

۷۰- اگر $B \subseteq A$ و $D \subseteq C$ ، همچنین A و D دو مجموعه جدا از هم باشند (دو مجموعه‌ای که هیچ اشتراکی ندارند)، حاصل $(A \cap B) \cup (D \cap B \cap C)$ کدام است؟

- \emptyset (۱) B (۲) C (۳) $A \cup D$ (۴)
 ۴۵ (۱) ۴۶ (۲) ۵۵ (۳) ۵۶ (۴)

۷۱- اگر $A_1 = \{1\}$ ، $A_2 = \{2, 3\}$ ، $A_3 = \{4, 5, 6\}$ ، $A_4 = \{7, 8, 9, 10\}$ و ... باشد در این صورت مجموعه A_n با کدام عدد شروع می‌شود؟

۷۲- کدام عبارت در مورد مجموعه $A = \{a, b, 1, 1, 2\}$ درست است؟ ($a, b \in \mathbb{N}$)

- (۱) حداقل ۲ عضو و حداکثر ۵ عضو دارد.
 (۲) حداقل ۳ عضو و حداکثر ۵ عضو دارد.
 (۳) حداقل ۲ عضو و حداکثر ۴ عضو دارد.
 (۴) در هر شرایطی ۵ عضو دارد.

۷۳- مجموعه $A = \left\{ \frac{1}{x} - \frac{1}{y} \mid x \in \mathbb{N}, y \in \mathbb{N}, x \leq 2, y \leq 2 \right\}$ چند زیرمجموعه دارد؟ (تعداد زیرمجموعه‌های یک مجموعه n عضوی برابر با 2^n است.)

- ۲ (۱) ۴ (۲) ۸ (۳) ۱۶ (۴)

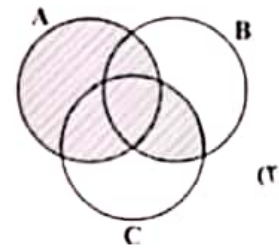
۷۴- اگر $\{1, 5 - x, 2 + y\} = \{2, 6 - x, y - 2\}$ ، حاصل $x + y$ کدام گزینه می‌تواند باشد؟

- ۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴)

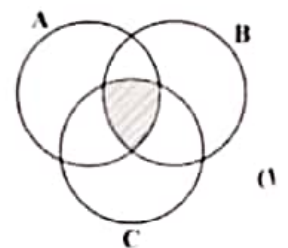
۷۵- مجموعه $A = \left\{ x \mid x \in \mathbb{N}, \frac{2^x}{x} \in \mathbb{N} \right\}$ چند زیرمجموعه دارد؟ (تعداد زیرمجموعه‌های یک مجموعه n عضوی 2^n است.)

- ۶۴ (۱) ۱۲۸ (۲) ۲۵۶ (۳) ۵۱۲ (۴)

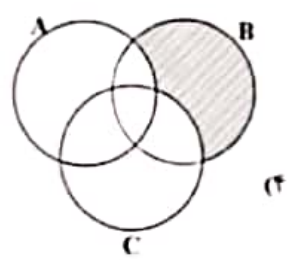
۷۶- قسمت هاشورخورده نمودار ون در کدام گزینه عبارت ریاضی زیر آن را نشان نمی‌دهد؟



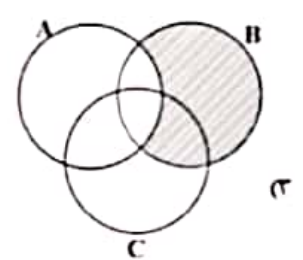
$(A \cup B) \cap (A \cup C)$



$(A - B) \cap (B - C) \cup (A \cap B \cap C)$



$(A \cup B) - (A \cap C)$



$B - (A \cap C)$

۷۷- اگر $A = \{2\}$ ، $B = \{1, 2, \{2\}\}$ و $C = \{\{1, 2, \{2\}\}, 2\}$ باشد، کدام گزینه درست است؟

- $A \subseteq B$ (۴) $B \in C$ (۳) $B \subseteq C$ (۲) $A \in C$ (۱)

۷۸- در کدام مجموعه، هیچ عضوی عدد زوج نیست؟

- $A = \{x^2 + 1 \mid x \in \mathbb{N}, 5 < x < 8\}$ (۱)
 $B = \{2x^2 + 1 \mid x \in \mathbb{N}, 5 < x < 8\}$ (۲)
 $C = \{x^2 + 1 \mid x \in \mathbb{N}, 5 < x < 8\}$ (۳)
 $D = \{3x^2 + 1 \mid x \in \mathbb{N}, 5 < x < 8\}$ (۴)

۷۹- A و B دو مجموعه غیرتهی‌اند در چه صورتی $A - B = B - A$ است؟

- (۱) اگر $A \cup B = A \cap B$ باشد (۲) اگر $A \cap B = \emptyset$ باشد (۳) اگر $A \cup B = A$ باشد (۴) اگر $A \cup B = B$ باشد

بررسی عبارات:

الف) $\{2\} = \{2\} \Leftrightarrow$ عضو تکراری در مجموعه حذف می‌شود. ✓

ب) $\{-1, 2, 3, 4\} \neq \{-1, 4, 3, 2\}$ مجموعه سمت راست ۲ را ندارد. ✗

ج) $\{ار، ی، م، ا\} = \{امیر / ا، ی، ر، ا، م\} = \{ماریا\} \Leftrightarrow$ دو مجموعه با هم

برابرند. توجه کنید ترتیب اعضا مهم نیست. ✓

د) عضوهای این دو مجموعه با هم برابر نیستند: ✗

$$\{ \textcircled{a}, \textcircled{\{b, c\}} \} \neq \{ \textcircled{\{a, b\}}, \textcircled{c} \}$$

اعضای یک مجموعه باید کاملاً مشخص باشند.

مجموعه اعداد نزدیک به هزار توصیف کننده یک مجموعه مشخص نیست، زیرا دقیقاً مشخص نیست که اعداد تا چه محدودهای نزدیک به هزار محسوب می‌شوند.

(مجموعه‌ها، صفحه‌های ۵ و ۶)

-۶۳

$$A = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 16, 24, 48\} \Rightarrow n(A) = 10$$

$$B = \{17 \times 1, 17 \times 2, \dots, 17 \times 11\} \cdot 200 + 17 = 11/7 \Rightarrow n(B) = 11$$

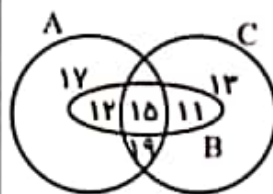
$$C = \{-7, -6, -5, \dots, 0, \dots, 5, 6, 7\} \Rightarrow n(C) = 15$$

$$D = \{-4, -3, \dots, 5, 6\} \Rightarrow n(D) = 11$$

بنابراین: $n(C) > n(D) \geq n(B) > n(A)$

(مجموعه‌ها، صفحه ۱۳)

-۶۴



توجه کنید که گزینه «۱» هم می‌تواند این سه مجموعه را نشان دهد، ولی گزینه «۴» بهتر نشان می‌دهد، زیرا عضوی در B وجود ندارد که عضو مجموعه‌های A یا C نباشد، پس B زیرمجموعه اجتماع مجموعه‌های A و C است.

(مجموعه‌ها، صفحه ۱۳)

-۶۵

$n \in \mathbb{N}$ پس n باید ۱، ۲، ۳، ... باشد.

$$n = 1 \rightarrow (-1)^n \times 2^n = (-1)^1 \times 2^1 = -2 \quad \text{زد گزینه‌های «۲» و «۴»}$$

$$n = 3 \rightarrow (-1)^n \times 2^n = (-1)^3 \times 2^3 = -8 \quad \text{زد گزینه «۱»}$$

(مجموعه‌ها، صفحه ۹)

-۶۶

اگر B زیرمجموعه A باشد ($B \subseteq A$)، هر عضوی از B حتماً عضوی از A است. اما هر عضوی از A حتماً عضو B نیست. بنابراین x و y هر دو عضو A هستند و با آن‌ها می‌توان زیرمجموعه‌ای از A ساخت.

(مجموعه‌ها، صفحه‌های ۷ و ۸)

نکته: اگر مجموعه‌ای n عضو داشته باشد تعداد زیرمجموعه‌های آن 2^n تا است.

2^n : تعداد زیرمجموعه‌ها در حالت اول

2^{n+2} : تعداد زیرمجموعه‌ها بعد از اضافه کردن ۲ عضو

$$\Rightarrow \frac{2^{n+2}}{2^n} = \frac{2^n \times 2^2}{2^n} = 2^2 = 4 \rightarrow \text{برای } 4 \Rightarrow 400\%$$

درصد میزان افزایش: $400\% - 100\% = 300\%$

(مجموعه‌ها، صفحه‌های ۷ و ۸)

A اعداد کوچک‌تر یا مساوی ۳ و B اعداد بزرگ‌تر از ۴ است و اشتراکی بین

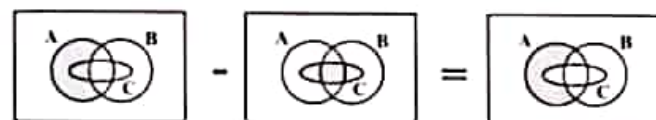
$A \cap B = \emptyset$ این دو مجموعه نیست. بنابراین:

$$\Rightarrow (A \cap B) \cup C = \emptyset \cup C = C$$

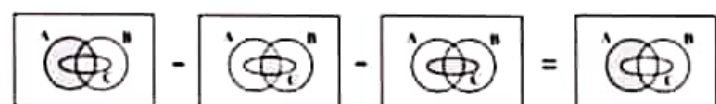
(مجموعه‌ها، صفحه‌های ۱۱ و ۱۴)

هر دو عبارت «ب» و «ت» نشان‌دهنده ناحیه رنگی هستند:

ب) $(A - B) - C$



ت) $A - (A \cap B) - C$



(مجموعه‌ها، صفحه‌های ۱۱ و ۱۴)

نکته: اگر دو مجموعه با هم هیچ اشتراکی نداشته باشند، به آن دو

مجموعه، دو مجموعه جدا از هم یا مجزا می‌گویند. (از این تعریف در

آزمون‌های ورودی استفاده می‌شود.)

$$B \subseteq A \rightarrow \begin{cases} A \cap B = B \\ A \cup B = A \end{cases}, D \subseteq C \rightarrow \begin{cases} D \cap C = D \\ D \cup C = C \end{cases}$$

$$(A \cap B) \cup (D \cap B \cap C) = (B) \cup \underbrace{(D \cap C)}_D \cap B$$

$$\Rightarrow (B) \cup (D \cap B) = B \cup \emptyset = B$$

اگر تعداد عضوهای مجموعه‌های A_1 تا A_9 را جمع کنیم خواهیم داشت:

$$n(A_1) + n(A_2) + n(A_3) + \dots + n(A_9) = 1 + 2 + 3 + \dots + 9 = 45$$

بنابراین کوچک‌ترین عضو از مجموعه A_1 عبارت است از: $45 + 1 = 46$

(مجموعه‌ها، صفحه‌های ۷ و ۱۳)

اگر $a = b = 1$ و یا $a = b = 2$ باشد، مجموعه A دارای ۲ عضو متشکل

از $\{1, 2\}$ خواهد بود ولی اگر $a \neq b \neq 1, 2$ باشد، ۴ عضو متمایز خواهیم داشت.

(مجموعه‌ها، صفحه‌های ۶ و ۵)

$$x = 1, y = 1 \Rightarrow \frac{1}{1} - \frac{1}{1} = 0$$

$$x = 1, y = 2 \Rightarrow \frac{1}{1} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$x = 2, y = 1 \Rightarrow \frac{1}{2} - \frac{1}{1} = -\frac{1}{2}$$

$$x = 2, y = 2 \Rightarrow \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$$

در نتیجه مجموعه $A = \left\{ -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2} \right\}$ دارای ۳ عضو می‌باشد و دارای $2^3 = 8$

زیرمجموعه است.

(مجموعه‌ها، صفحه‌های ۹ و ۱۰)

برای این که دو مجموعه مساوی باشند، باید $6 - x = 1$ یا $y - 2 = 1$ باشد.

بنابراین یکی از این دو حالت را بررسی می‌کنیم و اگر عدد حاصل در گزینه‌ها

موجود نبود حالت دیگر را بررسی می‌کنیم.

$$y - 2 = 1 \Rightarrow y = 3$$

$$2 + y = 2 + (3) = 5 \Rightarrow 6 - x = 5 \Rightarrow x = 1$$

بنابراین داریم:

$$\Rightarrow x + y = 1 + 3 = 4$$

(عدد ۴ در گزینه‌ها موجود است)

(مجموعه‌ها، صفحه‌های ۶ و ۷)

به جای X فقط می‌توانیم شماره‌های طبیعی عدد ۳۶ را جای گذاری کنیم تا حاصل تقسیم عددی طبیعی شود. بنابراین:

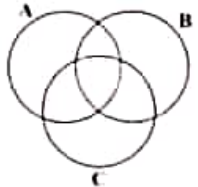
$$A = \{1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36\} \Rightarrow n(A) = 9$$

$$\text{تعداد زیر مجموعه‌ها} = 2^9 = 512$$

(مجموعه‌ها، صفحه‌های ۹ و ۱۰)

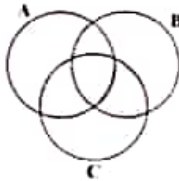
بررسی گزینه‌ها:

گزینه «۱»: $(A - B) \cap (B - C) \cup (A \cap B \cap C)$

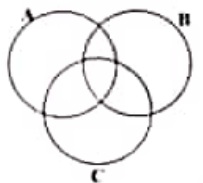


$$= \emptyset \cup (A \cap B \cap C) = A \cap B \cap C$$

گزینه «۲»: $(A \cup B) \cap (A \cup C) = A \cup (B \cap C)$

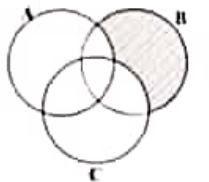


گزینه «۳»: $B - (A \cap C) \Rightarrow$



(با نمودار و ن داده شده یکسان نیست.)

گزینه «۴»: $(A \cup B) - (A \cap C)$



(مجموعه‌ها، صفحه‌های ۱۱ و ۱۲)

در باره مجموعه‌های A، B و C داریم:

$$\begin{matrix} A \in B & A \in C & B \in C \\ A \subset B & A \subset C & B \subset C \end{matrix}$$

(مجموعه‌ها، صفحه‌های ۱۱ و ۱۲)

دقت کنید عبارت $2x^2 + 1$ به ازای $x \in \mathbb{N}$ همواره عددی فرد است. اگر X زوج یا فرد باشد، x^2 هم همان است، اما در هر حال $2x^2$ عددی زوج و $2x^2 + 1$ عددی فرد خواهد بود.

برای سایر گزینه‌ها:

$$50 \in A, 344 \in C, 1030 \in D$$

(مجموعه‌ها، صفحه‌های ۹ و ۱۰)

می‌دانیم $A \cap B$ بین دو مجموعه A و B مشترک است. اگر $A - B = B - A$ باشد، یعنی:

$$A - (A \cap B) = B - (A \cap B)$$

است و این یعنی $A = B$. اگر دو مجموعه برابر باشند، اجتماع آن‌ها با اشتراک آن‌ها برابر است، یعنی:

$$A \cup B = A \cap B$$

(مجموعه‌ها، صفحه‌های ۱۱ و ۱۲)

ابتدا مجموعه B را با توجه به مجموعه A تشکیل می‌دهیم.

$$A = \{-\sqrt{2}, -1, 0, 1, \sqrt{2}\}$$

$$B = \left\{ \frac{1}{x^2 + 1} \mid x \in A \right\}$$

$$= \left\{ \frac{1}{(-\sqrt{2})^2 + 1}, \frac{1}{(-1)^2 + 1}, \frac{1}{0^2 + 1}, \frac{1}{1^2 + 1}, \frac{1}{(\sqrt{2})^2 + 1} \right\}$$

$$\Rightarrow B = \left\{ \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3} \right\} = \left\{ 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3} \right\}$$

که با توجه به گزینه‌ها مجموعه B برابر مجموعه D در گزینه «۲» است:

$$D = \left\{ \frac{1}{x} \mid \frac{1}{4} < \frac{1}{x} < 2, x \in \mathbb{N} \right\} = \left\{ \frac{1}{4} < \frac{1}{1} < 2, \frac{1}{4} < \frac{1}{2} < 2, \frac{1}{4} < \frac{1}{3} < 2 \right\}$$

$$\Rightarrow D = \left\{ 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3} \right\}$$

مجموعه C برابر $\left\{ 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots \right\}$ است. مجموعه E هر عدد صحیحی است

به جز اعداد ۰، ±۱، ±۲ و ±۳ و مجموعه F همه اعداد صحیح بزرگتر یا

مساوی یک است