\log a}{5}=\log x\Rightarrow \log a=5\log x=\log x^5\Rightarrow a=x^5$$

$$\frac{\log b}{4}=\log x\Rightarrow \log b=4\log x=\log x^4\Rightarrow b=x^4$$

$$\frac{b^2}{a^3}=\frac{x^8}{x^{15}}=x^{-7}\Rightarrow y=-7$$

۶- گزینه «۲» متوسط

تعداد رقم‌های عدد برابر است با $[\log 2^{22}]+1$.

$$=[22\log 2]+1=[22(1-\log 5)]+1$$
$$=[22(\underbrace{1-0/7}_{0/3})]+1=[6/6]+1=6+1=7$$

۷- گزینه «۳» آسان

$$x=8\log_2 2\sqrt{2}=8\log_{2^2}2^{\frac{3}{2}}=8(\frac{\frac{3}{2}}{1})\log_2 2=\cancel{2}(\frac{3}{\cancel{4}})\times 1=6\Rightarrow x=6$$

$$\log_x 4(x+3)=\log_6 4(9)=\log_6 36=2$$

۸- گزینه «۴» متوسط

$$\log_8 2\sqrt[3]{0/25}=A\Rightarrow A=\log_{2^3}2\times(0/25)^{\frac{1}{3}}$$

می‌دونیم: $0/25=\frac{25}{100}=\frac{1}{4}=2^{-2}$

پس:

$$A=\log_{2^3}2+\frac{1}{3}\log_{2^3}2^{-2}=\frac{1}{3}\log_2 2+\frac{1}{3}\times\frac{-2}{3}\log_2 2=\frac{1}{3}-\frac{2}{9}=\frac{1}{9}$$

$$\log_4(\frac{1}{A}-1)=\log_4(9-1)=\log_4 8=\log_{2^2}2^3=\frac{3}{2}$$

۹- گزینه «۳» متوسط

$$\log_{\sqrt{9}}27\sqrt[3]{81}+\log_7\frac{1}{49}+\log_{\sqrt[4]{2}}2\sqrt{2}$$

$$=\log_3 27+\log_3\sqrt[3]{81}+\log_7\frac{1}{49}+\log_{\sqrt[4]{2}}2^{\frac{3}{2}}$$

$$=3+\frac{4}{3}-2+\frac{\frac{3}{\cancel{2}}}{\frac{1}{\cancel{4}}}=1+\frac{4}{3}+6=7+\frac{4}{3}=\frac{25}{3}$$

۱۰- گزینه «۴» آسان

می‌دونیم دامنهٔ تابع لگاریتمی $y=\log[x]$ مقادیری از x هست که عبارت $[x]$ مثبت بشه پس:

$$[x]>0\Rightarrow x\geq 1\Rightarrow D=[1,+\infty]$$

یادآوری:

$$[x]>n\Rightarrow x\geq n+1$$

۱۱- گزینه «۱» دشوار

تو حل نامعادلات لگاریتمی اول هر دو طرف رو به فرم لگاریتم بنویسیم.

$$\log_{\frac{1}{2}}(\frac{2x+3}{12})>1\Rightarrow \log_{\frac{1}{2}}(\frac{2x+3}{12})>\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{2}$$

چون مبنا عددی بین ۰ و ۱ هستش پس تابع نزولی هست و با حذف لگاریتم، جهت نامعادله عوض میشه:

$$\frac{2x+3}{\cancel{12}_6}<\frac{1}{\cancel{2}_1}\Rightarrow 2x+3<6\Rightarrow 2x<3\Rightarrow x<\frac{3}{2}$$

از طرفی طبق شرط دامنه داریم:

$$\frac{2x+3}{12}>0\Rightarrow 2x+3>0\Rightarrow x>\frac{-3}{2}$$

پس جواب نامعادله بازه $(-\frac{3}{2},\frac{3}{2})$ هست و

$$b-a=\frac{3}{2}-(-\frac{3}{2})=\frac{3}{2}+\frac{3}{2}=\frac{6}{2}=3$$

۱۲- گزینه «۳» — متوسط

$$A=\log_{۳}\frac{۱}{۵۰۰}=\log_{۳}(۵۰۰)^{-۱}=-\log_{۳}۵۰۰$$

می‌دونیم که: $۳^{۵}=۲۴۳<۵۰۰<۷۲۹=۳^{۶}$

مبنا یعنی ۳ بزرگ‌تر از ۱ هست پس جهت نامساوی تغییر نمی‌کنه:

$$\log_{۳}۳^{۵}<\log_{۳}۵۰۰<\log_{۳}۳^{۶}\Rightarrow ۵<\log_{۳}۵۰۰<۶$$

$$\Rightarrow -۶<-\log_{۳}۵۰۰<-۵$$

حواست باشه وقتی طرفین یک نامساوی رو در منفی ضرب می‌کنی جهت نامساوی عوض می‌شه.

۱۳- گزینه «۱» — آسان

یادآوری اتحادها:

$$(a-b)^{۳}=a^{۳}-۳a^{۲}b+۳ab^{۲}-۱$$

$$A=\log_{\frac{۱}{x-۱}}(x^{۳}-۳x^{۲}+۳x-۱)=\log_{(x-۱)^{-۱}}(x-۱)^{۳}$$

$$=\frac{۳}{-۱}\log_{(x-۱)}(x-۱)=-۳$$

۱۴- گزینه «۱» — متوسط

$$[\log_{\sqrt{۲}}\sqrt{۵}]=[\log_{۲^{\frac{۱}{۲}}}۵^{\frac{۱}{۲}}]=[\frac{\frac{۱}{۲}}{\frac{۱}{۲}}\log_{۲}۵]=[\log_{۲}۵]$$

$$۲^{۲}=۴<۵<۸=۲^{۳}\Rightarrow \log_{۲}۲^{۲}<\log_{۲}۵<\log_{۲}۲^{۳}$$

$$\Rightarrow ۲<\log_{۲}۵<۳\Rightarrow[\log_{۲}۵]=۲$$

۱۵- گزینه «۲» — آسان

$$\frac{\log۲+\log۵+\log۳۶}{\log۶+\frac{۱}{۲}}=\frac{\overbrace{\log۲\times۵}^{۱۰}+\log۳۶}{\log۶+\frac{۱}{۲}}=\frac{۱+۲\log۶}{\log۶+\frac{۱}{۲}}=\frac{۲(\frac{۱}{۲}+\log۶)}{\frac{۱}{۲}+\log۶}=۲$$

۱۶- گزینه «۳» — دشوار

$$۵^{۲+\log_{۲۵}۳}=۵^{۲}\times۵^{\log_{۲۵}۳}=۲۵\times۵^{\log_{۵^{۲}}۳}$$

$$=۲۵\times۵^{\frac{۱}{۲}\log_{۵}۳}=۲۵\times۵^{\log_{۵}۳^{\frac{۱}{۲}}}=۲۵\times۵^{\log_{۵}\sqrt{۳}}=۲۵\times\sqrt{۳}$$

یادت باشه:

$$a^{\log_{a}x}=x$$

۱۷- گزینه «۱» — متوسط

یکی از قوانین لگاریتم‌ها این هست:

$$a^{\log_{x}b}=b^{\log_{x}a}\Rightarrow a^{\log_{x}b}-b^{\log_{x}a}=۰$$

۱۸- گزینه «۱» — متوسط

معنی ریاضی جمله این هست:

$$\log_{۳}x-\log_{۲۷}(\frac{۱}{x})^{۲}=\frac{۱۰}{۳}\Rightarrow \log_{۳}x-\log_{۳^{۳}}x^{-۲}=\frac{۱۰}{۳}$$

$$\Rightarrow \log_{۳}x+\frac{۲}{۳}\log_{۳}x=\frac{۱۰}{۳}$$

$$\Rightarrow \frac{۵}{۳}\log_{۳}x=\frac{۱۰}{۳}\Rightarrow \log_{۳}x=۲\Rightarrow x=۳^{۲}=۹$$

$$\Rightarrow \log_{۹}x^{۲}=\log_{۹}۹^{۲}=۲$$

۱۹- گزینه «۳» — متوسط

$$\log_{۵}(۲x-۱)+\log_{۵}(۳x-۵)=۱$$

$$\Rightarrow \log_{۵}(۲x-۱)(۳x-۵)=۱\Rightarrow (۲x-۱)(۳x-۵)=۵^{۱}$$

$$\Rightarrow ۶x^{۲}-۱۳x+۵=۵\Rightarrow ۶x^{۲}-۱۳x=۰\Rightarrow x(۶x-۱۳)=۰$$

$$\Rightarrow x=۰\ (\text{غ ق ق})\quad \text{یا}\quad x=\frac{۱۳}{۶}\ (\text{ق ق})$$

$$\log_{۲}۶x+۳=\log_{۲}۶(\frac{۱۳}{۶})+۳=\log_{۲}۱۶=۴$$

۲۰- گزینه «۲» — دشوار

$$\log_{۹}x+\log_{x^{۲}}۳=۱\Rightarrow \log_{۳^{۲}}x+\frac{۱}{\log_{۳}x^{۲}}=۱$$

$$\Rightarrow \frac{۱}{۲}\log_{۳}x+\frac{۱}{۲\log_{۳}x}=۱\xrightarrow{\times۲}\log_{۳}x+\frac{۱}{\log\frac{x}{۳}}=۲$$

می‌دونیم که $\text{☺}+\frac{۱}{\text{☺}}\geq ۲$ و مساوی زمانی اتفاق می‌افته که $\text{☺}=۱$

پس: $\log_{۳}^{x}=۱\Rightarrow x=۳$ ق ق

پس معادله یک ریشه حقیقی دارد.

۲۱- گزینه «۴» — دشوار

$$f(x)=\sqrt{۳-x}\Rightarrow ۳-x\geq ۰\Rightarrow x\leq ۳\Rightarrow D_{f}=(-\infty,۳]$$

$$g(x)=\log_{۲}x^{۲}+۲x\Rightarrow x^{۲}+۲x>۰\Rightarrow x(x+۲)>۰\Rightarrow x<-۲\cup x>۰$$

$$\Rightarrow D_{g}=(-\infty,-۲)\cup(۰,+\infty)$$

$$D_{fog}=\{x\in D_{g}\mid g(x)\in D_{f}\}$$

$$=\{x\in\underbrace{(-\infty,-۲)\cup(۰,+\infty)}_{I}\mid \log_{۲}(x^{۲}+۲x)\in(-\infty,۳]\}$$

$$\log_{۲}(x^{۲}+۲x)\leq ۳\Rightarrow x^{۲}+۲x\leq ۸\Rightarrow x^{۲}+۲x-۸\leq ۰$$

$$\Rightarrow (x+۴)(x-۲)\leq ۰\Rightarrow -۴\leq x\leq ۲\quad (II)$$

$$\xrightarrow{I\cap II}[-۴,-۲)\cup(۰,۲]$$

۲۲- گزینه «۱» — **متوسط**

محور **x**ها را در نقطه‌ای به طول ۱- قطع کرده پس: $y=0$

$$\log_{\frac{1}{2}}(-a+b)=0\Rightarrow -a+b=1$$

نیمساز ناحیه چهارم را در نقطه‌ای به عرض ۱- قطع کرده پس:

$$y=-x \;\Rightarrow\; -1=-x \;\Rightarrow\; x=1$$

$$\log_{\frac{1}{2}}(a+b)=-1 \;\Rightarrow\; a+b=2$$

$$\begin{cases} a+b=2 \\ -a+b=1 \end{cases}$$

$$2b=3 \;\Rightarrow\; b=\frac{3}{2}$$

۲۳- گزینه «۱» — **دشوار**

$$ax+b>0 \;\Rightarrow\; x>\frac{-b}{a} \xrightarrow{x\in(-\frac{1}{2},+\infty)} \frac{-b}{a}=\frac{-1}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{b}{a}=\frac{1}{2} \;\Rightarrow\; a=2b$$

$$f(4)=2 \;\Rightarrow\; \log_3(4a+b)=2 \;\Rightarrow\; 4a+b=9$$

$$\Rightarrow 4(2b)+b=9 \;\Rightarrow\; b=1 \;\Rightarrow\; a=2 \Rightarrow f(x)=\log_3(2x+1)$$

$$f(-\frac{4}{9})=\log_3 2(-\frac{4}{9})+1=\log_3\frac{-8}{9}+1=\log_3\frac{1}{9}=\log_3 3^{-2}=-2$$

۲۴- گزینه «۲» — **دشوار**

ابتدا دامنهٔ دو تابع **f** و **g** رو بررسی می‌کنیم:

$$f(x)=\log x^2 \;\Rightarrow\; x^2>0 \;\Rightarrow\; D_f=\mathbb{R}-\{0\}$$

$$g(x)=2\log x \;\Rightarrow\; x>0 \;\Rightarrow\; D_g=(0,+\infty)$$

دامنه‌ها مساوی نیستند، پس گزینه ۳ رد میشه.

$$f(x)=\log x^2=2\log x=g(x) \;,\; x>0$$

یعنی به‌ازای $x>0$ یعنی همون دامنهٔ **g**، ضابطه‌ها مساوی هستند. پس **g** بخشی از **f** هست.

۲۵- گزینه «۱» — **متوسط**

$$(\log_{12}6)^2+\log_{12}2\times\log_{12}72$$

$$=(\log_{12}6)^2+(1-\log_{12}6)(\underbrace{\log_{12}12}_{1}+\log_{12}6)$$

$$=(\log_{12}6)^2+1-(\log_{12}6)^2=1$$

۲۶- گزینه «۴» — **متوسط**

ابتدا دامنهٔ لگاریتم‌ها رو مشخص می‌کنیم:

$$\log_x x^2+4 \;\Rightarrow\; x^2+4>0 \;\text{و}\; x>0 \;,\; x\neq 1$$

$$\log_x(x^2+4)=1+\log_x 5 \;\Rightarrow\; \log_x(x^2+4)-\log_x 5=1$$

$$\Rightarrow \log_x(\frac{x^2+4}{5})=1$$

$$\Rightarrow \frac{x^2+4}{5}=x \;\Rightarrow\; x^2+4=5x \;\Rightarrow\; x^2-5x+4=0$$

$$\Rightarrow (x-4)(x-1)=0$$

$$\Rightarrow x=1 \;\;(\text{غ ق ق}) \quad \text{یا} \quad x=4 \;\;(\text{ق ق})$$ (در دامنه صدق می‌کند.)

$$\log_2 x=\log_2 4=2$$

۲۷- گزینه «۱» — **دشوار**

$$x^{\log x-1}=100 \;\Rightarrow\; x^{\log x}\times x^{-1}=100$$

برای پایین آوردن توان از هر دو طرف لگاریتم می‌گیریم (با فرض این که می‌دانیم $x>0$ (دامنه لگاریتم))

$$\log(x^{\log x}\times x^{-1})=\log 100 \;\Rightarrow\; \log x^{\log x}+\log x^{-1}=2$$

$$\Rightarrow \log x\log x-\log x-2=0$$

$$\Rightarrow (\log x)^2-\log x-2=0 \;\Rightarrow\; (\log x-2)(\log x+1)=0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \log x=2 \;\Rightarrow\; x=10^2=100 \\ \log x=-1 \;\Rightarrow\; =10^{-1}=\frac{1}{10} \end{cases} \Rightarrow \text{ضرب ریشه ها}=100\times\frac{1}{10}=10$$

۲۸- گزینه «۴» — **دشوار**

$$x^{\log x}=1000x^2$$

مشابه حل تست ۲۷ عمل می‌کنیم و از هر دو طرف لگاریتم می‌گیریم:

$$\log x^{\log x}=\log 1000x^2 \Rightarrow \log x\cdot\log x=\underbrace{\log 1000}_{3}+\log x^2$$

$$\Rightarrow (\log x)^2-2(\log x)-3=0$$

$$(\log-3)(\log x+1)=0 \;\Rightarrow\; \begin{cases} \log x=3 \;\Rightarrow\; x=1000 \\ \log x=-1 \;\Rightarrow\; x=\frac{1}{10} \end{cases}$$

حاصل‌ضرب ریشه‌ها برابر است با:

$$1000\times\frac{1}{10}=100$$

۲۹- گزینه «۱» — **آسان**

$$6^3=216<723<1296=6^4$$

$$\Rightarrow \log_6 6^3<\log_6 723<\log_6 6^4 \Rightarrow 3<\log_6 723<4 \Rightarrow [\log_6 723]=3$$

۳۰- گزینه «۲» دشوار

$$\log(x^۲-x-۶)-\log(x-۳)=\log(۲x-۵)$$

مطابق معمول اول دامنه معادله رو مشخص می‌کنیم:

$$x^۲-x-۶>۰ \Rightarrow (x-۳)(x+۲)>۰ \Rightarrow x<-۲ \cup x>۳$$

$$x-۳>۰ \Rightarrow x>۳$$

$$۲x-۵>۰ \Rightarrow x>\frac{۵}{۲}$$

$$\xrightarrow{\cap} D=(۳,+\infty)$$

حال با توجه به دامنه معادله رو حل می‌کنیم:

$$\log\frac{x^۲-x-۶}{x-۳}=\log(۲x-۵) \Rightarrow \frac{x^۲-x-۶}{x-۳}=۲x-۵$$

$$\Rightarrow x^۲-x-۶=(x-۳)(۲x-۵) \Rightarrow (x-۳)(x+۲)=(x-۳)(۲x-۵)$$

$$\Rightarrow x-۳=۰ \Rightarrow x=۳ \quad \text{(در دامنه نیست) غ ق ق} \qquad \text{یا}$$

$$x+۲=۲x-۵ \Rightarrow x=۷ \quad \text{ق ق}$$

$$\log_{۴}\sqrt[۳]{x+۱}=\log_{۴}\sqrt[۳]{۷+۱}=\log_{۴}\sqrt[۳]{۸}=\log_{۲^۲}۲=\frac{۱}{۲}$$

۳۱- گزینه «۱» دشوار

$$f(x)=\sqrt{۱-\log(x^۲-۳x)}$$

حواست باشه هم دامنهٔ لگاریتم و هم دامنهٔ رادیکال رو درنظر بگیری:

$$x^۲-۳x>۰ \Rightarrow x(x-۳)>۰ \Rightarrow x<۰ \cup x>۳ \quad (۱)$$

$$۱-\log(x^۲-۳x)\geq ۰ \Rightarrow \log(x^۲-۳x)\leq ۱$$

$$\Rightarrow x^۲-۳x\leq ۱۰ \Rightarrow x^۲-۳x-۱۰\leq ۰ \Rightarrow (x-۵)(x+۲)\leq ۰$$

$$\Rightarrow -۲\leq x\leq ۵ \quad (۲)$$

بین شرط‌های (۱) و (۲) اشتراک می‌گیریم:

$$D=[-۲,۰)\cup(۳,۵]$$

۳۲- گزینه «۳» دشوار

$$(\frac{\sqrt{۳}}{۳})^{۲x}=۳^x+\frac{۸}{۳} \Rightarrow (\frac{۱}{۳})^x=۳^x+\frac{۸}{۳}$$

$$\Rightarrow ۳^x+\frac{۸}{۳}-\frac{۱}{۳^x}=۰ \xrightarrow{\times ۳^x} (۳^x)^۲+\frac{۸}{۳}\times ۳^x-۱=۰$$

$$t=۳^x \Rightarrow t^۲+\frac{۸}{۳}t-۱=۰ \xrightarrow{\times ۳} ۳t^۲+۸t-۳=۰$$

$$\Delta=۱۰۰ \Rightarrow t=\frac{-۸\pm ۱۰}{۶}=\begin{cases}\frac{۱}{۳}\\ -۳ \text{ غ ق ق}\end{cases}$$

$$۳^x=\frac{۱}{۳} \Rightarrow x=-۱ \Rightarrow y=۳^{-۱}+\frac{۸}{۳}=\frac{۱}{۳}+\frac{۸}{۳}=۳ \Rightarrow A(-۱,۳)$$

$$۳^x=-۳ \quad \text{غ ق ق}$$

فاصلهٔ A از $(-۱,۱)$ با توجه به مساوی بودن x برابر تفاضل عرض‌ها است:

$$۳-۱=۲$$

۳۳- گزینه «۴» دشوار

$$\log(۲x+۱)+\log(y-۲)-\log y=\log ۳ \Rightarrow \frac{(۲x+۱)(y-۲)}{y}=۳ \quad (۱)$$

$$\log_{۸}(۲y+۴x)+\log_{۸}۲=۱ \Rightarrow \log_{۸}۲(۲y+۴x)=۱ \Rightarrow ۴(y+۲x)=۸$$

$$\Rightarrow y+۲x=۲ \quad (۲)$$

از این رابطه در معادلهٔ اول جاگذاری می‌کنیم:

$$(۲x+۱)(y-۲)=۳y \Rightarrow ۲xy-۴x+y-۲-۳y=۰$$

$$\Rightarrow ۲xy-۴x-۲y-۲=۰ \xrightarrow{\div ۲} xy-۲x-y-۱=۰$$

$$\Rightarrow xy=۲x+y+۱ \xrightarrow{(۱)} xy=۲+۱=۳$$

۳۴- گزینه «۳» متوسط

از طرفین معادله، لگاریتم در مبنای ۳ می‌گیریم:

$$x^{\log_۳ x}=۲۴۳$$

$$\log_۳^{\log_۳ x}=\log_۳ ۲۴۳ \Rightarrow \log_۳ x\cdot\log_۳ x=\log_۳ ۳^۵$$

$$\Rightarrow (\log_۳ x)^۲=۵ \Rightarrow \log_۳ x=\sqrt{۵} \Rightarrow x=۳^{\sqrt{۵}}$$

۳۵- گزینه «۴» آسان

$$f(x)=\log_۳^{\frac{۲x-۱}{۲x+۱}}$$

$$f(۱)+f(۲)+\ldots+f(۴۰)=\log_۳\frac{۱}{۳}+\log_۳\frac{۳}{۵}+\log_۳\frac{۵}{۷}+\ldots+\log_۳\frac{۷۹}{۸۱}$$

$$=\log_۳۱-\cancel{\log_۳ ۳}+\cancel{\log_۳ ۳}-\cancel{\log_۳ ۵}+\cancel{\log_۳ ۵}-\cancel{\log_۳ ۷}$$

$$+\ldots+\cancel{\log_۳ ۷۹}-\log_۳ ۸۱=\log_۳۱-\log_۳ ۸۱=۰-۴=-۴$$

۳۶- گزینه «۳» دشوار

اول از همه دقت کنیم که ۱۲/۵ درصد یعنی $\frac{۱۲۵}{۱۰۰۰}$ و به عبارتی $\frac{۱}{۸}$ پس اگه در هر هفته $\frac{۱}{۸}$ جرم باقی‌مانده رو از دست میده یعنی $\frac{۷}{۸}$ از جرم باقی‌مانده، باقی می‌مونه. از طرفی در هر هفته این جرم باقی مونده و سؤال بعد از چند روز رو پرسیده یعنی اگر تعداد روزها رو t فرض کنیم تعداد هفته‌ها $\frac{t}{۷}$ میشه و جرم باقی‌مانده از فرمول زیر به دست میاد:

$$M(t)=M_۰(\frac{۷}{۸})^{\frac{t}{۷}}$$

$$\frac{۱}{۷}\cancel{M_۰}=\cancel{M_۰}(\frac{۷}{۸})^{\frac{t}{۷}} \Rightarrow \frac{t}{۷}=\log_{\frac{۷}{۸}}\frac{۱}{۷}=\frac{\log_۳\frac{۱}{۷}}{\log_۳\frac{۷}{۸}} \quad \text{(در سؤال مبنای ۳ داده)}$$

$$\Rightarrow \frac{t}{۷}=\frac{-\log_۳ ۷}{\log_۳ ۷-\log_۳ ۸}=\frac{-\frac{۱}{۰/۶}}{\frac{۱}{۰/۶}-۳(\frac{۱}{۱/۶})}=\frac{-\frac{۱۰}{۶}}{\frac{۱۰}{۶}-\frac{۳۰}{۱۶}}=\frac{-\frac{۵}{۳}}{\frac{۵}{۳}-\frac{۱۵}{۸}}=\frac{-\frac{۵}{۳}}{-\frac{۵}{۲۴}}$$

$$\Rightarrow \frac{t}{۷}=۸ \Rightarrow t=۵۶$$

۳۷- گزینه «۲» دشوار

توابع $(\frac{۱}{۲})^x$ و $\log_{\frac{۱}{۲}} x$، نزولی هستند و توان ۳ تأثیری در صعودی و نزولی بودن ندارد. پس تابع **f** تابع نزولی است پس با حذف **f** علامت نامعادله عوض میشه.

$$f(x)=((\frac{۱}{۲})^x+\log_{\frac{۱}{۲}} x)^۳$$

$$f(f(x)<f(۲^{-۳x}))\Rightarrow f(x)>۲^{-۳x}$$

$$\Rightarrow ((\frac{۱}{۲})^x+\log_{\frac{۱}{۲}} x)^۳<۲^{-۳x}\xrightarrow{\text{رادیکال با فرجه ۳}}(\frac{۱}{۲})^x+\log_{\frac{۱}{۲}} x<۲^{-x}$$

$$\Rightarrow \log_{\frac{۱}{۲}} x<۰\Rightarrow \log_{\frac{۱}{۲}} x<\log_{\frac{۱}{۲}} ۱\xrightarrow[\text{علامت عوض میشه}]{۰<\frac{۱}{۲}<۱} x>۱$$

یادت باشه اگر **f** نزولی باشه:

$f(\text{☺})<f(\text{△})\Leftrightarrow \text{☺}>\text{△}$

اما اگه **f** صعودی باشه:

$f(\text{☺})<f(\text{△})\Leftrightarrow \text{☺}<\text{△}$

۳۸- گزینه «۲» آسان

$$\log\frac{۵}{۳}=\log۵-\log۳=۱-\log۲-\log۳\cong ۱-۰/۳-۰/۴=۰/۳$$

$$\log۹=۲\log۳=۲(۰/۴)=۰/۸$$

$$\log۱۵=\log۳\times۵=\log۳+\log۵=\log۳+۱-\log۲$$
$$=۰/۴+۱-۰/۳=۱/۱$$

با جاگذاری لگاریتم‌ها در معادله داریم:

$$۰/۳x^۲+۰/۸x-۱/۱=۰$$

$$\xrightarrow{\times ۱۰}۳x^۲+۸x-۱۱=۰\xrightarrow{\text{جمع ضرایب}=۰}\begin{cases}x=۱\\x=\frac{-۱۱}{۳}\end{cases}$$

$$\text{اختلاف ریشه‌ها}=|۱-(-\frac{۱۱}{۳})|=|\frac{۱۴}{۳}|=\frac{۱۴}{۳}$$

۳۹- گزینه «۲» دشوار

بزرگ‌ترین عضو مجموعهٔ **A** رو خواسته و با توجه به این که فقط در مخرج عبارتی برحسب **x** داریم، کافی‌ست کم‌ترین مقدار مخرج و به عبارتی کم‌ترین مقدار عبارت زیر رادیکال رو به دست بیاریم.

$$\log_۸ x+۴\log_{x^۳}۲=\frac{۱}{۳}\log_۲ x+\frac{۴}{۳}\log_x ۲$$

با توجه به روابط $ax+\frac{b}{x}\geq ۲\sqrt{ab}$ ، $\log_۲ x\cdot\log_x ۲=۱$، داریم:

$$\frac{۱}{۳}\log_۲ x+\frac{۴}{۳}\log_x ۲=\frac{۱}{۳}\log_۲ x+\frac{۴}{۳}(\frac{۱}{\log_۲ x})\geq ۲\sqrt{\frac{۱}{۳}\times\frac{۴}{۳}}=\frac{۴}{۳}$$

حال کسر را می‌سازیم.

$$\sqrt{\log_۸ x+۴\log_{x^۳}۲}\geq\frac{۲}{\sqrt{۳}}\Rightarrow\frac{۱}{\sqrt{\log_۸ x+۴\log_{x^۳}۲}}\leq\frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

۴۰- گزینه «۳» آسان

$$\left.\begin{array}{l}\log_۲ ۳=a\\ \log_۸ b=\frac{۲}{۳}(۱+a)\end{array}\right\}\Rightarrow \log_۸ b=\frac{۲}{۳}(۱+\log_۲ ۳)$$

$$\Rightarrow \frac{۱}{۳}\log_۲ b=\frac{۲}{۳}(۱+\log_۲ ۳)\Rightarrow \log_۲ b=۲+۲\log_۲ ۳$$

$$\Rightarrow \log_۲ b-\log_۲ ۹=۲\Rightarrow \log_۲\frac{b}{۹}=۲\Rightarrow\frac{b}{۹}=۴\Rightarrow b=۳۶$$

$$\log ۳b-۸=\log ۳(۳۶)-۸=\log ۱۰۰=۲$$

۴۱- گزینه «۱» آسان

$$f(x)=\sqrt[۳]{۲^{ax+b}}$$

$$(\frac{۱}{۲},۱)\Rightarrow f(\frac{۱}{۲})=۱\Rightarrow\sqrt[۳]{۲^{\frac{a}{۲}+b}}=۱\Rightarrow ۲^{\frac{a}{۲}+b}=۱\Rightarrow\frac{a}{۲}+b=۰$$

$$f^{-۱}(۸)=۵\Rightarrow f(۵)=۸\Rightarrow\sqrt[۳]{۲^{۵a+b}}=۸\Rightarrow ۲^{۵a+b}=\underbrace{۵۱۲}_{۲^۹}\Rightarrow ۵a+b=۹$$

$$\begin{cases}\frac{a}{۲}+b=۰\\ ۵a+b=۹\end{cases}$$

$$\frac{۹}{۲}a=۹\Rightarrow a=۲\Rightarrow\frac{۲}{۲}+b=۰\Rightarrow b=-۱$$

$$a-b=۲-(-۱)=۳$$

۴۲- گزینه «۲» دشوار

$$a^۲+۹b^۲=۱۰ab\Rightarrow\underbrace{a^۲}_{(a)^۲}+\underbrace{۹b^۲}_{(۳b)^۲}+۲a(۳b)-۲a(۳b)=۱۰ab$$

$$\Rightarrow (a+۳b)^۲=۱۶ab\Rightarrow a+۳b=۴\sqrt{ab}$$

حواست باشه چون $(a+۳b)$ جلوی لگاریتم هست، پس مقدارش مثبته.

$$\Rightarrow \log(\frac{a+۳b}{۴})=\log\frac{۴\sqrt{ab}}{۴}=\log\sqrt{ab}=\frac{۱}{۲}\log ab$$

$$=\frac{۱}{۲}(\log a+\log b)=\frac{\log a+\log b}{۲}=$$

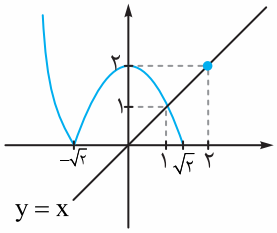
واسطه حسابی بین دو عبارت $\log b,\log a$

۴۳- گزینه «۴» متوسط

$$f(x)=\log_۴(|x^۲-۲|-x)$$

$$|x^۲-۲|-x>۰\Rightarrow |x^۲-۲|>x$$

از روش هندسی برای حل این نامعادله استفاده می‌کنیم:



جواب نامعادله بخش‌هایی از محور **x** است که به‌ازای آن‌ها نمودار $y=|x^۲-۲|$ بالاتر از نمودار $y=x$ است و بنابراین برابر است با: $(-\infty,۱)\cup(۲,+\infty)$

۴۴- گزینه «۳» — آسان

$$۲\log_x a+\log_a \sqrt{x}=۲ \xrightarrow{x=۹} ۲\log_۹ a+\log_a ۳=۲$$

$$\Rightarrow \log_۳ a+\log_a ۳=۲ \Rightarrow \log_۳ a+\frac{۱}{\log_۳ a}=۲$$

همان طوری که قبلاً هم دیدیم مقدار $\text{☺}+\frac{۱}{\text{☺}}$ وقتی برابر ۲ می‌شود که $\text{☺}=۱$. پس:

$$\log_۳ a=۱ \Rightarrow a=۳$$

۴۵- گزینه «۱» — متوسط

$$\log_a c+\log_b c=۱ \Rightarrow \frac{۱}{\log_c a}+\frac{۱}{\log_c b}=۱$$

$$\Rightarrow \frac{\log_c b+\log_c a}{\log_c a\cdot\log_c b}=۱ \Rightarrow \log_c a\cdot\log_c b=\log_c a+\log_c b=\log_c ab$$

۴۶- گزینه «۳» — دشوار

$$\log_۲^{۴^x+۱۵}=x+۳ \Rightarrow ۴^x+۱۵=۲^{x+۳}$$

$$\Rightarrow (۲^x)^۲-۸(۲^x)+۱۵=۰ \Rightarrow\Rightarrow (۲^x-۵)(۲^x-۳)=۰$$

$$\begin{cases}۲^x=۵ \Rightarrow x_۱=\log_۲ ۵\\ ۲^x=۳ \Rightarrow x_۲=\log_۲ ۳\end{cases}$$

$$x_۱+x_۲=\log_۲ ۵+\log_۲ ۳=\log_۲ ۱۵$$

۴۷- گزینه «۳» — دشوار

برد تابع را به‌صورت یک بازه داده یعنی $\mathbf{f}$ در این بازه قرار می‌گیرد. پس:

$$\log_۲^۳<f(x)<\log_۲^۵ \Rightarrow \log_۲^۳<-\log_۲^{\frac{۱}{۱۲+\sqrt{[x]}-[x]}}-۱<\log_۲^۵$$

$$\underbrace{۱+\log_۲ ۳}_{\log_۲ ۶}<\log_۲(\frac{۱}{۱۲+\sqrt{[x]}-[x]})^{-۱}<\underbrace{۱+\log_۲ ۵}_{\log_۲ ۱۰}$$

مبنای لگاریتم بزرگ‌تر از ۱ است پس تابع صعودی است و با حذف لگاریتم‌ها، علامت نامعادله عوض نمی‌شود.

$$۶<۱۲+\sqrt{[x]}-[x]<۱۰ \Rightarrow -۶<\sqrt{[x]}-[x]<-۲$$

$$t=\sqrt{[x]} \Rightarrow -۶<t-t^۲<-۲ \Rightarrow \begin{cases}t^۲-t-۶<۰ \Rightarrow -۲<t<۳\\ t^۲-t-۲>۰ \Rightarrow t<-۱\cup t>۲\end{cases}$$

اشتراک می‌گیریم و داریم: $۲<t<۳$ بنابراین $۲<\sqrt{[x]}<۳$ یعنی $۴<[x]<۹$ پس $۵\le x<۹$ جواب است.

۴۸- گزینه «۱» — آسان

$$\log_۳ ۲=\frac{۵}{۸} \xrightarrow{\text{معکوس}} \log_۲ ۳=\frac{۸}{۵}$$

$$\log_{۱۸} ۸=\log_{۲\times۳^۲} ۲^۳=\frac{۳}{\log_۲ ۲\times۳^۲}=\frac{۳}{\log_۲ ۲+\log_۲ ۳^۲}$$

$$=\frac{۳}{۱+۲\times\frac{۸}{۵}}=\frac{۳}{۱+\frac{۱۶}{۵}}=\frac{۳}{\frac{۲۱}{۵}}=\frac{۱۵}{۲۱}$$

۴۹- گزینه «۳» — متوسط

$f^{-۱}(۲)$ یعنی مقداری برای $\mathbf{x}$ که $f(x)=۲$ شده است، پس:

$$\frac{۲^x-\frac{۱}{۲^x}}{۲}=۲ \Rightarrow ۲^x-\frac{۱}{۲^x}=۴ \xrightarrow{\times ۲^x} (۲^x)^۲-۴(۲^x)-۱=۰$$

$$\Delta=۲۰ \Rightarrow ۲^x=\frac{۴\pm\sqrt{۲۰}}{۲}=\frac{۴\pm۲\sqrt{۵}}{۲}=۲\pm\sqrt{۵}$$

$$\Rightarrow \begin{cases}۲^x=۲+\sqrt{۵} \Rightarrow x=\log_۲ ۲+\sqrt{۵}\\ ۲^x=۲-\sqrt{۵} \quad \text{غ ق ق}\end{cases}$$

۵۰- گزینه «۲» — متوسط

هر روز ۴ لیتر از ۱۰۰ لیتر برداشته می‌شه به عبارتی $\frac{۴}{۱۰۰}$ یا $\frac{۱}{۲۵}$ محلول برداشته می‌شه پس $۱-\frac{۱}{۲۵}=\frac{۲۴}{۲۵}$ از محلول باقی می‌مونه.

$$f(t)=f_۰(\frac{۲۴}{۲۵})^t \Rightarrow \frac{۱}{۳}f_۰=f_۰(\frac{۲۴}{۲۵})^t$$

$$\Rightarrow t=\frac{\log\frac{۱}{۳}}{\log\frac{۲۴}{۲۵}}=\frac{-\log ۳}{\log ۲۴-\log ۲۵}=\frac{-۰/۴۸}{\log ۲^۳\times ۳-۲\log ۵}$$

$$=\frac{-۰/۴۸}{۳(۰/۳)+۰/۴۸-۲(۱-۰/۳)}=\frac{-۰/۴۸}{۰/۹+۰/۴۸-۲+۰/۶}$$

$$=\frac{\not{-}۰/۴۸}{\not{-}۰/۰۲}=۲۴$$

۱- — متوسط

$$\log E=۱۱/۸+۱/۵\times۷/۵=۱۱/۸+۱۱/۲۵=۲۳/۰۵ \Rightarrow E=۱۰^{۲۳/۰۵}\text{Erg}$$

۲- — متوسط

$$m(t)=m_۰(\frac{۱}{۲})^{\frac{t}{T}}$$

آ) $(\frac{۱}{۲})^{\frac{۲}{۱۰}}\times۲=۲^{-۰/۲}\times۲^۱=۲^{۰/۸}\approx ۱/۷۴$ گرم

ب) $m(t)=(\frac{۱}{۲})^{\frac{t}{۱۰}}\times۲=۲^{-\frac{t}{۱۰}}\times۲^۱=۲^{۱-\frac{t}{۱۰}}=۲^{\frac{۱۰-t}{۱۰}}$

پ) $۲^{\frac{۱۰-t}{۱۰}}=۰/۵ \Rightarrow \log_۲ ۰/۵=\frac{۱۰-t}{۱۰}$

$$\log_۲ ۲^{-۱}=\frac{۱۰-t}{۱۰} \Rightarrow -۱=\frac{۱۰-t}{۱۰} \Rightarrow t=۲۰$$

۳- متوسط

حواستون باشه‌ها! مسأله‌های رشد و زوال از رابطه زیر حساب می‌شود:

$$f(t)=f(۰)(۱+r)^t\ ,\ r=\frac{-۱}{۱۰۰}$$

$$f(۱۰)=۴\times۱۰^۷(۱-\frac{۱}{۱۰۰})^{۱۰}=۴\times۱۰^۷(\frac{۹۹}{۱۰۰})^{۱۰}$$

$$=۴\times۱۰^۷\times\frac{۹۹^{۱۰}}{۱۰۰^{۱۰}}=۴\times۹۹^{۱۰}\times۱۰^{-۱۳}$$

۴- متوسط

$$\frac{۱}{۱۰}A_۰=A_۰(\frac{۱}{۲})^{\frac{t}{۱۲/۶}}\Rightarrow\frac{۱}{۱۰}=(\frac{۱}{۲})^{\frac{t}{۱۲/۶}}$$

$$\log_{\frac{۱}{۲}}\frac{۱}{۱۰}=\frac{t}{۱۲/۶}$$

$$\frac{۱۰}{۳}=\frac{t}{۱۲/۶}\Rightarrow ۳t=۱۲۶\Rightarrow t=۴۲$$ سال

۵- متوسط

$$۲A_۰=A_۰(۱+\frac{۲}{۱۰۰})^t\Rightarrow۲=(\frac{۱۰۲}{۱۰۰})^t$$

$$\log_{\frac{۱۰۲}{۱۰۰}}۲=t$$

$$\frac{\log۲}{\log۱/۰۲}=t\Rightarrow\frac{۰/۳۰۱}{۰/۰۰۸۶}=t\Rightarrow t=۳۵$$

۶- متوسط

حواستون باشه! که در سؤال گفته شده قدرت زلزله از پس:

$$M=\frac{۲}{۳}\log\frac{E}{E_۰}\Rightarrow M=\frac{۲}{۳}\log\frac{۱۰^{۱۳/۴}}{۱۰^{۴/۴}}$$

$$M=\frac{۲}{۳}[\log۱۰^{۱۳/۴}-\log۱۰^{۴/۴}]$$

$$M=\frac{۲}{۳}[۱۳/۴-۴/۴]=\frac{۲}{۳}\times۹=۶$$ ریشتر

۷- متوسط

$$۲A_۰=A_۰(۱+\frac{۱}{۱۰۰})^t\Rightarrow۲=(\frac{۱۰۱}{۱۰۰})^t$$

$$\log_{۱/۰۱}۲=t\Rightarrow\frac{\log۲}{\log۱/۰۱}=t\Rightarrow\frac{۰/۳۰۱}{۰/۰۴۳}=t$$

$t=۷۰$ سال

۸- آسان

آ) $m(t)=۱(\frac{۱}{۲})^{\frac{t}{۴}}$

ب) $۰/۰۱=(\frac{۱}{۲})^{\frac{t}{۴}}\Rightarrow\log_{۲^{-۱}}۱۰^{-۲}=\frac{t}{۴}\Rightarrow۲\log_۲۱۰=\frac{t}{۴}$

$$۲(\frac{۱۰}{۳})=\frac{t}{۴}\Rightarrow\frac{۲۰}{۳}=\frac{t}{۴}\Rightarrow ۳t=۸۰\Rightarrow t=\frac{۸۰}{۳}$$

۹- متوسط

$$\log۲=۰/۳\Rightarrow۱۰^{۰/۳}=۲$$

$$\log E=۱۱/۸+۱/۵M\Rightarrow E=۱۰^{۱۱/۸+۱/۵M}$$

$$\frac{E_۲}{E_۱}=\frac{۱۰^{۱۱/۸+۱/۵M_۲}}{۱۰^{۱۱/۸+۱/۵M_۱}}=۱۰^{۱/۵(M_۲-M_۱)}\Rightarrow\frac{E_۲}{E_۱}=۱۰^{۱/۵(۴/۸-۴)}$$

$$=۱۰^{۱/۵\times۰/۸}=۱۰^{۱/۲}=۱۰^{۰/۳\times۴}=۲^۴=۱۶$$

۱۰- آسان

$$f(t)=۱۲۸(\frac{۱}{۲})^{\frac{t}{۳۰}}$$

$$f(t)=۱۲۸(\frac{۱}{۲})^{\frac{۳۰۰}{۳۰}}=۲^۷\times\frac{۱}{۲^{۱۰}}=\frac{۱}{۲^۳}=\frac{۱}{۸}$$

۱- گزینه «۳» دشوار

$$۴۰=۶۰-۵۰e^{-\frac{۱}{۴}t}$$

$$۵۰e^{-\frac{۱}{۴}t}=۲۰\Rightarrow e^{-\frac{۱}{۴}t}=\frac{۲}{۵}\Rightarrow\log_e\frac{۲}{۵}=-\frac{t}{۴}$$

حواستون باشه‌ها! لگاریتم در پایه **e** یا عدد نپر را لگاریتم نپری می‌نامند و آن را به‌صورت **Lnx** می‌نویسند.

$$\log_e\frac{۵}{۲}=\log_e۵-\log_e۲=۰/۹۱$$

پس:

$$\log_e۲-\log_e۵=-\frac{t}{۴}\Rightarrow\frac{-۹۱}{۱۰۰}=\frac{-t}{۴}\Rightarrow t=۳/۶۴$$

از نصف ماه بیشتر است پس ۳ ماه و ۱۹ روز جواب است.

۲- گزینه «۳» متوسط

$$\frac{۱}{۲}\cancel{A_۰}=\cancel{A_۰}(۱-\frac{۵}{۱۰۰})^t\Rightarrow\frac{۱}{۲}=(\frac{۹۵}{۱۰۰})^t$$

$$\log_{\frac{۹۵}{۱۰۰}}\frac{۱}{۲}=t$$

$$\frac{\log\frac{۱}{۲}}{\log\frac{۹۵}{۱۰۰}}=\frac{-\log۲}{\log۵+\log۱۹-۲\log۱۰}=\frac{-۰/۳۰۱}{۰/۶۹۹+۱/۲۸۷-۲}$$

$$=\frac{-۰/۳۰۱}{-۰/۰۱۴}=۲۱/۵$$

۳- گزینه «۱» دشوار

$$f(t)=m_{\circ}(a)^{\frac{t}{T}}$$

$$\begin{cases}۱۲=m_{\circ}(a)^{\frac{۲}{T}}\\ ۴۸=m_{\circ}(a)^{\frac{۴}{T}}\end{cases}\Rightarrow\frac{۴۸}{۱۲}=\frac{m_{\circ}(a)^{\frac{۴}{T}}}{m_{\circ}(a)^{\frac{۲}{T}}}$$

$$۴=(a)^{\frac{۲}{T}}\xrightarrow{\text{جذر}}۲=a^{\frac{۱}{T}}$$

$$۱۲=m_{\circ}(۴)\Rightarrow m_{\circ}=۳$$

با جایگذاری در اطلاعات اولیه

$$f(t)=۳(a)^{\frac{۱}{T}}=۳\times۲=۶$$

۴- گزینه «۴» متوسط

$$\log E_۱=۱۱/۸+۱/۵(۸)=۲۳/۸\Rightarrow\log E_۱=۲۳/۸$$

$$\log E_۲=۱۱/۸+۱/۵(۶)=۲۰/۸\Rightarrow\log E_۲=۲۰/۸$$

$$\log E_۱E_۲=\log E_۱+\log E_۲=۲۳/۸+۲۰/۸=۴۴/۶$$

۵- گزینه «۳» آسان

$$۳=۴۸(\frac{۱}{۲})^{\frac{t}{۲۵}}\Rightarrow\frac{۱}{۱۶}=(\frac{۱}{۲})^{\frac{t}{۲۵}}$$

$$\log_{\frac{۱}{۲}}\frac{۱}{۱۶}=\frac{t}{۲۵}\Rightarrow۴=\frac{t}{۲۵}\Rightarrow t=۱۰۰$$

۶- گزینه «۳» متوسط

$$\frac{۱}{۱۰۰}=(۱)(\frac{۱}{۲})^{\frac{t}{۴}}\Rightarrow۱۰^{-۲}=(\frac{۱}{۲})^{\frac{t}{۴}}$$

$$\log_{\frac{۱}{۲}}۱۰^{-۲}=\frac{t}{۴}$$

$$۲\log_{۲}۱۰=\frac{t}{۴}\Rightarrow۲(\frac{۱۰}{۳})=\frac{t}{۴}\Rightarrow\frac{۲۰}{۳}=\frac{t}{۴}\Rightarrow t=\frac{۸۰}{۳}\cong۲۶/۶$$

۷- گزینه «۲» متوسط

$$۲^{۱۰۰}=A\xrightarrow{\text{از طرفین لگاریتم می گیریم}}\log۲^{۱۰۰}=\log A$$

$$۱۰۰\log۲=\log A$$

$$۱۰۰(۰/۳۰۱)=۳۰/۱\Rightarrow$$ ۳۱ رقمی است

۸- گزینه «۱» متوسط

$$\frac{۲۰}{۱۰۰}A_{\circ}=A_{\circ}(\frac{۱}{۲})^{\frac{t}{۵۷۰۰}}\Rightarrow\frac{۲}{۱۰}=(\frac{۱}{۲})^{\frac{t}{۵۷۰۰}}$$

$$\frac{۱}{۵}=(\frac{۱}{۲})^{\frac{t}{۵۷۰۰}}$$

$$\log_{\frac{۱}{۲}}\frac{۱}{۵}=\frac{t}{۵۷۰۰}$$

$$\frac{\log۵}{\log۲}=\frac{t}{۵۷۰۰}\Rightarrow\frac{۰/۶۹}{۰/۳}=\frac{t}{۵۷۰۰}\Rightarrow t=۱۳۱۱۰$$

۹- گزینه «۲» متوسط

$$M=\frac{۲}{۳}\log\frac{E}{E_{\circ}}$$

$$۶/۸=\frac{۲}{۳}[\log E-\log۱۰^{۴/۴}]\Rightarrow۶/۸=\frac{۲}{۳}\log E-\frac{۲}{۳}\times۴/۴$$

$$\frac{۳}{۲}(۹/۷)=\log E\Rightarrow۱۴/۶=\log_{۱۰}E\Rightarrow E=۱۰^{۱۴/۶}$$

۱۰- گزینه «۱» متوسط

$$f(t)=۲۴(\frac{۱}{۲})^{\frac{t}{۲۵}}$$

$$f(۵۰)=۲۴(\frac{۱}{۲})^{\frac{۵۰}{۲۵}}=۲۴\times\frac{۱}{۴}=۶$$

۱- متوسط

آ) درست

ب) نادرست

$$\log_{۱۰/۱}a=\Rightarrow۱۰^{a}=\frac{۱}{۱۰}\Rightarrow۱۰^{a}=۱۰^{-۱}\Rightarrow a=-۱$$

پ) نادرست ـ اگر $a>b>۰$ آن‌گاه $\log_{۱۰}a>\log_{۱۰}b$.

ت) نادرست ـ می‌تواند بین صفر و یک باشد.

۲- آسان

آ) $۳^{۳}=۳^{x}\Leftarrow x=۳$

ب) صفر

پ) $a>۰\ ,\ b>۰\ ,\ b\neq۱$

۳- آسان

این تابع نمایی است که یک واحد به سمت بالا رفته است پس: $a=۱$.

همچنین محل برخورد با محور **y**ها در تابع نقطه ۲ است، پس:

$$۲=۱+۲^{۰-b}\Rightarrow۱=۲^{-b}\Rightarrow۱=(\frac{۱}{۲})^{b}\Rightarrow b=۰$$

۴- متوسط

$(\frac{۴}{۱۰۰})^{x^۲-۳x} < ۵^۴ \Rightarrow (\frac{۱}{۲۵})^{x^۲-۳x} < ۵^۴$

$(۵^{-۲})^{x^۲-۳x} < ۵^۴ \Rightarrow ۵^{-۲x^۲+۶x} < ۵^۴$

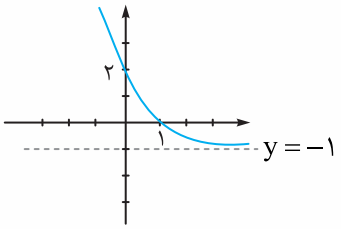
$-۲x^۲+۶x < ۴ \Rightarrow -۲x^۲+۶x-۴ < ۰$

چون جمع ضرایب صفر است $x_۱ = +۱$ و $x_۲ = ۲$ و جواب به‌صورت زیر است:

$(-\infty,۱) \cup (۲+\infty)$

۵- متوسط

آ) $f(x) = ۳(\frac{۱}{۳})^x - ۱$



ب) $f^{-۱}(۸) = \alpha \Rightarrow (۸,\alpha) \in f^{-۱} \Rightarrow (\alpha,۸) \in f \Rightarrow ۸ = ۳^{-\alpha+۱} - ۱$

$۹ = ۳^{-\alpha+۱} \Rightarrow ۳^۲ = ۳^{-\alpha+۱} \Rightarrow ۲ = -\alpha+۱ \Rightarrow \alpha = -۱$

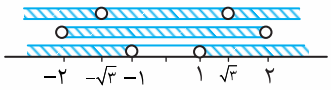
پ) $(\frac{۱}{۳})^{-۳x-۲} - ۱ = ۳^{-x+۱} - ۱ \Rightarrow ۳^{۳x+۲} = ۳^{-x+۱}$

$۳x+۲ = -x+۱ \Rightarrow ۴x = -۱ \Rightarrow x = \frac{-۱}{۴}$

۶- دشوار

$\log_b a \Rightarrow \begin{cases} a > ۰ \\ b > ۰ \\ b \neq ۱ \end{cases}$ می‌دانیم که تابع نمایی دارای دامنه

$\begin{cases} x^۲-۱ > ۰ \Rightarrow x^۲ > ۱ \Rightarrow x > ۱ \text{ یا } x < -۱ \\ ۴-x^۲ > ۰ \Rightarrow ۴ > x^۲ \Rightarrow -۲ < x < ۲ \\ ۴-x^۲ \neq ۱ \Rightarrow ۳ \neq x^۲ \Rightarrow ۳ \neq x^۲ \Rightarrow x \neq \pm\sqrt{۳} \end{cases}$



مجموع جواب: $(-۲,-\sqrt{۳}) \cup (-\sqrt{۳},-۱) \cup (۱,\sqrt{۳}) \cup (\sqrt{۳},۲)$

۷- متوسط

$۰/۷۵ = \frac{۷۵}{۱۰۰} = \frac{۳}{۴}$

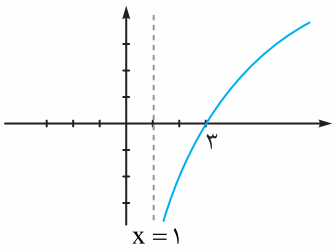
$\log\sqrt{\frac{۳}{۴}} = \log(\frac{۳}{۴})^{\frac{۱}{۲}} = \frac{۱}{۲}\log\frac{۳}{۴} = \frac{۱}{۲}(\log ۳ - \log ۴)$

$= \frac{۱}{۲}(\log ۳ - ۲\log ۲) = \frac{۱}{۲}(۰/۴۷۷۱ - ۲(۰/۳۰۱))$

$= \frac{۱}{۲}(-۰/۱۲۴۹) = -۰/۰۶۲$

۸- دشوار

آ)



ب) $f^{-۱}(۳) = \alpha \Rightarrow (۳,\alpha) \in f^{-۱} \Rightarrow (\alpha,۳) \in f$

$\Rightarrow ۳ = \log_۲(\alpha-۱) - ۱ \Rightarrow ۴ = \log_۲(\alpha-۱)$

$۲^۴ = \alpha - ۱ \Rightarrow ۱۷ = \alpha$

پ) $\log_۲ \frac{۸}{x+۱} = \log_۲(x-۱) - ۱ \Rightarrow \log_۲ \frac{\frac{۸}{x+۱}}{x-۱} = ۱$

$۲ = \frac{۸}{x^۲-۱} \Rightarrow x^۲-۱ = ۴ \Rightarrow x = \pm\sqrt{۵} \Rightarrow x = \sqrt{۵}$ ق ق

۹- آسان

$\log_۲ \frac{۲x+۱}{x-۲} = ۲ \Rightarrow ۲^۲ = \frac{۲x+۱}{x-۲} \Rightarrow ۴ = \frac{۲x+۱}{x-۲}$

$۴x-۸ = ۲x+۱ \Rightarrow ۲x = ۹ \Rightarrow x = \frac{۹}{۲}$ ق ق

۱۰- متوسط

$\log E_۱ = ۱۱/۸ + ۱/۵M$

$\log E_۲ = ۱۱/۸ + ۱/۵(M+۲)$

$\log E_۲ = \underbrace{۱۱/۸ + ۱/۵M}_{\log E_۱} + ۳$

$\log E_۲ - \log E_۱ = ۳$

$\log \frac{E_۲}{E_۱} = ۳ \Rightarrow ۱۰^۳ = \frac{E_۲}{E_۱}$

انرژی آزادشده ۱۰۰۰ برابر می‌شود.

۱۱- متوسط

حواستون باشه‌ها! ۲۰ دقیقه $\frac{۱}{۳}$ ساعت است.

$f(t) = ۶۴(۲)^{\frac{t}{\frac{۱}{۳}}}$

$f(t) = ۶۴(۲)^{۳t}$

آ) $f(۴) = ۶۴(۲)^{۱۲} = ۲^۶ \times ۲^{۱۲} = ۲^{۱۸}$

ب) $۱۰۲۴ = ۶۴(۲)^{۳t} \Rightarrow ۲^{۱۰} = ۲^۶ \times ۲^{۳t} \Rightarrow ۳t+۶ = ۱۰ \Rightarrow ۳t = ۴$

$t = \frac{۴}{۳}$ ساعت

۱- آسان

آ) درست

ب) درست

پ) نادرست - (بستگی به مبنا دارد.)

ت) نادرست

۲- متوسط

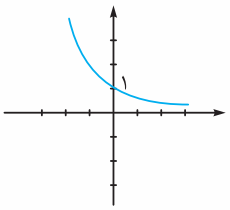
آ) $\frac{۱}{۲}$

ب) $۱۰=۱۰^{-۲x} \Rightarrow -۲x=۱ \Rightarrow x=-\frac{۱}{۲}$

پ) $k \neq ۰\ ,\ a \neq ۱\ ,\ a>۰$

۳- متوسط

آ)



ب) $f^{-۱}(\sqrt{۳})=\alpha \Rightarrow (\sqrt{۳},\alpha)\in f^{-۱} \Rightarrow (\alpha,\sqrt{۳})\in f \Rightarrow \sqrt{۳}=(\frac{۱}{۳})^{\alpha}$

$۳^{\frac{۱}{۲}}=۳^{-\alpha} \Rightarrow \frac{۱}{۲}=-\alpha \Rightarrow -\frac{۱}{۲}=\alpha$

پ) $۳^{۲x+۱}=(\frac{۱}{۳})^{x} \Rightarrow ۳^{۲x+۱}=۳^{-x} \Rightarrow ۲x+۱=-x$

$۳x=-۱ \Rightarrow x=\frac{-۱}{۳}$

۴- آسان

الف) $g(-۱)=۴^{-۱}+۲=\frac{۱}{۴}+۲=\frac{۹}{۴}$

ب) $۶۶=۴^{x}+۲ \Rightarrow ۶۴=۴^{x} \Rightarrow ۴^{۳}=۴^{x} \Rightarrow x=۳$

۵- متوسط

الف) $۲x-۳=x+۱ \Rightarrow x=۴$

ب) $(\frac{۹}{۱۰۰})^{x^{۲}-۳x}=(\frac{۱۰}{۳})^{-۴} \Rightarrow (\frac{۳}{۱۰})^{۲x^{۲}-۶x}=(\frac{۳}{۱۰})^{۴}$

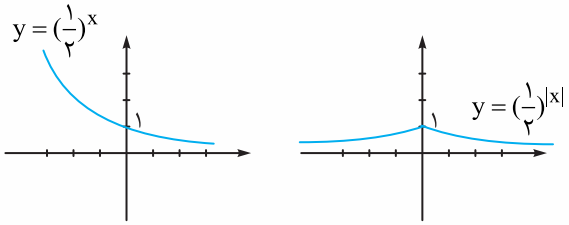
$۲x^{۲}-۶x=۴ \Rightarrow ۲x^{۲}-۶x-۴=۰ \Rightarrow ۲(x^{۲}-۳x-۲)=۰$

$\Delta=۹-۴(-۲) \Rightarrow \Delta=۹+۸=۱۷$

$x=\frac{۳\pm\sqrt{۱۷}}{۲}$

۶- آسان

ابتدا $y=(\frac{۱}{۲})^{x}$ را رسم می‌کنیم سپس $f(|x|)$ به معنای حذف قسمت چپ شکل و قرینه کشیدن سمت راست شکل است.



۷- آسان

$\log_{۲}۹=\alpha \Rightarrow ۲^{\alpha}=۹$

پس:

$۴^{\alpha+۱}=۴^{\alpha}\times۴=(۲^{۲})^{\alpha}\times۴=(۲^{\alpha})^{۲}\times۴=۹^{۲}\times۴=۳۲۴$

۸- متوسط

$\log ۲\sqrt{۳}-\log ۵=\log ۲+\log\sqrt{۳}-\log ۵$

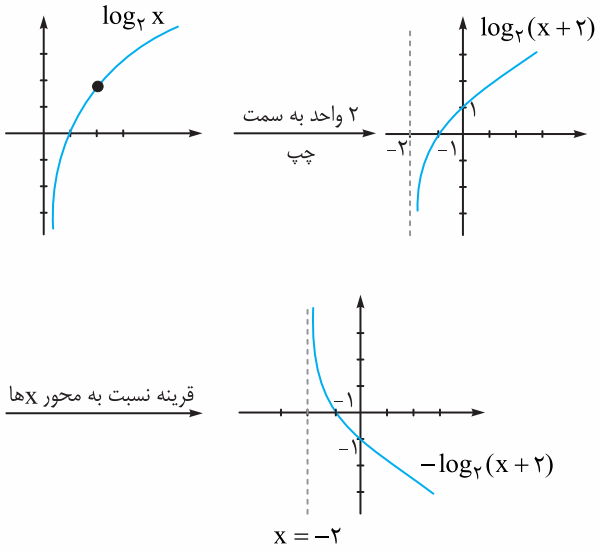
$=۰/۳+\frac{۱}{۲}\log ۳-\log ۵=۰/۳+\frac{۱}{۲}(۰/۴۸)-(۱-۰/۳)$

$=۰/۳-۰/۲۴-۰/۷=-۰/۶۴$

۹- آسان

ابتدا $y=\log_{۲}x$ را رسم می‌کنیم سپس ۲ واحد به سمت چپ منتقل می‌کنیم.

سپس برای رسم $-f(x)$ نسبت به محور xها شکل را قرینه می‌کنیم.



۱۰- متوسط

$\log_{۳}(x-۱)(\frac{x}{۲}+۱)=۲$

$۳^{۲}=(x-۱)(\frac{x}{۲}+۱) \Rightarrow ۹=\frac{x^{۲}}{۲}+x-\frac{x}{۲}-۱ \xrightarrow{\times ۲}$

$۱۸=x^{۲}+۲x-x-۲ \Rightarrow ۰=x^{۲}+x-۲۰ \Rightarrow (x+۵)(x-۴)=۰$

$x=۴$ ق ق

$x=-۵$ غ ق ق

۱۱- آسان

$\log E=۱۱/۸+۱/۵M \Rightarrow \log E=۱۱/۸+۱/۵(۷/۴)$

$\Rightarrow \log E=۱۱/۸+۱۱/۱ \Rightarrow \log E=۲۲/۹ \Rightarrow E=۱۰^{۲۲/۹}$

۱- گزینه «۴» متوسط

نقاط برخورد در هر دو معادله صدق می‌کند پس طول‌های داده شده را در $y=x^{۲}-x$ جایگذاری می‌کنیم تا y آن‌ها به دست آید. پس:

$x=۱ \Rightarrow y=۱-۰ \Rightarrow (۱,۰)\in f$

$x=۲ \Rightarrow y=۴-۲=۲ \Rightarrow (۲,۲)\in f$

$(۱,۰)\in f \Rightarrow ۰=-۲+۲^{-A-B} \Rightarrow ۲=۲^{-A-B} \Rightarrow -A-B=۱$

$(۲,۲)\in f \Rightarrow ۲=-۲+۲^{-۲A-B} \Rightarrow ۲^{۲}=۲^{-۲A-B} \Rightarrow -۲A-B=۲$

با حل دستگاه به دست آمده $A=-۱$ و $B=۰$ خواهد بود پس:

$f(۳)=-۲+(\frac{۱}{۲})^{-۳}=-۲+۸=۶ \Rightarrow f(x)=-۲+(\frac{۱}{۳})^{-x}$

۲- گزینه «۱» متوسط

ابتدا معادله نمایی را حل می‌کنیم پس:

$(\frac{۴}{۱۰})^{۲x-۱}=(\frac{۵^{۳}}{۲^{۳}})^{x^{۲}}$

$(\frac{۲}{۵})^{۲x-۱}=(\frac{۵}{۲})^{۳x^{۲}} \Rightarrow (\frac{۵}{۲})^{-۲x+۱}=(\frac{۵}{۲})^{۳x^{۲}} \Rightarrow ۳x^{۲}=-۲x+۱$

$۳x^{۲}+۲x-۱=۰$

چون $a+b=c$ پس: $x_{۱}=-۱ \quad , \quad \frac{۱}{۳}=x_{۲}=\frac{-c}{a}$

ریشه ۱- در لگاریتم آرگومان را منفی می‌کند قابل‌قبول نیست درنتیجه با $x=\frac{۱}{۳}$ داریم:

$\log_{۸}۴=\log_{۲^{۳}}۲^{۲}=\frac{۲}{۳}$

۳- گزینه «۲» متوسط

مجانب ریشه آرگومان است پس $U(x)=x+۱$ خواهد بود اما با توجه به شکل که نزولی است و با توجه به مبنای بزرگ‌تر از یک در log متوجه می‌شویم که شکل نسبت به محور **x**ها قرینه شده است پس $-\log_{۲}(x+۱)$ در شکل داده شده است و درنتیجه خواهیم داشت:

$y=\log_{۲}(x+۱)^{-۱}$

۴- گزینه «۱» دشوار

اگر در هر ۳۰ روز $\frac{۱}{۱۰}$ جرم باقی‌مانده را از دست بدهد پس ۰/۹ جرم باقی می‌ماند پس با توجه به فرمول داریم:

$f(t)=m_{۰}(a)^{\frac{t}{T}} \Rightarrow ۸=۲۴(۰/۹)^{\frac{t}{۳۰}} \Rightarrow \frac{۱}{۳}=(۰/۹)^{\frac{t}{۳۰}}$

$\log_{۰/۹}\frac{۱}{۳}=\frac{t}{۳۰}$ *

ابتدا حاصل لگاریتم $\log_{۰/۹}\frac{۱}{۳}$ را به دست آوریم:

$\log_{۰/۹}\frac{۱}{۳}=\frac{۱}{\log_{\frac{۱}{۳}}\frac{۹}{۱۰}}=\frac{۱}{\log_{۳^{-۱}}۳^{۲}-\log_{۳^{-۱}}۱۰}=\frac{۱}{-۲+\frac{۱۰۰}{۴۸}}=۱۲$

$\xrightarrow{\text{* جایگذاری در}} ۱۲=\frac{t}{۳۰} \Rightarrow t=۳۶۰$

۵- گزینه «۱» آسان

با استفاده از تغییر مبنا داریم:

$\frac{\log_{۴}۶}{\log_{۴}۱۲}=\frac{\log_{۴}۲+\log_{۴}۳}{\log_{۴}۴+\log_{۴}۳}=\frac{\frac{۱}{۲}+\frac{۸}{۱۰}}{۱+\frac{۸}{۱۰}}=\frac{۱۳}{۱۸}$

۶- گزینه «۲» متوسط

با توجه به تحلیل تابع $f(x)$ داریم: $f(x)=-۴+۲^{ax}\times ۲^{b}$

محل برخورد با محور **x**ها، $-\frac{۱}{۳}$ و محل برخورد با محور **y**ها، ۲- است پس:

$x=۰ \Rightarrow y=-۲ \Rightarrow -۲=-۴+۲^{b} \Rightarrow ۲=۲^{b} \Rightarrow b=۱$

$y=۰ \Rightarrow x=-\frac{۱}{۳} \Rightarrow ۰=-۴+۲^{-\frac{۱}{۳}a+۱} \Rightarrow ۲^{۲}=۲^{-\frac{۱}{۳}a+۱}$

$۲=-\frac{۱}{۳}a+۱ \Rightarrow ۱=-\frac{۱}{۳}a \Rightarrow a=-۳$

$f(-\frac{۵}{۳})=-۴+۲^{-۳(-\frac{۵}{۳})+۱}=-۴+۲^{۶}=-۴+۶۴=۶۰$

۷- گزینه «۴» دشوار

$f^{-1}(۲)$ به معنای آن است که در تابع $f(x)$ خروجی را ۲ قرار دهیم، پس:

$$۲=\frac{۲^x+(\frac{۱}{۲})^x}{۲} \xrightarrow{۲^x=t} ۴=t+\frac{۱}{t} \Rightarrow t^۲-۴t+۱=۰$$

$$\Delta=b^۲-۴ac \Rightarrow \Delta=۱۶-۴=۱۲ \Rightarrow t=\frac{۴\pm ۲\sqrt{۳}}{۲}=۲\pm\sqrt{۳}$$

حواستون باشه که $۲-\sqrt{۳}$ حدود ۰/۳ هست پس $\log_۲ ۲-\sqrt{۳}$ عددی منفی خواهد بود. پس:

$$x=\log_۲ ۲+\sqrt{۳}$$

۸- گزینه «۴» دشوار

ابتدا تجزیه اعداد $۲۱\times ۷=۱۴۷$ و $۳\times ۲۱^۲=۱۳۲۳$ را جایگزین می‌کنیم:

$$(\log_{۲۱}۳)^۲+(\log_{۲۱}۷\times ۲۱)(\log_{۲۱}۲۱^۲\times ۳)$$

$$=(\log_{۲۱}۳)^۲+(\log_{۲۱}۷+۱)(\log_{۲۱}۳+۲)$$

$$\xrightarrow{\log_{۲۱}۳=۱-\log_{۲۱}۷} (\log_{۲۱}۳)^۲+(۱-\log_{۲۱}۳+۱)(\log_{۲۱}۳+۲)=$$

$$\xrightarrow{\log_{۲۱}۳=t} t^۲+(۲-t)(۲+t)=t^۲+۴-t^۲=۴$$

۹- گزینه «۲» آسان

ابتدا ضابطه را ساده کنید:

$$f(x)=۳^{۲\log_۳ x}=۳^{\log_۳ x^۲}=x^۲$$

با توجه دامنه $\log_۳ x$ خواهیم داشت: $x>۰$ پس گزینه ۲ پاسخ است.

۱۰- گزینه «۲» متوسط

از صورت ۳^x و از موج ۲^x را فاکتور می‌گیریم:

$$\frac{۳^x(۱+۳+۹+۲۷+۸۱+۲۴۳)}{۲^x(\frac{۱}{۴}+\frac{۱}{۲}+۱+۲+۴+۸)}=۵۲$$

$$(\frac{۳}{۲})^x(\frac{۳۶۴}{\frac{۶۳}{۴}})=۵۲ \Rightarrow (\frac{۳}{۲})^x=\frac{۵۲\times ۶۳}{۳۶۴\times ۴} \Rightarrow (\frac{۳}{۲})^x=\frac{۹}{۴}=(\frac{۳}{۲})^۲ \Rightarrow x=۲$$

۱۱- گزینه «۱» متوسط

اگر $\log_x y=t$ درنظر بگیریم.

$$t-\frac{۲}{t}=۱$$

$$t^۲-t-۲=۰$$

$$(t-۲)(t+۱)=۰ \Rightarrow \begin{matrix} t=۲ \Rightarrow \log_x y=۲ \Rightarrow x^۲=y \\ t=-۱ \Rightarrow \log_x y=-۱ \text{ غ ق} \end{matrix}$$

۱۲- گزینه «۳» دشوار

اگر $۵^x=۱۰$ را لگاریتم‌دار بنویسیم، خواهیم داشت:

$$\log_۵ ۱۰=x$$

همچنین $۲^{f(x)}=۲۰$ را اگر لگاریتم‌دار بنویسیم:

$$f(x)=\log_۲ ۲۰=\log_۲ ۲^۲+\log_۲ ۵$$

$$f(x)=۲+\frac{\log_{۱۰}۵}{\log_{۱۰}۲}=۲+\frac{\frac{۱}{x}}{۱-\frac{۱}{x}}=۲+\frac{\frac{۱}{x}}{\frac{x-۱}{x}}=۲+\frac{۱}{x-۱}=\frac{۲x-۱}{x-۱}$$

۱۳- گزینه «۱» متوسط

ابتدا $\log_۸ ۱۸=m$ را ساده کنیم.

$$\log_۸ ۱۸=\log_{۲^۳} ۲\times ۳^۲=\log_{۲^۳} ۲+\log_{۲^۳} ۳^۲=\frac{۱}{۳}+\frac{۲}{۳}\log_۲ ۳=m$$

$$\Rightarrow \frac{۲}{۳}\log_۲ ۳=m-\frac{۱}{۳} \Rightarrow \log_۲ ۳=\frac{۳}{۲}m-\frac{۱}{۲}$$

$$\log_{۴} ۲^۲\times ۳=\log_{۴} ۲^۲+\log_{۲^۲} ۳=۱+\frac{۱}{۲}\log_۲ ۳$$

$$=۱+\frac{۱}{۲}(\frac{۳}{۲}m-\frac{۱}{۲})=۱+\frac{۳}{۴}m-\frac{۱}{۴}=\frac{۳}{۴}(m+۱)$$

۱۴- گزینه «۳» آسان

$$f(۰,۰) \Rightarrow ۰=a+b(\frac{۱}{۲})^۰ \Rightarrow ۰=a+b$$

$$f(-۱,-۱) \Rightarrow -۱=a+۲b \Rightarrow -۱=a+۲b$$

با حل دستگاه $a=۱$ و $b=-۱$ است پس:

$$a-b=۱-(-۱)=۲$$

۱۵- گزینه «۲» دشوار

محل برخورد با محور **y**ها به معنای $x=۰$ است، پس:

$$g^{-۱}(f^{-۱}(۰))=\alpha$$

$$(۰,f^{-۱}(۰))\in f^{-۱} \Rightarrow (f^{-۱}(۰),۰)\in f \Rightarrow \log_{۱۰}(۲x-۵)=۰$$

$$\Rightarrow ۲x-۵=۱۰^۰ \Rightarrow x=۳$$

$$(۳,۰)\in f \Rightarrow (۰,۳)\in f^{-۱}$$

$$g^{-۱}(۳)=\alpha \Rightarrow (۳,a)\in f^{-۱} \Rightarrow (\alpha,۳)\in f$$

$$\Rightarrow ۳=\alpha+\sqrt{۲\alpha-۴} \Rightarrow ۳-\alpha=\sqrt{۲\alpha-۴}$$

$$\xrightarrow[۳-\alpha>۰ \Rightarrow ۳>\alpha]{۲\alpha-۴>۰\Rightarrow \alpha>۲ \text{ دامنه رادیکال}} ۹+\alpha^۲-۶\alpha=۲\alpha-۴ \Rightarrow \alpha^۲-۸\alpha+۱۳=۰$$

$$\Delta=۶۴-۴(۱۳)=۱۲$$

$$\alpha=\frac{۸\pm ۲\sqrt{۳}}{۲}\begin{cases}۴+\sqrt{۳} & \text{غ ق}\\ ۴-\sqrt{۳} & \text{ق}\end{cases}$$

۱۶- گزینه «۱» متوسط

چون نقطه‌ای به طول ۱ محل برخورد دو نمودار است پس در دو ضابطه صدق می‌کند، پس:

$$y=-x^۲-۳x+۸ \xrightarrow{x=۱} y=-۱-۳+۸=+۴$$

$$\Rightarrow (۱,۴)\in g \Rightarrow (۱,۴)\in f$$

$$۴=۲+۲^{b-a} \Rightarrow ۲^۱=۲^{b-a} \Rightarrow b-a=۱$$

$$(۱۰,-۱)\in f^{-۱} \Rightarrow (-۱,۱۰)\in f \Rightarrow ۱۰=۲+۲^{b+a}$$

$$\Rightarrow ۲^۳=۲^{b+a} \Rightarrow b+a=۳$$

با حل دستگاه دو جواب خواهیم داشت. $b=۲$ و $a=۱$ پس:

$$۲b-a=۲(۲)-۱=۳$$

۱۷- گزینه «۲» متوسط

$$\alpha+\beta=\frac{۸}{a}\ ,\ \alpha\beta=\frac{۴}{a}$$

$$(\alpha^۲\beta)(\beta^۲\alpha)=\alpha^۲\beta+\beta^۲\alpha\Rightarrow(\alpha\beta)^۳=\alpha\beta(\alpha+\beta)$$

$$\Rightarrow(\frac{۴}{a})^۳=\frac{۸}{a}\times\frac{۴}{a}\Rightarrow\frac{۶۴}{a^۳}=\frac{۳۲}{a^۲}$$

$$\Rightarrow a=۲\Rightarrow\log_{\sqrt{۲}}a=\log_{\sqrt{۲}}۲=\log_{۲^{\frac{۱}{۲}}}۲=۲$$

۱۸- گزینه «۱» متوسط

ابتدا با استفاده از تغییر مبنا داریم:

$$\frac{\log_n m^۲n}{\log_n mn}=b\Rightarrow\frac{\log_n m^۲+\log_n n}{\log_n m+\log_n n}=\frac{۲a+۱}{a+۱}$$

$$=\frac{a}{a+۱}+\frac{a+۱}{a+۱}=\frac{a}{a+۱}+۱$$

این عبارت چون $a>۰$ است، عددی بین ۱ تا ۲ به ما می‌دهد پس $۱<b<۲$.

در نتیجه براکت عددی بین ۱ و ۲ برابر ۱ است و $۱\leftarrow۱<b<۲$ $[b]=۱$

۱۹- گزینه «۱» دشوار

$$\frac{۱}{۶}A=A(\frac{۸}{۹})^t\Rightarrow۶=(\frac{۹}{۸})^t\Rightarrow\log_۵۶=t\log_۵\frac{۹}{۸}$$

$$\Rightarrow\log_۵۲+\log_۵۳=t(\log_۵۹-\log_۵۸)$$

$$\frac{۱}{۲/۴}+\frac{۱}{۱/۴}=t(۲\log_۵۳-۳\log_۵۲)$$

$$\frac{۵}{۱۲}+\frac{۵}{۷}=t(\frac{۱۰}{۷}-\frac{۱۵}{۱۲})\Rightarrow\frac{۱}{۱۲}+\frac{۱}{۷}=t(\frac{۲}{۷}-\frac{۳}{۱۲})$$

$$\Rightarrow t=\frac{۱۹}{۳}\text{ساعت}=۳۸۰\text{دقیقه}$$

۲۰- گزینه «۴» دشوار

$$\log۳۰=\log۳\times۲\times۵=\log۳+\log۲+۱-\log۲$$

$$=۰/۴+۰/۳+۰/۷=۱/۴$$

$$\log۵-\log۶=۱-\log۲-\log۶=۱-۰/۳-۰/۷=۰$$

$$\frac{۱۴}{۱۰}x^۲+\frac{۱۴}{۱۰}x=۰\Rightarrow\frac{۱۴}{۱۰}x(x+۱)=۰\Rightarrow\begin{cases}x=۰\\x=-۱\end{cases}$$

اختلاف ریشه‌ها ۱ واحد است.

۱- گزینه «۳»

$$۳^{x^۲-۲}=۳^{۴x}\Rightarrow x^۲-۲=۴x\Rightarrow x^۲-۴x-۲=۰\xrightarrow{\text{تبدیل به مربع کامل}}$$

$$x^۲-۴x+۴-۶=۰\Rightarrow(x-۲)^۲-۶=۰\Rightarrow(x-۲)=\sqrt{۶}$$

$$\log_۶\sqrt{۶}=\frac{۱}{۲}\log_۶۶=\frac{۱}{۲}$$

۲- گزینه «۲»

ابتدا سعی در پیدا کردن **a** و **b** داریم: محل برخورد با محور **x**ها $\leftarrow y=۰$

و $x=۲$

$$۰=-۱+\log_b۴+a\Rightarrow\log_b(۴+a)=۱\Rightarrow b=۴+a$$

$x=\frac{۱}{۲}$ (مجانب) از ریشه‌ی آرگومان به‌دست می‌آید. پس:

$$۲x+a=۰\xrightarrow{x=+\frac{۱}{۲}}۲(\frac{۱}{۲})+a=۰\Rightarrow a=-۱$$

با این دو اطلاعات $a=-۱$ و $b=۳$ پس:

$$y=-۱+\log_۳۲x-۱\xrightarrow{y=۱}۱=-۱+\log_۳(۲x-۱)$$

$$\Rightarrow\log_۳(۲x-۱)=۲\Rightarrow۹=۲x-۱\Rightarrow۱۰=۲x\Rightarrow x=۵$$

۳- گزینه «۳»

محل برخورد دو تابع $x=۱$ و $x=۳$ است. پس این دو مقدار در هر دو تابع صدق می‌کند.

$$\left.\begin{array}{l}۳^{Ax+B}=x^۲\Rightarrow۳^{۳A+B}=۳^۲\Rightarrow۳A+B=۲\\۳^{A+B}=۱=۳^۰\Rightarrow A+B=۰\Rightarrow A=-B\end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow-۳B+B=۲\Rightarrow-۲B=۲$$

$$B=-۱$$

$$A=۱$$

$$f(x)=۳^{x-۱}\xrightarrow[\text{با محور y‌ها}]{\text{محل برخورد}}f(۰)=۳^{۰-۱}=۳^{-۱}=\frac{۱}{۳}$$

۴- گزینه «۱»

اگر غلظت اولیه را A_0 درنظر بگیریم غلظت پس از گذشت مدتی به $\frac{1}{3}A_0$ می‌رسد

پس همچنین در هر مرحله غلظت محلول ۹۶٪ غلظت محلول قبلی است، پس بعد از n مرحله غلظت محلول برابر $(0/96)^n$ برابر محلول اولیه است پس:

$$(0/96)^n A_0 = \frac{1}{3}A_0 \Rightarrow (0/96)^n = \frac{1}{3} \Rightarrow \log(0/96)^n = \log\frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow n\log 0/96 = -\log 3$$

$$n = \frac{-\log 3}{\log 96 - \log 100}$$

$$\Rightarrow n = \frac{-\log 3}{-2+5\log 2+\log 3} = \frac{-0/48}{-2+5(0/3)+(0/48)} = 24$$

۵- گزینه «۱»

در شکل محل برخورد با محور x و y را داده است، پس:

$$\text{محل برخورد با محور } x\text{ها} \Rightarrow y=0 \Rightarrow 0 = -9 + (\frac{1}{3})^{\frac{1}{2}a+b} \Rightarrow 3^2 = 3^{-\frac{1}{2}a-b}$$

$$2 = -\frac{1}{2}a - b$$

$$\text{محل برخورد با محور } y\text{ها} \Rightarrow x=0 \Rightarrow -6 = -9 + (\frac{1}{3})^b$$

$$\Rightarrow 3^1 = 3^{-b} \Rightarrow b = -1$$

$$2 = -\frac{1}{2}a + 1 \Rightarrow 1 = \frac{-a}{2} \Rightarrow a = -2$$

$$f(2) = -9 + (\frac{1}{3})^{-2(2)-1} = -9 + (\frac{1}{3})^{-5} = -9 + 243 = 234$$

۶- گزینه «۲»

با تغییر مبنا شروع می‌کنیم:

$$\log_{18} 8 = \frac{\log_3 8}{\log_3 18} = \frac{\log_3 2^3}{\log_3 2 + \log_3 9}$$

$$= \frac{3\log_3 2}{\log_3 2 + 2} = \frac{3(\frac{5}{8})}{\frac{5}{8}+2} = \frac{\frac{15}{8}}{\frac{21}{8}} = \frac{15}{21} = \frac{5}{7}$$

۷- گزینه «۳»

$$2 = \frac{2^x - (\frac{1}{2})^x}{2} \Rightarrow 2^2 = 2^x - (\frac{1}{2})^x \xrightarrow{2^x=t} 4 = t - \frac{1}{t}$$

$$4t = t^2 - 1 \Rightarrow 0 = t^2 - 4t - 1 \Rightarrow \Delta = 16 - 4(-1) = 20$$

$$t = \frac{4 \pm 2\sqrt{5}}{2} = 2 \pm \sqrt{5} \Rightarrow t = 2 + \sqrt{5} \text{ ق ق}$$

$$2^x = 2 + \sqrt{5} \Rightarrow \log_2 2+\sqrt{5} = x$$

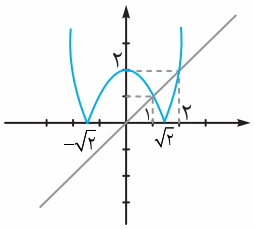
۸- گزینه «۴»

دامنه تابع $y = \log_b^a$

$$\begin{cases} a > 0 \\ b > 0 \\ b \neq 1 \end{cases}$$

$$|x^2-2|-x>0 \Rightarrow |x^2-2|>x$$

با رسم هندسی داریم:



توجه کنید محل برخورد دو شکل $x=1$ و $x=2$ است.

که با توجه به رسم نواحی که $|x^2-2|$ بالاتر از x است جواب برابر $(-\infty,1)\cup(2,+\infty)$ است.

حواستون باشه‌ها!

این سؤال را با رد گزینه نیز می‌توان پاسخ داد.

۹- گزینه «۳»

$$2\log_9^a + \log_a^{\sqrt{9}} = 2 \Rightarrow 2\log_9^a + \frac{1}{2}\log_a^9 = 2$$

$$\xrightarrow{\log_9^a = t} 2t + \frac{1}{2t} = 2 \xrightarrow{(\times 2t)} 4t^2 + 1 = 4t$$

$$\Rightarrow 4t^2 - 4t + 1 = 0 \Rightarrow (2t-1)^2 = 0 \Rightarrow t = \frac{1}{2}$$

$$\log_9^a = \frac{1}{2} \Rightarrow (9)^{\frac{1}{2}} = a \Rightarrow a = 3$$

۱۰- گزینه «۱»

$$y = 2^{x+|x|} \xrightarrow[\text{جهت منفی}(x+3)]{\text{۳ واحد محور xها در}} y = 2^{x+3+|x+3|} \xrightarrow[\text{۲ واحد جهت منفی}]{\text{محل yها}}$$

$$y = 2^{x+3+|x+3|} - 2 \xrightarrow[y=0]{\text{محل برخورد با محور xها}} 2 = 2^{x+3+|x+3|}$$

$$x+3+|x+3| = 1 \Rightarrow |x+3| = -x-2 \xrightarrow[-2>x]{\text{با شرط } -x-2>0}$$

(طرفین به توان ۲)

$$x^2+6x+9 = x^2+4x+4 \Rightarrow 2x = -5 \Rightarrow x = -\frac{5}{2}$$

چون $-\frac{5}{2} < -2$ است پس در شرط صدق می‌کند و قابل قبول است.

۱۱- گزینه «۳»

$$2^{x+3} = 4^x + 15 \Rightarrow 2^x \times 2^3 = 4^x + 15 \xrightarrow{2^x=t}$$

$$8t = t^2 + 15 \Rightarrow t^2 - 8t + 15 = 0 \Rightarrow (t-3)(t-5) = 0$$

$$t = 3, t = 5 \Rightarrow 2^x = 3, 2^x = 5 \Rightarrow \log_2^3 = x_1, \log_2^5 = x_2$$

$$x_1 + x_2 = \log_2^3 + \log_2^5 = \log_2^{15}$$

۱۲- گزینه «۱»

$$\frac{۱}{\log_c a}+\frac{۱}{\log_c b}=۱ \Rightarrow \frac{\log_c b+\log_c a}{\log_c a \log_c b}=۱$$

$$\frac{\log_c ab}{\log_c a \log_c b}=۱ \Rightarrow \log_c ab=\log_c a\cdot \log_c b$$

۱۳- گزینه «۲»

ابتدا سعی می‌کنیم عبارت $a^۲+۹b^۲=۱۰ab$ را ساده کنیم:

$$a^۲+۶ab+۹b^۲=۱۰ab+۶ab \Rightarrow (a+۳b)^۲=۱۰ab+۶ab$$
$$\Rightarrow a+۳b=\sqrt{۱۰ab+۶ab}=\sqrt{۱۶ab}$$

پس:

$$\frac{a+۳b}{۴}=\frac{\sqrt{۱۶ab}}{۴}=\sqrt{ab}$$

$$\log(\frac{a+۳b}{۴})=\log\sqrt{ab}=\log(ab)^{\frac{۱}{۲}}=\frac{۱}{۲}\log(ab)=\frac{۱}{۲}(\log a+\log b)$$

پس $\log(\frac{a+۳b}{۴})$، واسطه حسابی بین $\log a$ و $\log b$ است.

۱۴- گزینه «۴»

این سؤال در ۱۴۰۰ سؤالی بود که گزینه‌های اشتباه نوشته شده بود:

$$\log_۲ ۳<\log_{\frac{۱}{۲}}(\frac{۱}{۱۲+\sqrt{[x]}-[x]})-۱<\log_۲ ۵$$

$$\log_۲ ۳+۱<\log_۲ ۱۲+\sqrt{[x]}-[x]<\log_۲ ۵+۱$$

$$\log_۲ ۶<\log_۲ \frac{۴۹}{۴}-(\sqrt{[x]}-\frac{۱}{۲})^۲<\log_۲ ۱۰$$

$$۶<\frac{۴۹}{۴}-(\sqrt{[x]}-\frac{۱}{۲})^۲<۱۰ \Rightarrow \frac{۳}{۲}<\sqrt{[x]}-\frac{۱}{۲}<\frac{۵}{۲} \Rightarrow$$

$$۲<\sqrt{[x]}<۳ \Rightarrow ۴<[x]<۹ \Rightarrow ۵\le x<۹ \Rightarrow [۵,۹)$$

۱۵- گزینه «۳»

با توجه به دو اطلاعات داده شده:

$$\log_۲^۳ a \Rightarrow ۲^a=۳$$

$$\log_۸^b=\frac{۲+۲a}{۳} \Rightarrow (۲^۳)^{\frac{۲+۲a}{۳}}=b \Rightarrow ۲^{۲+۲a}=b \Rightarrow ۲^۲\times ۲^{۲a}=b$$

$$۴\times(۲^a)^۲=b \Rightarrow ۴\times ۳^۲=b \Rightarrow ۳۶=b$$

$$\log^{۳(۳۶)-۸}=\log_{۱۰}^{۱۰۰}=۲$$

۱۶- گزینه «۱»

$$۱=\sqrt[۳]{۲^{\frac{۱}{۲}a+b}} \Rightarrow ۱=۲^{\frac{a}{۲}+b} \Rightarrow \frac{a}{۲}+b=۰ \Rightarrow b=-\frac{a}{۲} \Rightarrow a=-۲b$$

$$f^{-۱}(۸)=۵ \Rightarrow (۸,۵)\in f^{-۱} \Rightarrow (۵,۸)\in f$$

$$۸=\sqrt[۳]{۲^{۵a+b}} \Rightarrow ۲^۳=\sqrt[۳]{۲^{-۱۰b+b}} \Rightarrow ۲^۹=۲^{-۹b} \Rightarrow ۹=-۹b \Rightarrow -۱=b$$
$$a=۲$$
$$a-b=۲-(-۱)=۳$$

۱۷- گزینه «۳»

$$\frac{۱۲/۵}{۱۰۰}=\frac{۱}{۸}$$

$\frac{۱}{۸}$ جرم را از دست می‌دهد یعنی $\frac{۷}{۸}$ جرم باقی‌می‌ماند.

$$m(t)=m_۰(\frac{۷}{۸})^t \Rightarrow \frac{۱}{۷}m_۰=m_۰(\frac{۷}{۸})^t$$

$$\frac{۱}{۷}=(\frac{۷}{۸})^t \Rightarrow \log_۳\frac{۱}{۷}=\log_۳(\frac{۷}{۸})^t \Rightarrow \log_۳ ۱-\log_۳ ۷$$
$$=t(\log_۳ ۷-\log_۳ ۸)$$

$$۰-\log_۳ ۷=t(\log_۳ ۷-۳\log_۳ ۲) \Rightarrow -\frac{۱۰}{۶}=t(\frac{۱۰}{۶}-۳(\frac{۱۰}{۱۶}))$$

$$\Rightarrow \frac{-۵}{۳}=t(\frac{۵}{۳}-\frac{۱۵}{۸}) \Rightarrow \frac{-۵}{۴}=t\times\frac{-۵}{۲۴} \Rightarrow t=۸$$

۱۸- گزینه «۲»

$$\log_۸ x+۴\log_{x^۳} ۲=\frac{۱}{۳}\log_۲ x+\frac{۴}{۳}\log_x ۲$$

رابطهٔ مهم $ax+\frac{b}{x}\ge ۲\sqrt{ab}$ را می‌دانیم پس:

$$\frac{۱}{۳}\log_۲ x+\frac{۴}{۳}\log_x ۲\ge ۲\sqrt{\frac{۱}{۳}\log_۲ x\times\frac{۴}{۳}\log_x ۲}$$

$$\frac{۱}{۳}\log_۲ x+\frac{۴}{۳}\log_x ۲\ge ۲(\frac{۲}{۳}) \xrightarrow{\text{پس}}$$

$$\frac{۱}{\sqrt{\frac{۱}{۳}\log_۲ x+\frac{۴}{۳}\log_x ۲}}\ge\frac{۱}{\sqrt{\frac{۴}{۳}}} \Rightarrow \frac{۱}{\sqrt{\frac{۱}{۳}\log_۲ x+\frac{۴}{۳}\log_x ۲}}\le\frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

۱۹- گزینه «۲»

$$\log ۵=\log\frac{۱۰}{۲}=\log ۱۰-\log ۲=۱-\log ۲=۱-۰/۳=۰/۷$$

$$\log ۹=\log ۳^۲=۲\log ۳=۰/۸$$
$$\log ۱۵=\log ۵\times ۳=\log ۵+\log ۳=۰/۷+۰/۴=۱/۱$$

$$\log\frac{۵}{۳}=\log ۵-\log ۳=۰/۷-۰/۴=۰/۳$$

$$(\log\frac{۵}{۳})x^۲+(\log ۹)x-\log ۱۵=۰ \Rightarrow ۰/۳x^۲+۰/۸x-۱/۱=۰$$

$$\xrightarrow{a+b+c=۰} x_۱=۱, x_۲=\frac{-۱/۱}{۰/۳}=\frac{-۱۱}{۳}$$

$$|x_۱-x_۲|=|۱-\frac{-۱۱}{۳}|=\frac{۱۴}{۳}$$

۲۰- گزینه «۴»

نکته: اگر حاصل ضرب دو مقدار مثبت، عدد ثابتی شود، حاصل جمع آن‌ها زمانی **min** خواهد بود که باهم برابر باشند.

$$\log_۹ x+۳\log_{x^۲} ۳=\frac{\log x}{\log ۹}+\frac{۳}{۲}\times\frac{\log ۳}{\log x}=\frac{\log x}{\underset{a}{۲\log ۳}}+\frac{۳\log ۳}{\underset{b}{۲\log x}}$$

$$a\times b=\frac{۳}{۴} \Rightarrow \min(a+b)=?$$

$$a=b=\sqrt{\frac{۳}{۴}}=\frac{\sqrt{۳}}{۲} \Rightarrow \min(a+b)=\frac{\sqrt{۳}}{۲}+\frac{\sqrt{۳}}{۲}=\sqrt{۳}$$