

فصل دوم (اعداد حقیقی)

اعداد یویا ✓
 ① کسری باشد (بتوان بصورت کسری نوشت)
 ② صورت و مخرج آن عدد صحیح باشد
 ③ مخرج مخالف صفر باشد

مثال: $\frac{3}{2}$ و $\frac{52}{100}$ و $\frac{-\sqrt{9}}{5}$
 ← $\frac{3}{2}$ و $\frac{52}{100}$ صحیح است
 ← $\frac{-\sqrt{9}}{5}$ صحیح است

$$Q = \left\{ \frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0 \right\}$$

اعداد گند (اصم): اعدادی هستند که یویا نباشند. $(Q^c \text{ یا } Q')$

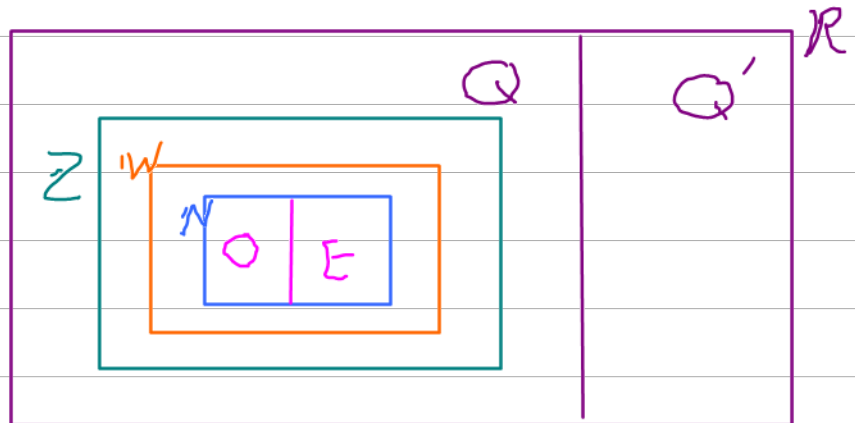
مثال: $\frac{-\sqrt{3}}{2}$ و π و ...

توجه: $\frac{عدد}{0}$ بی معنی و تعریف نشده است! بنابراین از یویا است نه گند.

اعداد حقیقی: به اجتماع مجموعه اعداد یویا و گند، اعداد حقیقی می‌گویند. (\mathbb{R})

$$Q \cap Q' = \emptyset$$

$$Q \cup Q' = \mathbb{R}$$



نکات:

(۱) $Q \cap Q' = \emptyset$ ، بنابراین اعداد بدست آمده یوایرند (اصغر) تقسیم می شوند.

(۲) $\frac{0}{عدد \neq 0} = 0$ و عددهای یوایرند اما $\frac{عدد}{0}$ تعریف نشده در معنی است.

یعنی اصلاً عدد یوایرند نیست.

(۳) مجموع، تفاضل و حاصل ضرب در عدد یوایرند، یوایرند اما تقسیم هر عدد یوایرند

بر عدد غیر یوایرند است.

تعریف شده: $\frac{1}{\frac{1}{2}}$

(۴) معکوس هر عدد یوایرند، عددی یوایرند است.

یوایرند $\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{3}}$ یوایرند

(۵) مجموع و تفاضل و ضرب و تقسیم در عدد یوایرند، ممکن است یوایرند نباشد.

$a = \sqrt{2}, b = \sqrt{3} \Rightarrow a + b = \sqrt{2} + \sqrt{3}$ یوایرند
 $\Rightarrow a - b = \sqrt{2} - \sqrt{3}$ یوایرند
 $\Rightarrow a \times b = \sqrt{2} \times \sqrt{3} = \sqrt{6}$ یوایرند
 $\Rightarrow a \div b = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ یوایرند

$a = \sqrt{2}, b = -\sqrt{2} + 3 \Rightarrow a + b = \sqrt{2} + (-\sqrt{2} + 3) = \sqrt{2} - \sqrt{2} + 3 = 3$ یوایرند

$a = \sqrt{2}, b = \sqrt{8} \Rightarrow a \times b = \sqrt{16} = 4$ یوایرند

$\Rightarrow b \div a = \sqrt{8} \div \sqrt{2} = \frac{\sqrt{8}}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{8}{2}} = \sqrt{4} = 2$ یوایرند

$a = \sqrt{2}, b = \sqrt{2} \Rightarrow a - b = \sqrt{2} - \sqrt{2} = 0$ یوایرند

(6) مجموع متضاد یک عدد رادیکالی، عدد رادیکالی، عددی است.

لند $\rightarrow \sqrt{2} + \frac{1}{3}$

(7) حاصل ضرب هر عدد رادیکالی غیر صفر در هر عدد رادیکالی، عددی است.

لند $2 \times \sqrt{3} = 2\sqrt{3}$ لند $0 \times \sqrt{5} = 0$

(8) حاصل تقسیم عدد رادیکالی غیر صفر، عددی است.

لند $\left\{ \begin{array}{l} \frac{\sqrt{2}}{3} \\ \frac{0}{\sqrt{3}} = 0 \end{array} \right.$ استثناء

* محدودیت روی اعداد رادیکالی

① جمع و تفریق: هم جنس کنیم.

② ضرب و تقسیم: ضرب: ساده سازی

صورت در صورت، مخرج در مخرج

تقسیم: تبدیل علامت به ضرب و معکوس کردن کسرها

تقسیم: ساده سازی
صورت در صورت، مخرج در مخرج

سؤال: حاصل عبارات زیر را به دست آورید.

① $\left(\frac{1 \times 4}{1 \times 4} - \frac{1 \times 2}{2 \times 4} + \frac{3}{4} \right) \div \left(\frac{5 \times 2}{10 \times 2} - \frac{3 \times 5}{4 \times 5} - \frac{1 \times 1}{2 \times 1} \right) \times \frac{3}{8}$

$$\left(\frac{\cancel{x} - \cancel{x} + x}{x} \right) \div \left(\frac{\cancel{x} - 10 - \cancel{x}}{x_0} \right) \times \frac{x}{x}$$

$$= \frac{x}{x} \div \left(-\frac{10}{x_0} \right) \times \frac{x}{x} = \frac{x}{x} \times \left(-\frac{x_0}{10} \right) \times \frac{x}{x} = -\frac{x}{10}$$

2

سریسلس

$$x - \frac{1}{x-1} = x - \frac{1}{x-\frac{1}{x}} = x - \frac{1}{\frac{x^2-1}{x}} = x - \frac{x}{x^2-1}$$

$$= \frac{x(x^2-1) - x}{x^2-1} = \frac{x^3 - x - x}{x^2-1} = \frac{x^3 - 2x}{x^2-1} = \frac{x(x^2-2)}{x^2-1}$$

سریسلسوی:

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{b-a}{a \times b} &= \frac{1}{a} - \frac{1}{b} \\ \frac{a+b}{a \times b} &= \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \end{aligned} \right.$$

3

$$\frac{a}{x_0 \times x_0} + \frac{a}{x_0 \times x_0} + \frac{a}{x_0 \times x_0} + \dots + \frac{a}{x_0 \times 100}$$

$$\frac{1}{x_0} - \frac{1}{x_0} + \frac{1}{x_0} - \frac{1}{x_0} + \frac{1}{x_0} - \frac{1}{x_0} + \dots + \frac{1}{x_0} - \frac{1}{100} = \frac{1}{x_0} - \frac{1}{100}$$

$$\frac{x_0 - 1}{100} = \frac{x}{100}$$

4

$$x \times \left(\frac{1}{x \times a} + \frac{1}{a \times x} + \dots + \frac{1}{x_1 \times x_1} \right) \div x$$

$$= \left(\frac{2}{2 \times 0} + \frac{2}{0 \times 1} + \dots + \frac{2}{21 \times 22} \right) \div 2$$

$$\left(\frac{1 \times 11}{22 \times 11} - \frac{1}{22} \right) \div 2 = \left(\frac{10}{22} \right) \times \frac{1}{2} = \frac{5}{11}$$

تعداد اعداد = $\frac{\text{عدد آخر} - \text{عدد اول}}{\text{فاصله بین اعداد}} + 1$

مجموع اعداد = $\frac{(\text{عدد اول} + \text{عدد آخر}) \times \text{تعداد}}{2}$

نقطه: $1 + 2 + 3 + 4 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$

⑤ $\frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3} \right) + \left(\frac{1}{4} + \frac{2}{4} + \frac{3}{4} \right) + \dots + \left(\frac{1}{20} + \frac{2}{20} + \dots + \frac{19}{20} \right)$

$\frac{2}{3} = 1$ $\frac{6}{4} = \frac{3}{2}$ $\frac{1+2+3+\dots+19}{20} = \frac{19 \times 20}{2} = \frac{19}{2}$

$= \frac{1}{2} + 1 + \frac{3}{2} + \dots + \frac{19}{2}$

① در 6: $\frac{1}{2} + \frac{2}{2} + \frac{3}{2} + \frac{4}{2} + \dots + \frac{19}{2} = \frac{1+2+3+\dots+19}{2} = \frac{19 \times 20}{2} = \frac{19}{2}$

$= \frac{19 \times 20}{2 \times 2} = 19 \times 5 = 95$

② در 6: $\frac{1}{2} + 1 + \frac{3}{2} + \dots + \frac{19}{2}$

$+\frac{1}{2}$ $+\frac{1}{2}$

* $\frac{1+2+3+\dots+19}{20} = \frac{19 \times 20}{20 \times 2} = \frac{19}{2}$

$$\text{تعداد اعداد} = \frac{\frac{19}{2} - \frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} + 1 = \frac{18}{\frac{1}{2}} + 1 = 18 + 1 = 19$$

$$\text{مجموع اعداد} = \frac{(\frac{1}{2} + \frac{19}{2}) \times 19}{2} = \frac{10 \times 19}{1} = 5 \times 19 = 95$$

$$\textcircled{7} \quad \left(1 - \frac{1}{23}\right) \left(1 - \frac{2}{23}\right) \left(1 - \frac{3}{23}\right) \dots \left(1 - \frac{22}{23}\right) = 0$$

$\left(1 - \frac{22}{23}\right) = 1 - 1 = 0$

اعداد یونانی گویا ناپذیر: اعداد یونانی در ب.م.م صورت گنجی است را محول ناپذیر نامیم.
(اعداد یونانی که در صورت گنجی است اعداد ساده شدن با هم ندارند)

مثال: $\frac{7}{5}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{25}{2}$

انواع اعداد اعشاری:

① مختوم یا متناهی: تعداد ارقام برابر صفر است.

$$0,25 = \frac{25}{100} = \frac{1}{4}$$

$$0,5 = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$$

$$0,75 = \frac{75}{100} = \frac{3}{4}$$

$$0,523 = \frac{523}{1000}$$

* هر عدد اعشاری مختوم، عدد یونانی است. زیرا بر توان آن را صورت گنجی است.

و گنجی صحیح (در صفر مخالف صفر) نیست.

* روش شناسایی کسرهای با مقام اعشاری منتهی: کسرها که مخرج آن‌ها پذیرنده عوامل

اول مخرج آن‌ها فقط ۲ یا ۵ یا هر دو باشند.

$$\frac{9}{50} \rightarrow 5^2 \times 2$$

$$\frac{25}{2} \rightarrow 2$$

$$\frac{20}{8} = \frac{5}{2}$$

$$\frac{55}{22} = \frac{5}{2}$$

② متناوب: تعداد ارقام بعد از ممیز آن‌ها آنها ندارد در صورت متناوب تکرار می‌شوند.
اعداد بعد از ممیز

شامل چه هستند.

۱) متناوب ساده: تمام اعداد بعد از ممیز تکرار می‌شوند.

$$\frac{2}{3} = 0,666... = 0,6\bar{6}$$

$$\frac{25}{33} = 0,757575... = 0,75\bar{75}$$

روش شناسایی کسرهای با مقام اعشاری متناوب ساده: کسرها که مخرج آن‌ها پذیرنده عوامل مخرج

آن‌ها هر عدد اول مجزاً ۲ و ۵ باشد. (اصلاً عوامل ۳ و ۷ نیستند)

۲) متناوب مرکب: عددی از آن‌ها بعد از ممیز آن‌ها متناوباً تکرار نمی‌شود. (علاقه به ارقام

بعد از ممیز هست نه متناوباً تکرار نمی‌شود)

$$\frac{7}{6} = 1,1666... = 1,1\bar{6}$$

$$\frac{5}{66} = 0,07575... = 0,075\bar{75}$$

روش تناسبی سرطانی با نمایش اعشاری متناوب مرتب: کسرهای کویلی نامیده می‌شوند علاوه بر عوامل ۲، ۵، ۱۰، ۲۰، ۴۰، ۸۰ نیز دسته‌بندی می‌شوند.

مثال: نمایش اعشاری مرتب از کسرها زیر را بنویسید و نوع آن‌ها را با ذکر دلیل (از روی سر) مشخص کنید.

۱) $\frac{14}{35} = \frac{2}{5} = 0.4$
 فنوناً
 کسر ساده شده

۲) $\frac{2}{24} = \frac{1}{12} = 0.08\overline{3}$
 متناوب مرتب 2×3

۳) $\frac{7}{22} = \frac{3}{11} = 0.6\overline{3}$
 متناوب ساده
 متناوب ساده

۴) $\frac{15}{76} = \frac{3}{14} = 0.214\overline{2857}$
 متناوب مرتب 2×7

نتیجه: معادله هر عدد اعشاری متناوب، یک کسر با صورت و مخرج صحیح (مخرج $\neq 0$) وجود دارد. بنابراین اعداد اعشاری متناوب (ساده یا مرتب) اعدادی توانمندند.

۳۰) نامشروع غیرمتناوب (غیر از دسته‌بندی شده)

$4, 31758 \dots$

$\pi = 3, 1415 \dots$

$3, 122333 \dots$

* ۱ دسته از اعداد اعشاری، نامشروعند.

تبدیل اعداد اعشاری متناوب ساده به کسر:

مثال:

$$0, \overline{23}$$

$$A = 0, \overline{23}$$

$$\times 100 \downarrow \quad 100A = \overline{23,23} \Rightarrow 100A - A = \overline{23,23} - 0, \overline{23}$$

$$99A = 23$$

$$A = \frac{23}{99}$$

$$\begin{array}{r} 0, \overline{23} \\ \times 100 \downarrow \\ \hline \overline{23,23} \end{array} = \overline{23,23}$$

- ① عدد اعشاری را مساوی A قرار دهیم.
- ② کمترین این عدد را در 10^n ضرب کنیم به n تعداد رقم اعشار است.
- ③ در معادله ایجاد شده را از هم کم کنیم.
- ④ مقدار A را محاسبه کنیم.

$$1, \overline{243}$$

$$1, \overline{243}$$

مثال:

$$\begin{array}{r} A = 1, \overline{243} \\ \times 1000 \downarrow \\ \hline 1000A = \overline{1243,243} \end{array}$$

$$\Rightarrow 1000A - A = \overline{1243,243} - 1, \overline{243}$$

$$999A = 1242$$

$$A = \frac{1242}{999}$$

تبدیل اعداد اعشاری متناوب رسیب به کسر

- ① عدد اعشاری را مساوی A قرار دهیم.
- * ② طریق ساده ای باشد را در 10^p ضرب کنیم که P تعداد ارقام غیر برش بعد از ممیزات باشد. (برای تبدیل به عدد اعشاری متناوب ساده)
- ③ طریق ساده جدید را در 10^n ضرب کنیم که n تعداد ارقام برش بعد از ممیزات باشد.
- ④ معادله دوم را از معادله اول کم کنیم مقدار A را بدست می آوریم.

مثال:

$$2,31\bar{4}$$

$$\textcircled{1} A = 2,31\bar{4}$$

$$\begin{matrix} \times 100 \\ \downarrow \\ 100A = 231,4\bar{4} \end{matrix} \textcircled{2}$$

$$\begin{matrix} \times 10 \\ \downarrow \\ 1000A = 2314,4\bar{4} \end{matrix} \textcircled{3}$$

$$\textcircled{3} - \textcircled{2} \Rightarrow 1000A - 100A = 2314,4\bar{4} - 231,4\bar{4}$$

$$900A = 2083$$

$$A = \frac{2083}{900}$$

مثال: مقابله کنید.

$$0,7\bar{6} \textcircled{X} = 0,77\bar{6} \dots$$

$$0,3\bar{3} \textcircled{X} = 0,7\bar{3} = 0,73\bar{3} \dots$$

$$0,2\bar{4} \textcircled{X} = 0,24\bar{4} \dots$$

$$2,7\bar{3} \textcircled{X} = 2,70\bar{3} \dots$$

روش مقایسه آنها:

① نمایش تقریبی روی محور

② هم‌خرج کردن (هم‌صورت کردن)

③ نمایش اعشاری

مثال: سه‌گانه زیر را به روش مقایسه کنید.

① $\frac{2}{3}$ و $\frac{5}{6}$



② $\frac{2 \times 2}{3 \times 2} = \frac{4}{6} < \frac{5}{6}$

③ $\frac{2}{3} = 0,666... = 0,6\bar{6}$

$\frac{5}{6} = 0,8\bar{3}$

$0,8\bar{3} > 0,6\bar{6}$

$\frac{16}{72} = \frac{2}{9}$ و $\frac{3}{8} = \frac{27}{72}$

مثال: اعداد زیر را از کوچک به بزرگ مرتب کنید.

$\frac{1}{2}$ و ① و $-\frac{3}{2}$ و $\frac{2}{9}$ و $\frac{3}{8}$ و $\frac{7}{12}$ و $\frac{8}{3}$

$-\frac{3}{2} < \frac{2}{9} < \frac{3}{8} < \frac{1}{2} < \frac{7}{12} < 1 < \frac{8}{3}$

□ بیطرفی اعداد منفی ایما بین اعداد منفی یا ایما :
که در هر سه ر

* نوشتن چند لری بین دو عدد

① میانگین سری : در $\frac{a}{b}$ و $\frac{c}{d}$ دو عدد نویا باشند $\frac{\frac{a}{b} + \frac{c}{d}}{2}$ سن

دو عدد $\frac{a}{b}$ و $\frac{c}{d}$ قرار می برد

② هم منجر کردن ← ① دوسر راهم منجر می کنیم

③ اگر اعداد نوشتن اعداد نبود ، صورت و منجر هر کس را

در بعضی سیر از اعداد اعداد هواسه شده منرب می کنیم

□ بیابان اعداد نصف ایروا سن اعداد نصف یاویا :
 که در هر کسره

* نوشتن چیز در بین دو عدد

① میانین سری : در $\frac{a}{b}$ و $\frac{c}{d}$ دو عدد نو یا باشند $\frac{a}{b} + \frac{c}{d}$ سن

دو عدد $\frac{a}{b}$ و $\frac{c}{d}$ قرار می برد

② هم مخبر کردن ← ① دو سر را هم مخبر می کنیم

③ اگر اعداد نوشتن اعداد نبود، صورت و مخبر هر کسره را

در بعضی سیر از تعداد اعداد هواسه شده مخبر می کنیم

$$\frac{1}{3} < \frac{1}{2}$$

مثال : ۳ سیر بین $\frac{1}{2}$ و $\frac{1}{3}$ بنویسید

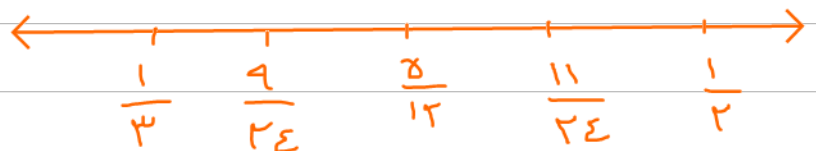
① میانین سری :

$$\frac{\frac{1}{3} + \frac{1}{2}}{2} = \frac{\frac{2+3}{6}}{2} = \frac{5}{2} = \frac{5}{12} \rightarrow$$
 بین $\frac{1}{3}$ و $\frac{1}{2}$

بقیه $\frac{1}{3}$ و $\frac{5}{12}$

$$\frac{\frac{1}{3} + \frac{5}{12}}{2} = \frac{\frac{4+5}{12}}{2} = \frac{9}{24} \rightarrow$$

$$\frac{1}{3} < \frac{9}{24} < \frac{5}{12} < \frac{11}{24} < \frac{1}{2}$$



بین $\frac{5}{12}$ و $\frac{1}{2}$

$$\frac{\frac{5}{12} + \frac{1}{2}}{2} = \frac{\frac{5+6}{12}}{2} = \frac{11}{24} \rightarrow$$

② هم فرجه کردن $\frac{1}{24} = \frac{1}{3} < \frac{9}{24} < \frac{10}{24} < \frac{11}{24} < \frac{1}{2} = \frac{12}{24}$

$$\frac{1 \times 2}{3 \times 2} = \frac{2 \times 4}{2 \times 4} = \frac{1}{24}$$

$$\frac{1 \times 3}{2 \times 3} = \frac{3 \times 4}{2 \times 4} = \frac{12}{24}$$

مثال: بین دو عدد $\sqrt{2}$ و $\sqrt{10}$ ، شش عدد رند بنویسید.

$$\sqrt{2} < \sqrt{3} < \sqrt{4} < \sqrt{6} < \sqrt{7} < \sqrt{8} < \sqrt{9} < \sqrt{10}$$

مثال: بین دو عدد 4 و 5 ، سه عدد رند بنویسید.

$$4 = \sqrt{16}$$

$$5 = \sqrt{25}$$

$$\sqrt{16} < \sqrt{17} < \sqrt{21} < \sqrt{23} < \sqrt{25}$$

مثال: سه عدد رند بین $\sqrt{5}$ و $\sqrt{10}$ بنویسید.

$$\sqrt{5} \approx 2,2$$

$$\sqrt{10} \approx 3,1$$

$$\sqrt{5} < 2,3 < 2,7 < 3 < \sqrt{10}$$

$$\sqrt{9} = 3$$

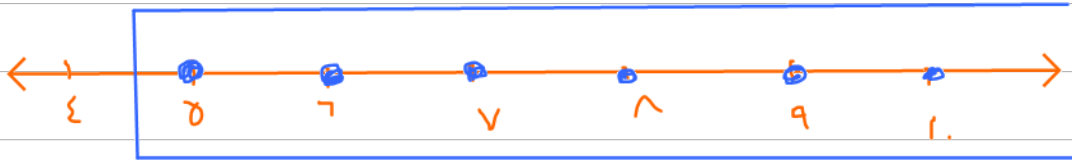
نکته: بین هر دو عدد رند یا نه ، بین شمار عدد رند و بین شمار عدد رند وجود دارد.

□ نہیں مجموعہ ہاوردی محور اعداد حقیقی :

مثال : مجموعہ ہا زیر در صورت اعلان ہدی محور اعداد حقیقی خال دہدی .

① کدر ہا صغی بزرتر یا سارہ ہ

$$\{x \in \mathbb{N} \mid x > 5\} = \{5, 6, 7, 8, 9, \dots\}$$



② اعداد جمع بین ۵ - ۱

③ اعداد حقیقی بین ۵ , ۲