۱- آسان

در هر دایره، یک رادیان، اندازه زاویه مرکزی روبه‌روی کمانی از دایره است که طول کمان برابر طول شعاع دایره باشد. نماد رادیان **rad** است. اگر $\pi = ۳/۱۴$ در نظر بگیریم، آن‌گاه یک رادیان تقریبا برابر $۵۷/۳^\circ$ به دست می‌آید و می‌توان گفت که یک دور دایره مثلثاتی حدودا ۶ رادیان است. به عبارتی:

$$۲\pi^{rad} = ۳۶۰^\circ \Rightarrow ۱rad = \frac{۳۶۰^\circ}{۲\pi} \simeq ۵۷/۳$$

۲- آسان

برای تبدیل درجه به رادیان از فرمول زیر استفاده می‌کنیم:

$$\frac{\pi}{۱۸۰} = \frac{R}{D}$$

که در آن **D** نماد درجه و **R** نماد رادیان است.

آ) $D = ۴۵^\circ \Rightarrow \frac{\pi}{۱۸۰} = \frac{R}{D} \Rightarrow R = \frac{\overset{۱}{\cancel{۴۵}}\pi}{\underset{۴}{\cancel{۱۸۰}}} = \frac{\pi}{۴} rad$

ب) $D = ۱۲۰^\circ \Rightarrow \frac{\pi}{\cancel{۱۸۰}_{۳}} = \frac{R}{\cancel{۱۲۰}_{۲}} \Rightarrow R = \frac{۲\pi}{۳} rad$

پ) $D = ۳۱۵^\circ \Rightarrow R = \frac{\overset{۷}{\cancel{۳۱۵}}}{\underset{۴}{\cancel{۱۸۰}}}\pi \Rightarrow R = \frac{۷\pi}{۴} rad$

ت) $D = ۱۰^\circ \Rightarrow R = \frac{۱۰}{۱۸۰}\pi = \frac{\pi}{۱۸} rad$

۳- آسان

برای تبدیل رادیان به درجه هم می‌تونیم از فرمول $\frac{\pi}{۱۸۰} = \frac{R}{D}$ استفاده کنیم.

اما یه راه آسون‌تر اینه که به جای π قرار بدیم ۱۸۰° و ساده کنیم.

۱) $\frac{\pi}{۲۰} = \frac{۱۸۰}{۲۰} = ۹^\circ$

۲) $\frac{۲\pi}{۳} = \frac{۲ \times \overset{۶۰}{\cancel{۱۸۰}}^\circ}{\cancel{۳}} = ۱۲۰^\circ$

۳) $\frac{۴\pi}{۵} = \frac{۴ \times \overset{۳۶}{\cancel{۱۸۰}}}{\cancel{۵}} = ۱۴۴^\circ$

۴- آسان

با در نظر گرفتن $\pi = ۳/۱۴$ داریم:

۱) $۱rad = \frac{۳۶۰^\circ}{۲\pi} \simeq ۵۷/۳^\circ$

۲) $۳rad = ۳(۵۷/۳^\circ) = ۱۷۱/۹^\circ$

۳) $۵rad = ۵(۵۷/۳^\circ) = ۲۸۶/۵^\circ$

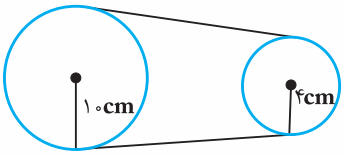
۵- آسان

برای تبدیل درجه به رادیان داریم: $\alpha = \frac{\overset{۲۰}{\cancel{۱۸۰}}}{\cancel{۹}}\pi = \frac{\pi}{۹} rad$

و برای محاسبه طول کمان فرمول $L = r\theta$ را داریم که **r** شعاع دایره و θ زاویه مرکزی روبه رو به کمان برحسب رادیان هست.

$$L = ۲ \times \frac{\pi}{۹} = \frac{۲\pi}{۹} cm$$

۶- متوسط



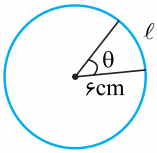
می‌دونیم که قرقره‌ها با تسمه بهم وصل هستند و بنابراین هر چقدر یکی از قرقره‌ها بچرخه و مسافت **L** رو طی کنه، قرقره دوم هم همون مسافت رو با همان طول **L** طی می‌کنه و فقط زاویه چرخش آن‌ها متفاوت هست(بخاطر تفاوت طول شعاع) پس:

$$L_۱ = L_۲ \xrightarrow{L=r\theta} r_۱\theta_۱ = r_۲\theta_۲ \Rightarrow \overset{۵}{\cancel{۱۰}} \times \frac{\pi}{\cancel{۴}_{۲}} = ۴\theta_۲$$

$$\Rightarrow \theta_۲ = \frac{\frac{۵}{۲}\pi}{۴} = \frac{۵\pi}{۸} rad$$

پس قرقره کوچک‌تر به اندازه $\frac{۵\pi}{۸}$ رادیان می‌چرخه.

۷- متوسط



$\ell = \frac{\pi}{۴} rad$

قطاع در دایره بخشی از دایره است که توسط دو شعاع و بخشی از محیط دایره (کمان) محدود شده است.

فرمول مساحت قطاع به صورت زیر است:

$$S = \frac{۱}{۲}r^۲\theta$$

پس با استفاده از فرمول **L** اندازه زاویه θ را بیابیم و سپس در فرمول **S** جایگذاری کنیم:

$$L = r\theta \Rightarrow \frac{\pi}{۴} = ۶\theta \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{۲۴}$$

$$S = \frac{۱}{۲}(۶)^۲ \times \frac{\pi}{۲۴} = \frac{\overset{۳}{\cancel{۳۶}}}{\underset{۴}{\cancel{۲} \times \cancel{۲۴}}} = \frac{۳\pi}{۴}$$

۸- دشوار

این دو زاویه برحسب درجه رو α و β در نظر می‌گیریم: $\alpha-\beta=۳۶^\circ$

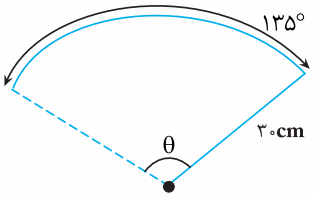
چون در نهایت، اندازه زاویه‌ها رو برحسب درجه خواسته پس رابطه رو هم به درجه تبدیل می‌کنیم:

$$\begin{cases}\alpha+\beta=۷۲^\circ\\ \alpha-\beta=۳۶^\circ\end{cases}\Rightarrow ۲\alpha=۱۰۸$$

$$\frac{۲\pi}{۵}\times\frac{۱۸۰}{\pi}=۷۲^\circ \Rightarrow \alpha+\beta=۷۲^\circ$$

$$\alpha=۵۴^\circ \Rightarrow ۵۴+\beta=۷۲^\circ \Rightarrow \beta=۷۲-۵۴=۱۸^\circ$$

۹- متوسط



آ) $\theta=\frac{\cancel{۱۳۵}^{۳}}{\cancel{۴۰}_{۴}}\pi=\frac{۳\pi}{۴}\text{rad}$

ب) اندازه کمان برحسب رادیان $\frac{۳\pi}{۴}$ است. برای تبدیل به سانتی‌متر کافیست $\pi=۳/۱۴$ را در نظر بگیریم:

$$L=r\theta=۳۰\times\frac{۳\pi}{۴}=\frac{\cancel{۳۰}^{۱۵}\times۳\times۳/۱۴}{\cancel{۴}_{۲}}=۱۴۱/۳\text{cm}$$

پ) مسافتی که نوک برف پاک‌کن در رفت و برگشت طی می‌کند، دو برابر طول کمان یعنی $۲L$ است:

$$۲L=۲(۱۴۱/۳)=۲۸۲/۶\text{cm}$$

ت) مساحت پاک شده همان مساحت قطاع دایره‌ای است که برف پاک‌کن شعاع آن است:

$$S=\frac{۱}{۲}r^۲\theta=\frac{۱}{۲}(۳۰)^۲\times\frac{۳\pi}{۴}=\frac{۹۰۰}{۲}\times\frac{۳۷\times\pi}{۴}=\frac{۳۷\pi}{۴}$$

۱۰- آسان

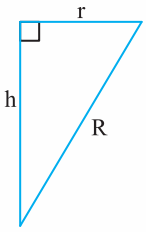
گفتیم مساحت قطاع از فرمول $S=\frac{۱}{۲}r^۲\theta$ به دست میاد پس باید اول θ رو پیدا کنیم. به سراغ فرمول L می‌رویم:

$$L=r\theta \Rightarrow \theta=\frac{L}{r}=\frac{\pi}{۳}$$

$$S=\frac{۱}{۲}(۳)^۲\times\frac{\pi}{۳}=\frac{\cancel{۹}^{۳}}{۲}\times\frac{\pi}{\cancel{۳}}=\frac{۳\pi}{۲}$$

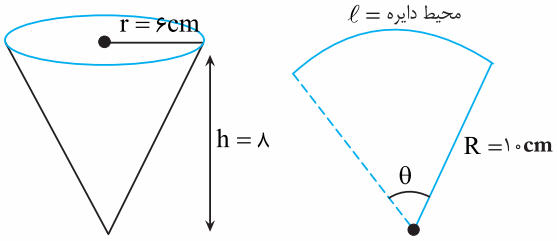
۱۱- متوسط

در تبدیل مخروط، به شکل باز شده، همانطوری که از شکل زیر پیداست، طول کمان L برابر محیط قاعده مخروط اولیه است. همچنین شعاع این قطاع از رابطه فیثاغورس در مثلث زیر به دست می‌آید:



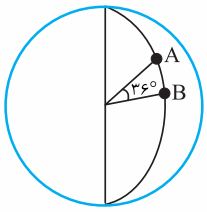
$$\rightarrow R^۲=۶^۲+۸^۲=۱۰۰\rightarrow R=۱۰$$

آ) $L=۲\pi r=۲\pi(۶)=۱۲\pi \qquad \theta=\frac{L}{۱۰}=\frac{\cancel{۱۲}^{۶}\pi}{\cancel{۱۰}_{۵}}=\frac{۶\pi}{۵}\text{rad}$



ب) $S=\frac{۱}{۲}r^۲\theta=\frac{۱}{۲}(۱۰)^۲\times\frac{۶\pi}{۵}=\frac{\cancel{۱۰۰}^{۱۰}}{\cancel{۱۰}_{۱}}\times۶\pi=۶۰\pi$

۱۲- متوسط



ابتدا زاویه روبه رو کمان را به تبدیل کنیم:

$$R=\frac{۳۶}{۱۸۰}\pi=\frac{\pi}{۵}\text{rad} \Rightarrow \theta=\frac{\pi}{۵}\text{rad}$$

$$\Rightarrow \overset{\frown}{AB}=r\theta=۶۳۲۰\times\frac{\pi}{۵}=۱۲۶۴\pi=۳۹۶۸/۹۶\text{ m}\simeq ۳۹۶۹\text{ km}$$

۱۳- متوسط

$$S_{\text{رنگی}}=S_{\text{قطاع}}-S_{\Delta}$$

$$\overset{\frown}{AB}=\frac{\pi}{۳} \Rightarrow \theta=\frac{\overset{\frown}{AB}}{r}=\frac{\frac{\pi}{۳}}{۲}=\frac{\pi}{۶}$$

$$S_{\text{قطاع}}=\frac{۱}{۲}r^۲\theta=\frac{۱}{۲}\times\cancel{۴}^{۲}\times\frac{\pi}{\cancel{۶}_{۳}}=\frac{\pi}{۳}$$

زاویه θ برابر ۳۰° است و مثلث متساوی الساقین با طول ساق ۲ است، پس:

$$S_{\Delta}=\frac{۱}{\cancel{۲}}\times\cancel{۲}\times۲\times\sin\frac{\pi}{۶}=۲\times\frac{۱}{۲}=۱$$

رنگی $S=\frac{\pi}{۳}-۱$

۱۴- دشوار

تعداد کابین‌ها ۴۰تاست پس زاویه بین هر دو کابین برابر است با:

$$\frac{۲\pi}{۴۰}=\frac{\pi}{۲۰}$$

دوران به اندازه $\frac{۴۷\pi}{۱۰}$ صورت گرفته و داریم:

$$\frac{۴۷\pi}{۱۰}=\frac{۴۰\pi+۷\pi}{۱۰}=۴\pi+\frac{۷\pi}{۱۰}$$

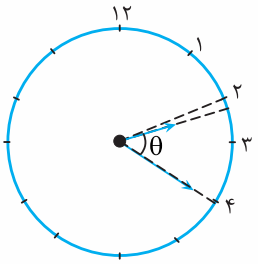
یعنی هر کابین به اندازه دو دور کامل می‌چرخد و سپس به اندازه $\frac{۷\pi}{۱۰}$ جلو رفته.

از طرفی داریم:

$$\frac{۷\pi}{۱۰}=\frac{۱۴\pi}{۲۰}=۱۴\times\frac{\pi}{۲۰}$$

پس به اندازه ۱۴ کابین نسبت به موقعیت اولیه جلو رفته پس کابین شماره ۳ به کابین شماره ۱۷ منتقل می‌شود.

۱۵- دشوار



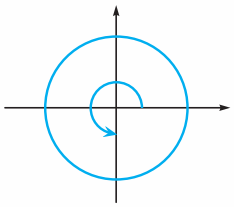
در ساعت '۲۰:۲، عقربه دقیقه شمار دقیقا مقابل عدد ۴ است و عقربه ساعت شمار بین دو عدد ۲ و ۳ است که به اندازه $\frac{۱}{۳}$ فاصله بین دو عدد جلو رفته است. (زیرا '۲۰، یک سوم ۶۰ دقیقه (یک دور کامل) است.)

زاویه بین هر دو عدد به اندازه $\frac{۲\pi}{۱۲}$ یا $\frac{\pi}{۶}$ است پس:

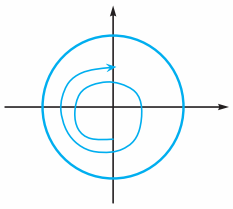
$$\theta=۲(\frac{\pi}{۶})-\frac{۱}{۳}(\frac{\pi}{۶})=\frac{\pi}{۳}-\frac{\pi}{۱۸}=\frac{۵\pi}{۱۸}$$

۱- گزینه «۲» دشوار

$\frac{۳}{۴}$ دور در خلاف جهت حرکت عقربه‌های ساعت یعنی رسیدن به $\frac{۳\pi}{۲}$ یا ۲۷۰°:



حال از همین مکان به اندازه $۱\frac{۱}{۲}$ یعنی ۱/۵ دور به‌طور ساعتگرد حرکت می‌کنیم:



و به مکان $\frac{-۳\pi}{۲}$ میرسیم زیرا، حرکت پادساعتگرد، جهت حرکت مثبت مثلثاتی است اما حرکت ساعتگرد حرکت منفی مثلثاتی است پس:

$$\frac{۳\pi}{۲}-۱\frac{۱}{۲}(۲\pi)=\frac{۳\pi}{۲}-۳\pi=-\frac{۳\pi}{۲}$$

۲- گزینه «۳» آسان

باید بررسی کنیم یا جایگذاری اعداد صحیح به جای k، چند زاویه درون دایره مثلثاتی در یک دور کامل یعنی بین ۰ تا ۲π به دست می‌آوریم:

$k=۰ \Rightarrow \frac{\pi}{۷}$ ✓

$k=۱ \Rightarrow \frac{\pi}{۳}+\frac{\pi}{۷}$ ✓

$k=۲ \Rightarrow \frac{۲\pi}{۳}+\frac{\pi}{۷}$ ✓

$k=۳ \Rightarrow \pi+\frac{\pi}{۷}$ ✓

$k=۴ \Rightarrow \frac{۴\pi}{۳}+\frac{\pi}{۷}$ ✓

$k=۵ \Rightarrow \frac{۵\pi}{۳}+\frac{\pi}{۷}=\frac{۳۸\pi}{۲۱}$ ✓

$k=۶ \Rightarrow ۲\pi+\frac{\pi}{۷}$ ×

شش زاویه را به دست آوردیم، پس این زوایا یک شش ضلعی را مشخص می‌کنند.

۳- گزینه «۳» آسان

گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

(۱): $\frac{\text{محیط}}{\text{قطر}}=\frac{۲\pi r}{۲r}=\pi \Rightarrow$ مقدار ثابت

(۲): $\frac{\text{قطر}}{\text{شعاع}}=\frac{۲r}{r}=۲ \Rightarrow$ مقدار ثابت

(۳): $\frac{\overset{\frown}{AB}}{r}=\frac{r\theta}{r}=\theta \Rightarrow$ در دایره زوایای متفاوتی وجود دارد پس ثابت نیست.

(۴): $\frac{\text{محیط}}{\text{مساحت}}=\frac{۲\pi r}{\pi r^۲}=\frac{۲}{r} \Rightarrow$ در یک دایره شعاع ثابت است پس مقدار ثابت است.

۴- گزینه «۱» متوسط

مکان‌های توقف دو دونده $\frac{۵\pi}{۴}$ و $\frac{۳\pi}{۸}$ است. پس فاصله بین زاویه‌های آن‌ها برابر است با:

$$\frac{۵\pi}{۴}-\frac{۳\pi}{۸}=\frac{۷\pi}{۸}$$

شعاع دایره ۱۶ متر است، پس:

$$L=r\theta=۱۶\times\frac{۷\pi}{۸}=۱۴\pi$$

۵- گزینه «۳» متوسط

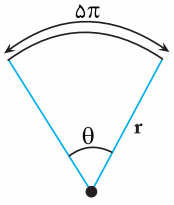
مسافت طی شده ۶π است یعنی $L=۶\pi$ طول عقربه برابر شعاع دایره است پس: $r=۱۵cm$

$$\theta=\frac{L}{r}=\frac{\overset{۲}{\cancel{۶}}\pi}{\underset{۵}{\cancel{۱۵}}}=\frac{۲\pi}{۵}$$

یعنی نوک عقربه، زاویه $\frac{۲\pi}{۵}$ را طی کرده است. کل دایره ۲π است پس $\frac{۱}{۵}$ کل دایره طی شده است. یک دور کامل ۶۰ دقیقه است. پس $\frac{۱}{۵}\times ۶۰$ یعنی ۱۲ دقیقه زمان گذشته است.

۶- گزینه «۲» متوسط

اگر مخروط را گسترده کنیم به قطاعی مانند شکل بالا می‌رسیم که طول کمان آن همان محیط قاعده مخروط اولیه است پس محیط آن برابر طول این کمان و دو شعاع است:



محیط: $۲r+۵\pi=۷\pi \Rightarrow ۲r=۲\pi \Rightarrow r=\pi$

از طرفی طبق رابطه طول کمان داریم:

$$\theta=\frac{L}{r}=\frac{۵\pi}{\pi}=۵rad$$

۷- گزینه «۲» متوسط

$$\frac{\pi}{۱۸}\alpha-\frac{\pi}{۳}=\beta,\alpha\times\frac{\pi}{۱۸۰}=B\Rightarrow\alpha=\frac{۱۸۰}{\pi}B$$

$$\frac{\pi}{۱۸}\times\frac{۱۸۰}{\pi}\beta-\frac{\pi}{۳}=\beta$$

$$\Rightarrow ۹\beta=\frac{\pi}{۳}$$

$$\Rightarrow \beta=\frac{\pi}{۲۷}rad$$

۸- گزینه «۲» متوسط

$r=۳۵cm$

$\theta=۸۰^\circ$

$۲L=?$

$L=r\theta$

$$\theta=\frac{\overset{۴}{\cancel{۸۰}}}{\underset{۹}{\cancel{۱۸۰}}}\pi=\frac{۴\pi}{۹}$$

$$۲L=۲\times۳۵\times\frac{۴\pi}{۹}=\frac{۲۸۰\pi}{۹}$$

۹- گزینه «۳» متوسط

شعاع چرخ‌ها ۱ متر و ۱۵۰ سانتی‌متر است. ابتدا واحدها را یکی کنیم:

$r_۱=۱\,m$

$r_۲=۱/۵\,m$

چرخ جلو به اندازه ۶۰° می‌چرخد، پس:

$$\theta_۱=\frac{۶۰\pi}{\underset{۳}{\cancel{۱۸۰}}}=\frac{\pi}{۳}$$

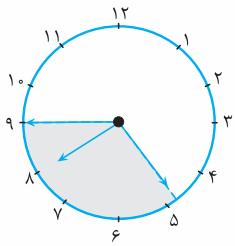
همانطور که قبلا هم اشاره شد، در حرکت چرخ‌ها، زاویه‌ها متفاوت است اما مسافت طی شده یکسان است، پس:

$L_۱=L_۲$

$$r_۱\theta_۱=r_۲\theta_۲\Rightarrow ۱\times\frac{\pi}{۳}=۱/۵\theta_۲\Rightarrow\theta_۲=\frac{\frac{\pi}{۳}}{\frac{۳}{۲}}=\frac{۲\pi}{۹}$$

۱۰- گزینه «۳» متوسط

در ساعت ۴:۴۰' عقربه ساعت شمار بین دو عدد ۴ و ۵ و در فاصله $\frac{۲}{۳}$ از ۴ گذشته یا $\frac{۱}{۳}$ به ۵ نرسیده است. در ۴۵ ثانیه، عقربه ثانیه شمار روی ۹ است و بنابراین زاویه بین عقربه ثانیه شمار و ساعت شمار به‌صورت زیر است:



$$۴(\frac{\pi}{۶})+\frac{۱}{۳}(\frac{\pi}{۶})=\frac{۲\pi}{۳}+\frac{\pi}{۱۸}=\frac{۱۳\pi}{۱۸}$$

↓

زاویه در فا, له

بین هر دو عدد

۱- آسان

آ) اولین اتحادی که در مثلثات رابطه بین سینوس و کسینوس رو نشون میده این هست:

$$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1 \Rightarrow \cos^2\alpha=1-\sin^2\alpha$$

$$\Rightarrow \cos^2\alpha=1-(-\frac{1}{3})^2=1-\frac{1}{9}=\frac{8}{9} \Rightarrow \cos\alpha=\pm\sqrt{\frac{8}{9}}=\pm\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

در ربع سوم علامت کسینوس منفی است پس: $\cos\alpha=\frac{-2\sqrt{2}}{3}$.

ب) با داشتن $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ می‌توان نوشت:

$$\tan\alpha+\cot\alpha=\frac{-\frac{1}{\cancel{3}}}{-\frac{2\sqrt{2}}{\cancel{3}}}+\frac{-\frac{2\sqrt{2}}{3}}{-\frac{1}{3}}=\frac{1}{2\sqrt{2}}+2\sqrt{2}$$

۲- آسان

از اونجایی که میدونیم $\tan\alpha$, $\cot\alpha$ معکوس هم هستند، پس:

$$\tan\alpha=-\frac{1}{2}$$

از طرفی طبق اتحاد $1+\cot^2\alpha=\frac{1}{\sin^2\alpha}$ داریم:

$$1+(-2)^2=\frac{1}{\sin^2\alpha} \xrightarrow{\text{معکوس}} \sin^2\alpha=\frac{1}{5}$$

$$\Rightarrow \sin\alpha=\pm\sqrt{\frac{1}{5}}$$

میدونیم که کتانژانت منفی، کسینوس مثبت هست پس α در ربع چهارم هست و علامت سینوس منفی هست، پس:

$$\sin\alpha=\frac{-\sqrt{5}}{5}$$

از طرفی داریم: $\cot\alpha=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$ پس با طرفین وسطین داریم:

$$\cos\alpha=\sin\alpha\cot\alpha=\frac{-\sqrt{5}}{5}\times(-2)$$

$$\cos\alpha=\frac{2\sqrt{5}}{5}$$

۳- آسان

آ) $\sin\frac{3\pi}{4}=\sin(\pi-\frac{\pi}{4})=\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

$$\cot(-\alpha)=-\cot\alpha \Rightarrow \cot(-\frac{\pi}{4})=-\cot\frac{\pi}{4}=-1$$

$$\cos\frac{2\pi}{3}=\cos(120^\circ)=\cos(180-60^\circ)=-\cos60^\circ=-\frac{1}{2}$$

پس داریم:

$$\frac{(\frac{\sqrt{3}}{3})^2+(\frac{\sqrt{2}}{2})^2}{(-1)^2-(-\frac{1}{2})^2}=\frac{\frac{1}{3}+\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{4}}=\frac{\frac{5}{\cancel{6}}}{\frac{3}{\cancel{4}}}=\frac{10}{9}$$

ب) $\cos(-90^\circ)=\cos90^\circ=0$

$\sin(-180^\circ)=-\sin180^\circ=0$

$\sin(-270^\circ)=-\sin270^\circ=+1$

$\cos(-360^\circ)=\cos360^\circ=1$

پس داریم: $\frac{0+1}{0-1}=-1$

۴- متوسط

آ) $\cos(-210^\circ)+\cot(240^\circ)=\cos210^\circ+\cot240^\circ$

$$=\cos(180+30^\circ)+\cot(180+60)=-\cos30+\cot60=-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$=\frac{-3\sqrt{3}+2\sqrt{3}}{6}=-\frac{\sqrt{3}}{6}$$

ب) $\sin630^\circ+\tan(-540^\circ)=\sin(\underbrace{720}_{2(360^\circ)}-90^\circ)-\tan(540^\circ)$

$$=-\sin90^\circ-\tan(360+180^\circ)=-1-0=-1$$

پ) $\cos(-720^\circ)+\cot(-600^\circ)+\tan(720^\circ)-\tan(-600^\circ)$

$$=\cos(2\times360^\circ)-\cot(720-120^\circ)+\tan(2\times360)+\tan(720-120^\circ)$$

$$=\cos360^\circ+\cot(\underbrace{120^\circ}_{180-60})+\tan360^\circ-\tan\underbrace{120^\circ}_{180-60}$$

$$=1-\frac{\sqrt{3}}{3}+0+\sqrt{3}=\frac{3-\sqrt{3}+3\sqrt{3}}{3}=\frac{3+2\sqrt{3}}{3}$$

ت) $\sin\frac{25\pi}{3}-\cos\frac{23\pi}{4}=\sin(8\pi+\frac{\pi}{3})-\cos(6\pi-\frac{\pi}{4})$

$$=\sin\frac{\pi}{3}-\cos\frac{\pi}{4}=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

ث) $$\frac{\sin\frac{3\pi}{4}-\cos\frac{5\pi}{6}}{\sin(-\frac{3\pi}{4})+\tan(-\frac{4\pi}{3})}=\frac{\sin(\pi-\frac{\pi}{4})-\cos(\pi-\frac{\pi}{6})}{-\sin(\pi-\frac{\pi}{4})-\tan(\pi+\frac{\pi}{3})}$$

$$=\frac{\sin\frac{\pi}{4}+\cos\frac{\pi}{6}}{-\sin\frac{\pi}{4}-\tan\frac{\pi}{3}}=\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}}{-\frac{\sqrt{2}}{2}-\sqrt{3}}=-\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{\sqrt{2}+2\sqrt{3}}$$

۵- دشوار

آ) درست

$$\sin ۸۴۰^\circ = \sin(\underbrace{۷۲۰}_{۲\times ۳۶۰} + ۱۲۰) = \sin ۱۲۰ = \sin(۱۸۰ - ۶۰) = \sin ۶۰$$

ب) درست

$$\tan(-۱۰۰۰^\circ) = -\tan ۱۰۰۰^\circ = -\tan(\underbrace{۱۰۸۰}_{۳\times ۳۶۰} - ۸۰)$$

$$= -\tan(-۸۰^\circ) = \tan ۸۰^\circ$$

پ)درست

$$\cos(-۳۲۴^\circ) = \cos ۳۲۴^\circ = \cos(۳۶۰^\circ - ۳۶^\circ)$$

$$= \cos(-۳۶^\circ) = \cos ۳۶^\circ$$

ت) درست

$$\sin ۸۷۵^\circ = \sin(\underbrace{۷۲۰^\circ}_{۲\times ۳۶۰} + ۱۵۵^\circ) = \sin ۱۵۵^\circ$$

حواست باشه که مضارب حذف زوج ۳۶۰° یعنی $۷۲۰^\circ = ۴\pi$ یا $۱۰۸۰ = ۶\pi$ رو نادیده می‌گیریم.

۶- آسان

آ) $\cos\theta + \cos(\pi - \theta) = \cos\theta - \cos\theta = ۰$ درست

ب) $\sin(\frac{\pi}{۲} - \theta) + \cos\theta = \cos\theta + \cos\theta = ۲\cos\theta$ نادرست

پ) $\cos(-\alpha) = \cos\alpha \Rightarrow \cos(-۷) = \cos ۷$ درست

ت) $\tan(\pi - \alpha) = -\tan\alpha$

$\tan\pi - \tan\alpha = ۰ - \tan\alpha$ درست

ث) $\frac{\sin(\frac{\pi}{۲} + \theta)}{\cos(\frac{\pi}{۲} - \theta)} = \frac{\cos\theta}{\sin\theta} = \cot\theta$ نادرست

ج) $\sin(\pi + \alpha) - \cos(\pi + \alpha) = -\sin\alpha + \cos\alpha$ نادرست

۷- متوسط

$$\cos(-\frac{۷\pi}{۴}) = \cos(\frac{۷\pi}{۴}) = \cos(۲\pi - \frac{\pi}{۴}) = \cos(-\frac{\pi}{۴})$$

$$= \cos\frac{\pi}{۴} = \frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

$$\tan(-\frac{۷\pi}{۴}) = -\tan(\frac{۷\pi}{۴}) = -\tan(۲\pi - \frac{\pi}{۴}) = -\tan(-\frac{\pi}{۴}) = \tan\frac{\pi}{۴} = ۱$$

بنابراین با توجه به علامت کسینوس و تانژانت مربوط به α، این زاویه در ربع اول قرار دارد.

$$\cos\frac{۱۳\pi}{۴} = \cos(۳\pi + \frac{\pi}{۴}) = -\cos\frac{\pi}{۴} = \frac{-\sqrt{۲}}{۲}$$

$$\tan\frac{۱۳\pi}{۴} = \tan(۳\pi + \frac{\pi}{۴}) = \tan\frac{\pi}{۴} = ۱$$

باتوجه به علامت کسینوس و تانژانت زاویه β این زاویه در ربع سوم قرار دارد.

۸- دشوار

$$\frac{\sin(\pi + \alpha) + \cos(\pi - \alpha)}{\cos(\frac{۳\pi}{۲} + \alpha) - \sin(\frac{\pi}{۲} - \alpha)} = \frac{-\sin\alpha - \cos\alpha}{\sin\alpha - \cos\alpha} =$$

در صورت مساله، $\tan\alpha = \frac{۱}{۳}$ داده شده است، با تقسیم صورت و مخرج کسر بر $\cos\alpha$ داریم:

$$\frac{-\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} - \frac{\cos\alpha}{\cos\alpha}}{\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} - \frac{\cos\alpha}{\cos\alpha}} = \frac{-\tan\alpha - ۱}{\tan\alpha - ۱} = \frac{-\frac{۱}{۳} - ۱}{\frac{۱}{۳} - ۱} = \frac{-\frac{۴}{۳}}{-\frac{۲}{۳}} = ۲$$

۹- آسان

$$\cos ۱۵۰^\circ = \cos(۱۸۰^\circ - ۳۰^\circ) = -\cos ۳۰^\circ = -\frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

$$\cos ۲۴۰^\circ = \cos(۱۸۰^\circ + ۶۰^\circ) = -\cos ۶۰^\circ = -\frac{۱}{۲}$$

$$\sin ۱۵۰^\circ = \sin(۱۸۰^\circ - ۳۰^\circ) = \sin ۳۰^\circ = \frac{۱}{۲}$$

$$\cos(-۶۰^\circ) = \cos ۶۰^\circ = \frac{۱}{۲}$$

$$\cos ۳\pi = \cos\pi = -۱$$

$$\frac{\cos ۱۵۰^\circ \times \cos ۲۴۰^\circ - \sin ۱۵۰^\circ \times \cos(-۶۰^\circ)}{\cos ۳\pi + ۲\sin ۹۰^\circ \times \cot ۴۵^\circ} = \frac{(-\frac{\sqrt{۳}}{۲})(-\frac{۱}{۲}) - (\frac{۱}{۲})(\frac{۱}{۲})}{-۱ + ۲(۱)(۱)}$$

$$= \frac{\frac{\sqrt{۳}}{۴} - \frac{۱}{۴}}{۱} = \frac{\sqrt{۳} - ۱}{۴}$$

۱۰- متوسط

آ) $$\frac{\tan(۹۰^\circ + ۱۰^\circ)\tan(۱۸۰^\circ - ۱۰^\circ) + \sin(۳۶۰^\circ - ۲۰^\circ)\sin(۱۸۰^\circ - ۲۰^\circ)}{\sin(۱۸۰^\circ + ۲۰^\circ)\cos(۱۸۰^\circ + ۲۰^\circ)}$$

$$= \frac{(-\cot ۱۰)(-\tan ۱۰) + (-\sin ۲۰^\circ)(\sin ۲۰^\circ)}{(-\sin ۲۰^\circ)(-\cos ۲۰^\circ)} = \frac{+۱ - \sin ۲۰^\circ \sin ۲۰^\circ}{\sin ۲۰^\circ \cos ۲۰^\circ}$$

$$= \frac{۱ - \sin^۲ ۲۰}{\sin ۲۰\cos ۲۰} = \frac{\cos^۲ ۲۰}{\sin ۲۰ \cancel{\cos ۲۰}} = \frac{\cos ۲۰}{\sin ۲۰} = \cot ۲۰^\circ$$

ب) $$\frac{۱ + \sin^۳(۱۸۰^\circ - ۳۰^\circ) + \cos^۳(۲۷۰^\circ - ۳۰^\circ)}{\sin^۲(۱۸۰^\circ + ۸۰^\circ) + \cos^۲(۱۸۰ - ۸۰^\circ) + \cot(۹۰ + ۲۰)\tan(۳۶۰ - ۲۰)}$$

$$= \frac{۱ + \sin^۳ ۳۰ - \sin^۳ ۳۰}{\sin^۲ ۸۰ + \cos^۲ ۸۰ + (-\tan ۲۰) \times (-\tan ۲۰)} = \frac{۱}{۱ + \tan^۲ ۲۰} = \cos^۲ ۲۰^\circ$$

۱۱- دشوار

$$\alpha+\beta=\frac{\pi}{۲}\Rightarrow\begin{cases}\tan\alpha=\cot\beta\\ \tan\alpha\tan\beta=۱\end{cases}$$

$$A=\tan۱^\circ\tan۲^\circ\ldots\tan۸۸^\circ\tan۸۹^\circ$$

$$=\underbrace{\tan۱^\circ\tan۸۹^\circ}_{۱}\times\underbrace{\tan۲^\circ\tan۸۸^\circ}_{۱}\times\ldots\times\underbrace{\tan۴۴^\circ\tan۴۶^\circ}_{۱}\times\underbrace{\tan۴۵^\circ}_{۱}$$

$$\underbrace{\tan۱^\circ.\cot۱^\circ}_{۱}\Rightarrow A=۱$$

۱۲- دشوار

$$A=\sin\frac{\pi}{۵}+\sin\frac{۲\pi}{۵}+\sin\frac{۳\pi}{۵}+\sin\frac{۴\pi}{۵}+\underbrace{\sin\pi}_{۰}+\sin\frac{۶\pi}{۵}+\sin\frac{۷\pi}{۵}+$$

$$\sin\frac{۸\pi}{۵}+\sin\frac{۹\pi}{۵}+\underbrace{\sin۲\pi}_{۰}=$$

$$A=\sin\frac{\pi}{۵}+\underbrace{\sin\frac{۹\pi}{۵}}_{\sin(۲\pi-\frac{\pi}{۵})}+\sin\frac{۲\pi}{۵}+\underbrace{\sin\frac{۸\pi}{۵}}_{\sin(۲\pi-\frac{۲\pi}{۵})}+\sin\frac{۳\pi}{۵}+\underbrace{\sin\frac{۷\pi}{۵}}_{\sin(۲\pi-\frac{۳\pi}{۵})}$$

$$+\sin\frac{۴\pi}{۵}+\underbrace{\sin\frac{۶\pi}{۵}}_{\sin(۲\pi-\frac{۴\pi}{۵})}=A=\sin\frac{\pi}{۵}-\sin\frac{\pi}{۵}+\sin\frac{۲\pi}{۵}-\sin\frac{۲\pi}{۵}$$

$$+\sin\frac{۳\pi}{۵}-\sin\frac{۳\pi}{۵}+\sin\frac{۴\pi}{۵}-\sin\frac{۴\pi}{۵}\Rightarrow A=۰$$

۱۳- دشوار

$$A=\frac{۱}{۱+\tan۱}+\frac{۱}{۱+\underbrace{\tan۸۹}_{\cot۱}}+\frac{۱}{۱+\tan۲}+\frac{۱}{۱+\underbrace{\tan۸۸}_{\cot۲}}+\ldots+\frac{۱}{۱+\tan۴۴}$$

$$+\frac{۱}{۱+\underbrace{\tan۴۶}_{\cot۴۴}}+\frac{۱}{۱+\underbrace{\tan۴۵}_{۱}}=\frac{۱}{۱+\tan۱}+\frac{۱}{۱+\frac{۱}{\tan۱}}+\frac{۱}{۱+\tan۲}$$

$$+\frac{۱}{۱+\frac{۱}{\tan۲}}+\ldots+\frac{۱}{۱+\tan۴۴}+\frac{۱}{۱+\frac{۱}{\tan۴۴}}+\frac{۱}{۲}=\underbrace{\frac{۱}{۱+\tan۱}+\frac{\tan۱}{۱+\tan۱}}$$

$$+\frac{۱}{۱+\tan۲}+\frac{\tan۲}{۱+\tan۲}+..+\frac{۱}{۱+\tan۴۴}+\frac{\tan۴۴}{\tan۴۴+۱}+\frac{۱}{۲}$$

$$=\frac{۱+\tan۱}{۱+\tan۱}+\frac{۱+\tan۲}{۱+\tan۲}+\ldots+\frac{۱+\tan۴۴}{۱+\tan۴۴}+\frac{۱}{۲}$$

$$=\underbrace{۱+۱+\ldots+۱}_{\text{۴۴ بار}}+\frac{۱}{۲}=۴۴+\frac{۱}{۲}=۴۴/۵$$

۱۴- آسان

$$\cos(\underbrace{x-۲۸}_{\alpha})=\sin(\underbrace{۳x+۷۴}_{\beta})$$

می دانیم که اگر $\alpha+\beta=۹۰^\circ$ اونوقت $\sin\beta=\cos\alpha$ و بنابراین:

$$x-۲۸+۳x+۷۴=۹۰^\circ$$

$$\Rightarrow ۴x=۹۰-۷۴+۲۸\Rightarrow ۴x=۴۴\Rightarrow x=۱۱$$

۱۵- متوسط

$$\tan^۲۱۳۵^\circ-\cos^۲۱۲۰^\circ=x\sin۳۳۰^\circ\cos۴۵^\circ\tan۲۴۰^\circ$$

$$\Rightarrow\tan^۲(۹۰^\circ+۴۵^\circ)-\cos^۲(۹۰^\circ+۳۰^\circ)=x\sin(۳۶۰^\circ-۳۰^\circ)\cos۴۵^\circ.\tan(۱۸۰+۶۰^\circ)$$

$$\Rightarrow\cot^۲۴۵^\circ-\sin^۲۳۰^\circ=-x\sin۳۰^\circ.\cos۴۵^\circ.\tan۶۰^\circ$$

$$\Rightarrow ۱-\frac{۱}{۴}=-x(\frac{۱}{۲})(\frac{\sqrt{۲}}{۲})\sqrt{۳}$$

$$\Rightarrow\frac{۳}{۴}=\frac{-\sqrt{۶}}{۴}x\Rightarrow x=\frac{-۳}{\sqrt{۶}}=\frac{-\sqrt{۶}}{۲}$$

۱۶- متوسط

$$\frac{۲\sin(۳\pi-x)+\cos(\frac{۳\pi}{۲}+x)}{\sin(\frac{۳\pi}{۲}-x)}=۳\Rightarrow\frac{۲\sin x+\sin x}{-\cos x}=۳$$

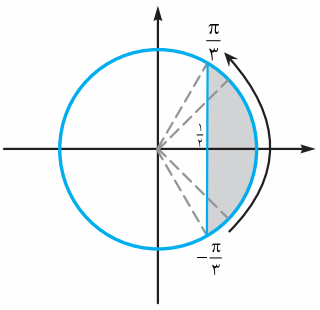
$$\Rightarrow\frac{\not{۳}\sin x}{-\cos x}=\not{۳}\Rightarrow\tan x=-۱\Rightarrow x=\frac{۳\pi}{۴}\text{یا}\frac{۷\pi}{۴}$$

$$\tan(x-\frac{\pi}{۱۲})=\begin{cases}\tan(\frac{۳\pi}{۴}-\frac{\pi}{۱۲})=\tan\frac{۲\pi}{۳}=\tan(\pi-\frac{\pi}{۳})=-\tan\frac{\pi}{۳}=-\sqrt{۳}\\ \tan(\frac{۷\pi}{۴}-\frac{\pi}{۱۲})=\tan\frac{۵\pi}{۳}=\tan(۲\pi-\frac{\pi}{۳})=-\tan\frac{\pi}{۳}=-\sqrt{۳}\end{cases}$$

۱۷- متوسط

$$-\frac{\pi}{۱۸}<x<\frac{\pi}{۱۸}\xrightarrow{\times۶}-\frac{\pi}{۳}<۶x<\frac{\pi}{۳}$$

بازه کمان یعنی $۶x$ رو پیدا کردیم حالا کافیه ببینیم روی دایره مثلثاتی مقدار کسینوس در فاصله $-\frac{\pi}{۳}$ تا $\frac{\pi}{۳}$ چه مقادیری رو می‌گیره:



کم‌ترین مقدار زاویه $-\frac{\pi}{۳}$ هست که کسینوس مقدار $\frac{۱}{۲}$ رو می‌گیره و بعد خطوط قائم عمود بر محور کسینوس رو رسم می‌کنیم تا ببینیم کجاهای محور کسینوس رو شامل میشه و همونطور که از شکل پیداست، بازه $\frac{۱}{۲}$ تا ۱ (به ازای $\alpha=۰^\circ$) رو شامل میشه پس:

$$\frac{۱}{۲}<\cos۶x<۱\Rightarrow\frac{۱}{۲}\le\frac{۳m+۱}{۲}\le۱\xrightarrow{\times۲}۱<۳m+۱\le۲$$

$$\Rightarrow۰<۳m\le۱\Rightarrow۰<m\le\frac{۱}{۳}$$

۱۸- متوسط

آ) همانطوری که از شکل پیداست: $\alpha+\theta=۹۰^\circ$ پس θ,α متمم هم هستند و سینوس یکی با کسینوس دیگری برابر است و می‌توان نوشت:

$$I=k\sin(\frac{\pi}{۲}-\alpha)=k\cos\alpha=k\sin\theta$$

ب) $\theta=۰ \Rightarrow I=k\sin ۰^\circ=k(۰)=۰$

$$\theta=\frac{\pi}{۶} \Rightarrow I=k\sin\frac{\pi}{۶}=\frac{k}{۲}$$

$$\theta=\frac{\pi}{۳} \Rightarrow I=k\sin\frac{\pi}{۳}=\frac{\sqrt{۳}}{۲}k$$

پ) بیش‌ترین شدت نور وابسته به مقدار $\sin\theta$ هست و می‌دانیم سینوس زمانی بیش‌ترین مقدار رو داره که $\sin\theta=۱$ و بنابراین $\theta=\frac{\pi}{۲}$ باشه.

۱۹- آسان

آ) $\cot\frac{\pi}{۶}-\tan\frac{\pi}{۳}.\sin\frac{\pi}{۴}=\sqrt{۳}-\sqrt{۳}\times\frac{\sqrt{۲}}{۲}$

$$=\frac{۲\sqrt{۳}-\sqrt{۲}\times\sqrt{۳}}{۲}=\frac{\sqrt{۳}(۲-\sqrt{۲})}{۲}$$

ب) $$\frac{\tan^۲\frac{\pi}{۶}+\sin^۲\frac{\pi}{۴}}{\cot^۲\frac{\pi}{۴}-\cos^۲\frac{\pi}{۳}}+\underbrace{\cos^۲ ۷۵^\circ+\sin^۲ ۷۵^\circ}_{۱}$$

$$\frac{(\frac{\sqrt{۳}}{۳})^۲+(\frac{\sqrt{۲}}{۲})^۲}{(۱)^۲-(\frac{۱}{۲})^۲}+۱=\frac{\frac{۱}{۳}+\frac{۱}{۲}}{۱-\frac{۱}{۴}}+۱=\frac{\frac{۵}{۶}}{\frac{۳}{۴}_{۲}}+۱=\frac{۱۰}{۹}+۱=\frac{۱۹}{۹}$$

۲۰- متوسط

آ) سینوس x با کسینوس $(x+۲۰)$ برابر شده یعنی زوایا متمم هم بوده‌اند پس:

$$x+x+۲۰^\circ=۹۰^\circ \Rightarrow ۲x=۷۰^\circ \Rightarrow x=۳۵^\circ$$

ب) تانژانت یک زاویه با کتانژانت دیگری برابر شده یعنی زوایا متمم هم هستند:

$$x+\frac{\pi}{۱۸}+\frac{۲\pi}{۹}+x=\frac{\pi}{۲} \Rightarrow ۲x=\frac{\pi}{۲}-\frac{\pi}{۱۸}-\frac{۲\pi}{۹}=\frac{۹\pi-\pi-۴\pi}{۱۸}$$

$$\Rightarrow ۲x=\frac{۲}{۱۸_{۹}}\pi \Rightarrow x=\frac{\pi}{۹}$$

۱- گزینه «۴» دشوار

معادله درجه دومی داریم که با روش دلتا حل می‌کنیم:

$$\Delta=b^۲-۴ac=(\tan\alpha+۳\cot\alpha)^۲-۴(۱)(۳)$$

$$=\tan^۲\alpha+۹\cot^۲\alpha+۶\underbrace{\tan\alpha\cot\alpha}_{۱}-۱۲=\tan^۲\alpha+۹\cot^۲\alpha-۶$$

$$=(\tan\alpha-۳\cot\alpha)^۲$$

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{۲a}=\frac{\tan\alpha+۳\cot\alpha\pm(\tan\alpha-۳\cot\alpha)}{۲}$$

$$=\begin{cases}+\dfrac{۲\tan\alpha}{۲}=\tan\alpha\\ -\dfrac{۶\cot\alpha}{۲}=۳\cot\alpha\end{cases}$$

پس گزینه ۴ درست است.

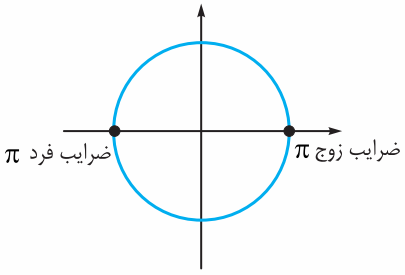
۲- گزینه «۳» متوسط

$$=\tan(\alpha-۵\pi)\cot(\alpha+۹\pi)+\cos(۴۰\pi-\alpha)\cos(\alpha-۳\pi)$$

$$=-\tan(۵\pi-\alpha)\cot(۹\pi+\alpha)+\cos(۴۰\pi-\alpha)\cos(۳\pi-\alpha)$$

$$=+\underbrace{\tan\alpha\cot\alpha}_{۱}+\cos\alpha(-\cos\alpha)=۱-\cos^۲\alpha=\sin^۲\alpha$$

یادت باشه ضرایب زوج و فردِ π در دایره مثلثاتی به صورت روبه رو هستند.



و یادت باشه کسینوس منفی خوره! یعنی: $\cos(-\alpha)=\cos\alpha$

۳- گزینه «۴» متوسط

$$A=\frac{۲\sin\frac{۴۹\pi}{۱۰}-۳\cos\frac{۳\pi}{۵}}{\cos(-\frac{۷\pi}{۵})+۲\sin\frac{۱۲۱\pi}{۱۰}}=\frac{۲\sin(\frac{۵۰\pi-\pi}{۱۰})-۳\cos(\frac{۵\pi-۲\pi}{۵})}{\cos\frac{۷\pi}{۵}+۲\sin(\frac{۱۲۰\pi+\pi}{۱۰})}$$

$$=\frac{۲\sin(۵\pi-\frac{\pi}{۱۰})-۳\cos(\pi-\frac{۲\pi}{۵})}{\cos(\frac{۵\pi+۲\pi}{۵})+۲\sin(۱۲\pi+\frac{\pi}{۱۰})}$$

$$=\frac{۲\sin\frac{\pi}{۱۰}+۳\cos\frac{۲\pi}{۵}}{\cos(\pi+\frac{۲\pi}{۵})+۲\sin(\frac{\pi}{۱۰})}=\frac{۲\sin\frac{\pi}{۱۰}+۳\cos\frac{۲\pi}{۵}}{-\cos\frac{۲\pi}{۵}+۲\sin\frac{\pi}{۱۰}}$$

می‌دونیم که $\frac{۲\pi}{۵},\frac{\pi}{۱۰}$ پس $\frac{\pi}{۱۰}+\frac{۲\pi}{۵}=\frac{\pi+۴\pi}{۱۰}=\frac{۵\pi}{۱۰}=\frac{\pi}{۲}$ متمم هم هستند،

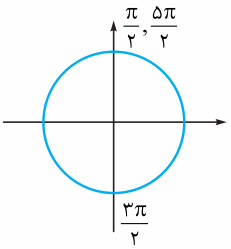
پس داریم:

$$\frac{۲\sin\frac{\pi}{۱۰}+۳\sin\frac{\pi}{۱۰}}{-\sin\frac{\pi}{۱۰}+۲\sin\frac{\pi}{۱۰}}=\frac{۵\sin\frac{\pi}{۱۰}}{\sin\frac{\pi}{۱۰}}=۵$$

۴- گزینه «۴» متوسط

$$A=\frac{(a^۲-b^۲)\cot(\alpha-\pi)}{\tan(\frac{۵\pi}{۲}-\alpha)}+\frac{(a^۲+b^۲)\tan(\frac{۳\pi}{۲}+\alpha)}{\cot(\alpha-\pi)}$$

$$\tan(\frac{۵\pi}{۲}-\alpha)=\cot\alpha\quad,\quad\cot(\alpha-\pi)=-\cot(\pi-\alpha)=\cot\alpha$$



$$\Rightarrow A=\frac{(a^۲-b^۲)\cot\alpha+(a^۲+b^۲)(-\cot\alpha)}{\cot\alpha}$$

$$=\frac{\cot\alpha(\cancel{a^۲}-b^۲-\cancel{a^۲}-b^۲)}{\cot\alpha}=-۲b^۲$$

۵- گزینه «۱» دشوار

$$A=\cos\frac{\pi}{۹}+\cos\frac{۲\pi}{۹}+\cos\frac{۳\pi}{۹}+\cdots+\cos\frac{۷\pi}{۹}+\cos\frac{۸\pi}{۹}$$

می‌دانیم $\cos(\pi-\alpha)=-\cos\alpha$ پس $\cos\frac{۸\pi}{۹}=-\cos\frac{\pi}{۹}$ و به همین ترتیب دوتایی‌های مشخص شده مکمل هم هستند و بنابراین کسینوس یکی قرینه کسینوس دیگری است.

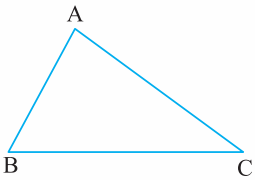
$$A=\underbrace{\cos\frac{\pi}{۹}+\cos\frac{۸\pi}{۹}}_{۰}+\underbrace{\cos\frac{۲\pi}{۹}+\cos\frac{۷\pi}{۹}}_{۰}+\underbrace{\cos\frac{۳\pi}{۹}+\cos\frac{۶\pi}{۹}}_{۰}$$

$$+\underbrace{\cos\frac{۴\pi}{۹}+\cos\frac{۵\pi}{۹}}_{۰}=۰$$

۶- گزینه «۳» متوسط

می‌دانیم که در هر مثلث دلخواه، مجموع زوایای داخلی برابر ۱۸۰° هست. پس:

$\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}=۱۸۰^\circ$ بنابراین:



$$\hat{A}+\hat{B}=۱۸۰-C\Rightarrow\frac{\hat{A}+\hat{B}}{۲}=۹۰-\frac{\hat{C}}{۲}$$

$$\Rightarrow\tan(\frac{\hat{A}+\hat{B}}{۲})=\tan(۹۰-\frac{\hat{C}}{۲})=\cot\frac{\hat{C}}{۲}$$

یادت باشه:

$$\tan(\frac{\pi}{۲}-\alpha)=\cot\alpha$$

$$\cot(\frac{\pi}{۲}-\alpha)=\tan-\alpha$$

۷- گزینه «۴» دشوار

با عبارت درجه دومی سروکار داریم که متغیرش مشخص نیست پس ما تبدیل cos به sin، عبارت درجه دوم مشخصی رو می‌سازیم که بتونیم ماکزیمم اون رو، مشخص کنیم:

$$A=۳\sin^۲x-۴(۱-\sin^۲x)+۱=۳\sin^۲x-۴+۴\sin^۲x+۱$$

$$\Rightarrow A=۷\sin^۲x-۳$$

می‌دونیم که بیش‌ترین مقدار $\sin x$ برابر ۱ هست اما حواست باشه ماکزیمم مقدار یک عبارت درجه دوممکنه در $\frac{-b}{۲a}$ اتفاق بیفته پس هر دو حالت رو در نظر می‌گیریم:

$$\sin x=۱\Rightarrow A=۷(۱)-۳=۴$$

$$\sin x=\frac{-b}{۲a}=\frac{-۰}{۲(۷)}=۰\Rightarrow A=۷(۰)-۳=-۳$$

پس ماکزیمم مقدار همون ۴ هست.

۸- گزینه «۱» دشوار

برای یک متغیره کردن عبارت، بهتره به جای sin، جاگذاری کنیم:

$$A=۳(۱-\cos^۲x)-۲\cos^۲x+\cos x=۳-۳\cos^۲x-۲\cos^۲x+\cos x$$

$$\Rightarrow A=-۵\cos^۲x+\cos x+۳$$

طبق توضیحی که در تست ۷ داشتیم:

۱) $\cos x=۱\Rightarrow A=-۵+۱+۳=-۱$

$\cos x=-۱\Rightarrow A=-۵-۱+۳=-۳$

۲) $\cos x=-\frac{b}{۲a}=-\frac{۱}{-۱۰}=\frac{۱}{۱۰}\Rightarrow A=-۵(\frac{۱}{۱۰۰})+\frac{۱}{۱۰}+۳$

$=۳+۰/۱-۰/۰۵=۳/۰۵$

۹- گزینه «۱» — متوسط

$A=(\sin^۳ x)^۲-(\sin^۳ x)+۱$

طبق توضیحات تست‌های ۷ و ۸ داریم:

۱) $\sin^۳ x=-۱ \Rightarrow A=۱+۱+۱=۳$

$\sin^۳ x=+۱ \Rightarrow A=۱-۱+۱=۱$

۲) $\sin^۳ x=-\frac{b}{۲a}=\frac{۱}{۲} \Rightarrow A=\frac{۱}{۴}-\frac{۱}{۲}+۱=\frac{۳}{۴}$

۱۰- گزینه «۱» — دشوار

از اتحاد کمکی درجه دوم داریم:

$a^۲+b^۲=(a+b)^۲-۲ab$

$\Rightarrow \sin^۲ x+\cos^۲ x=(\underbrace{\sin x+\cos x}_{\frac{۱}{۳}})^۲-۲\sin x\cos x$

$\Rightarrow ۱=\frac{۱}{۹}-۲\sin x\cos x \Rightarrow \sin x\cos x=-\frac{۴}{۹}$

حال اتحاد کمکی درجه سوم را به کار می‌بریم:

$a^۳+b^۳=(a^۳+b^۳)-۳ab(a+b)$

$\sin^۳ x+\cos^۳ x=(\underbrace{\sin x+\cos x}_{\frac{۱}{۳}})^۳-۳\underbrace{\sin x\cos x}_{-\frac{۴}{۹}}(\underbrace{\sin x+\cos x}_{\frac{۱}{۳}})$

$=\frac{۱}{۲۷}+\frac{۴}{۹}=\frac{۱۳}{۲۷}$

۱۱- گزینه «۳» — متوسط

$\sin(\frac{۱۷\pi}{۳})\cos(-\frac{۱۷\pi}{۶})+\tan(\frac{۱۹\pi}{۴})\sin(-\frac{۱۱\pi}{۶})$

$=\sin(\frac{۱۸\pi-\pi}{۳})\cos(\frac{۱۸\pi-\pi}{۶})+\tan(\frac{۲۰\pi-\pi}{۴})(-\sin(\frac{۱۲\pi-\pi}{۶}))$

$=\sin(۶\pi-\frac{\pi}{۳})\cos(۳\pi-\frac{\pi}{۶})-\tan(۵\pi-\frac{\pi}{۴})\sin(۲\pi-\frac{\pi}{۶})$

$=(-\sin\frac{\pi}{۳})(-\cos\frac{\pi}{۶})-(-\tan\frac{\pi}{۴})(-\sin\frac{\pi}{۶})$

$=\frac{\sqrt{۳}}{۲}\times\frac{\sqrt{۳}}{۲}-۱\times\frac{۱}{۲}=\frac{۳}{۴}-\frac{۱}{۲}=\frac{۱}{۴}$

۱۲- گزینه «۲» — آسان

$\frac{۱۷\pi}{۶}=\frac{۱۸\pi-\pi}{۶}=۳\pi-\frac{\pi}{۶}$

$\frac{۱۱\pi}{۳}=\frac{۱۲\pi-\pi}{۳}=۴\pi-\frac{\pi}{۳}$

$\frac{۱۰\pi}{۳}=\frac{۹\pi+\pi}{۳}=۳\pi+\frac{\pi}{۳}$

$\tan\frac{۱۷\pi}{۶}\sin\frac{۱۱\pi}{۳}+\cos\frac{۱۰\pi}{۳}=\tan(۳\pi-\frac{\pi}{۶})\sin(۴\pi-\frac{\pi}{۳})+\cos(۳\pi+\frac{\pi}{۳})$

$=(-\tan\frac{\pi}{۶})(-\sin\frac{\pi}{۳})-\cos\frac{\pi}{۳}=(\frac{-\sqrt{۳}}{۳})(\frac{-\sqrt{۳}}{۲})-\frac{۱}{۲}=\frac{۱}{۲}-\frac{۱}{۲}=۰$

حواست باشه که ۳π روی مکان π و ۴π روی مکان ۲π قرار می‌گیره.

۱۳- گزینه «۲» — متوسط

$\tan\frac{۱۱\pi}{۴}+\sin\frac{۱۵\pi}{۴}\cos\frac{۱۳\pi}{۴}=\tan(\frac{۱۲\pi-\pi}{۴})+\sin(\frac{۱۶\pi-\pi}{۴})\cos(\frac{۱۲\pi+\pi}{۴})$

$=\tan(۳\pi-\frac{\pi}{۴})+\sin(۴\pi-\frac{\pi}{۴})\cos(۳\pi+\frac{\pi}{۴})$

$=-\tan\frac{\pi}{۴}+(-\sin\frac{\pi}{۴})(-\cos\frac{\pi}{۴})=-۱+(\frac{\sqrt{۲}}{۲})(\frac{\sqrt{۲}}{۲})=-۱+\frac{۱}{۲}=-\frac{۱}{۲}$

۱۴- گزینه «۲» — متوسط

$A=\frac{\sin ۱۴۵^\circ-\sin ۲۳۵^\circ}{\cos ۳۲۵^\circ-۲\sin ۲۱۵^\circ}=\frac{\sin(۱۸۰^\circ-۳۵^\circ)-\sin(۲۷۰^\circ-۳۵^\circ)}{\cos(۳۶۰^\circ-۳۵^\circ)-۲\sin(۱۸۰+۳۵^\circ)}$

$=\frac{\sin ۳۵^\circ+\cos ۳۵^\circ}{\cos ۳۵^\circ+۲\sin ۳۵^\circ}$

با تقسیم صورت و مخرج بر $\cos ۳۵^\circ$ داریم:

$A=\frac{\tan ۳۵^\circ+۱}{۱+۲\tan ۳۵^\circ}=\frac{a-۱+۱}{۱+۲(a-۱)}=\frac{a}{۲a-۱}$

۱۵- گزینه «۴» — متوسط

$\frac{۲\sin ۱۱۰-۲\sin ۲۰۰}{۲\cos ۷۰+۳\cos ۳۴۰}=\alpha$

$\frac{۲\sin(۹۰+۲۰)-۲\sin(۱۸۰+۲۰)}{۲\cos(۹۰-۲۰)+۳\cos(۳۶۰-۲۰)}=\alpha \Rightarrow \frac{۲\cos ۲۰+۲\sin ۲۰}{۲\sin ۲۰+۳\cos ۲۰}=\alpha$

$\xrightarrow{\div\cos ۲۰} \frac{۲+۲\tan ۲۰}{۲\tan ۲۰+۳}=\alpha \Rightarrow ۲+۲\tan ۲۰=۲\alpha\tan ۲۰+۳\alpha$

$\Rightarrow (۲-۲\alpha)\tan ۲۰=۳\alpha-۲ \Rightarrow \tan ۲۰=\frac{۳\alpha-۲}{۲-۲\alpha}$

۱۶- گزینه «۴» — متوسط

$A=\sqrt{\sin^۳(-\frac{۵\pi}{۶})-\cos^۳(-\frac{۲\pi}{۳})}=\sqrt{-\sin^۳\frac{۵\pi}{۶}-\cos^۳\frac{۲\pi}{۳}}$

$=\sqrt{-\sin^۳(\pi-\frac{\pi}{۶})-\cos^۳(\pi-\frac{\pi}{۳})}=\sqrt{-\sin^۳\frac{\pi}{۶}+\cos^۳\frac{\pi}{۳}}$

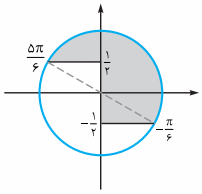
$=\sqrt{-\frac{۱}{۸}+\frac{۱}{۸}}=۰$

۱۷- گزینه «۲» — دشوار

جلوی سینوس عبارت $۲x$ قرار گرفته پس اول محدوده $۲x$ رو پیدا می‌کنیم:

$-\frac{\pi}{۱۲}<x<\frac{۵\pi}{۱۲} \Rightarrow -\frac{\pi}{۶}<۲x<\frac{۵\pi}{۶}$

حالا از روی دایره مثلثاتی، مشخص می‌کنیم در این بازه، سینوس چه مقدارهایی رو می‌گیره. کم‌ترین مقداری که روی محور سینوس، مشخص شده $\frac{۱}{۲}$ است و بیش‌ترین مقدار برابر ۱ است پس:



حواست باشه که مقدار ۱ دقیقاً گرفته شده در ۱ بسته هست:

$-\frac{۱}{۲}<\sin ۲x\leq ۱$

$\Rightarrow -\frac{۱}{۲}<\frac{m-۱}{۴}\leq ۱ \Rightarrow -۲<m-۱\leq ۴ \Rightarrow -۱<m\leq ۵ \Rightarrow m\in(-۱,۵]$

۱۸- گزینه «۳» متوسط

$$A=\frac{\sin(\alpha+\frac{\pi}{2})-\sin(\alpha-\pi)}{|\tan^2\alpha-1|}=\frac{\sin(\frac{\pi}{2}+\alpha)+\sin(\pi-\alpha)}{|\tan^2\alpha-1|}$$
$$=\frac{\cos\alpha+\sin\alpha}{|\tan^2\alpha-1|}$$

داریم: $\cos\alpha=\frac{2}{3}$ پس:

$$\sin^2\alpha=1-\cos^2\alpha=1-\frac{4}{9}=\frac{5}{9}$$

$$\xrightarrow{\text{ربع چهارم}}\ \sin\alpha=-\frac{\sqrt{5}}{3}\ \Rightarrow\ \tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{-\frac{\sqrt{5}}{3}}{\frac{2}{3}}=-\frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$\Rightarrow A=\frac{\frac{2}{3}-\frac{\sqrt{5}}{3}}{|\frac{5}{4}-1|}=\frac{\frac{2-\sqrt{5}}{3}}{\frac{1}{4}}=\frac{4(2-\sqrt{5})}{3}$$

۱۹- گزینه «۴» دشوار

$$\tan 285\tan(-165)-\sin(1095)\cos 255$$

$$=-\tan(270+15)\tan(180-15)-\sin(\underbrace{1080}_{3(2\pi)}+15)\cos(270-15)$$

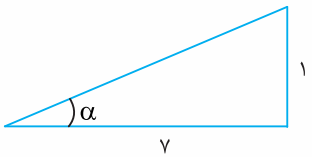
$$=-(-\cot 15)(-\tan 15)-(+\sin 15)(-\sin 15)$$

$$=-1+\sin^2 15=-(1-\sin^2 15)=-\cos^2 15$$

۲۰- گزینه «۲» متوسط

$$\sin(\frac{3\pi}{2}+\alpha)=-\cos\alpha$$

و از اونجایی که $\tan\alpha=\frac{1}{7}$ داریم:



$$\sqrt{49+1}=\sqrt{50}=5\sqrt{2}\ \Rightarrow\ \cos\alpha=\frac{7}{5\sqrt{2}}=\frac{7\sqrt{2}}{10}$$

$$\Rightarrow\ \sin(\frac{3\pi}{2}+\alpha)=-\frac{7\sqrt{2}}{10}$$

۲۱- گزینه «۱» متوسط

$$\frac{\tan x}{\sqrt{1+\tan^2 x}}(\frac{1}{\sin x}-\sin x)=\frac{\tan x}{\sqrt{\frac{1}{\cos^2 x}}}(\frac{1-\sin^2 x}{\sin x})$$

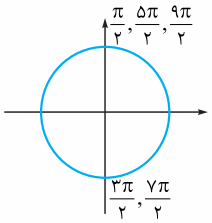
حواست باشه در ربع دوم علامت کسینوس منفی هست.

$$=\frac{\frac{\sin x}{\cos x}}{\frac{1}{-\cos x}}(\frac{\cos^2 x}{\sin x})=-\cancel{\sin x}(\frac{\cos^2 x}{\cancel{\sin x}})=-\cos^2 x$$

۲۲- گزینه «۳» دشوار

$$A=\sin(\frac{9\pi}{2}+\alpha)\cos(\frac{7\pi}{2}-\alpha)-\tan(\alpha-\frac{3\pi}{2})$$

برای پیدا کردن مکان ضریب‌های $\frac{\pi}{2}$، روی دایره مثلثاتی به ترتیب بشمار و جلو برو. زوج و نیم πها معادل $\frac{\pi}{2}$ و فرد و نیم πها معادل $\frac{3\pi}{2}$ است:



$$=\sin(\frac{\pi}{2}+\alpha)\cos(\frac{3\pi}{2}-\alpha)+\tan(\frac{3\pi}{2}-\alpha)=-\cos\alpha\sin\alpha+\cot\alpha$$

$$\tan\alpha=\frac{4}{3}\ \Rightarrow\ \sin\alpha=-\frac{4}{5},\cos\alpha=-\frac{3}{5},\cot\alpha=\frac{3}{4}$$

$$A=+\frac{3}{5}\times(-\frac{4}{5})+\frac{3}{4}=\frac{-12}{25}+\frac{3}{4}=\frac{27}{100}$$

۲۳- گزینه «۱» آسان

$$A=-\sin(\frac{179\pi}{6})+\cos(\frac{17\pi}{3})-2\tan(\frac{33\pi}{4})$$

$$=-\sin(30\pi-\frac{\pi}{6})+\cos(6\pi-\frac{\pi}{3})-2\tan(8\pi+\frac{\pi}{4})$$

$$=\sin\frac{\pi}{6}+\cos\frac{\pi}{3}-2\tan\frac{\pi}{4}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-2=-1$$

۲۴- گزینه «۳» آسان

$$A=\cos\frac{\pi}{5}+\cos\frac{2\pi}{5}+\cos\frac{3\pi}{5}+\cos\frac{4\pi}{5}+\cos\frac{5\pi}{5}$$

$$=\cancel{\cos\frac{\pi}{5}}+\cancel{\cos\frac{2\pi}{5}}-\cancel{\cos\frac{2\pi}{5}}-\cancel{\cos\frac{\pi}{5}}+\cos\pi=\cos\pi=-1$$

حواست باشه که:

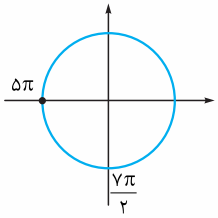
$$\frac{2\pi}{5}+\frac{3\pi}{5}=\pi$$

$$\cos\frac{3\pi}{5}=\cos(\pi-\frac{2\pi}{5})=-\cos\frac{2\pi}{5}$$

۲۵- گزینه «۴» متوسط

$$A=\frac{1}{-\cos a}+\frac{\sin(5\pi-a)}{\sin(\frac{7\pi}{2}+a)}\times\cot a$$

$$=\frac{-1}{\cos a}+\frac{\sin a}{-\cos a}\times\cot a=\frac{-1}{\cos a}-1$$



۲۶- گزینه «۴» دشوار

$$\frac{۲\sin(۳\pi - x) + \cos(\frac{۳\pi}{۲} + x)}{\sin(\frac{۳\pi}{۲} - x)} = ۳$$

$$\Rightarrow \frac{۲\sin x + \sin x}{-\cos x} = ۳ \Rightarrow \frac{۳\sin x}{-\cos x} = ۳$$

$$\Rightarrow \tan x = -۱ \Rightarrow x = -\frac{\pi}{۴}$$

$$\tan(x - \frac{\pi}{۱۲}) = \tan(-\frac{\pi}{۴} - \frac{\pi}{۱۲}) = \tan(-\frac{\pi}{۳}) = -\sqrt{۳}$$

۲۷- گزینه «۲» آسان

$$\log\tan ۷ + \log\tan ۲۱ + \log\tan ۶۹ + \log\tan ۸۳$$

$$= \log(\tan ۷ \times \tan ۲۱ \times \tan ۶۹ \times \tan ۸۳)$$

$$= \log(\tan ۷ \times \underbrace{\tan ۲۱ \times \cot ۲۱}_{۱} \times \cot ۷) = \log ۱ = ۰$$

۲۸- گزینه «۴» متوسط

$$\sin(\frac{۳\pi}{۲} + x) + \cos(\frac{\pi}{۲} + x) = \frac{۱}{۲}$$

$$\Rightarrow -\cos x - \sin x = \frac{۱}{۲} \xrightarrow{\text{توان ۲}} \underbrace{\sin^۲ x + \cos^۲ x}_{۱} + ۲\sin x\cos x = \frac{۱}{۴}$$

$$\Rightarrow ۲\sin x\cos x = -\frac{۳}{۴} \Rightarrow \sin x\cos x = -\frac{۳}{۸}$$

$$\sin^۳ x + \cos^۳ x = (\sin x + \cos x)(\underbrace{\cos^۲ x + \sin^۲ x}_{۱} - \sin x\cos x)$$

$$= (-\frac{۱}{۲})(۱ + \frac{۳}{۸}) = -\frac{۱۱}{۱۶}$$

۲۹- گزینه «۳» متوسط

$$\frac{\sin ۱۶۰^\circ - \cos ۲۰۰^\circ}{\cos ۱۱۰^\circ + \sin ۷۰^\circ} = \frac{\sin(۱۸۰ - ۲۰) - \cos(۱۸۰ + ۲۰)}{\cos(۹۰ + ۲۰) + \sin(۹۰ - ۲۰)}$$

$$= \frac{\sin ۲۰ + \cos ۲۰}{-\sin ۲۰ + \cos ۲۰} = \frac{\frac{\sin ۲۰}{\cos ۲۰} + \frac{\cos ۲۰}{\cos ۲۰}}{-\frac{\sin ۲۰}{\cos ۲۰} + \frac{\cos ۲۰}{\cos ۲۰}} = \frac{\tan ۲۰ + ۱}{-\tan ۲۰ + ۱}$$

$$= \frac{۰/۳۶ + ۱}{-۰/۳۶ + ۱} = \frac{۱/۳۶}{۰/۶۴} = \frac{۱۷}{۸}$$

۳۰- گزینه «۱» دشوار

$$\tan(\hat{B} + ۳۰^\circ)\tan(C + ۳۰^\circ) = ۱$$

$$\Rightarrow \tan(\hat{B} + ۳۰^\circ) = \frac{۱}{\tan(C + ۳۰^\circ)}$$

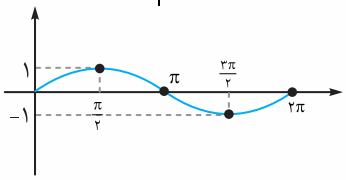
$$\Rightarrow \tan(\hat{B} + ۳۰^\circ) = \cot(C + ۳۰^\circ)$$ زاویه‌ها متمم هم هستند.

$$\Rightarrow \hat{B} + ۳۰^\circ + \hat{C} + ۳۰^\circ = ۹۰ \Rightarrow \hat{B} + \hat{C} = ۳۰^\circ$$

$$\Rightarrow \hat{A} = ۱۸۰ - ۳۰^\circ = ۱۵۰^\circ$$

۱- متوسط

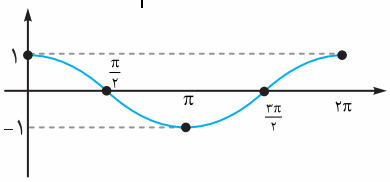
x	۰	$\frac{\pi}{۲}$	π	$\frac{۳\pi}{۲}$	۲π
$\sin x$	۰	۱	۰	-۱	۰



این بخش از نمودار سینوس‌ها، یک نوسان سینوسی نام دارد و در ادامه رسم، همین اعداد تکرار میشه. این نوسان در یک دوره تناوب که ۲π هست، بین دو عدد -۱ و $+۱$ رسم میشه.

۲- متوسط

x	۰	$\frac{\pi}{۲}$	π	$\frac{۳\pi}{۲}$	۲π
$\cos x$	۱	۰	-۱	۰	۱

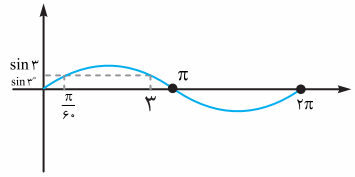


این بخش از نمودار کسینوس‌ها، یک نوسان کسینوسی نام دارد و در ادامه رسم، در یک دوره تناوب که ۲π هست، همین اعداد تکرار میشه.

۳- دشوار

$\sin ۳^\circ$ یعنی زاویه جلوی سینوس ۳ درجه هست اما $\sin ۳$ یعنی زاویه جلوی سینوس، ۳ رادیان هست و ما می‌دانیم که این‌ها متفاوت هستند و بنابراین این تساوی نادرست است.

$$۳^\circ = \frac{۳}{۱۸۰} \times \pi = \frac{\pi}{۶۰} \text{ rad}$$



در نمودار، π را تقریباً ۳ درنظر می‌گیریم

پس برای $\sin ۳$، نمودار π قرار می‌گیرد و مقدار آن تقریباً ۰/۰۵۲ است.

اما در درجه π برابر ۱۸۰ است و ۳° روی نمودار نزدیک به $x = ۰$ است و $\sin ۳^\circ$ تقریباً برابر ۰/۰۰۰۹۱ است بنابراین $\sin ۳$ بزرگ‌تر از $\sin ۳^\circ$ درمی‌آید.

۴- متوسط

آ) $[-۱,۱]$, $\mathbb{R}$

ب) صفر

پ) $x=۲k\pi+\frac{\pi}{۲}, k\in\mathbb{Z}$, $x=\frac{۱۳\pi}{۲}, x=\frac{۹\pi}{۲}, x=\frac{۵\pi}{۲}$, $+۱$

ت) $x=۲k\pi+\frac{۳\pi}{۲}, k\in\mathbb{Z}$, $x=-\frac{۵\pi}{۲}, x=-\frac{\pi}{۲}, x=\frac{۷\pi}{۲}$, -۱

۵- آسان

آ) $[-۱,۱]$, $\mathbb{R}$

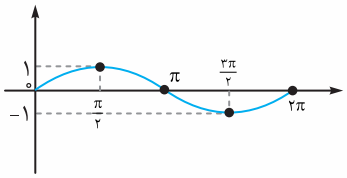
ب) $x=k\pi+\frac{\pi}{۲}, k\in\mathbb{Z}$

پ) $x=۲k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$, ۱

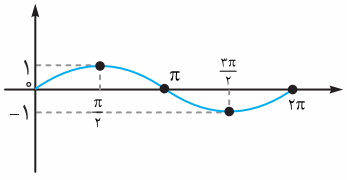
ت) $x=(۲k+۱)\pi, k\in\mathbb{Z}$, -۱

۶- متوسط

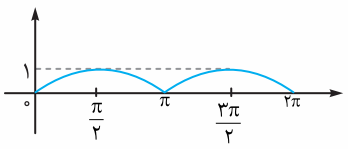
آ) $y=-\cos(x+\frac{\pi}{۲})=-(-\sin x)=\sin x$



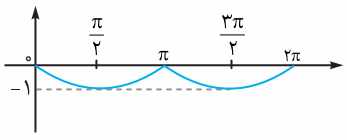
ب) $y=-|\sin x|$



$\sin x$

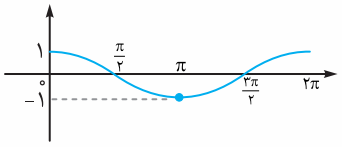


$|\sin x|$

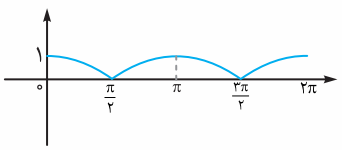


$-|\sin x|$

پ) $y=|\cos x|$

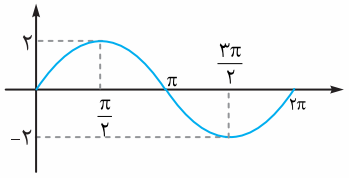


$\cos x$

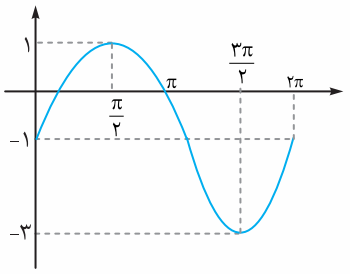


$|\cos x|$

ت) $y=۲\sin x-۱$



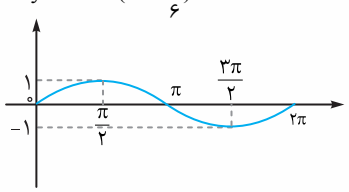
$۲\sin x$



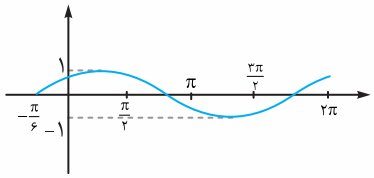
$۲\sin x-۱$

۷- متوسط

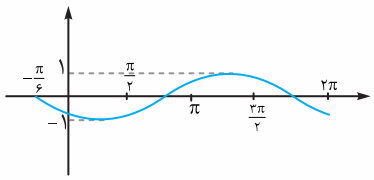
آ) $y=-\sin(x+\frac{\pi}{۶})$



$\sin x$

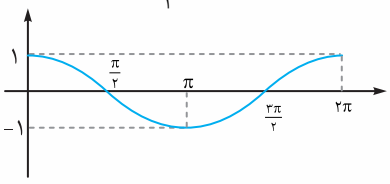


$\sin(x+\frac{\pi}{۶})$

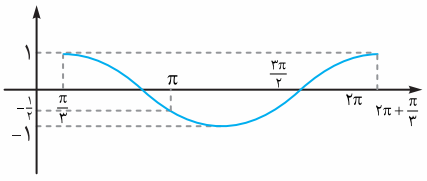


$-\sin(x+\frac{\pi}{۶})$

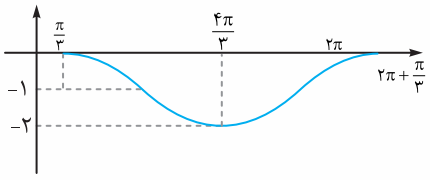
ب) $y=\cos(x-\frac{\pi}{۳})-۱$



$\cos x$



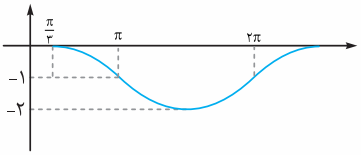
$\cos(x-\frac{\pi}{۳})$



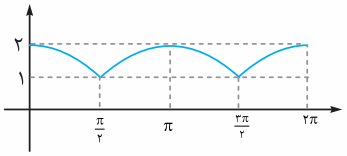
$\cos(x-\frac{\pi}{۳})-۱$

۸- متوسط

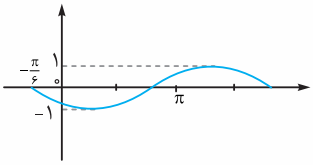
نمودار **a** مربوط به قسمت ب هست زیرا نمودار به اندازه $\frac{\pi}{3}$ به سمت راست منتقل شده و در شروع نمودار رو به پایین حرکت کرده بنابراین نمودار کسینوسی با انتقال $\frac{\pi}{3}$ به سمت راست است:



نمودار **b** مربوط به قسمت پ است زیرا نمودار بالای محور **x** است و به اندازه یک واحد به بالا منتقل شده و داریم:



نمودار **c** مربوط به قسمت آ است و داریم:



۹- آسان

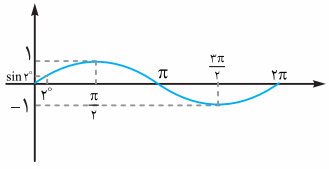
دوره تناوب هر تابع، بازه‌ای هست که یک نوسان نمودار در اون بازه رسم شده و بعد قبل از اون، نمودار به صورت همون نوسان تکرار شده است.

آ) دوره تناوب ۴ است زیرا نوسان( ) در فاصله‌های ۴ واحدی تکرار میشه.

ب) دوره تناوب ۶ است زیرا ( ) در فاصله‌های ۶ واحدی تکرار میشه.

پ) دوره تناوب ۲ است زیرا ( ) در فاصله‌ای به طول ۲ تکرار میشه.

۱۰- آسان

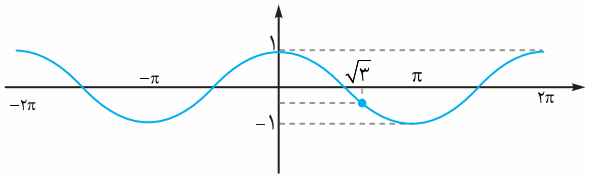


آ) 2° در ربع اول بین ۰ تا $\frac{\pi}{2}$ قرار می‌گیرد، بنابراین $\sin 2^\circ$ بین ۰ تا ۱ روی محور **y**ها و نزدیک‌تر به صفر قرار می‌گیرد.

ب) عددی وجود ندارد که $\sin x_0 = 2$ زیرا سینوس هر زاویه‌ای بین -1 تا $+1$ قرار می‌گیرد و هیچگاه کمتر از -1 یا بیشتر از $+1$ نمی‌شود.

۱۱- آسان

نمودار $y = \cos x$ در این بازه به صورت زیر است:



آ) مقدار $\sqrt{3}$ تقریباً ۱/۷ است و با درنظر گرفتن π به صورت تقریبی ۳، روی نمودار $\sqrt{3}$ را مشخص کرده‌ایم. عرض نظیر این نقطه، $\cos\sqrt{3}$ را نشان می‌دهد که مقدار تقریبی آن $(-0/16)$ است.

ب) همان‌طور که از نمودار پیداست، کسینوس بین -1 تا ۱ تغییر می‌کند، هیچ‌وقت نمی‌تواند با $-\frac{3}{2}$ برابر شود. بنابراین نقطه x_0 وجود ندارد.

۱۲- دشوار

آ) صفرهای تابع $y = \sin x$ به صورت $x = k\pi\ ,\ k \in \mathbb{Z}$ هست و بنابراین صفرهای تابع $y = \sin 2x$ به صورت $2x = k\pi$ و در نتیجه $x = \frac{k\pi}{2}\ ,\ k \in \mathbb{Z}$ هست و در بازه $[0\ ,\ 2\pi]$ به صورت $x = 0\ ,\ \frac{\pi}{2}\ ,\ \pi\ ,\ \frac{3\pi}{2}\ ,\ 2\pi$ هست.

ب) صفرهای تابع $y = \cos x$ به صورت $x = (2k+1)\frac{\pi}{2}$ است و بنابراین داریم:

$$y = 3\cos\left(\frac{1}{2}x - \frac{\pi}{4}\right) \Rightarrow \frac{1}{2}x - \frac{\pi}{4} = (2k+1)\frac{\pi}{2}$$

$$\xrightarrow{\times 2} x = (2k+1)\pi + \frac{\pi}{2}$$

که در بازه $[0\ ,\ 2\pi]$ به صورت مقابل است: $x = \frac{3\pi}{2}$

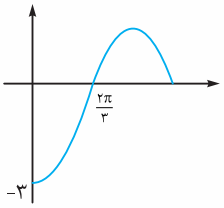
۱۳- متوسط

آ) می‌دانیم که $-1 \le \sin x \le 1$ پس $-2 \le -2\sin x \le 2$ بنابراین کم‌ترین مقدار -2 و بیش‌ترین مقدار $+2$ است.

ب) همان‌طور که برای سینوس داشتیم، برای کسینوس نیز: $-1 \le \cos x \le 1$ بنابراین $-3 \le 3\cos x \le 3$ و می‌دانیم تغییرات مربوط به **x**، تأثیر در دامنه دارند و تأثیری در برد یا ماکزیمم و مینیمم تابع ندارند، بنابراین کم‌ترین مقدار -3 و بیش‌ترین مقدار $+3$ است.

۱۴- متوسط

از روی نمودار می‌بینیم که در مقایسه با نمودار کسینوس، ضریب **a** منفی است و داریم:



$$(\frac{۲\pi}{۳},۰) \xrightarrow{\text{جاگذاری}} a\cos\frac{۲\pi}{۳}+b=۰ \Rightarrow a\cos(\pi-\frac{\pi}{۳})+b=۰$$

$$\Rightarrow -a\cos\frac{\pi}{۳}+b=۰ \Rightarrow -\frac{a}{۲}+b=۰ \quad (۱)$$

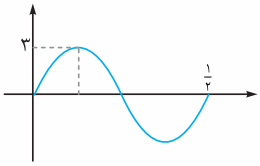
$$(۰,-۳) \xrightarrow{\text{جاگذاری}} a\cos۰+b=-۳ \Rightarrow a+b=-۳ \quad (۲)$$

$$-\begin{cases}-\frac{a}{۲}+b=۰\\ a+b=-۳\end{cases}$$

$$a+\frac{a}{۲}=-۳ \Rightarrow \frac{۳}{۲}a=-۳ \Rightarrow a=-۲ \Rightarrow -۲+b=-۳ \Rightarrow b=-۱$$

۱۵- دشوار

از فرمولنامه فصل می‌دونیم که:



$$T=\frac{۲\pi}{|b\pi|}=\frac{۲}{|b|}$$

و از روی نمودار مقدار **T** برابر $\frac{۱}{۲}$ است، (یک نوسان کامل) بنابراین داریم:

$$\frac{۲}{|b|}=\frac{۱}{۲} \Rightarrow b=۴ \quad (b>۰)$$

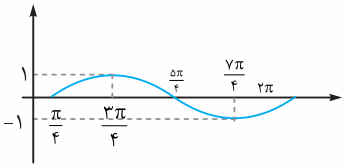
$$f(۰)=۰ \Rightarrow c=۰$$

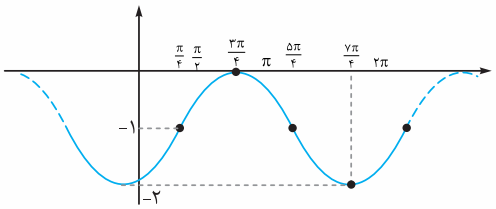
$$Max=|a|+c \Rightarrow ۳=|a| \xrightarrow{b>۰} a=۳$$

$$f(x)=۳\sin(۴\pi x) \Rightarrow f(\frac{۱}{۱۲})=۳\sin\frac{\pi}{۳}=\frac{۳\sqrt{۳}}{۲}$$

۱۶- متوسط

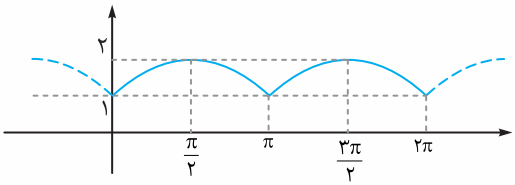
آ) برای رسم نمودار این تابع کافی‌ست نمودار $y=\sin x$ رو رسم کنیم، سپس به اندازه $\frac{\pi}{۴}$ به سمت راست منتقل کرده یک واحد به پایین ببریم:





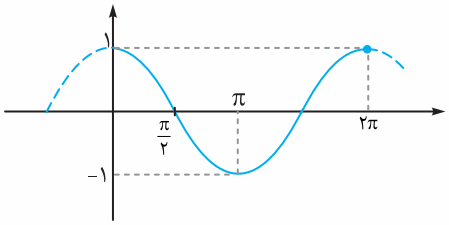
این نمودار در بازه $[۰,\pi]$ یک‌به‌یک نیست زیرا خطی موازی محور **x**ها وجود دارد که نمودار را در بیش از یک نقطه قطع می‌کند.

ب) یک به یک نیست.



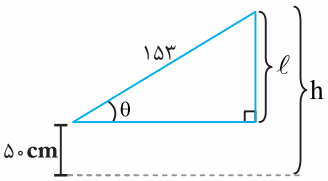
ج) در بازه $(۰,\pi)$ یک به یک است، زیرا هر خطی به موازات محور x نمودار را در یک نقطه قطع می‌کند.

$$y=-\cos(x+\pi)=\cos x$$



۱۷- آسان

در ربات طراحی شده مثلثی قائم‌الزاویه به صورت زیر وجود دارد:

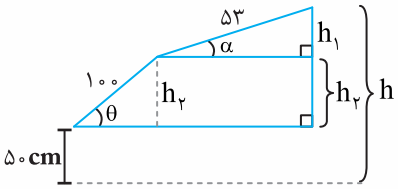


$$\sin\theta=\frac{\ell}{۱۵۳} \Rightarrow \ell=۱۵۳\sin\theta$$

ارتفاع نوک گیره ربات: $h=۵۰+\ell \Rightarrow h=۵۰+۱۵۳\sin\theta \quad ۰\le\theta\le\frac{\pi}{۲}$

۱۸- آسان

آ) با رسم روبات به صورت ساده داریم:



$$\sin\theta=\frac{h_۲}{۱۰۰} \Rightarrow h_۲=۱۰۰\sin\theta$$

$$\sin\alpha=\frac{h_۱}{۵۳} \Rightarrow h_۱=۵۳\sin\alpha$$

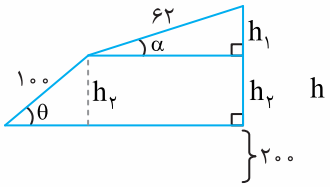
ارتفاع نوک گیره $=h_۱+h_۲+۵۰=۱۰۰\sin\theta+۵۳\sin\alpha+۵۰$

ب) $۲۳/۵=۱۰۰\sin\theta+۵۳\sin(-۳۰)+۵۰ \Rightarrow ۲۳/۵=۱۰۰\sin\theta-\frac{۵۳}{۲}+۵۰$

$$\Rightarrow ۱۰۰\sin\theta=۲۳/۵-۲۳/۵=۰ \Rightarrow \sin\theta=۰ \Rightarrow \theta=۰$$

۱۹- آسان

آ) شبیه راه‌حل سوال ۱۹ داریم:



ارتفاع نوک گیره $h = ۶۲\sin\alpha + ۱۰۰\sin\theta + ۲۰۰$

ب) $۲۱۹ = ۶۲\underbrace{\sin(-۳۰^\circ)}_{-\frac{۱}{۲}} + ۱۰۰\sin\theta + ۲۰۰$

$$۲۱۹ - ۲۰۰ + ۳۱ = ۱۰۰\sin\theta \Rightarrow \sin\theta = \frac{۵۰}{۱۰۰} = \frac{۱}{۲} \Rightarrow \theta = ۳۰^\circ$$

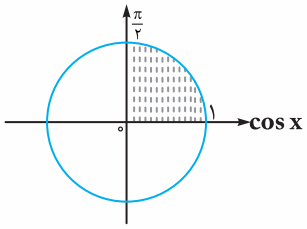
۲۰- آسان

آ) نادرست

ب) درست

پ) نادرست

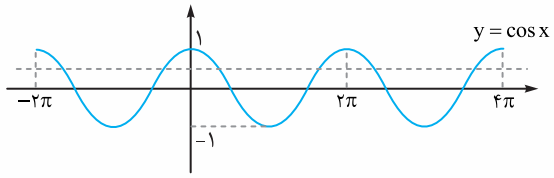
ت) نادرست: $۰ < \cos x < ۱$



ث) نادرست: $-۱ \le \sin x \le ۱$

ج) نادرست: $\cos(\pi) = -۱$

۲۱- آسان



آ) بله. اگر خط $y = \frac{۱}{۳}$ را رسم کنیم می‌بینیم که نقاط زیادی وجود دارند که $\cos x_۰ = \frac{۱}{۳}$ باشد.

ب) خیر. زیرا حداکثر مقداری که کسینوس می‌تواند بگیرد برابر ۱ است و هیچگاه مساوی ۲ نمیشه.

پ) کم‌ترین مقدار تابع $y = \cos x$ همواره برابر -۱ و حداکثر مقدار آن برابر $+۱$ است و داریم: $-۱ \le \cos x \le ۱$

۲۲- آسان

آ) $D_{\sin x} = \mathbb{R}$ ، $D_{\cos(x-\frac{\pi}{۲})} = \mathbb{R}$

$\cos(x - \frac{\pi}{۲}) = \cos(\frac{\pi}{۲} - x) = \sin x \Rightarrow$ برهم منطبق هستند.

ب) $D_{\cos x} = D_{\cos(۲\pi - x)} = \mathbb{R}$

$\cos(۲\pi - x) = \cos(-x) = \cos x \Rightarrow$ برهم منطبق هستند.

پ) $D_{\cos x} = D_{\sin(\frac{\pi}{۲}+x)} = \mathbb{R}$

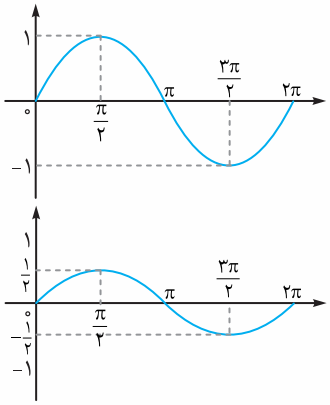
$\sin(x + \frac{\pi}{۲}) = \cos x$ برهم منطبق هستند

ت) $D_{\sin x} = D_{\sin(۵\pi - x)} = \mathbb{R}$

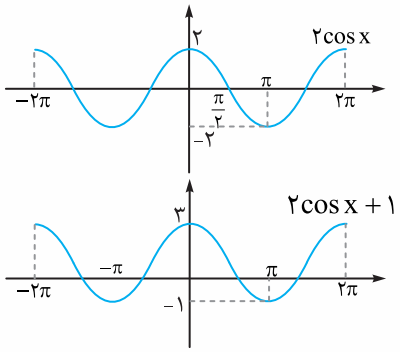
$\sin(۵\pi - x) = \sin(\pi - x) = \sin x \Rightarrow$ برهم منطبق هستند.

۲۳- متوسط

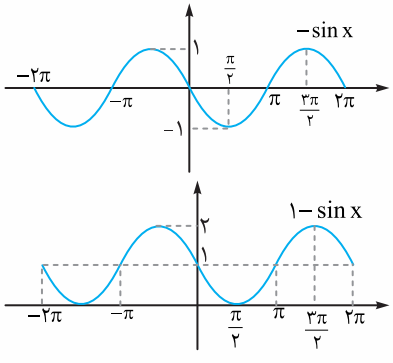
آ) تأثیر ضریب $\frac{۱}{۲}$ در برد سینوس است و باعث نصف شدن ماکزیمم و مینیمم می‌شود.



ب)

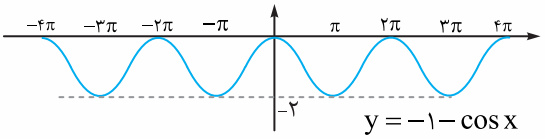


پ)

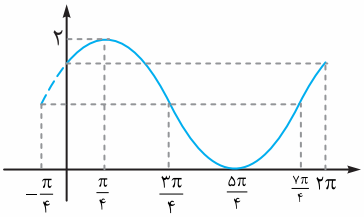


۲۴- دشوار

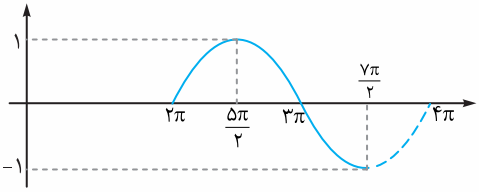
آ)



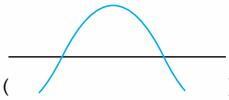
ب)



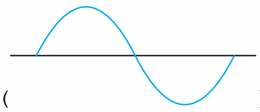
پ) $y=\cos(x-\frac{\pi}{۲})=\cos(\frac{\pi}{۲}-x)=\sin x$



۲۵- دشوار



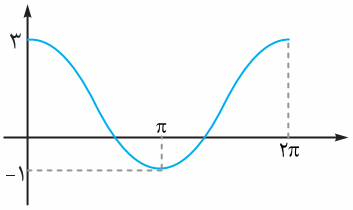
در نمودار سمت چپ، اگر شکل را در نظر بگیریم داریم ( ) پس نمودار کسینوسی است و ضریب کسینوس منفی است پس ضابطه آن در «پ» آمده است.



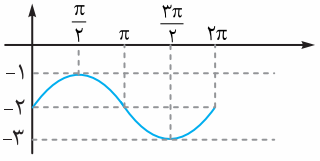
در نمودار سمت راست، داریم: ( ) پس نمودار سینوسی و با ضریب مثبت است و از روی شکل داریم $y=-۱$ است پس ۱ واحد به پایین منتقل شده و بنابراین ضابطه آن در «ب» آمده است.

حال نمودارهای مربوط به قسمت‌های آ و ت را رسم می‌کنیم:

آ) $y=۲\cos x+۱$



ت) $y=\sin x-۲$



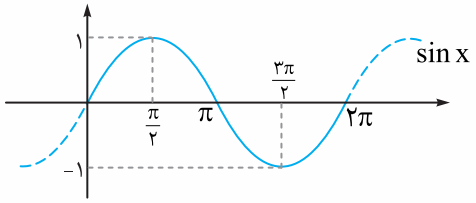
۲۶- آسان

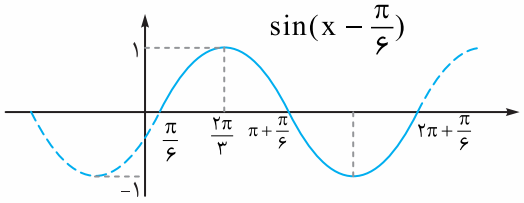
آ) درست - زیرا سینوس ضریب $\frac{۱}{۲}$ گرفته و برد باید $[-\frac{۱}{۲},\frac{۱}{۲}]$ باشد و تناوب ۲π باشد که در نمودار نیز همین‌طور آمده است.

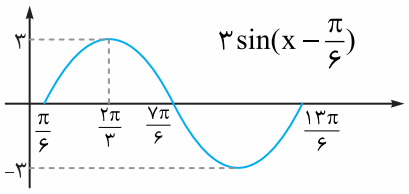
ب) نادرست - زیرا نمودار $y=\cos x-\frac{۱}{۲}$ همان نمودار $y=\cos x$ است که به اندازه $\frac{۱}{۲}$ به پایین منتقل می‌شود و بنابراین برد تابع $[-\frac{۳}{۲},\frac{۱}{۲}]$ است که در نمودار درست رسم نشده است.

۲۷- دشوار

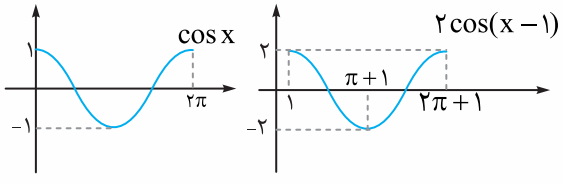
آ) $y=۳\sin(x-\frac{\pi}{۶})$

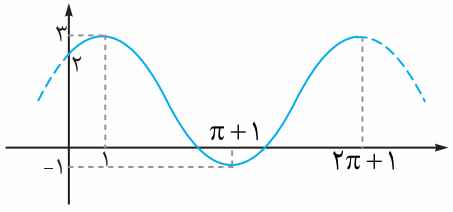






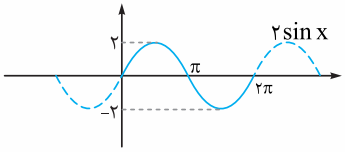
ب) $y=۲\cos(x+۱)+۱$

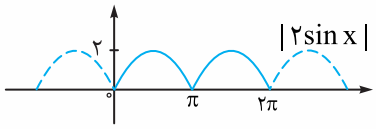




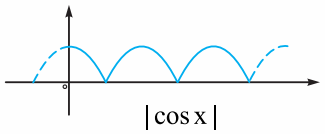
۲۸- دشوار

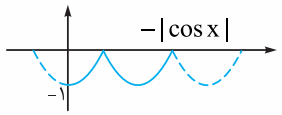
آ) $y=|۲\sin x|$

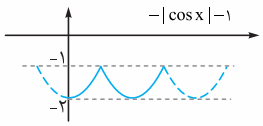




ب) $y=-|\cos x|-۱$







۲۹- دشوار

خط وسط $y=۲$ است و فاصله حداقل مقدار و حداکثر مقدار تابع تا خط وسط یک واحد است بنابراین $a=\pm ۱$. از طرفی نمودار از زیر خط وسط شروع به رسم کرده پس $a=-۱$.

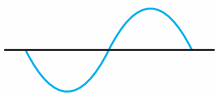
فاصله صفر تا $\frac{\pi}{۳}$ به اندازه $\frac{۱}{۴}$ کل دوره متناوب است پس: $T=۴(\frac{\pi}{۳})=\frac{۴\pi}{۳}$

$$\Rightarrow \frac{\overset{۲}{\cancel{۴\pi}}}{۳}=\frac{\cancel{۲\pi}}{|b|} \Rightarrow |b|=\frac{۳}{۲} \Rightarrow b=\frac{۳}{۲}$$

$$\begin{cases}M=۳\\ m=۱\end{cases} \Rightarrow c=\frac{۱+۳}{۲}=۲ \Rightarrow \frac{bc}{a}=\frac{\frac{۳}{\cancel{۲}}\times\cancel{۲}}{-۱}=-۳$$

۳۰- دشوار

نمودار به صورت زیر است:



پس نمودار مربوط به سینوس اما با $ab<۰$ است.

از روی نمودار متوجه می‌شویم که $\frac{۳}{۴}T=\frac{\pi}{۴}$ بنابراین: $T=\frac{\pi}{۳}$

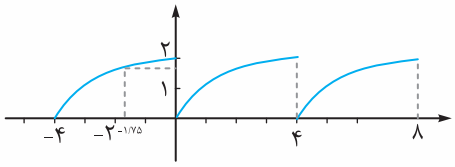
$$|b|=\frac{۲\pi}{T}=\frac{۲\cancel{\pi}}{\frac{\cancel{\pi}}{۳}}=۶ \xrightarrow{a>۰} b=-۶$$

$$|a|=\frac{M-m}{۲}=\frac{۱+۳}{۲}=۲ \xrightarrow{a>۰} a=۲,\ c=\frac{M+m}{۲}=\frac{۱-۳}{۲}=-۱$$

$$\Rightarrow a+b+c=۲-۶+۵=۱$$

۱- گزینه «۱» دشوار

اگر **f** تابعی متناوب باشد یعنی نمودار $\sqrt{x}$ در بازه‌های به فاصله ۴ واحدی تکرار میشه پس نمودار **f** به صورت زیر هست:



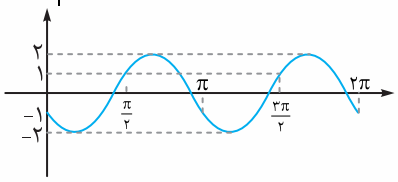
$f(-۱/۷۵)$ یعنی روی نمودار ببینیم مقدار **y** به ازای $x=-۱/۷۵$ چقدر شده است که در واقع با توجه به نمودار، می‌بینیم که مقداری بین ۱ تا ۲ دارد پس گزینه ۱ درست است.

$$f(-۱/۷۵)=f(-۱/۷۵+۴)=f(۲/۲۵)=\sqrt{۲/۲۵}=۱/۵$$

۲- گزینه «۳» دشوار

$$y=-۲\sin(۲x+\frac{\pi}{۶})$$

x	۰	$\frac{\pi}{۶}$	$\frac{۵\pi}{۱۲}$	$\frac{\pi}{۲}$	π	$\frac{۳\pi}{۲}$	۲π
y	-۱	-۲	۰	۱	-۱	۱	-۱



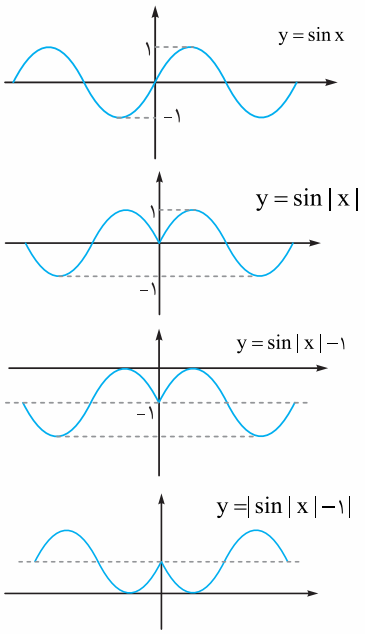
می‌دانیم

از روی نمودار هم مشخص است که تابع در دو نقطه به بیش‌ترین مقدار خود می‌رسد. در واقع زمانی این ماکزیمم رخ می‌دهد که $\sin x=-۱$ یعنی مقدار جلوی سینوس یا $\frac{۳\pi}{۲}$ شود یا $\frac{۷\pi}{۲}$:

$$۲x+\frac{\pi}{۶}=\frac{۳\pi}{۲} \Rightarrow x=\frac{۲\pi}{۳} \xrightarrow{+} \frac{۷\pi}{۳}$$

$$۲x+\frac{\pi}{۶}=\frac{۷\pi}{۲} \Rightarrow x=\frac{۵\pi}{۳}$$

۳- گزینه «۴» دشوار

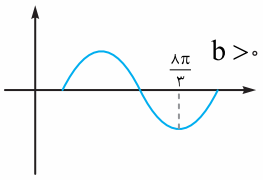


۴- گزینه «۱» دشوار

$y=\sin(x-b)$

می‌دونیم که تابع سینوس اولین مینیمم خود در سمت راست محور **y** رو به ازای $x=\frac{3\pi}{2}$ می‌گیرد اما این تابع در $x=\frac{8\pi}{3}$ گرفته که بزرگ‌تر از $\frac{3\pi}{2}$ است

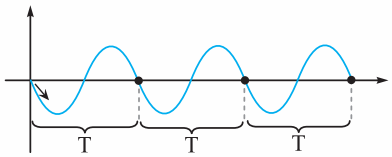
یعنی نمودار به سمت راست منتقل شده و بنابراین **b** مقداری مثبت است، پس:



$$\frac{3\pi}{2}+b=\frac{8\pi}{3} \Rightarrow b=\frac{7\pi}{6}$$

۵- گزینه «۱» دشوار

$$\begin{cases} m=-3 \\ M=3 \end{cases} \Rightarrow |a|=\frac{3+3}{2}=3$$



$$3T=3 \Rightarrow T=1$$

$$\frac{2\pi}{|b\pi|}=1 \Rightarrow |b|=2$$

نمودار از خط وسط (محور **x**) روبه پایین رسم شده بنابراین **ab** منفی است.

$$|ab|=6 \xrightarrow{ab<0} ab=-6$$

۶- گزینه «۱» متوسط

از فاصله $-2/5$ تا $3/5$ به اندازه سه دوره تناوب داریم، پس:

$$3T=3/5-(-2/5)=6 \Rightarrow T=2 \Rightarrow \frac{2\pi}{|b\pi|}=2 \Rightarrow |b|=1$$

$$y=a\sin(\frac{\pi}{2}+b\pi x)=a\cos b\pi x$$

$$\begin{cases} m=-2 \\ M=2 \end{cases} \Rightarrow |a|=\frac{2+2}{2}=2$$

و از اونجایی که نمودار کسینوس نسبت به خط وسط در حالتِ **a** مثبت (شروع رو به پایین) است پس: $a=2$ و با توجه به گزینه‌ها $b>0$ است. بنابراین:

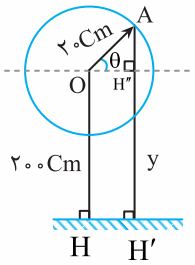
$$ab=2$$

۷- گزینه «۴» آسان

$$\begin{cases} m=-4 \\ M=5 \end{cases} \Rightarrow |a|=\frac{5-(-4)}{2}=\frac{9}{2} \xrightarrow{a>0} a=\frac{9}{2} \Rightarrow (a,c)=(\frac{9}{2},\frac{1}{2})$$

$$c=\frac{-4+5}{2}=\frac{1}{2}$$

۸- گزینه «۳» آسان



$$OAH'': \sin\theta=\frac{AH''}{20} \Rightarrow AH''=20\sin\theta$$

$$y=AH''+H''H' \Rightarrow y=20\sin\theta+200 \Rightarrow y=20(\sin\theta+10)$$

۹- گزینه «۳» آسان

$$T=1/2 \Rightarrow \frac{\not{2}\pi}{\not{1/2}}=|B| \Rightarrow |B|=\frac{\pi}{0/6}=\frac{10\pi}{6}=\frac{5\pi}{3}$$

$$|A|=\frac{5-(-5)}{2}=5 \xrightarrow{A\times B>0} A\times B=5\times\frac{5\pi}{3}=\frac{25\pi}{3}$$

۱۰- گزینه «۳» آسان

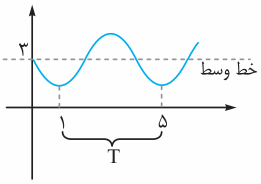
$$T=6 \Rightarrow \frac{\not{2}\not{\pi}}{\not{6}_{3}}=|b\not{\pi}| \Rightarrow |b|=\frac{1}{3}$$

$$Max=|a|+c \xrightarrow{c=0} 2=|a|$$

با توجه به نمودار a و b هم علامت هستند و چون همه گزینه‌ها مثبت است پس a و b هر دو مثبت هستند.

$$a+b=2+\frac{1}{3}=\frac{7}{3}$$

۱۱- گزینه «۲» دشوار



با توجه به فرم نمودار و نسبت به خط وسط، **ab** منفی است و دوره تناوب برابر ۴ است.

$$\frac{\pi}{|b\pi|}=\frac{2}{\pi}\Rightarrow |b|=\frac{1}{2}\xrightarrow[\text{مثبت}]{\text{ضریب سینوس}} b=-\frac{1}{2}$$

$$f(0)=3\Rightarrow a=3$$

$$\Rightarrow f(x)=3-\sin\frac{\pi}{2}x\Rightarrow f(\frac{25}{3})=3-\sin(\frac{\pi}{2}\times\frac{25}{3})$$

$$=3-\sin(\frac{25\pi}{6})=3-\sin(4\pi+\frac{\pi}{6})=3-\sin(\frac{\pi}{6})=3-\frac{1}{2}=\frac{5}{2}=2/5$$

۱۲- گزینه «۲» دشوار

$$f(x)=\frac{2}{a}-\frac{b}{1+\tan^2(Cx-\frac{3\pi}{4})}=\frac{2}{a}-\frac{b}{\frac{1}{\cos^2(Cx-\frac{3\pi}{4})}}$$

$$=\frac{2}{a}-b\cos^2(Cx-\frac{3\pi}{4})=\frac{2}{a}-b(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 2(Cx-\frac{3\pi}{4}))$$

$$f(x)=\frac{2}{a}-\frac{b}{2}-\frac{b}{2}\cos(2Cx-\frac{3\pi}{2})=\frac{2}{a}-\frac{b}{2}+\frac{b}{2}\sin(2Cx)$$

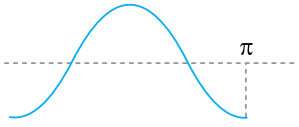
$$f(0)=3\Rightarrow \frac{2}{a}-\frac{b}{2}+\frac{b}{2}(0)=3\Rightarrow \frac{2}{a}-\frac{b}{2}=3\ \ (*)\ (b>0)$$

$$T=\frac{2\pi}{|2c|}=9\pi\Rightarrow|c|=\frac{1}{9}\xrightarrow{c>0}c=+\frac{1}{9},\ M=6\Rightarrow\frac{2}{a}-\frac{b}{2}+|\frac{b}{2}|=6$$

$$\Rightarrow\frac{2}{a}=6\Rightarrow a=\frac{1}{3}\xrightarrow{*}6-\frac{b}{2}=3\Rightarrow\frac{b}{2}=3\Rightarrow b=6$$

$$f(\frac{3\pi}{4})=f(x)=3+3\sin(\frac{2}{9}x)=3+3\sin(+\frac{\pi}{6})=3+\frac{3}{2}=4/5$$

۱۳- گزینه «۴» آسان



$$y=c+a\cos bx$$

با توجه به موقعیت نمودار $a<0$:

$$|a|=\frac{\frac{5}{2}+\frac{1}{2}}{2}=\frac{3}{2}\Rightarrow a=-\frac{3}{2}\Rightarrow ac=-\frac{3}{2}$$

$$c=\frac{\frac{5}{2}-\frac{1}{2}}{2}=1$$

۱۴- گزینه «۱» آسان

$$\begin{cases}m=-7\\M=3\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}|a|=\frac{3-(-7)}{2}=5\xrightarrow{a>0}a=5\\b=\frac{-7+3}{2}=-2\end{cases}\Rightarrow f(x)=5\cos x-2$$

$$f(\frac{\pi}{3})=5\cos\frac{\pi}{3}-2=\frac{5}{2}-2=\frac{1}{2}$$

۱۵- گزینه «۳» متوسط

با توجه به نمودار: $b<0$

$$M=\frac{3}{2}\Rightarrow a+|b|=\frac{3}{2}\Rightarrow a-b=\frac{3}{2}$$

$$f(\frac{\pi}{2})=0\Rightarrow a+b\sin(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{3})=0\Rightarrow a+b\sin\underbrace{\frac{5\pi}{6}}_{\pi+\frac{\pi}{6}}=0$$

$$\Rightarrow a+b\sin\frac{\pi}{6}=0\Rightarrow a+\frac{b}{2}=0\begin{cases}a-b=\frac{3}{2}\\a+\frac{b}{2}=0\end{cases}\Rightarrow\ +\underbrace{\begin{cases}a-b=\frac{3}{2}\\2a+b=0\end{cases}}_{3a=\frac{3}{2}\Rightarrow a=\frac{1}{2}}$$

۱۶- گزینه «۲» متوسط

$$y=a+b\cos(\frac{\pi}{2}-x)=a+b\sin x$$

$$M=3\ \Rightarrow\ a+|b|=3$$

با توجه به موقعیت نمودار، **b** مثبت است. پس:

$$a+b=3$$

$$f(-\frac{5\pi}{6})=0\ \Rightarrow\ a+b\sin(-\frac{5\pi}{6})=0\ \Rightarrow\ a-b\underbrace{\sin(\pi-\frac{\pi}{6})}_{\sin\frac{\pi}{6}}=0$$

$$\Rightarrow\ a-\frac{b}{2}=0\ \Rightarrow\ 2a-b=0$$

$$\begin{cases}a+b=3\\2a-b=0\end{cases}$$

$$3a=3\ \Rightarrow\ a=1\ \Rightarrow\ b=2\ \Rightarrow\ f(\frac{\pi}{6})=1+2\sin\frac{\pi}{6}=1+1=2$$

۱۷- گزینه «۴» دشوار

اگر خطی نسبت به $x=x_0$ متقارن باشد، داریم $f(x)=f(2x_0-x)$

نمودار نسبت به خط $x=1$ متقارن است پس $f(2-x)=f(x)$

نمودار نسبت به خط $x=3$ نیز متقارن است پس $f(6-x)=f(x)$

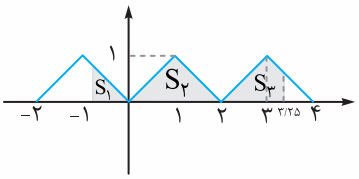
در رابطه‌ی دوم به جای x قرار می‌دهیم $(x+4)$:

$$f(6-(x+4))=f(x)\ \Rightarrow\ f(2-x)=f(x+4)$$

با مقایسه رابطه اول داریم: $f(x+4)=f(x)$

بنابراین دوره تناوب **f** برابر ۴ است.

۱۸- گزینه «۱» متوسط



نمودار رو در بازه داده شده رسم کردیم و چون متناوب است به همان صورت در راستای محور **x** تعمیم دادیم.

$$S=\underbrace{\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}\times\frac{3}{4}}_{S_1}+\underbrace{\frac{1}{2}\times2\times1}_{S_2}+\underbrace{\frac{1}{2}\times1\times1}_{S_3}+\underbrace{\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}\times(1+\frac{3}{4})}_{S_4\text{ ذوزنقه}}$$

$$=\frac{9}{32}+1+\frac{1}{2}+\frac{7}{32}=2$$

روش دوم: می‌توان مساحت یک مثلث را به‌دست آورد و دو برابر کرد.

$$S=2S_1=2\times\frac{2\times1}{2}=2$$

۱۹- گزینه «۴» متوسط

$$Max=\sqrt{3}\ \Rightarrow 2a+|b|=\sqrt{3}\xrightarrow{b<0}2a-b=\sqrt{3}$$

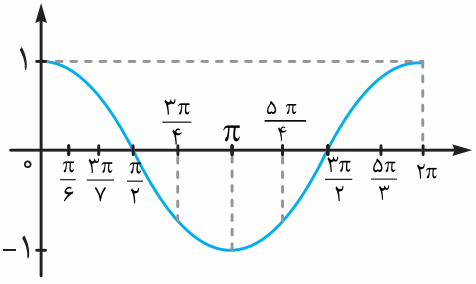
$$f(\frac{\pi}{3})=0\ \Rightarrow\ 2a+b\sin(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{6})=0\ \Rightarrow\ 2a+b=0$$

$$\begin{cases}2a-b=\sqrt{3}\\2a+b=0\end{cases}$$

$$4a=\sqrt{3}\ \Rightarrow\ a=\frac{\sqrt{3}}{4}\ \Rightarrow\ b=-\frac{\sqrt{3}}{2}$$

۲۰- گزینه «۱» متوسط

با توجه به نمودار $y=\cos x$، از بین بازه‌های داده شده فقط در بازه $(\frac{5\pi}{4},2\pi)$ یک به یک است.



۱- دشوار

ابتدا زاویه $\hat{E}$ را در مثلث **EFC** می‌یابیم: چون **E** نیم صفحه است و مجموع زوایا در مثلث **ABE** ۱۸۰ است.

$$F\hat{E}C+90+A\hat{E}B=180,\ \alpha+90+A\hat{E}B=180\ \Rightarrow\ \alpha=F\hat{E}C$$

همچنین با توجه به موازی بودن **DC** و **AB** و مورب بوده **AF** داریم:

$$D\hat{F}A=\alpha+\beta$$

- اندازه اضلاع **AD** و **DF** را در مثلث **ADF** می‌نویسیم:

$$\cos(\frac{\pi}{2}-(\alpha+\beta))=\sin(\alpha+\beta)=\frac{AD}{1}$$

$$\sin(\frac{\pi}{2}-(\alpha+\beta))=\cos(\alpha+\beta)=\frac{DF}{1}$$

- اندازه اضلاع **AE** و **EF** را برحسب β می‌نویسیم:

$$\sin\beta=\frac{EF}{1},\ \cos\beta=\frac{AE}{1}$$

- اندازه اضلاع **BE** و **EC** و **AB** را برحسب زاویه α می‌نویسیم:

$$\sin\alpha=\frac{BE}{AE}\ \Rightarrow\ \sin\alpha=\frac{BE}{\cos\beta}\ \Rightarrow\ BE=\sin\alpha\cos\beta$$

$$\cos\alpha=\frac{AB}{AE}\ \Rightarrow\ \cos\alpha=\frac{AB}{\cos\beta}\ \Rightarrow\ AB=\cos\alpha\cos\beta$$

$$\sin\alpha=\frac{FC}{EF}\ \Rightarrow\ \sin\alpha=\frac{FC}{\sin\beta}\ \Rightarrow\ FC=\sin\alpha\sin\beta$$

$$\cos\alpha=\frac{EC}{EF}\ \Rightarrow\ \cos\alpha=\frac{EC}{\sin\beta}\ \Rightarrow\ EC=\cos\alpha\sin\beta$$

با توجه به آن که در مستطیل اضلاع روبه‌رو برابرند پس:

$$AD=BE+EC\ \Rightarrow\ \sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$$

$$AB=DF+FC\ \Rightarrow\ \cos\alpha\cos\beta=\cos(\alpha+\beta)+\sin\alpha\sin\beta\Rightarrow$$
$$\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta=\cos(\alpha+\beta)$$

۲- آسان

$$\sin(30+45)=\sin30\cos45+\cos30\sin45$$

$$(\frac{1}{2})(\frac{\sqrt{2}}{2})+(\frac{\sqrt{3}}{2})(\frac{\sqrt{2}}{2})=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$$

۳- آسان

$$\cos105=\cos(60+45)=\cos60\cos45-\sin60\sin45$$

$$=(\frac{1}{2})(\frac{\sqrt{2}}{2})-(\frac{\sqrt{3}}{2})(\frac{\sqrt{2}}{2})=\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$$

۴- آسان

$$\tan(\frac{\pi}{2}+\theta)=\frac{\sin(\frac{\pi}{2}+\theta)}{\cos(\frac{\pi}{2}+\theta)}=\frac{\sin\frac{\pi}{2}\cos\theta+\cos\frac{\pi}{2}\sin\theta}{\cos\frac{\pi}{2}\cos\theta-\sin\frac{\pi}{2}\sin\theta}=\frac{\cos\theta}{-\sin\theta}=-\cot\theta$$

۵- آسان

$$\cos(\frac{\pi}{2}+\theta)=\cos\frac{\pi}{2}\cos\theta-\sin\frac{\pi}{2}\sin\theta=(0)(\cos\theta)-(1)(\sin\theta)=-\sin\theta$$

۶- آسان

$$\sin(45-30)=\sin45\cos30-\sin30\cos45$$

$$=(\frac{\sqrt{2}}{2})(\frac{\sqrt{3}}{2})-(\frac{1}{2})(\frac{\sqrt{2}}{2})=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

۷- متوسط

۱) $\cos(45-30)=\cos45\cos30+\sin45\sin30$

$$=(\frac{\sqrt{2}}{2})(\frac{\sqrt{3}}{2})+(\frac{\sqrt{2}}{2})(\frac{1}{2})=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

۲) $\tan(60+45)=\frac{\sin(60+45)}{\cos(60+45)}=\frac{\sin60\cos45+\cos60\sin45}{\cos60\cos45-\sin60\sin45}$

$$=\frac{(\frac{\sqrt{3}}{2})(\frac{\sqrt{2}}{2})+(\frac{1}{2})(\frac{\sqrt{2}}{2})}{(\frac{1}{2})(\frac{\sqrt{2}}{2})-(\frac{\sqrt{3}}{2})(\frac{\sqrt{2}}{2})}=\frac{\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}}{\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{\sqrt{2}-\sqrt{6}}$$

۳) $\sin(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4})=\sin\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4}-\sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{3}=(\frac{\sqrt{3}}{2})(\frac{\sqrt{2}}{2})-(\frac{1}{2})(\frac{\sqrt{2}}{2})$

$$=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

۸- متوسط

ابتدا با استفاده از روابط مثلثاتی داریم:

$$\sin^2\alpha=1-\cos^2\alpha=1-\frac{16}{25}=\frac{9}{25}\Rightarrow\sin\alpha=\frac{3}{5}$$

$$\sin^2\beta=1-\cos^2\beta=1-\frac{144}{169}=\frac{25}{169}\Rightarrow\sin\beta=\frac{5}{13}$$

آ) $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\sin\beta\cos\alpha=(\frac{3}{5})(-\frac{12}{13})+(\frac{4}{5})(\frac{5}{13})$

$$=-\frac{36}{65}+\frac{20}{65}=-\frac{16}{65}$$

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta=(\frac{4}{5})(-\frac{12}{13})+(\frac{3}{5})(\frac{5}{13})$$

$$=-\frac{48}{65}+\frac{15}{65}=-\frac{33}{65}$$

ب) $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta=\frac{4}{5}\times(\frac{-12}{13})-(\frac{3}{5})(\frac{5}{13})$

$$=\frac{-48}{65}-\frac{15}{65}=\frac{-63}{65}$$

چون $\sin(\alpha+\beta)$ و $\cos(\alpha+\beta)$ هر دو منفی هستند، پس $(\alpha+\beta)$ در ناحیه سوم قرار دارد.

۹- آسان

آ) $\sin(\alpha+\alpha)=\sin\alpha\cos\alpha+\cos\alpha\sin\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$

ب) $\cos(\alpha+\alpha)=\cos\alpha\cos\alpha-\sin\alpha\sin\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$

۱۰- متوسط

با استفاده از اتحادها داریم:

$$\sin^2\alpha=1-\cos^2\alpha=1-\frac{1}{9}\Rightarrow\sin\alpha=\frac{-2\sqrt{2}}{3}$$

$$\cos^2\beta=1-\sin^2\beta=1-\frac{4}{25}\Rightarrow\cos\beta=\frac{-\sqrt{21}}{5}$$

در نتیجه:

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$$

$$=(\frac{-2\sqrt{2}}{3})(\frac{-\sqrt{21}}{5})+(\frac{-1}{3})(\frac{-2}{5})=\frac{2\sqrt{42}}{15}+\frac{2}{15}=\frac{2\sqrt{42}+2}{15}$$

۱۱- متوسط

با استفاده از اتحادها:

$$\cos^2\alpha=1-\sin^2\alpha$$

$$\cos^2\alpha=1-\frac{144}{169}=\frac{25}{169}\Rightarrow\cos\alpha=\frac{5}{13}$$

$$1+\tan^2\beta=\frac{1}{\cos^2\beta}\Rightarrow1+\frac{9}{16}=\frac{1}{\cos^2\beta}\Rightarrow\frac{25}{16}=\frac{1}{\cos^2\beta}\Rightarrow\cos\beta=\frac{4}{5}$$

$$\sin^2\beta=1-\cos^2\beta\Rightarrow\sin^2\beta=1-\frac{16}{25}\Rightarrow\sin\beta=\frac{3}{5}$$

در نتیجه:

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$$

$$=(\frac{12}{13})(\frac{4}{5})-(\frac{5}{13})(\frac{3}{5})=\frac{48}{65}-\frac{15}{65}=\frac{33}{65}$$

۱۲- آسان

با توجه به رابطه $\frac{1}{2}\sin2\alpha=\sin\alpha\cos\alpha$:

$$\frac{1}{2}\sin45=\sin22/5^\circ\cos22/5^\circ\Rightarrow\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\sin22/5\cos22/5$$

$$\frac{\sqrt{2}}{4}=\sin22/5\cos22/5$$

۱۳- آسان

برای یافتن آن از رابطه $\cos2\alpha=1-2\sin^2\alpha$:

$$\cos45=1-2\sin^222/5$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2}=1-2\sin^222/5\Rightarrow2\sin^222/5=1-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\sin22/5=\sqrt{\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{2}}{4}}=\sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{4}}=\sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{2}}$$

۱۴- آسان

$$\frac{\cos^2x-\sin^2x}{\cos x+\sin x}=\frac{(\cos x-\sin x)(\cancel{\cos x+\sin x})}{\cancel{\cos x+\sin x}}=\cos x-\sin x$$

۱۵- متوسط

نتیجه این اتحاد را در ذهن بسپارید.

$$\sin(\alpha+۲\alpha)=\sin\alpha\cos۲\alpha+\cos\alpha\sin۲\alpha$$

$$=\sin\alpha(۱-۲\sin^۲\alpha)+\cos\alpha(۲\sin\alpha\cos\alpha)$$

$$=\sin\alpha-۲\sin^۳\alpha+۲\sin\alpha\cos^۲\alpha$$

$$=\sin\alpha-۲\sin^۳\alpha+۲\sin\alpha(۱-\sin^۲\alpha)$$

$$=\sin\alpha-۲\sin^۳\alpha+۲\sin\alpha-۲\sin^۳\alpha=۳\sin\alpha-۴\sin^۳\alpha$$

۱۶- متوسط

نتیجه این اثبات را در ذهن بسپارید.

$$\cos(\alpha+۲\alpha)=\cos\alpha\cos۲\alpha-\sin\alpha\sin۲\alpha$$

$$=\cos\alpha(۲\cos^۲\alpha-۱)-\sin\alpha(۲\sin\alpha\cos\alpha)$$

$$=۲\cos^۳\alpha-\cos\alpha-۲(۱-\cos^۲\alpha)\cos\alpha$$

$$=۲\cos^۳\alpha-\cos\alpha-۲\cos\alpha+۲\cos^۳\alpha=۴\cos^۳\alpha-۳\cos\alpha$$

۱۷- آسان

با استفاده از فرمول $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$ داریم:

$$\cos۱۰\cos۲۰-\sin۱۰\sin۲۰=\cos(۱۰+۲۰)=\cos۳۰=\frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

۱۸- آسان

با استفاده از فرمول $\cos۲\alpha=\cos^۲\alpha-\sin^۲\alpha$ داریم:

$$\cos^۲۱۵-\sin^۲۱۵=\cos۳۰=\frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

۱۹- متوسط

با استفاده از فرمول $\sin۲\alpha=۲\sin\alpha\cos\alpha$ می‌توانیم بنویسیم:

$$\sin۷۵=۲\sin۳۷/۵\cos۳۷/۵ \xrightarrow{\text{پس}} \frac{۱}{۲}\sin۷۵=\sin۳۷/۵\times\cos۳۷/۵$$

از طرفی برای یافتن $\sin۷۵$ می‌توان از رابطه:

$$\sin۷۵=\sin(۳۰+۴۵)=\sin۳۰\cos۴۵+\sin۴۵\cos۳۰$$

$$=(\frac{۱}{۲})(\frac{\sqrt{۲}}{۲})+(\frac{\sqrt{۳}}{۲})(\frac{\sqrt{۲}}{۲})=\frac{\sqrt{۲}+\sqrt{۶}}{۴}$$

درنتیجه:

$$\sin۳۷/۵\times\cos۳۷/۵=\frac{۱}{۲}\times\frac{\sqrt{۶}+\sqrt{۲}}{۴}=\frac{\sqrt{۲}+\sqrt{۶}}{۸}$$

۲۰- متوسط

$$\cos(۲\alpha+۲\alpha)=\cos۲\alpha\cos۲\alpha-\sin۲\alpha\sin۲\alpha$$

$$=\cos^۲۲\alpha-\sin^۲۲\alpha \xrightarrow{\sin^۲۲\alpha=۱-\cos^۲۲\alpha}$$

$$=\cos^۲۲\alpha-۱+\cos^۲۲\alpha=۲\cos^۲۲\alpha-۱$$

۲۱- متوسط

حواستون باشه‌ها! فرمول‌های این سوال را در ذهن بسپارید:

آ) $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$$

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta} \xrightarrow[\text{تقسیم می‌کنیم}]{\text{کل عبارت‌ها را بر}}$$

$$\frac{\frac{\sin\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta}+\frac{\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}{۱-\frac{\sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{۱-\tan\alpha\tan\beta}$$

ب) $\cot(\alpha+\beta)=\frac{\text{coa}\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta}{\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta} \xrightarrow[\text{تقسیم می‌کنیم}]{\text{کل عبارت را بر}}$

$$\frac{\frac{\cos\alpha\cos\beta}{\sin\alpha\sin\beta}-\frac{\sin\alpha\sin\beta}{\sin\alpha\sin\beta}}{\frac{\sin\alpha\cos\beta}{\sin\alpha\sin\beta}+\frac{\cos\alpha\sin\beta}{\sin\alpha\sin\beta}}=\frac{\cot\alpha\cot\beta-۱}{\cot\beta+\cot\alpha}$$

۲۲- متوسط

آ) $\cos(۳۰+۴۵)=\cos۳۰\cos۴۵-\sin۳۰\sin۴۵$

$$=(\frac{\sqrt{۳}}{۲})(\frac{\sqrt{۲}}{۲})-(\frac{۱}{۲})(\frac{\sqrt{۲}}{۲})=\frac{\sqrt{۶}-\sqrt{۲}}{۴}$$

ب) $\tan(\frac{\pi}{۳}+\frac{\pi}{۴})=\frac{\tan\frac{\pi}{۳}+\tan\frac{\pi}{۴}}{۱-\tan\frac{\pi}{۳}\tan\frac{\pi}{۴}}=\frac{\sqrt{۳}+۱}{۱-\sqrt{۳}}$

پ) $\cot(۲۷۰+۱۵)=-\tan۱۵=-\tan(۴۵-۳۰)$

$$=-\frac{\tan۴۵-\tan۳۰}{۱+\tan۴۵\tan۳۰}=-\frac{۱-\frac{\sqrt{۳}}{۳}}{۱+\frac{\sqrt{۳}}{۳}}$$

۲۳- متوسط

ابتدا با استفاده از اتحاد:

$$\sin\beta=\sqrt{۱-\frac{۲۵}{۱۶۹}}=\frac{۱۲}{۱۳},\ \cos\alpha=\sqrt{۱-\frac{۹}{۲۵}}=\frac{۴}{۵}\ \sin^۲x+\cos^۲x=۱$$

آ) $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\sin\beta\cos\alpha=(\frac{۳}{۵})(-\frac{۵}{۱۳})+(\frac{۴}{۵})(\frac{۱۲}{۱۳})$

$$=-\frac{۱۵}{۶۵}+\frac{۴۸}{۶۵}=\frac{۳۳}{۶۵}$$

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta=(\frac{۴}{۵})(-\frac{۵}{۱۳})+(\frac{۳}{۵})(\frac{۱۲}{۱۳})$$

$$=\frac{-۲۰}{۶۵}+\frac{۳۶}{۶۵}=\frac{۱۶}{۶۵}$$

ب) $\sin(\alpha+\beta)=-\frac{۳۳}{۶۵}$

$$\cos(\alpha+\beta)=-\frac{۵۶}{۶۵}$$

چون $\sin(\alpha+\beta)$ و $\cos(\alpha+\beta)$ هر دو منفی هستند پس $(\alpha+\beta)$ در ربع سوم قرار دارد.

۲۴- متوسط

طرف راست $=\sqrt{۲}(\sin\alpha\cos\frac{\pi}{۴}\pm\cos\alpha\sin\frac{\pi}{۴})=\sqrt{۲}(\frac{\sqrt{۲}}{۲}\sin\alpha\pm\frac{\sqrt{۲}}{۲}\cos\alpha)$

$=\sin\alpha\pm\cos\alpha$

۲۵- متوسط

$\sin۱۰۵=\sin(۶۰+۴۵)=\sin۶۰\cos۴۵+\sin۴۵\cos۶۰$

$=(\frac{\sqrt{۳}}{۲})(\frac{\sqrt{۲}}{۲})+(\frac{\sqrt{۲}}{۲})(\frac{۱}{۲})=\frac{\sqrt{۶}+\sqrt{۲}}{۴}$

$\cos۱۰۵=\cos(۶۰+۴۵)=\cos۶۰\cos۴۵-\sin۶۰\sin۴۵$

$=(\frac{۱}{۲})(\frac{\sqrt{۲}}{۲})-(\frac{\sqrt{۳}}{۲})(\frac{\sqrt{۲}}{۲})=\frac{\sqrt{۲}-\sqrt{۶}}{۴}$

درنتیجه:

$=\frac{\sqrt{۶}+\sqrt{۲}+\sqrt{۲}-\sqrt{۶}}{۴}=\frac{۲\sqrt{۲}}{۴}=\frac{\sqrt{۲}}{۲}$

۲۶- متوسط

برای محاسبه آن از فرمول $\cos۲\alpha=۲\cos^۲\alpha-۱$:

$\cos۴۵=۲\cos^۲۲/۵-۱\Rightarrow\frac{\sqrt{۲}}{۲}=۲\cos^۲۲/۵-۱$

$\frac{\sqrt{۲}}{۲}+۱=۲\cos^۲۲/۵=\cos^۲۲/۵=\frac{۱}{۲}+\frac{\sqrt{۲}}{۴}=\frac{۲+\sqrt{۲}}{۴}$

$\Rightarrow\cos۲۲/۵=\sqrt{\frac{۲+\sqrt{۲}}{۲}}$

۲۷- دشوار

حواستون باشه‌ها! فرمول $\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{۱-\tan\alpha\tan\beta}$ را به ذهن بسپارید.

$\tan(\frac{\pi}{۴}+۲x)=\frac{\tan\frac{\pi}{۴}+\tan۲x}{۱-\tan\frac{\pi}{۴}\tan۲x}=\frac{۱+\tan۲x}{۱-\tan۲x}\quad(*)$

برای محاسبه $\tan۲x$ از رابطه $\tan۲x=\frac{۲\tan x}{۱-\tan^۲x}$ استفاده می‌کنیم:

$\tan۲x=\frac{۲(\frac{۱}{۲})}{۱-\frac{۱}{۴}}=\frac{۱}{\frac{۳}{۴}}=\frac{۴}{۳}$

پس درنتیجه با جایگذاری در *:

$\frac{۱+\frac{۴}{۳}}{۱-\frac{۴}{۳}}=\frac{\frac{۷}{۳}}{-\frac{۱}{۳}}=-۷$

۲۸- دشوار

اتحاد قسمت آ این سوال را به خاطر بسپارید:

آ) $\frac{\sin x}{۱+\cos x}=\frac{۲\sin\frac{x}{۲}\cos\frac{x}{۲}}{۲\cos^۲\frac{x}{۲}}=\frac{\cancel{۲}\sin\frac{x}{۲}\cancel{\cos\frac{x}{۲}}}{\cancel{۲}\cancel{\cos^۲\frac{x}{۲}}}=\frac{\sin\frac{x}{۲}}{\cos\frac{x}{۲}}=\tan\frac{x}{۲}$

ب) $\frac{\sin۲x}{\cos۲x}\times\frac{\cos x}{\sin x}-\frac{\sin x}{\cos x}\times\frac{\sin۲x}{\cos۲x}=\frac{\sin۲x\cos^۲x-\sin^۲x\sin۲x}{\cos۲x\sin x\cos x}$

$\frac{\sin۲x(\cos^۲x-\sin^۲x)}{\cos۲x\sin x\cos x}=\frac{۲\sin x\cos x\cos۲x}{\cos۲x\sin x\cos x}=۲$

۲۹- متوسط

آ) $\cos(\pi+\frac{\pi}{۱۲})=-\cos\frac{\pi}{۱۲}=-\cos(\frac{\pi}{۳}-\frac{\pi}{۴})$

$=-[\cos\frac{\pi}{۳}\cos\frac{\pi}{۴}+\sin\frac{\pi}{۳}\sin\frac{\pi}{۴}]=-[(\frac{۱}{۲})(\frac{\sqrt{۲}}{۲})+(\frac{\sqrt{۳}}{۲})(\frac{\sqrt{۲}}{۲})]$

$-[\frac{\sqrt{۲}}{۴}+\frac{\sqrt{۶}}{۴}]=\frac{-\sqrt{۲}-\sqrt{۶}}{۴}$

ب) $\tan(\frac{\pi}{۳}-\frac{\pi}{۴})=\frac{\tan\frac{\pi}{۳}-\tan\frac{\pi}{۴}}{۱+\tan\frac{\pi}{۳}\tan\frac{\pi}{۴}}=\frac{\sqrt{۳}-۱}{۱+\sqrt{۳}}$

۳۰- متوسط

ابتدا با استفاده از اتحادها $\cos^۲\alpha=۱-\sin^۲\alpha$:

$\cos^۲\alpha=۱-\frac{۴۹}{۶۲۵}\Rightarrow\cos^۲\alpha=\frac{۵۷۶}{۶۲۵}\Rightarrow\cos\alpha=\frac{-۲۴}{۲۵}$

همچنین با استفاده از $۱+\tan^۲\beta=\frac{۱}{\cos^۲\beta}$:

$۱+\frac{۲۲۵}{۶۴}=\frac{۱}{\cos^۲\beta}\Rightarrow\frac{۲۸۹}{۶۴}=\frac{۱}{\cos^۲\beta}\Rightarrow\cos\beta=-\frac{۸}{۱۷},\sin\beta=\frac{۱۵}{۱۷}$

$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\sin\beta\cos\alpha=(-\frac{۷}{۲۵})(\frac{-۸}{۱۷})-(\frac{۱۵}{۱۷})(\frac{-۲۴}{۲۵})$

$=\frac{۵۶}{۴۲۵}+\frac{۳۶۰}{۴۲۵}=\frac{۴۱۶}{۴۲۵}$

۳۱- متوسط

ابتدا با توجه به متوجه می‌شویم $\sin^۲\alpha=۱-\frac{۱۴۴}{۱۶۹}=\frac{۲۵}{۱۶۹}\Rightarrow\sin\alpha=\frac{-۵}{۱۳}$

آ) $\sin۲\alpha=۲\sin\alpha\cos\alpha=۲(-\frac{۵}{۱۳})(\frac{۱۲}{۱۳})=\frac{-۱۲۰}{۱۶۹}$

ب) $\cos۲\alpha=۲\cos^۲\alpha-۱=۲(\frac{۱۲}{۱۳})^۲-۱=۲(\frac{۱۴۴}{۱۶۹})-۱=\frac{۲۸۸}{۱۶۹}-۱=\frac{۱۱۹}{۱۶۹}$

پ) $\tan۲\alpha=\frac{۲\tan\alpha}{۱-\tan^۲\alpha}=\frac{۲(-\frac{۵}{۱۲})}{۱-\frac{۲۵}{۱۴۴}}=\frac{-\frac{۱۰}{۱۲}}{\frac{۱۱۹}{۱۴۴}}=\frac{-۱۲۰}{۱۱۹}$

۳۲- متوسط

نتیجه این سوال را در ذهن بسپارید:

$\sin\alpha+\cos\alpha=\sqrt{۲}(\frac{\sqrt{۲}}{۲}\sin\alpha+\frac{\sqrt{۲}}{۲}\cos\alpha)=\sqrt{۲}(\sin\frac{\pi}{۴}\sin\alpha+\cos\frac{\pi}{۴}\cos\alpha)$

$=\sqrt{۲}(\sin(\alpha+\frac{\pi}{۴}))=\sqrt{۲}\cos(\frac{\pi}{۲}-(\alpha+\frac{\pi}{۴}))=\sqrt{۲}\cos(\frac{\pi}{۴}-\alpha)$

$=\sqrt{۲}\cos(\alpha-\frac{\pi}{۴})$

۳۳- متوسط

نتیجه این سوال را در ذهن بسپارید:

$\sin۲\alpha=۲\sin\alpha\cos\alpha\xrightarrow[\text{تقسیم و هم ضرب می‌کنیم}]{\text{عبارت را هم }\cos\alpha}\frac{۲\sin\alpha}{\cos\alpha}.\cos^۲\alpha$

$۲\tan\alpha\times\frac{۱}{\frac{۱}{\cos^۲\alpha}}=۲\tan\alpha\times\frac{۱}{۱+\tan^۲\alpha}=\frac{۲\tan\alpha}{۱+\tan^۲\alpha}$

۳۴- آسان

$\cos ۲\alpha = \cos^۲\alpha - \sin^۲\alpha = \cos^۲\alpha - (۱ - \cos^۲\alpha)$

$= \cos^۲\alpha - ۱ + \cos^۲\alpha = ۲\cos^۲\alpha - ۱$

۳۵- متوسط

نتیجه این سوال را در ذهن بسپارید:

$$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} + \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{\sin^۲\alpha + \cos^۲\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha} = \frac{۱}{\frac{۱}{۲}\sin ۲\alpha} = \frac{۲}{\sin ۲\alpha}$$

۳۶- متوسط

حواستون باشه‌ها! همیشه ایده به تـوان ۲ رسـاندن طـرفین را در ذهـن داشـته باشید.

$$\sin^۲ x + \cos^۲ x + ۲\sin x\cos x = \frac{۱}{۴} \Rightarrow ۱ + \sin ۲x = \frac{۱}{۴} \Rightarrow \sin ۲x = -\frac{۳}{۴}$$

فرمول $\tan x + \cot x = \frac{۲}{\sin ۲x}$ را در ذهن داشته باشید:

$$\tan x + \cot x = \frac{۲}{-\frac{۳}{۴}} = -\frac{۸}{۳}$$

۳۷- متوسط

حواستون باشه‌ها!

فرمول $\tan x + \cot x = \frac{۲}{\sin ۲x}$ را در ذهن بسپارید.

$$\tan ۱۵ + \cot ۱۵ = \frac{۲}{\sin ۳۰} = \frac{۲}{\frac{۱}{۲}} = ۴$$

۳۸- متوسط

حواستون باشه‌ها فرمول:

$\tan x - \cot x = -۲\cot ۲x$

را در ذهن بسپارید.

$\tan ۲۲/۵ - \cot ۲۲/۵ = -۲\cot ۴۵ = -۲(۱) = -۲$

۳۹- متوسط

نتیجه این سوال را در ذهن بسپارید:

$\alpha = \frac{\pi}{۴} - \beta$

$$(۱ + \tan(\frac{\pi}{۴} - \beta))(۱ + \tan\beta) = (۱ + \frac{\tan\frac{\pi}{۴} - \tan\beta}{۱ + \tan\frac{\pi}{۴}\tan\beta})(۱ + \tan\beta)$$

$$(۱ + \frac{۱ - \tan\beta}{۱ + \tan\beta})(۱ + \tan\beta)$$

$$(\frac{۱ + \cancel{\tan\beta} + ۱ - \cancel{\tan\beta}}{\cancel{۱ + \tan\beta}})(\cancel{۱ + \tan\beta}) = ۲$$

۴۰- دشوار

ابتدا عبارت را ساده کنیم:

$$\frac{\frac{\sin x}{\cos x}(\frac{\cos^۲ x - \sin^۲ x}{\cos^۲ x})}{\frac{۱}{\cos^۴ x}} = \frac{\frac{\sin x.\cos ۲x}{\cos^۳ x}}{\frac{۱}{\cos^۴ x}} = \frac{\sin x.\cos ۲x}{\frac{۱}{\cos x}}$$

$$= \underbrace{\sin x\cos x}.\cos ۲x = \frac{۱}{۲}\underbrace{\sin ۲x.\cos ۲x} = \frac{۱}{۴}\sin ۴x = \frac{۱}{۸}$$

در نتیجه $\sin ۴x = \frac{۱}{۲}$ است.

۱- گزینه «۳» متوسط

$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$

اگر $\sin\alpha = \frac{۳}{۵}$ باشد طبـق فیثـاغورس $\cos\alpha = \frac{۴}{۵}$ همچنـین $\cos\beta = -\frac{۵}{۱۳}$

پس $\sin\beta = \frac{-۱۲}{۱۳}$.

$$= (\frac{۳}{۵})(-\frac{۵}{۱۳}) + (\frac{۴}{۵})(-\frac{۱۲}{۱۳}) = \frac{-۱۵}{۶۵} - \frac{۴۸}{۶۵} = -\frac{۶۳}{۶۵}$$

۲- گزینه «۲» متوسط

$$\frac{\sin ۳x\cos x - \sin x\cos ۳x}{\sin x\cos x} = \frac{\sin(۳x - x)}{\frac{۱}{۲}\sin ۲x} = \frac{\sin ۲x}{\frac{۱}{۲}\sin ۲x} = ۲$$

۳- گزینه «۴» دشوار

با ساده کردن عبارت خواسته شده داریم:

$$\frac{(\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta)(\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta)}{(\sin\alpha\cos\beta - \sin\beta\cos\alpha)(\sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha)} =$$

$$\frac{[\cos(\alpha + \beta)][\cos(\alpha - \beta)]}{[\sin(s - \beta)][\sin(\alpha + \beta)]} = \frac{(\cos(۱۳۵))}{(\sin(۱۳۵))} \times \cot(\alpha - \beta)$$

$$= \cot(۱۳۵) \times \cot(\alpha - \beta) = \cot(۱۸۰ - ۴۵) \times \cot(\alpha - \beta)$$

$$= -\cot ۴۵ \times \frac{۴}{۳} = -۱ \times \frac{۴}{۳} = -\frac{۴}{۳}$$

۴- گزینه «۳» متوسط

حواستون باشه‌ها! فرمول $\sin\alpha \pm \cos\alpha = \sqrt{۲}\sin(\alpha \pm \frac{\pi}{۴})$ را در ذهن بسپارید:

$$\frac{\sin^۳ x + \cos^۳ x}{\sin x + \cos x} + \frac{۱}{۲}\sin ۲x =$$

$$\frac{(\sin x + \cos x)(\sin^۲ x - \sin x \cos x + \cos^۲ x)}{\sin x + \cos x} + \frac{۱}{۲}\sin ۲x$$

$$= (۱ - \sin x \cos x) + \frac{۱}{۲}\sin ۲x = ۱ - \frac{۱}{۲}\sin ۲x + \frac{۱}{۲}\sin ۲x = ۱$$

۵- گزینه «۱» دشوار

ما به دنبال $\cos(۲x - \frac{\pi}{۴})$ می‌گردیم پس:

$$\cos(۲x - \frac{\pi}{۴}) = \cos ۲x \cos\frac{\pi}{۴} + \sin ۲x \sin\frac{\pi}{۴} = \frac{\sqrt{۲}}{۲}\cos ۲x + \frac{\sqrt{۲}}{۲}\sin ۲x$$

$$= \frac{\sqrt{۲}}{۲}(\cos ۲x + \sin ۲x) \ *$$

حالا به ساده کردن عبارت اولیه می‌پردازیم:

$$\sin x \cos x - \sin^۲ x = -۱$$

$$\frac{۱}{۲}\sin ۲x - \sin^۲ x = -۱$$

$$\sin ۲x - ۲\sin^۲ x = -۲$$

$$\sin ۲x + \underbrace{۱ - ۲\sin^۲ x}_{\cos ۲x} = ۱ - ۲$$

$$\sin ۲x + \cos ۲x = -۱$$

و جایگذاری آن در * داریم:

$$\frac{\sqrt{۲}}{۲}(\cos ۲x + \sin ۲x) = \frac{\sqrt{۲}}{۲}(-۱) = -\frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

۶- گزینه «۲» متوسط

با ساده کردن عبارت داده شده داریم:

$$\frac{۱ - \frac{\sin ۱۵}{\cos ۱۵}}{۱ + \frac{\sin ۱۵}{\cos ۱۵}} = \frac{\frac{\cos ۱۵ - \sin ۱۵}{\cos ۱۵}}{\frac{\cos ۱۵ + \sin ۱۵}{\cos ۱۵}} = \frac{\cos ۱۵ - \sin ۱۵}{\cos ۱۵ + \sin ۱۵} = \frac{-\sqrt{۲}\sin(۱۵ - ۴۵)}{\sqrt{۲}\sin(۱۵ + ۴۵)}$$

حواستون باشه فرمول $\sin\alpha \pm \cos\alpha = \sqrt{۲}\sin(\alpha \pm \frac{\pi}{۴})$ را به ذهن بسپارید:

$$= \frac{-\sin(-۳۰)}{\sin(۶۰)} = \frac{\frac{۱}{۲}}{\frac{\sqrt{۳}}{۲}} = \frac{۱}{\sqrt{۳}} \xrightarrow{\text{گویا کنید}} \frac{۱}{\sqrt{۳}} \times \frac{\sqrt{۳}}{\sqrt{۳}} = \frac{\sqrt{۳}}{۳}$$

۷- گزینه «۳» آسان

ابتدا $\sin ۹۷/۵$ را ساده می‌کنیم:

$$\sin(۹۰ + ۷/۵) = \cos ۷/۵$$

درنتیجه:

$$\underbrace{\sin ۷/۵ \cos ۷/۵}_{\frac{۱}{۲}\sin ۱۵}\cos ۱۵ = \frac{۱}{۲}\underbrace{\sin ۱۵ \cos ۱۵}_{\frac{۱}{۲}\sin ۳۰} = \frac{۱}{۴} \times \sin ۳۰ = \frac{۱}{۴} \times \frac{۱}{۲} = \frac{۱}{۸}$$

۸- گزینه «۳» متوسط

$$\sin ۳a = \sin(۲a + a) = \sin ۲a \cos a + \sin a \cos ۲a$$

$$\cos ۳a = \cos(۲a + a) = \cos a \cos ۲a - \sin a \sin ۲a$$

درنتیجه:

$$\frac{\cancel{\sin ۲a \cos a} + \sin a \cos ۲a - \cancel{\sin ۲a \cos a}}{\cos ۲a \cos a - \cancel{\sin a \sin ۲a} + \cancel{\sin ۲a \sin a}} = \frac{\sin a \cos ۲a}{\cos ۲a \cos a} = \frac{\sin a}{\cos a} = \tan a$$

۹- گزینه «۲» آسان

ایده این سوال را در ذهن داشته باشید:

در صورت کسر هر دو جمله را تقسیم بر ۲ کنید:

$$۲(\frac{۱}{۲}\cos ۲۰ + \frac{\sqrt{۳}}{۲}\sin ۲۰) = ۲(\cos ۶۰ \cos ۲۰ + \sin ۶۰ \sin ۲۰) = ۲\cos(۶۰ - ۲۰)$$

$$= ۲\cos ۴۰$$

درنتیجه:

$$\frac{۲\cos ۴۰}{\cos ۴۰} = ۲$$

۱۰- گزینه «۴» دشوار

ابتدا **b** را تنها کنیم: $b = \frac{\pi}{۲} - ۲a$

$$\tan a + \tan(\frac{\pi}{۲} - ۲a) = \tan a + \cot ۲a = \tan a + \frac{۱}{\tan ۲a}$$

$$= \tan a + \frac{۱ - \tan^۲ a}{۲\tan a} = \frac{۲\tan^۲ a + ۱ - \tan^۲ a}{۲\tan a} = \frac{\tan^۲ a + ۱}{۲\tan a}$$

$$= \frac{\frac{۱}{\cos^۲ a}}{\frac{۲\sin a}{\cos a}} = \frac{۱}{۲\sin a \cos a} = \frac{۱}{\sin ۲a} = \frac{۱}{\sin(\frac{\pi}{۲} - b)} = \frac{۱}{\cos b}$$

۱۱- گزینه «۱» آسان

ابتدا حاصل هر عبارت را به دست آورید:

$$(\cos\alpha)(-\sin\alpha) - (\sin\alpha)(\cos\alpha)$$

$$-(\cos\alpha)(\sin\alpha) - (\sin\alpha)(\cos\alpha) = -۲\sin\alpha\cos\alpha = -\sin ۲\alpha$$

۱۲- گزینه «۲» دشوار

حواستون باشه‌ها دو اتحاد زیر را در ذهن بسپارید:

$$\sin ۲x = \frac{۲\tan x}{۱ + \tan^۲ x} \quad , \quad \cos ۲x = \frac{۱ - \tan^۲ x}{۱ + \tan^۲ x}$$

$$۱ - \frac{\frac{۲\tan x}{۱ + \tan^۲ x}}{\frac{۱ - \tan^۲ x}{۱ + \tan^۲ x}} = \frac{\frac{۱ + \tan^۲ x - ۲\tan x}{۱ + \tan^۲ x}}{\frac{۱ - \tan^۲ x}{۱ + \tan^۲ x}} =$$

$$= \frac{(\tan x - ۱)^۲}{(۱ - \tan^۲ x)} = \frac{(\tan x - ۱)^۲}{(۱ - \tan x)(۱ + \tan x)} = \frac{۱ - \tan x}{۱ + \tan x}$$

۱۳- گزینه «۱» متوسط

حواستون باشه‌ها این ایده توی ذهنتون باشه که طرفین رو به توان ۲ برسانید:

$$\sin^۲ x + \cos^۲ x + ۲\sin x \cos x = \frac{۱}{۹} \Rightarrow ۲\sin x \cos x = \frac{-۸}{۹} \Rightarrow \sin x \cos x = \frac{-۴}{۹}$$

حالا با استفاده از چاق و لاغر داریم:

$$\sin^۳ x + \cos^۳ x = (\sin x + \cos x)(\sin^۲ x - \sin x \cos x + \cos^۲ x)$$

$$= (\frac{۱}{۳})(\frac{۴}{۹} + ۱) = (\frac{۱}{۳})(\frac{۱۳}{۹}) = \frac{۱۳}{۲۷}$$

۱۴- گزینه «۱» دشوار

حواستون باشه‌ها هر موقع خواستید اتحاد بسازید، یک عبارت را ضرب و همچنان تقسیم کنید.

$$\frac{\sin ۱۲\cos ۱۲.\cos ۲۴.\cos ۴۸}{\sin ۱۲}=\frac{\frac{۱}{۲}\sin ۲۴.\cos ۲۴.\cos ۴۸}{\sin ۱۲}=\frac{\frac{۱}{۴}\sin ۴۸.\cos ۴۸}{\sin ۱۲}$$

$$=\frac{\frac{۱}{۸}\sin ۹۶}{\sin ۱۲}=\frac{\frac{۱}{۸}\sin(۹۰+۶)}{۲\sin ۶\cos ۶}=\frac{\frac{۱}{۸}\cos ۶}{۲\sin ۶\cos ۶}=\frac{۱}{۱۶\sin ۶}$$

۱۵- گزینه «۳» دشوار

ابتدا با استفاده از $\sin^۲ x+\cos^۲ x=۱$ و طرفین به توان ۲ رساندن داریم:

$$\sin^۴ x+\cos^۴ x+۲\sin^۲ x\cos^۲ x=\frac{۳}{۵}+۲\sin^۲ x\cos^۲ x=۱$$

$$۲\sin^۲ x\cos^۲ x=\frac{۲}{۵}$$

$$\sin^۲ x\cos^۲ x=\frac{۱}{۵}$$

$$\sin^۶ x+\cos^۶ x$$

$$=(\sin^۲ x+\cos^۲ x)^۳-۳(\sin^۲ x\cos^۲ x)(\sin^۲ x+\cos^۲ x)$$

$$\sin^۶ x+\cos^۶ x=۱-۳\sin^۲ x\cos^۲ x=۱-۳(\frac{۱}{۵})=\frac{۲}{۵}$$

۱۶- گزینه «۴» دشوار

با استفاده از فرمول‌های $۱+\tan^۲\theta=\frac{۱}{\cos^۲\theta}$ ، $۱+\cot^۲\theta=\frac{۱}{\sin^۲\theta}$

$$\frac{(\frac{۱}{\cos^۲\theta})(\frac{۱}{\sin^۲\theta})}{\cos^۲\theta-\cos^۴\theta}=\frac{\frac{۱}{\cos^۲\theta\sin^۲\theta}}{\cos^۲\theta(۱-\cos^۲\theta)}=\frac{\frac{۱}{\cos^۲\theta\sin^۲\theta}}{\frac{\cos^۲\theta.\sin^۲\theta}{۱}}=$$

$$\frac{۱}{\cos^۴\theta\sin^۴\theta}=\frac{۱}{\frac{۱}{۱۶}\sin^۴ ۲\theta}=۱۶\sin^{-۴} ۲\theta$$

۱۷- گزینه «۳» دشوار

طرفین رابطه را به توان ۲ برسانیم:

$$\sin x+\cos x=\frac{۴}{۳}$$

$$\sin^۲ x+\cos^۲ x+۲\sin x\cos x=\frac{۱۶}{۹}\Rightarrow ۱+\sin ۲x=\frac{۱۶}{۹}$$

$$\sin ۲x=\frac{۷}{۹}$$

حالا طرفین خواسته مسئله را نیز به توان ۲ می‌رسانیم:

$$\sqrt{\tan x}+\sqrt{\cos x}=A\ \Rightarrow\ \tan x+\cot x+۲=A^۲$$

با استفاده از فرمول $\tan x+\cot x=\frac{۲}{\sin ۲x}$ که در ذهن داریم:

$$\frac{۲}{\sin ۲x}+۲=A^۲\xrightarrow[\sin ۲x=\frac{۷}{۹}]{}\frac{۲}{\frac{۷}{۹}}+۲=A^۲\ \Rightarrow\ \frac{۱۸}{۷}+۲=A^۲$$

$$\sqrt{\frac{۳۲}{۷}}=A$$

۱۸- گزینه «۳» متوسط

ابتدا با استفاده از فرمول‌ها داریم: $\tan(\frac{\pi}{۲}+۲x)=-\cot ۲x$

با استفاده از فرمول $\cos^۲ x=۱-\sin^۲ x$ پس $\cos^۲ x=۱-\frac{۹}{۲۵}=\frac{۱۶}{۲۵}$.

$$\cos x=\frac{۴}{۵}$$

$$\sin ۲x=۲\sin x\cos x=۲(\frac{۳}{۵})(\frac{۴}{۵})=\frac{۲۴}{۲۵}$$

$$\cos ۲x=\cos^۲ x-\sin^۲ x=\frac{۱۶}{۲۵}-\frac{۹}{۲۵}=\frac{۷}{۲۵}$$

$$\cot ۲x=\frac{\cos ۲x}{\sin ۲x}=\frac{\frac{۷}{۲۵}}{\frac{۲۴}{۲۵}}=\frac{۷}{۲۴}\Rightarrow\tan(\frac{\pi}{۲}+۲x)=\frac{-۷}{۲۴}$$

۱۹- گزینه «۲» دشوار

ابتدا عبارت را ساده می‌کنیم:

$$\frac{۱+\cos ۲x+۲\cos^۲ ۲x-۱}{\sin ۲x+۲\sin ۲x\cos ۲x}=\frac{\cos ۲x(۱+۲\cos ۲x)}{\sin ۲x(۱+۲\cos ۲x)}=\cot ۲x$$

حالا با استفاده از $\cos x=\frac{۱}{۳}$ و فرمول $\sin^۲ x=۱-\cos^۲ x$

$$\sin^۲ x=۱-\frac{۱}{۹}=\frac{۸}{۹}\ \Rightarrow\ \sin x=\frac{۲\sqrt{۲}}{۳}$$

$$\sin ۲x=۲(\frac{۲\sqrt{۲}}{۳})(\frac{۱}{۳})=\frac{۴\sqrt{۲}}{۹}$$

$$\cos ۲x=\frac{۱}{۹}-\frac{۸}{۹}=\frac{-۷}{۹}$$

$$\cot ۲x=\frac{-۷}{۹}\Rightarrow\frac{۴\sqrt{۲}}{۹}=\frac{-۷}{۴\sqrt{۲}}\times\frac{\sqrt{۲}}{\sqrt{۲}}=\frac{-۷\sqrt{۲}}{۸}$$

۲۰- گزینه «۴» متوسط

ابتدا طرفین را به توان ۲ برسانید:

$$\sin^۲ x+\cos^۲ x-۲\sin x\cos x=\frac{۱}{۴}$$

$$۱-\sin ۲x=\frac{۱}{۴}$$

$$۱-\frac{۱}{۴}=\sin ۲x$$

$$\frac{۳}{۴}=\sin ۲x$$

$$\cos ۴x=۱-۲\sin^۲ ۲x=۱-۲(\frac{۳}{۴})^۲=۱-۲(\frac{۹}{۱۶})=۱-\frac{۹}{۸}=\frac{-۱}{۸}$$

۲۱- گزینه «۳» متوسط

ابتدا با استفاده از قوانین داریم:

$$(\sin x).(\cos x)(-\sin x)(-\cos x)=(\frac{۱}{۲}\sin ۲x)(\frac{۱}{۲}\sin ۲x)=\frac{۱}{۴}\sin^۲ ۲x$$

حالا با استفاده از فرمول‌های $\cos ۲\alpha$ داریم:

$$\cos ۴x=۱-۲\sin^۲ ۲x=a$$

$$۱-a=۲\sin^۲ ۲x\qquad\frac{۱-a}{۲}=\sin^۲ ۲x$$

درنتیجه:

$$\frac{۱}{۴}(\frac{۱-a}{۲})=\frac{۱-a}{۸}$$

۲۲- گزینه «۳» متوسط

$\tan(\frac{\pi}{۴}-\alpha)=\frac{۱}{۵}$

$\frac{\tan\frac{\pi}{۴}-\tan\alpha}{۱+\tan\frac{\pi}{۴}\tan\alpha}=\frac{۱}{۵} \Rightarrow \frac{۱-\tan\alpha}{۱+\tan\alpha}=\frac{۱}{۵} \Rightarrow ۵-۵\tan\alpha=۱+\tan\alpha$

$۴=۶\tan\alpha$

$\frac{۲}{۳}=\tan\alpha$

حالا با استفاده از فرمول $\tan ۲x=\frac{۲\tan x}{۱-\tan^۲ x}$:

$\tan ۲x=\frac{۲(\frac{۲}{۳})}{۱-\frac{۴}{۹}}=\frac{\frac{۴}{۳}}{\frac{۵}{۹}}=\frac{۱۲}{۵}=۲/۴$

۲۳- گزینه «۴» متوسط

ابتدا با استفاده از فرمول $\sin^۲ x=۱-\cos^۲ x$ داریم:

$\sin^۲ x=۱-\frac{۵}{۹}=\frac{۴}{۹} \Rightarrow \sin x=\frac{۲}{۳} \Rightarrow \tan x=\frac{۲}{\sqrt{۵}}$

حالا با استفاده از فرمول $\tan ۲x=\frac{۲\tan x}{۱-\tan^۲ x}$:

$\tan ۲x=\frac{۲\times\frac{۲}{\sqrt{۵}}}{۱-\frac{۴}{۵}}=\frac{\frac{۴}{\sqrt{۵}}}{\frac{۱}{۵}}=\frac{۲۰}{\sqrt{۵}}\times\frac{\sqrt{۵}}{\sqrt{۵}}=\frac{۲۰\sqrt{۵}}{۵}=۴\sqrt{۵}$

۲۴- گزینه «۱» متوسط

حواستون باشه‌ها: رابطه $\sin\alpha\pm\cos\alpha=\sqrt{۲}\sin(\alpha\pm\frac{\pi}{۴})$ را در ذهن بسپارید:

$\frac{[\sqrt{۲}\sin(۱۵-۴۵)]^۴}{[\sqrt{۲}\sin(۱۵+۴۵)]^۴}=(\frac{\sqrt{۲}\sin(-۳۰)}{\sqrt{۲}\sin۶۰})^۴=(\frac{-\frac{\sqrt{۲}}{۲}}{\frac{\sqrt{۶}}{۲}})^۴=(-\frac{۱}{\sqrt{۳}})^۴=\frac{۱}{۹}$

۲۵- گزینه «۱» متوسط

حواستون باشه‌ها رابطه $\sin\alpha-\cos\alpha=\sqrt{۲}\sin(\alpha-۴۵)$ را در ذهن بسپارید:

$\frac{\sin۱۵-\cos۱۵}{\sin۱۵\cos۱۵}=\frac{\sqrt{۲}\sin(۱۵-۴۵)}{\frac{۱}{۲}\sin۳۰}=\frac{\sqrt{۲}\sin(-۳۰)}{\frac{۱}{۲}\sin۳۰}=-۲\sqrt{۲}$

۲۶- گزینه «۲» متوسط

ابتدا با استفاده $\cos(\alpha\pm\beta)$ داریم:

$\cos x\cos\frac{\pi}{۳}-\sin x\sin\frac{\pi}{۳}+\cos x\cos\frac{\pi}{۳}+\sin x\sin\frac{\pi}{۳}=\frac{۲}{۳}$

$\frac{۱}{۲}\cos x-\cancel{\frac{\sqrt{۳}}{۲}\sin x}+\frac{۱}{۲}\cos x+\cancel{\frac{\sqrt{۳}}{۲}\sin x}=\frac{۲}{۳} \Rightarrow \cos x=\frac{۲}{۳}$

با استفاده از اتحاد $\cos ۲x=۲\cos^۲ x-۱$ داریم:

$\cos ۲x=۲(\frac{۲}{۳})^۲-۱=۲(\frac{۴}{۹})-۱=\frac{۸}{۹}-۱=-\frac{۱}{۹}$

۲۷- گزینه «۱» متوسط

$=[\frac{\sqrt{۲}}{۲}\cos\alpha+\frac{\sqrt{۲}}{۲}\sin\alpha]-[\frac{\sqrt{۲}}{۲}\cos\alpha-\frac{\sqrt{۲}}{۲}\sin\alpha]=$

$\cancel{\frac{\sqrt{۲}}{۲}\cos\alpha}+\frac{\sqrt{۲}}{۲}\sin\alpha-\cancel{\frac{\sqrt{۲}}{۲}\cos\alpha}+\frac{\sqrt{۲}}{۲}\sin\alpha=\sqrt{۲}\sin\alpha$

با استفاده از اتحادها داریم:

$\sin^۲\alpha=۱-\cos^۲\alpha$

$\sin^۲\alpha=۱-\frac{۷}{۹}=\frac{۲}{۹} \Rightarrow \sin\alpha=-\frac{\sqrt{۲}}{۳}$

پس $=\sqrt{۲}\sin\alpha=(\sqrt{۲})(-\frac{\sqrt{۲}}{۳})=-\frac{۲}{۳}$

۲۸- گزینه «۱» متوسط

ابتدا با استفاده از قوانین گذشته داریم:

$\cos(\frac{۳\pi}{۲}-۲\alpha)=-\sin ۲\alpha$

از طرفی می‌توانیم طرفین $\sin\alpha-\cos\alpha=\frac{۱}{۲}$ را به توان ۲ برسانیم. پس:

$\sin^۲\alpha+\cos^۲\alpha-۲\sin\alpha\cos\alpha=\frac{۱}{۴} \Rightarrow ۱-\sin ۲\alpha=\frac{۱}{۴} \Rightarrow -\sin ۲\alpha=-\frac{۳}{۴}$

۲۹- گزینه «۴» دشوار

$\cos۵۰(\frac{\sin۷۰}{\cos۷۰}+\frac{\sin۱۰}{\cos۱۰})=\cos۵۰(\frac{\sin۷۰\cos۱۰+\sin۱۰\cos۷۰}{\cos۱۰\cos۷۰})$

$=\cos۵۰\frac{\sin(۷۰+۱۰)}{\cos۱۰\cos۷۰}=\frac{\cos۵۰\sin۸۰}{\cos۱۰\cos۷۰}=\frac{\sin۴۰\times\cancel{\sin۸۰}}{\cancel{\sin۸۰}\times\sin۲۰}=\frac{۲\sin۲۰\cos۲۰}{\sin۲۰}$

$=۲\cos۲۰ \quad (\cos۵۰=\sin۴۰,\cos۱۰=\sin۱۰,\cos۷۰=\sin۲۰)$

۳۰- گزینه «۴» دشوار

$\sin۷۰(\frac{\sin۲۰}{\cos۲۰}+\frac{\sin۳۵}{\cos۳۵})=\sin۷۰(\frac{\sin۲۰\cos۳۵+\sin۳۵\cos۲۰}{\cos۲۰\cos۳۵})$

$=\sin۷۰\frac{\sin(۲۰+۳۵)}{\cos۲۰\cos۳۵}=\frac{\sin۷۰\sin۵۵}{\cos۲۰\cos۳۵}=\frac{\sin۷۰\sin۵۵}{\sin۷۰\sin۵۵}=۱$

۳۱- گزینه «۳» متوسط

حواستون باشه‌ها که در ذهن داریم: $\tan(y-x)=\frac{\tan y-\tan x}{۱+\tan y.\tan x}$

$\tan(y-x)=\frac{\sqrt{۲}+۱-\sqrt{۲}+۱}{۱+۱}=\frac{۲}{۲}=۱ \Rightarrow \tan(y-x)=۱$

$y-x=\frac{\pi}{۴}$

۳۲- گزینه «۳» — متوسط

حواستون باشه‌ها اتحادهای:

$$\tan ۲x = \frac{۲\tan x}{۱-\tan^۲ x}\ ,\ \tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{۱-\tan\alpha\tan\beta}$$

را در ذهن بسپارید. پس:

$$\tan ۲x = \frac{۲\tan x}{۱-\tan^۲ x} = \frac{۲(۱-\sqrt{۲})}{۱-(۱+۲-۲\sqrt{۲})} = \frac{۲-۲\sqrt{۲}}{-۲+۲\sqrt{۲}} = -۱$$

$$\tan(۲x+y)=\frac{\tan ۲x+\tan y}{۱-\tan ۲x\tan y}=\frac{-۱+۲}{۱+۲}=\frac{۱}{۳}$$

۳۳- گزینه «۲» — دشوار

می‌دانیم $\sin ۱۰ = \cos ۸۰$

$$\frac{\sqrt{۱-\cos ۸۰}}{\cos ۲۰}=\frac{\sqrt{۲\sin^۲ ۴۰}}{\cos ۲۰}=\frac{\sqrt{۲}\sin ۴۰}{\cos ۲۰}=\frac{۲\sqrt{۲}\sin ۲۰\cos ۲۰}{\cos ۴۰}=۲\sqrt{۲}\sin ۲۰$$

۳۴- گزینه «۳» — دشوار

ساده شده عبارت $\tan(\frac{\pi}{۴}-\alpha)$ را به دست آورده و $\sin ۲\alpha=\frac{۲\tan\alpha}{۱+\tan^۲\alpha}$ را جایگذاری می‌کنیم.

$$\frac{۱+\frac{۲\tan\alpha}{۱+\tan^۲\alpha}}{۱-\frac{۲\tan\alpha}{۱+\tan^۲\alpha}}=\frac{\frac{۱+\tan^۲\alpha+۲\tan\alpha}{۱+\tan^۲\alpha}}{\frac{۱+\tan^۲\alpha-۲\tan\alpha}{۱+\tan^۲\alpha}}=\frac{(۱+\tan\alpha)^۲}{(۱-\tan\alpha)^۲}$$

همچنین $\tan(\frac{\pi}{۴}-\alpha)=\frac{\tan\frac{\pi}{۴}-\tan\alpha}{۱+\tan\frac{\pi}{۴}\tan\alpha}=\frac{۱-\tan\alpha}{۱+\tan\alpha}$

پس:

$$A=\frac{(۱+\tan\alpha)^۲}{(۱-\tan\alpha)^۲}\times\frac{۱-\tan\alpha}{۱+\tan\alpha}=\frac{۱+\tan\alpha}{۱-\tan\alpha}=\tan(\frac{\pi}{۴}+\alpha)$$

۳۵- گزینه «۳» — متوسط

حواستون باشه‌ها در ذهن داشته باشید که:

$$\tan x-\cot x=-۲\cot x$$

با استفاده از اتحادی که در ذهن داریم:

$$-۲\cot x=۱ \Rightarrow \cot x=-\frac{۱}{۲} \Rightarrow \tan x=-۲$$

پس با استفاده از اتحاد $\tan ۲x=\frac{۲\tan x}{۱-\tan^۲ x}$

$$\tan ۲x=\frac{۲(-۲)}{۱-۴}=\frac{-۴}{-۳}=\frac{۴}{۳}$$

۳۶- گزینه «۲» — دشوار

چون $\alpha-\beta=\frac{\pi}{۴}$ است پس $\alpha-\frac{\pi}{۴}=\beta$.

$$\tan(\alpha-\frac{\pi}{۴})=\frac{۱}{۲} \Rightarrow \frac{\tan\alpha-\tan\frac{\pi}{۴}}{۱+\tan\alpha\tan\frac{\pi}{۴}}=\frac{۱}{۲}$$

$$\frac{\tan\alpha-۱}{۱+\tan\alpha}=\frac{۱}{۲} \Rightarrow ۲\tan\alpha-۲=۱+\tan\alpha$$

$$\tan\alpha=۳$$

حواستون باشه‌ها $\sin ۲\alpha=\frac{۲\tan\alpha}{۱+\tan^۲\alpha}$ (فرمول را در ذهن داشته باشید) پس:

$$\sin ۲\alpha=\frac{۲(۳)}{۱+۹}=\frac{۶}{۱۰}=۰/۶$$

۳۷- گزینه «۱» — آسان

حواستون باشه که در ذهن داریم $\frac{\sin x}{۱+\cos x}=\tan\frac{x}{۲}=\frac{۱}{۲}$ که

$$\tan(\frac{\pi}{۲}+\frac{\alpha}{۲})=-\cot\frac{\alpha}{۲}$$

چون $\tan\frac{x}{۲}=\frac{۱}{۲}$ است و tan و cot یک زاویه معکوس یکدیگرند، پس:

$$-\cot\frac{\alpha}{۲}=-۲$$

۳۸- گزینه «۲» — دشوار

حواستون باشه‌ها نتیجه این سوال را به عنوان اتحاد مثلثاتی در ذهن داشته باشید.

$$\tan\frac{x}{۲}-\cot\frac{x}{۲}=\frac{\sin\frac{x}{۲}}{\cos\frac{x}{۲}}-\frac{\cos\frac{x}{۲}}{\sin\frac{x}{۲}}=\frac{\sin^۲\frac{x}{۲}-\cos^۲\frac{x}{۲}}{\sin\frac{x}{۲}\cos\frac{x}{۲}}=\frac{-\cos x}{\frac{۱}{۲}\sin x}=-۲\cot x$$

همچنین چون $\tan x=\frac{۴}{۳}$ است پس $\cot x=\frac{۳}{۴}$ است درنتیجه:

$$-۲\cot x=-۲(\frac{۳}{۴})=-\frac{۳}{۲}$$

۳۹- گزینه «۱» — متوسط

ابتدا یادآوری ریشه‌های معادله درجه دو رو داریم:

$$s=\tan\alpha+\tan\beta=\frac{-b}{a}=۴$$

$$p=\tan\alpha.\tan\beta=\frac{c}{a}=m$$

حالا با استفاده از داده مسئله داریم:

$$\tan(\alpha+\beta)=۲ \Rightarrow \frac{\tan\alpha+\tan\beta}{۱-\tan\alpha\tan\beta}=۲ \Rightarrow \frac{۴}{۱-m}=۲ \Rightarrow ۴=۲-۲m$$

$$۲m=-۲ \Rightarrow m=-۱$$

۱- متوسط

آ) $۱۴۰\times\frac{\pi}{۱۸۰}=\frac{۱۴\pi}{۱۸}=\frac{۷\pi}{۹}$

ب) $[-۱,۱]-\mathbb{R}$

پ) $x=k\pi+\frac{\pi}{۲}$

ت) $x=۲k\pi+\pi,(-۱)$

۲- متوسط

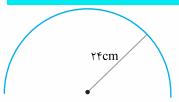
آ) نادرست ـ در ربع دوم است.

ب) درست ـ در هر مثلث ضلع رو به رو زاویه کوچک‌تر، کوچک‌تر است از ضلع رو به رو زاویه بزرگ‌تر.

$۱+\alpha+\alpha=\pi\Rightarrow\alpha=\frac{\pi-۱}{۲}$

پ) درست ـ $\cos\theta-\cos\theta=۰$

۳- آسان



$L=r\theta \qquad \theta=۱۲۰^\circ\Rightarrow\theta=\frac{۲\pi}{۳}$

$L=۲۴\times\frac{۲\pi}{۳}=\frac{۲۴\times۲\times۳/۱۴}{۳}=۵۰/۲۴\ cm$

۴- آسان

۱) $\sin(۱۸۰+۳۰)=-\sin۳۰=-\frac{۱}{۲}$

۲) $\tan(\frac{۹\pi+\pi}{۳})=\tan(۳\pi+\frac{\pi}{۳})=+\tan\frac{\pi}{۳}=\sqrt{۳}$

۵- متوسط

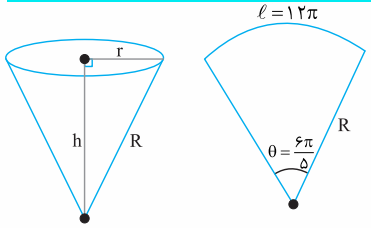
۱) $\sin(\frac{۵\pi}{۲}+۳۰)=+\cos۳۰=\frac{\sqrt{۳}}{۲}$

۲) $\cos(۴۸۰)=\cos(۳۶۰+۱۲۰)=\cos۱۲۰=\cos(۱۸۰-۶۰)=-\cos۶۰-\frac{۱}{۲}$

۳) $\tan(\frac{۶\pi+\pi}{۶})=\tan(\pi+\frac{\pi}{۶})=+\tan\frac{\pi}{۶}=\frac{\sqrt{۳}}{۳}$

۴) $\frac{\sin۳۷}{\cos۵۳}\xrightarrow{\text{متمم}}\frac{\cos۵۳}{\cos۵۳}=۱$

۶- دشوار



$\ell=R\theta\Rightarrow۱۲\pi=R\times\frac{۶\pi}{۵}\Rightarrow R=۱۰cm$

$\ell=۲\pi r\Rightarrow۱۲\pi=۲\pi r\Rightarrow r=۶cm$

$R^۲=h^۲+r^۲\Rightarrow۱۰^۲=h^۲+۶^۲\Rightarrow h^۲=۶۴\Rightarrow h=۸cm$

۷- آسان

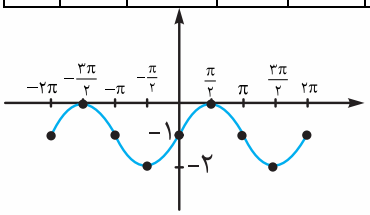
می‌دانیم اگر $\alpha+\beta=۹۰$ آنگاه $\sin\alpha=\cos\beta$ پس در نتیجه:

$x-۷۰+x-۱۰=۹۰\Rightarrow۲x-۸۰=۹۰\Rightarrow۲x=۱۷۰\Rightarrow x=۸۵$

۸- متوسط

$y=\cos(x-\frac{\pi}{۲})-۱\Rightarrow y=\sin x-۱$

x	-۲π	$\frac{-۳\pi}{۲}$	$-\pi$	$\frac{-\pi}{۲}$	۰	$\frac{\pi}{۲}$	π	$\frac{۳\pi}{۲}$	۲π
y	۱-	۰	۱-	۲-	۱-	۰	۱-	۲-	۱-



۹- متوسط

نمودار داده شده مربوط به ضابطه «آ» می‌باشد.

اگر ضابطه را به‌صورت $y=a\cos(bx)+c$ در نظر بگیریم.

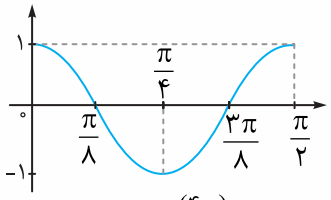
$\begin{matrix}Max=۴\\min=-۲\end{matrix}\Rightarrow|a|=\frac{Max-min}{۲}=\frac{۴-(-۲)}{۲}=۳\xrightarrow{a<۰}a=-۳$

$c=\frac{max+min}{۲}=\frac{۴+(-۲)}{۲}=۱$

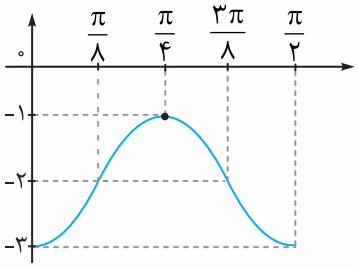
بازه‌ها هم روی محور x ۲ برابر شده پس: $b=\frac{۱}{۲}$

نمودار $y=-\cos(۴x)-۲$ را رسم می‌کنیم.

بازه‌ها را روی محور x در $\frac{۱}{۴}$ ضرب کرده، سپس نمودار را نسبت به محور x قرینه و آن را ۲ واحد به سمت پایین انتقال می‌دهیم.



$y=\cos(۴x)$



۱۰- آسان

$\theta = ۱۰^\circ \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{۱۸}$

$L = ۶۳۲۰ \times \frac{\pi}{۱۸} \simeq ۳۵۱/۱\pi$

۱۱- آسان

$\cos ۲\alpha = ۱ - ۲\sin^۲ \alpha \xrightarrow{\alpha = ۲۲/۵}$

$\cos ۴۵ = ۱ - ۲\sin^۲ ۲۲/۵ \Rightarrow \frac{\sqrt{۲}}{۲} = ۱ - ۲\sin^۲ ۲۲/۵$

$۲\sin^۲ ۲۲/۵ = ۱ - \frac{\sqrt{۲}}{۲} \Rightarrow \sin ۲۲/۵ = \sqrt{\frac{۲ - \sqrt{۲}}{۴}}$

۱۲- متوسط

$\sin\alpha = \frac{۲}{۳} \Rightarrow \cos^۲\alpha = ۱ - \sin^۲\alpha \Rightarrow \cos^۲\alpha = ۱ - \frac{۴}{۹} \Rightarrow \cos\alpha = -\frac{\sqrt{۵}}{۳}$

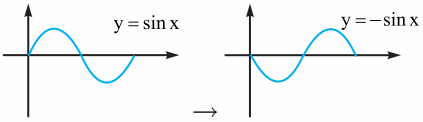
$\cos\beta = -\frac{۴}{۵} \Rightarrow \sin^۲\beta = ۱ - \frac{۱۶}{۲۵} = \frac{۹}{۲۵} \Rightarrow \sin\beta = -\frac{۳}{۵}$

$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$

$(-\frac{\sqrt{۵}}{۳})(-\frac{۴}{۵}) + (\frac{۲}{۳})(-\frac{۳}{۵})$

$\frac{۴\sqrt{۵}}{۱۵} - \frac{۶}{۱۵} = \frac{۴\sqrt{۵} - ۶}{۱۵}$

۱۳- آسان



۱- متوسط

آ) ۳۰۰ ب) $[-۱, ۱] \Rightarrow \mathbb{R}$

پ) $x = k\pi$ ت) یک ـ $x = ۲k\pi + \frac{\pi}{۲}$

۲- آسان

آ) درست $\frac{۶\pi}{۵} = \pi + \frac{\pi}{۵}$

ب) نادرست $\frac{۲\pi}{۳} + \frac{\pi}{۹} + \frac{۷\pi}{۳۶} = \frac{۲۴\pi + ۴\pi + ۷\pi}{۳۶} = \frac{۳۵\pi}{۳۶} \neq \pi$

پ) درست $\alpha = \frac{\ell}{r}$

۳- آسان

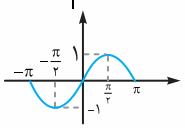
دایره کوچک‌تر $r = ۶ \Rightarrow ۲\pi = r \times \frac{\pi}{۳} \Rightarrow$ کمان $AB = L = r\theta$

کمان $MN = L = ۸ \times \frac{\pi}{۳} = \frac{۸\pi}{۳}$

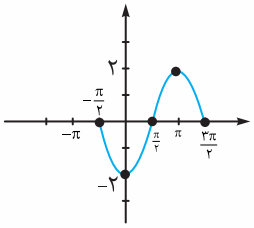
شعاع دایره بزرگ‌تر $۶ + ۲ = ۸$

۴- دشوار

x	$-\pi$	$-\frac{\pi}{۲}$	۰	$\frac{\pi}{۲}$	π
Y	۰	-۱	۰	۱	۰



$g(x) = ۲\sin(x - \frac{\pi}{۲})$ واحد به سمت راست و در راستای محور yها ۲ برابر $\frac{\pi}{۲}$



۵- متوسط

۱) $\cos(\frac{۷\pi}{۲} - \frac{\pi}{۳}) = -\sin\frac{\pi}{۳} = -\frac{\sqrt{۳}}{۲}$

۲) $-\tan(۸۴۰^\circ) = -\tan(۷۲۰ + ۱۲۰) = -\tan ۱۲۰^\circ = -\tan(۱۸۰ - ۶۰)$
$= +\tan ۶۰^\circ = \sqrt{۳}$

۳) $\sin(۶\pi) = ۰$

۴) $\frac{\tan ۱۷۰}{\tan ۱۰} = \frac{-\tan ۱۰}{\tan ۱۰} = -۱$

۶- آسان

$\ell_۱ = \ell_۲$

$r_۱\theta_۱ = r_۲\theta_۲$

$۱۵\theta_۱ = ۶۰ \times \frac{۵\pi}{۴} \Rightarrow \theta_۱ = ۵\pi$

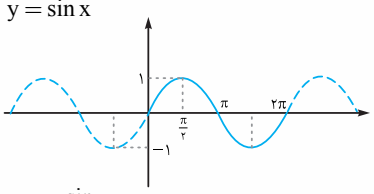
۷- متوسط

$\frac{\pi}{۹} + x + ۲\frac{\pi}{۳} + x = \frac{\pi}{۲} \Rightarrow ۲x + \frac{۷\pi}{۹} = \frac{\pi}{۲} \Rightarrow ۲x = \frac{\pi}{۲} - \frac{۷\pi}{۹}$

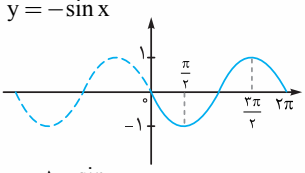
$۲x = \frac{۹\pi - ۱۴\pi}{۱۸} \Rightarrow ۲x = -\frac{۵\pi}{۱۸} \Rightarrow x = -\frac{۵\pi}{۳۶}$

۸- دشوار

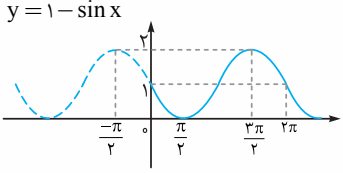
$y=\sin x$



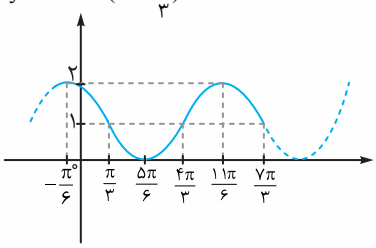
$y=-\sin x$



$y=1-\sin x$



$y=1-\sin(x-\frac{\pi}{3})$



۹- متوسط

اگر ضابطه را به‌صورت $y=a\sin(bx)+c$ در نظر بگیریم:

$(Max=3, min=1)$

$$c=\frac{Max+min}{2}=2$$

$$|a|=\frac{Max-min}{2}=1 \xrightarrow{ab>0} a=1$$

بازه‌ها روی محور x، نصف شده، پس $b=2$ یعنی نمودار داده شده مربوط به قسمت «ب» می‌باشد.

ضابطه $y=-\sin\frac{x}{2}+1$ را رسم می‌کنیم.

۱۰- متوسط

زاویه بین هر دو کابین $\frac{2\pi}{60}=\frac{\pi}{30} \Rightarrow$

حال می‌خواهیم بدانیم در $\frac{53\pi}{6}$ چندتا $\frac{\pi}{30}$ قرار دارد، پس:

$$\frac{\frac{53\pi}{6}}{\frac{\pi}{30}}=\frac{53\times \cancel{30}^{5}\times\cancel{\pi}}{\cancel{6}\times\cancel{\pi}}=265$$

پس ۲۶۵ کابین جابه‌جا شده‌ایم چون که ۶۰ کابین داشته‌ایم، پس این چرخ و فلک ۴ دور کامل زده است و در چرخ آخر ۲۵ کابین جابه‌جا شده است، پس:

$$265 \;\Big|\; \begin{matrix}60\\ \boxed{4}\end{matrix} \rightarrow \text{تعداد دور کامل}$$

$$240$$

$\boxed{25}$ ← میزان جابه‌جایی در دور آخر

الان در کابین ۳۵ نشسته‌ایم: $10+25=35$

۱۱- متوسط

$$\tan\frac{\pi}{12}=\frac{\sin\frac{\pi}{12}}{\cos\frac{\pi}{12}}=\frac{\sin(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4})}{\cos(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4})}=\frac{\sin\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4}-\cos\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{4}}{\cos\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4}+\sin\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{4}}$$

$$=\frac{(\frac{\sqrt{3}}{2})(\frac{\sqrt{2}}{2})-(\frac{1}{2})(\frac{\sqrt{2}}{2})}{(\frac{1}{2})(\frac{\sqrt{2}}{2})+(\frac{\sqrt{3}}{2})(\frac{\sqrt{2}}{2})}=\frac{\frac{\sqrt{6}}{4}-\frac{\sqrt{2}}{4}}{\frac{\sqrt{2}}{4}+\frac{\sqrt{6}}{4}}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{\sqrt{2}+\sqrt{6}}$$

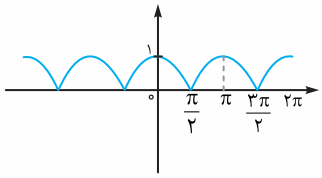
۱۲- آسان

$$\cos(2\alpha+2\alpha)=\cos 2\alpha\cos 2\alpha-\sin 2\alpha\sin 2\alpha=\cos^2 2\alpha-\sin^2 2\alpha$$

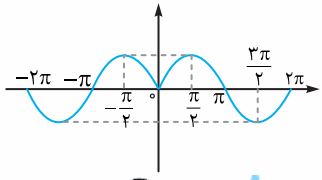
$$=1-\sin^2 2\alpha-\sin^2 2\alpha=1-2\sin^2 2\alpha$$

۱۳- دشوار

آ) $y=|\cos x|$



ب) $y=\sin|x|$



۱- گزینه «۳» - متوسط

حواستون باشه‌ها! دوره‌ی تناوب توابع $\sin bx$ و $\cos bx$ از رابطه $T=\frac{2\pi}{|b|}$

و min و max این دو تابع از $y=a\sin bx+c$

$max=|a|+c$ و $min=-|a|+c$

فاصله بین $-\frac{\pi}{4}$ تا $\frac{3\pi}{4}$ یک دوره تناوب شکل را تشکیل داده است، یعنی:

$$y=1+\frac{1}{2}a\sin 2bx \Rightarrow \pi=\frac{2\pi}{|2b|} \Rightarrow |2b|=2 \Rightarrow b=\pm 1$$

همچنین $max=\frac{3}{2}$ و $min=\frac{1}{2}$ پس:

$$\frac{3}{2}=|\frac{1}{2}a|+1 \Rightarrow |\frac{a}{2}|=\frac{1}{2} \Rightarrow |a|=1 \Rightarrow a=\pm 1$$

در نتیجه $a=1$ و $b=1$ قابل قبول است پس:

$$y=1+\frac{1}{2}\sin 2x\ ,\ a+b=2$$

۲- گزینه «۴» متوسط

عبارت را با استفاده از اتحادها ساده کنید:

$$\sqrt{\frac{۱}{\cos^۲ x}}(۲(\frac{\sqrt{۲}}{۲})^۲ - \sin^۲ x)$$

$$|\frac{۱}{\cos x}|(۱-\sin^۲ x) \xrightarrow[\text{منفی } \cos x]{\pi<x<\frac{۳\pi}{۲}} -\frac{۱}{\cos x}(\cos^۲ x) = -\cos x$$

۳- گزینه «۳» متوسط

$$\sin(\frac{۱۷\pi}{۳}) = \sin(۶\pi - \frac{\pi}{۳}) = -\sin\frac{\pi}{۳} = -\frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

$$\cos(-\frac{۱۷\pi}{۶}) = \cos(\frac{۱۷\pi}{۶}) = \cos(۳\pi - \frac{\pi}{۶}) = -\cos\frac{\pi}{۶} = -\frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

$$\tan(\frac{۱۹\pi}{۴}) = \tan(۵\pi - \frac{\pi}{۴}) = -\tan\frac{\pi}{۴} = -۱$$

$$\sin(-\frac{۱۱\pi}{۶}) = -\sin(\frac{۱۱\pi}{۶}) = -\sin(۲\pi - \frac{\pi}{۶}) = +\sin\frac{\pi}{۶} = \frac{۱}{۲}$$

در نتیجه: $(-\frac{\sqrt{۳}}{۲})(-\frac{\sqrt{۳}}{۲}) + (-۱)(\frac{۱}{۲}) = \frac{۳}{۴} - \frac{۱}{۲} = \frac{۱}{۴}$

۴- گزینه «۳» متوسط

$$|b| + a = \sqrt{۳} \xrightarrow{b>۰} a + b = \sqrt{۳}$$

در شکل داده شده $\max = \sqrt{۳}$ است پس همچنین نقطه $(\pi, -\frac{۳}{۲})$ در تابع $-\frac{۳}{۲} = a + b\sin(\pi + \frac{\pi}{۳})$ صدق می‌کند پس:

$$-\frac{۳}{۲} = a - b\sin\frac{\pi}{۳} \Rightarrow -\frac{۳}{۲} = a - \frac{\sqrt{۳}}{۲}b \xrightarrow{\times ۲} -۳ = ۲a - \sqrt{۳}b$$

با اطلاعات داده شده و حل دستگاه داریم:

$$\begin{cases} ۲a - \sqrt{۳}b = -۳ \\ a + b = \sqrt{۳} \end{cases} \xrightarrow{\times\sqrt{۳}} \begin{array}{l} ۲a - \sqrt{۳}b = -۳ \\ \sqrt{۳}a + \sqrt{۳}b = ۳ \end{array} \Rightarrow \underset{b=\sqrt{۳}}{(۲+\sqrt{۳})a=۰} \Rightarrow a=۰$$

۵- گزینه «۳» متوسط

$$\cos(\frac{۱۱\pi}{۴} + \alpha) = \cos\frac{۱۱\pi}{۴}\cos\alpha - \sin\frac{۱۱\pi}{۴}\sin\alpha$$

ابتدا با استفاده از $\cos^۲\alpha = ۱ - \sin^۲\alpha$ می‌توان:

$$\cos^۲\alpha = ۱ - \frac{۲}{۱۰۰} \Rightarrow \cos^۲\alpha = \frac{۹۸}{۱۰۰} \Rightarrow \cos\alpha = -\sqrt{\frac{۹۸}{۱۰۰}} = \frac{-۷\sqrt{۲}}{۱۰}$$

$$\cos\frac{۱۱\pi}{۴} = \cos(۳\pi - \frac{\pi}{۴}) = -\cos\frac{\pi}{۴} = -\frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

$$\sin\frac{۱۱\pi}{۴} = \sin(۳\pi - \frac{\pi}{۴}) = \sin\frac{\pi}{۴} = \frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

درنتیجه:

$$\cos(\frac{۱۱\pi}{۴} + \alpha) = (-\frac{\sqrt{۲}}{۲})(\frac{-۷\sqrt{۲}}{۱۰}) - (\frac{\sqrt{۲}}{۲})(\frac{\sqrt{۲}}{۱۰}) = (\frac{۷\times۲}{۲۰}) - (\frac{۲}{۲۰}) = \frac{۱۲}{۲۰} = \frac{۳}{۵}$$

۶- گزینه «۴» دشوار

$$S = \tan\alpha + \tan\beta = -\frac{b}{a} = -\frac{۳}{۲}$$

$$P = \tan\alpha.\tan\beta = \frac{c}{b} = -\frac{۱}{۲}$$

$$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{۱ - \tan\alpha\tan\beta} = \frac{-\frac{۳}{۲}}{۱+\frac{۱}{۲}} = \frac{-\frac{۳}{۲}}{\frac{۳}{۲}} = -۱$$

۷- گزینه «۲» آسان

$$\tan(۳۰۰) = \tan(۲۷۰ + ۳۰) = -\cot ۳۰ = -\sqrt{۳}$$

$$\cos(۲۱۰) = \cos(۱۸۰ + ۳۰) = -\cos ۳۰ = -\frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

$$\tan(۴۸۰) = \tan ۱۲۰ = -\tan ۶۰ = -\sqrt{۳}$$

$$\sin ۸۴۰ = \sin ۱۲۰ = \sin ۶۰ = \frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

در نتیجه: $(-\sqrt{۳})(-\frac{\sqrt{۳}}{۲}) + (-\sqrt{۳})(\frac{\sqrt{۳}}{۲}) = \frac{۳}{۲} - \frac{۳}{۲} = ۰$

۸- گزینه «۴» دشوار

اگر عبارت را ساده کنیم، داریم:

$$y = a + b\sin(\frac{\pi}{۲} + x)$$

$$y = a + b\cos x$$

نقطه $(\frac{۷\pi}{۳}, ۰)$ در تابع صدق می‌کند max تابع برابر ۳ است، پس:

$$a + b\cos\frac{۷\pi}{۳} = ۰ \Rightarrow a + b\cos(۲\pi + \frac{\pi}{۳}) = ۰ \Rightarrow a + b\cos\frac{\pi}{۳} = ۰ \Rightarrow a + \frac{b}{۲} = ۰$$

$$\max = |b| + a = ۳ \xrightarrow{b<۰} -b + a = ۳$$

$$\begin{cases} a + \frac{۱}{۲}b = ۰ \Rightarrow a = -\frac{۱}{۲}b \\ -b + a = ۳ \Rightarrow -b - \frac{b}{۲} = ۳ \Rightarrow \frac{-۳}{۲}b = ۳ \Rightarrow b = -۲ \end{cases}$$

۹- گزینه «۴» متوسط

با توجه به فرمول‌های توابع مثلثاتی تناوب از روی شکل فاصله $\frac{۹\pi}{۲}$ تا $-\frac{۳\pi}{۲}$ است.

$$T = \frac{۲\pi}{|b|} \Rightarrow ۶\pi = \frac{۲\pi}{|b|} \Rightarrow |b| = \frac{۱}{۳}$$

$$c = \frac{\text{Max} + \min}{۲} = \frac{۱+(-۳)}{۲} = -۱$$

$$|a| = \frac{\text{Max} + \min}{۲} = \frac{۱-(-۳)}{۲} = ۲$$

$$ab < ۰ \Rightarrow a = -۲, b = \frac{۱}{۳}$$

$$\frac{a}{b} = \frac{-\frac{۲}{۱}}{\frac{۱}{۳}} = -۶$$

۱۰- گزینه «۱» دشوار

با استفاده از اتحادهایی که در ذهن داریم:

$$\tan ۲\alpha = \frac{۲\tan\alpha}{۱-\tan^۲\alpha}$$

$$\tan\alpha = \frac{۲\tan\alpha/۲}{۱-\tan^۲\alpha/۲} = \frac{۲(\frac{۱}{۴})}{۱-\frac{۱}{۱۶}} = \frac{\frac{۱}{۲}}{\frac{۱۵}{۱۶}} = \frac{۸}{۱۵}$$

$$۱+\tan^۲\alpha = \frac{۱}{\cos^۲\alpha} \Rightarrow ۱+\frac{۶۴}{۲۲۵} = \frac{۱}{\cos^۲\alpha} \Rightarrow \cos^۲\alpha = \frac{۲۲۵}{۲۸۹}$$

$$\Rightarrow \cos\alpha = \frac{۱۵}{۱۷}$$

$$\sin^۲\alpha = ۱-\cos^۲\alpha = ۱-\frac{۲۲۵}{۲۸۹} \Rightarrow \sin\alpha = \frac{۸}{۱۷}$$

در نتیجه: $$\frac{\frac{۸}{۱۵}-\frac{۸}{۱۷}}{\frac{۸}{۱۷}-\frac{۱۵}{۱۷}} = \frac{\frac{۱۳۶-۱۲۰}{۱۵\times۱۷}}{\frac{-۷}{۱۷}} = \frac{\frac{۱۶}{۱۵\times۱۷}}{\frac{-۷}{۱۷}} = \frac{-۱۶}{۱۵\times۷} = \frac{-۱۶}{۱۰۵}$$

۱۱- گزینه «۱» متوسط

ابتدا عبارت داده شده را ساده می‌کنیم:

$$f(\alpha) = ۴\sin\alpha(۱-۲\sin^۲\alpha)+۲\sin\alpha$$

$$= ۴\sin\alpha - ۸\sin^۳\alpha + ۲\sin\alpha = ۶\sin\alpha - ۸\sin^۳\alpha = ۲(۳\sin\alpha - ۴\sin^۳\alpha)$$

باتوجه به اتحادها که در ذهن دادیم $\sin ۳\alpha = ۳\sin\alpha - ۴\sin^۳\alpha$ پس:

$$= ۲\sin ۳\alpha$$

$$f(\frac{۴۱\pi}{۹}) = ۲\sin(\frac{۳\times۴۱\pi}{۹}) = ۲\sin(\frac{۴۱\pi}{۳}) = ۲\sin(۱۴\pi - \frac{\pi}{۳}) = -۲\sin\frac{\pi}{۳}$$

$$= -۲\times\frac{\sqrt{۳}}{۲} = -\sqrt{۳}$$

۱۲- گزینه «۴» دشوار

ابتدا به توان‌ها دقت کنید:

$$۰ \le \cos^۲ x \le ۱ \Rightarrow ۰ \le ۹\cos^۲ x \le ۹$$

$$-۱ \le ۹\cos^۲ x - ۱ \le ۸ \Rightarrow -۱ \le \sqrt[۳]{۹\cos^۲ x - ۱} \le ۲$$

$$\sqrt[۳]{۹\cos^۲ x - ۱} = t \Rightarrow -۱ \le t \le ۲ \Rightarrow f(t) = ۲^t - ۲^{-t} \quad , \quad -۱ \le t \le ۲$$

تابع $f(t)$ تابعی است صعودی پس سر و ته بازه مقادیر برد را به ما می‌دهد در نتیجه:

$$f(-۱) = ۲^{-۱} - ۲^۱ = \frac{۱}{۲} - ۲ = -\frac{۳}{۲} \quad , \quad f(۲) = ۲^۲ - ۲^{-۲} = ۴ - \frac{۱}{۴} = \frac{۱۵}{۴}$$

برد آن $[-\frac{۳}{۲}, \frac{۱۵}{۴}] = [a, b]$

$$b-a = \frac{۱۵}{۴}+\frac{۳}{۲} = \frac{۱۵}{۴}+\frac{۶}{۴} = \frac{۲۱}{۴}$$

۱۳- گزینه «۴» دشوار

$$f(\frac{\pi}{۳۶}) = ۱۶\cos^۲(\frac{۳\pi}{۳۶})\cos^۲(\frac{۶\pi}{۳۶})\cos^۲(\frac{۱۲\pi}{۳۶})\cos^۲(\frac{۲۴\pi}{۳۶})$$

$$۱۶\cos^۲(\frac{\pi}{۱۲})\cos^۲(\frac{\pi}{۶})\cos^۲(\frac{\pi}{۳})\cos^۲(\frac{۲\pi}{۳})$$

مقادیر $\cos\frac{\pi}{۶}, \cos\frac{\pi}{۳}$ که واضح است از آنجایی که $\frac{۲\pi}{۳}+\frac{\pi}{۳} = \pi$ یعنی مکمل‌اند، پس تنها $\cos\frac{\pi}{۱۲}$ احتیاج به محاسبه دارد.

$$\cos\frac{۲\pi}{۳} = -\cos\frac{\pi}{۳}$$

$$\cos\frac{\pi}{۱۲} = \cos(\frac{\pi}{۳}-\frac{\pi}{۴}) = \cos\frac{\pi}{۳}\cos\frac{\pi}{۴}+\sin\frac{\pi}{۳}\sin\frac{\pi}{۴} = \frac{\sqrt{۲}}{۴}+\frac{\sqrt{۶}}{۴}$$

در نتیجه:

$$= ۱۶(\frac{\sqrt{۲}+\sqrt{۶}}{۴})^۲(\frac{\sqrt{۳}}{۲})^۲(\frac{۱}{۲})^۲(-\frac{۱}{۲})^۲ = \frac{۶+۳\sqrt{۳}}{۱۶}$$

۱۴- گزینه «۲» دشوار

ابتدا عبارت را ساده کنید:

$$\frac{\sin ۲\alpha - \cos\alpha}{\cot ۲\alpha}$$

پس:

$$۱+\tan^۲\alpha = \frac{۱}{\cos^۲\alpha} \leftarrow \cos\alpha = \frac{-۴}{۵}$$

حال با استفاده از فرمول مثلثاتی:

$$\tan ۲\alpha = \frac{۲\tan\alpha}{۱-\tan^۲\alpha} \quad , \quad \sin ۲\alpha = \frac{۲\tan\alpha}{۱+\tan^۲\alpha}$$

خواهیم داشت:

$$\sin ۲\alpha = \frac{۲(\frac{۳}{۴})}{۱+\frac{۹}{۱۶}} = \frac{\frac{۳}{۲}}{\frac{۲۵}{۱۶}} = \frac{۲۴}{۲۵}$$

$$\tan ۲\alpha = \frac{۲(\frac{۳}{۴})}{۱-\frac{۹}{۱۶}} = \frac{\frac{۳}{۲}}{\frac{۷}{۱۶}} = \frac{۲۴}{۷} \Rightarrow \cot ۲\alpha = \frac{۷}{۲۴}$$

درنتیجه:

$$= \frac{\frac{۲۴}{۲۵}+\frac{۴}{۵}}{\frac{۷}{۲۴}} = \frac{\frac{۴۴}{۲۵}}{\frac{۷}{۲۴}} = \frac{۲۴\times۴۴}{۷\times۲۵} = \frac{۱۰۵۶}{۱۷۵}$$

۱۵- گزینه «۲» دشوار

$$\begin{cases} A = B + ۴۵ \\ A + B + C = ۱۸۰ \end{cases} \Rightarrow C = ۱۸۰ - A - B \Rightarrow C = ۱۸۰ - (B + ۴۵) - B$$

$$C = ۱۸۰ - B - ۴۵ - B$$

$$C = ۱۳۵ - ۲B$$

درنتیجه:

$$۲\cos(\beta + ۴۵)\sin\beta - \sin(۱۳۵ - ۲\beta)$$

$$۲[\cos\beta\cos ۴۵ - \sin\beta\sin ۴۵]\sin\beta - [\sin ۱۳۵\cos ۲\beta - \cos ۱۳۵\sin ۲\beta]$$

با قوانین مکمل دو زاویه:

$$\sqrt{۲}\cos\beta\sin\beta - \sqrt{۲}\sin^۲\beta - \frac{\sqrt{۲}}{۲}\cos ۲\beta - \frac{\sqrt{۲}}{۲}\sin ۲\beta$$

$$\frac{\sqrt{۲}}{۲}\sin ۲\beta - \sqrt{۲}\sin^۲\beta - \frac{\sqrt{۲}}{۲}\cos ۲\beta - \frac{\sqrt{۲}}{۲}\sin ۲\beta$$

$$= -\sqrt{۲}\sin^۲\beta - \frac{\sqrt{۲}}{۲}(۲\cos^۲\beta - ۱) = -\sqrt{۲}\sin^۲\beta - \sqrt{۲}\cos^۲\beta + \frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

$$= -\sqrt{۲}\underbrace{(\sin^۲\beta + \cos^۲\beta)}_{۱} + \frac{\sqrt{۲}}{۲} = -\frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

روش دوم: زاویه A و B و C را به‌صورت زیر در نظر بگیریم:

$$A = ۹۰^\circ, B = ۴۵^\circ, C = ۴۵^\circ$$

$$۲\cos A\sin B - \sin C = ۲(۰)(\frac{\sqrt{۲}}{۲}) - \frac{\sqrt{۲}}{۲} = -\frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

۱۶- گزینه «۱» متوسط

$$T = ۲(\frac{۵}{۴} - \frac{۱}{۴}) = ۲ \Rightarrow T = \frac{۲\pi}{|b|} = ۲ \Rightarrow |b| = \pi \xrightarrow{b>۰} b = \pi$$

$$f(\frac{۱}{۴}) = ۰ \Rightarrow a\cos(\frac{\pi}{۴} + c) = ۰ \Rightarrow \frac{\pi}{۴} + c = \frac{\pi}{۲} \Rightarrow c = \frac{\pi}{۴}$$

$$\max = \frac{۱}{۴} \Rightarrow |a| = \frac{۱}{۴} \Rightarrow a = \pm\frac{۱}{۴}, f(۰) > ۰ \Rightarrow a\cos > ۰ \Rightarrow a\cos\frac{\pi}{۴} > ۰ \Rightarrow a > ۰$$

$$\frac{ac}{b} = \frac{\frac{۱}{۴} \times \frac{\pi}{۴}}{\pi} = \frac{۱}{۱۶}$$

۱۷- گزینه «۱» دشوار

با استفاده از فرمول $\tan(\frac{\pi}{۴} - x) = \frac{\tan\frac{\pi}{۴} - \tan x}{۱ + \tan\frac{\pi}{۴}\tan x}$.

$$\frac{۱ - \tan x}{۱ + \tan x} = \frac{۱ - m}{۲ + m} \Rightarrow ۲ + m - ۲\tan x - \cancel{m\tan x}$$

$$= ۱ - m + \tan x - \cancel{m\tan x}$$

$$۱ + ۲m = ۳\tan x \Rightarrow \tan x = \frac{۱ + ۲m}{۳}$$

$$-۱ < \tan x < ۱$$

$$-\frac{\pi}{۴} < x < \frac{\pi}{۴} \Rightarrow -۱ < \frac{۱ + ۲m}{۳} < ۱$$

$$-۳ < ۱ + ۲m < ۳$$

$$-۴ < ۲m < ۲$$

$$-۲ < m < ۱$$

۱۸- گزینه «۳» دشوار

با استفاده از فرمول مثلثاتی:

$$۲(۱ - \cos^۲ x) + \cos^۲ x = \frac{۴}{۳} \Rightarrow ۲ - ۲\cos^۲ x + \cos^۲ x = \frac{۴}{۳}$$

$$۲ - \frac{۴}{۳} = \cos^۲ x$$

$$\frac{۲}{۳} = \cos^۲ x$$

$$۱ + \tan^۲ x = \frac{۱}{\cos^۲ x} \Rightarrow ۱ + \tan^۲ x = \frac{۳}{۲} \Rightarrow \tan^۲ x = \frac{۱}{۲}$$

۱۹- گزینه «۳» آسان

$$c = \frac{Max + min}{۲} = \frac{۵ + ۱}{۲} = ۳$$

۲۰- گزینه «۳» متوسط

$$T = \frac{۴\pi}{۳} + \frac{۲\pi}{۳} = ۲\pi \Rightarrow T = \frac{۲\pi}{|c|} \Rightarrow |c| = ۱ \Rightarrow c = ۱$$

$$\max = |b| + a = ۱ \Rightarrow b + a = ۱$$

$(۰,۰)$ در معادله صدق می‌کند. پس:

$$۰ = a + b\cos(-\frac{\pi}{۳}) \Rightarrow a + \frac{b}{۲} = ۰ \Rightarrow a = -۱, b = ۲$$

$$b(c - a) = ۲(۱ + ۱) = ۴$$

۱- گزینه «۱»

چون در یک دوره تناوب رسم شده است پس دوره تناوب $y = \cos^۲ bx$ برابر

$$T = \frac{\pi}{|b|}$$

$$T = \frac{۹\pi}{۲۰} = \frac{\pi}{۴} = \frac{\pi}{۵}$$

$$\frac{\pi}{۵} = \frac{\pi}{|b|} \Rightarrow |b| = ۵ \Rightarrow b = ۵$$

$$x = \frac{\pi}{۴} \Rightarrow y = a\cos^۲(\frac{۵\pi}{۴} - \frac{\pi}{۴}) + c \Rightarrow y = a + c = ۱ \Rightarrow a + c = ۱$$

۲- که min تابع cos است در میانگین بین $\frac{\pi}{۴}, \frac{۹\pi}{۲۰}$ اتفاق افتاده است.

$$x = \frac{۷\pi}{۲۰} \Rightarrow y = a\cos^۲(\frac{۲۵\pi}{۲۰} - \frac{\pi}{۴}) + c \Rightarrow y = a\cos^۲(\frac{۳\pi}{۲}) + c \Rightarrow c = -۲$$

پس: $a = ۳$

$$ab = (۳)(۵) = ۱۵$$

۲- گزینه «۲»

با استفاده از اتحاد $۱+\tan^۲ x=\frac{۱}{\cos^۲ x}$

$$f(x)=\frac{۲}{a}-b\cos^۲(cx-\frac{۳\pi}{۴})$$

حالا با استفاده از $\cos^۲ x=\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۲}\cos ۲x$ داریم:

$$f(x)=\frac{۲}{a}-b(\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۲}\cos^۲(cx-\frac{۳\pi}{۲})=\frac{۲}{a}-\frac{b}{۲}-\frac{b}{۲}(-\sin ۲cx)$$

$$f(x)=\frac{b}{۲}\sin(۲cx)+\frac{۲}{a}-\frac{b}{۲}\Rightarrow T=\frac{۲\pi}{|۲c|}\Rightarrow ۹\pi=\frac{۲\pi}{|۲c|}\xrightarrow{c>۰}c=\frac{۱}{۹}$$

$$max=|\frac{b}{۲}|+\frac{۲}{a}-\frac{b}{۲}=۶\xrightarrow{b>۰}\frac{۲}{a}=۶\Rightarrow a=\frac{۱}{۳}$$

$$min=-|\frac{b}{۲}|+\frac{۲}{a}-\frac{b}{۲}=۰\xrightarrow{b>۰}b=۶$$

$$f(x)=۳+۳\sin(\frac{۲}{۹}x)$$

$$f(\frac{۳\pi}{۴})=۳+۳\sin(\frac{۲}{۹}x)=۳+۳\sin(\frac{۲}{۹}\times\frac{۳\pi}{۴})=۴/۵$$

۳- گزینه «۲»

با استفاده از اتحادهای مثلثاتی:

$$\sin^۲\alpha+\cos^۲\alpha=۱$$

$$۴\cos^۲\alpha+\cos^۲\alpha=۱$$

$$۵\cos^۲\alpha=۱$$

$$\cos\alpha=\sqrt{\frac{۱}{۵}}=\frac{-۱}{\sqrt{۵}}\times\frac{\sqrt{۵}}{\sqrt{۵}}=\frac{-\sqrt{۵}}{۵}$$

۴- گزینه «۴»

ابتدا با استفاده از اتحاد $\sin ۲x=۲\sin x\cos x$ داریم:

$$f(x)=a+\frac{۱}{۲}b\sin ۲(cx-\frac{۳\pi}{۴})\Rightarrow f(x)=a+\frac{۱}{۲}b\sin(۲cx-\frac{۳\pi}{۲})$$

$$f(x)=a-\frac{۱}{۲}b\sin(\frac{۳\pi}{۲}-۲cx)$$

$$f(x)=a+\frac{b}{۲}\cos ۲cx$$

باتوجه به min , max تابع کسینوس داریم:

$$\left.\begin{array}{l}a+|\frac{b}{۲}|=۳\\ a-|\frac{b}{۲}|=-۱\end{array}\right\}۲a=۲\Rightarrow a=۱$$

$$|\frac{b}{۲}|=۲\Rightarrow b=\pm ۴\Rightarrow b=-۴$$

نمودار بعد از $x=۰$ صعودی است، پس $b<۰$.

همچنین دوره تناوب تابع $y=\cos ۲cx$ از رابطه $T=\frac{۲\pi}{|۲c|}$ که در شکل برابر π است، پس:

علامت c، اهمیتی ندارد. $\frac{۲\pi}{|۲c|}=\pi\Rightarrow |۲c|=۲\Rightarrow |c|=۱\Rightarrow c=\pm ۱$

$$f(x)=۱-۲\cos ۲x\xrightarrow[\text{محل برخورد با محور x‌ها}]{\text{صفرهای تابع}}$$

$$\cos ۲x=\frac{۱}{۲}\left\{\begin{array}{l}۲x=\frac{\pi}{۳}\Rightarrow x=\frac{\pi}{۶}\\ ۲x=۲\pi-\frac{\pi}{۳}=\frac{۵\pi}{۳}\Rightarrow x=\frac{۵\pi}{۶}\end{array}\right.$$

اختلاف ریشه‌ها $=\frac{۵\pi}{۶}-\frac{\pi}{۶}=\frac{۴\pi}{۶}=\frac{۲\pi}{۳}$

۵- گزینه «۲»

$$\tan\frac{۱۷\pi}{۶}=\tan(\frac{۱۸\pi-\pi}{۶})=\tan(۳\pi-\frac{\pi}{۶})=-\tan\frac{\pi}{۶}=-\frac{\sqrt{۳}}{۳}$$

$$\sin\frac{۱۱\pi}{۳}=\sin(\frac{۱۲\pi-\pi}{۳})=\sin(۴\pi-\frac{\pi}{۳})=-\sin\frac{\pi}{۳}=-\frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

$$\cos\frac{۱۰\pi}{۳}=\cos(\frac{۹\pi+\pi}{۳})=\cos(۳\pi+\frac{\pi}{۳})=-\cos\frac{\pi}{۳}=-\frac{۱}{۲}$$

$$(-\frac{\sqrt{۳}}{۳})(-\frac{\sqrt{۳}}{۲})-\frac{۱}{۲}=\frac{۳}{۶}-\frac{۱}{۲}=۰$$

۶- گزینه «۲»

$$y=a+b\sin x$$

$$(-\frac{۵\pi}{۶},۰)\in f\Rightarrow ۰=a+b\sin(-\frac{۵\pi}{۶})\Rightarrow ۰=a-b\sin(\pi-\frac{\pi}{۶})$$

$$۰=a-b\sin\frac{\pi}{۶}$$

$$۰=a-\frac{۱}{۲}b\Rightarrow a=\frac{۱}{۲}b$$

$$max=۳$$

$$|b|+a=۳\xrightarrow{b>۰}b+a=۳$$

با حل:

$$a+b=۳\Rightarrow a=\frac{۱}{۲}b$$

$$\frac{b}{۲}+b=۳\Rightarrow\frac{۳b}{۲}=۳\Rightarrow a=۱,b=۲$$

$$y=۱+۲\sin x\Rightarrow y=۱+۲\sin\frac{\pi}{۶}\Rightarrow y=۲$$

۷- گزینه «۳»

$$(+\cos\alpha)(-\sin\alpha)+\tan(\frac{۳\pi}{۲}-\alpha)$$

$$-\sin\alpha\cos\alpha+\cot\alpha$$

اگر $\tan\alpha=\frac{۴}{۳}$ باشد با توجه به اتحاد $۱+\tan^۲\alpha=\frac{۱}{\cos^۲\alpha}$ داریم:

$$۱+\frac{۱۶}{۹}=\frac{۱}{\cos^۲\alpha}\Rightarrow\frac{۲۵}{۹}=\frac{۱}{\cos^۲\alpha}\Rightarrow\cos\alpha=\frac{-۳}{۵}$$

$$\sin^۲\alpha=۱-\frac{۹}{۵}=\frac{۱۶}{۲۵}\Rightarrow\sin\alpha=-\frac{۴}{۵}$$

$$-(-\frac{۴}{۵})(-\frac{۳}{۵})+\frac{۳}{۴}=-\frac{۱۲}{۲۵}+\frac{۳}{۴}=\frac{-۴۸+۷۵}{۱۰۰}=\frac{۲۷}{۱۰۰}$$

۸- گزینه «۱»

با استفاده از اتحاد $۱+\tan^۲ x=\frac{۱}{\cos^۲ x}$.

$$\frac{\tan x}{۱}(\frac{۱-\sin^۲ x}{\sin x})$$

$$\frac{}{|\cos x|}$$

چون $\frac{\pi}{۲}<x<\pi$ است پس $\cos x$ مقدار منفی دارد، پس:

$$-\cancel{\cos x}.\frac{\cancel{\sin x}}{\cancel{\cos x}}(\frac{\cos^۲ x}{\cancel{\sin x}})=-\cos^۲ x$$

۹- گزینه «۱»

چون در یک بازه متناوب است، پس:

$$T=\frac{۵\pi}{۶}-\frac{\pi}{۶}=\frac{۴\pi}{۶}=\frac{۲\pi}{۳}\Rightarrow\frac{۲\pi}{۳}=\frac{۲\pi}{|b|}\Rightarrow|b|=۳\Rightarrow b=۳$$

$$c=\frac{\max+\min}{۲}=\frac{۱+(-۳)}{۲}=-۱$$

۱۰- گزینه «۳»

$$\text{محل برخورد با محورxها}\Rightarrow y=۰\Rightarrow x=\frac{\pi}{۲}:۰=a+b\sin(\frac{\pi}{۲}+\frac{\pi}{۳})$$

$$\Rightarrow ۰=a+b\cos\frac{\pi}{۳}\qquad ۰=a+\frac{b}{۲}\qquad a=-\frac{b}{۲}$$

$$\max=|b|+a=\frac{۳}{۲}\Rightarrow b|-\frac{b}{۲}=\frac{۳}{۲}\xrightarrow{b<۰}-b-\frac{b}{۲}=\frac{۳}{۲}\Rightarrow\frac{-۳b}{۲}=\frac{۳}{۲}$$

$$b=-۱\ \text{و}\ a=\frac{۱}{۲}$$

۱۱- گزینه «۴»

$$\tan(۲۸۵)=\tan(۲۷۰+۱۵)=-\cot۱۵$$

$$-\tan(۱۶۵)=-\tan(۱۸۰-۱۵)=+\tan۱۵$$

$$\sin(۱۰۹۵)=\sin(۱۵)$$

$$\cos(۲۵۵)=\cos(۲۷۰-۱۵)=-\sin۱۵$$

$$\underbrace{(-\cot۱۵)(\tan۱۵)}-(\sin۱۵)(-\sin۱۵)$$

$$-۱+\sin^۲۱۵=-\cos^۲۱۵$$

۱۲- گزینه «۱»

برای ساختن اتحاد $\sin۲x$ ابتدا یک $\sin^۲x$ در عبارت ضرب کرده در آخر تقسیم می‌کنیم:

$$f(x)=\underbrace{۳۲\sin^۲x\cos^۲x}\cos^۲۲x\cos^۲۴x\cos^۲۸x\cos^۲۱۶x\times\frac{۱}{\sin^۲x}$$

$$f(x)=۸\sin^۲۲x\cos^۲۲x\cos^۲۴x\cos^۲۸x\cos^۲۱۶x\times\frac{۱}{\sin^۲x}$$

$$f(x)=۲\sin^۲۴x\cos^۲۴x\cos^۲۸x\cos^۲۱۶x\times\frac{۱}{\sin^۲x}$$

$$f(x)=\frac{۱}{۲}\sin^۲۸x\cos^۲۸x\cos^۲۱۶x\times\frac{۱}{\sin^۲x}$$

$$f(x)=\frac{۱}{۸}\sin^۲۱۶x\cos^۲۱۶x\times\frac{۱}{\sin^۲x}=\frac{\sin^۲۳۲x}{۳۲\sin^۲x}$$

$$f(\frac{\pi}{۱۲})=\frac{\sin^۲(\frac{۳۲\pi}{۱۲})}{۳۲\sin^۲(\frac{\pi}{۱۲})}=\frac{\sin^۲(\frac{۸\pi}{۳})}{۳۲\sin^۲(\frac{\pi}{۱۲})}=\frac{[\sin(۳\pi-\frac{\pi}{۳})]^۲}{۳۲[\sin(\frac{\pi}{۳}-\frac{\pi}{۴})]^۲}$$

$$=\frac{\sin^۲\frac{\pi}{۳}}{۳۲[\sin(\frac{\pi}{۳}\cos\frac{\pi}{۴}-\cos\frac{\pi}{۳}\sin\frac{\pi}{۴}]^۲}=\frac{\frac{۳}{۴}}{[(\frac{\sqrt{۳}}{۲})(\frac{\sqrt{۲}}{۲})-(\frac{۱}{۲})(\frac{\sqrt{۲}}{۲})]^۲}$$

$$\frac{\frac{۳}{۴}}{۳۲(\frac{\sqrt{۶}-\sqrt{۲}}{۴})^۲}=\frac{\frac{۳}{۴}}{۳۲(\frac{۶+۲-۲\sqrt{۱۲}}{۱۶})}=\frac{۱۲}{۳۲(۸-۲\sqrt{۱۲})}\times\frac{۸+۲\sqrt{۱۲}}{۸+۲\sqrt{۱۲}}$$

$$=\frac{۱۲(۸+۴\sqrt{۳})}{۶۴-۴۸}=\frac{۱۲(۸+۴\sqrt{۳})}{۱۶\times۳۲}=\frac{۶+\sqrt{۲۷}}{۳۲}$$

۱۳- گزینه «۳»

$$\frac{\cos\alpha+\sin\alpha}{|\tan^۲\alpha-۱|}$$

با استفاده از اتحادهای مثلثاتی داریم:

$$\sin^۲\alpha=۱-\cos^۲\alpha=۱-\frac{۴}{۹}=\frac{۵}{۹}\Rightarrow\sin\alpha=-\frac{\sqrt{۵}}{۳}$$

$$۱+\tan^۲\alpha=\frac{۱}{\cos^۲\alpha}\Rightarrow۱+\tan^۲\alpha=\frac{۱}{\frac{۴}{۹}}\Rightarrow۱+\tan^۲\alpha=\frac{۹}{۴}$$

$$\tan^۲\alpha=\frac{۹}{۴}-۱$$

$$\tan^۲\alpha=\frac{۵}{۴}$$

پس:

$$=\frac{\frac{۲}{۳}-\frac{\sqrt{۵}}{۳}}{|\frac{۵}{۴}-۱|}=\frac{\frac{۲-\sqrt{۵}}{۳}}{\frac{۱}{۴}}=\frac{۴(۲-\sqrt{۵})}{۳}$$

۱۴- گزینه «۳»

$$\frac{۲\sin\frac{\theta}{۲}\cos\frac{\theta}{۲}}{۲\sin^۲\frac{\theta}{۲}}+\frac{۲\cos^۲\frac{\theta}{۲}}{۲\sin\frac{\theta}{۲}\cos\frac{\theta}{۲}}=\cot\frac{\theta}{۲}+\cot\frac{\theta}{۲}=۲\cot(\frac{\theta}{۲})$$

۱۵- گزینه «۱»

$$\begin{matrix}\max=|a|+b=۳\\ \min=-|a|+b=-۷\end{matrix}\Rightarrow۲b=-۴\Rightarrow b=-۲,|a|=۵\xrightarrow{a>۰}a=۵$$

$$f(x)=۵\cos x-۲\ \Rightarrow\ f(\frac{\pi}{۳})=۵\cos\frac{\pi}{۳}-۲=\frac{۵}{۲}-۲=\frac{۱}{۲}$$

۱۶- گزینه «۴»

$$\begin{matrix}\max=|a|+c=\frac{۵}{۲}\\ \min=-|a|+c=-\frac{۱}{۲}\end{matrix}\Rightarrow۲c=۲\Rightarrow c=۱\Rightarrow|a|=\frac{۳}{۲}\xrightarrow{a<۰}a=-\frac{۳}{۲}$$

$$ac=\frac{-۳}{۲}\times۱=\frac{-۳}{۲}$$

۱۷- گزینه «۳»

$$\sin x+\cos x=\frac{۳\sqrt{۵}}{۵}\xrightarrow{\text{به توان}۲}۱+\sin۲x=\frac{۹}{۵}\ \Rightarrow\ \sin۲x=\frac{۴}{۵}$$

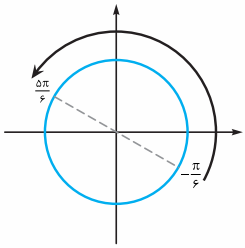
$$\sin۲x=\frac{۲\tan x}{۱+\tan^۲x}\Rightarrow\frac{۴}{۵}=\frac{۲\tan x}{۱+\tan^۲x}$$

$$۲\tan^۲x-۵\tan x+۲=۰\ \Rightarrow\ \begin{cases}\tan x=۲\\ \tan x=\frac{۱}{۲}\end{cases}$$

۱۸- گزینه «۲»

اگر $\frac{-\pi}{۱۲} < x < \frac{۵\pi}{۱۲}$ آنگاه $\frac{-\pi}{۶} < ۲x < \frac{۵\pi}{۶}$ در این مسیر بیش‌ترین مقدار $\sin ۲x$ یک و کم‌ترین مقدار $\sin ۲x$ $-\frac{۱}{۲}$ است پس:

$$-\frac{۱}{۲} < \frac{m-۱}{۴} \leq ۱ \xrightarrow{\times ۴} -۲ < m-۱ \leq ۴ \Rightarrow -۱ < m \leq ۵$$



۱۹- گزینه «۳»

ابتدا با استفاده از اتحادهای مثلثاتی داریم:

$$\sin^۲(\frac{\pi}{۴}-bx) = \frac{۱}{۲}(۱-\cos(۲(\frac{\pi}{۴}-bx)) = \frac{۱}{۲}-\frac{۱}{۲}\cos(\frac{\pi}{۲}-۲bx)$$

$$= \frac{۱}{۲}-\frac{۱}{۲}\sin ۲bx$$

$$y = \frac{a}{۲}-\frac{a}{۲}\sin(۲bx)+c \Rightarrow \begin{matrix} \max = |-\frac{a}{۲}|+\frac{a}{۲}+c = ۱ \\ \min = -|-\frac{a}{۲}|+\frac{a}{۲}+c = -۲ \end{matrix} \Rightarrow ۲|\frac{a}{۲}| = ۳$$

$$a = \pm ۳$$

$$T = \frac{۱۵\pi}{۴}+\frac{۵\pi}{۴} = ۵\pi \Rightarrow \frac{۲\pi}{|۲b|} = ۵\pi \Rightarrow b = \pm\frac{۱}{۵}$$

$$ab = \pm\frac{۳}{۵} \xrightarrow{ab<۰} ab = -\frac{۳}{۵} = -۰/۶$$

نمودار تابع در نزدیکی $x = ۰$ صعودی است، پس:

$$(-a)(b) > ۰ \Rightarrow ab < ۰$$

۲۰- گزینه «۱»

$$\tan x + \cot x = \frac{۲}{\sin ۲x} = ۴ \Rightarrow \sin ۲x = \frac{۱}{۲} \Rightarrow \sin x \cos x = \frac{۱}{۴}$$

$$۵\pi < ۴x < ۶\pi \xrightarrow{\div ۴} \frac{۵\pi}{۴} < x < \frac{۳\pi}{۲} \Rightarrow \sin x < \cos x < ۰$$

حواستون باشه که وقتی کمانی از ۲۲۵ تا ۲۷۰ باشد مقادیر $\sin x < \cos x$ است پس:

$$\sin x - \cos x < ۰ \xrightarrow{\text{طرفین به توان ۲}}$$

$$(\sin x - \cos x)^۲ = ۱-\sin ۲x \Rightarrow \sin x - \cos x = -\frac{۱}{\sqrt{۲}}$$

$$\sin^۳ x - \cos^۳ x = (\sin x - \cos x)(\sin^۲ x + \sin x \cos x + \cos^۲ x)$$

$$= (-\frac{۱}{\sqrt{۲}})(۱+\frac{۱}{۴}) = \frac{-۵}{۴\sqrt{۲}}$$

معکوس $= -۰/۸\sqrt{۲}$