* انواع اعداد اعشاری

(۱) مختوم (متناهی) : تعداد ارقام اعشار (بعد از ممیز) متناهی است.

$$۰/۵ = \frac{۱}{۲} \qquad ۰/۲۵ = \frac{۲۵}{۱۰۰} = \frac{۱}{۴}$$

$$۵۲۴۳/۰ = \frac{۵۲۴۳}{۱۰۰۰۰} \qquad ۰/۷۵ = \frac{۷۵}{۱۰۰} = \frac{۳}{۴}$$

* هر عدد اعشاری مختوم ، یک عدد گویا است . زیرا می توان بصورت کسری نوشت به صورت که مخرج آن عدد صحیح و مخرج مخالف صفر باشد .

* روش شناسایی کسرهای با نمایش اعشاری مختوم : کسرهای کوچک ناپذیری به تنها عوامل اول مخرج آنها ۲ یا ۵ یا هر دو باشند .

$$\frac{۲۶}{۴} = \frac{۱۳}{۲} \rightarrow ۲ \qquad \frac{۹}{۵۰} \rightarrow ۲ \times ۵^۲$$

(۲) متناوب : تعداد ارقام اعشار آنها انتها ندارد و بصورت متناوب تکرار می شود .

شامل دو دسته می باشند :

۱) متناوب ساده . تمام اعداد بعد از ممیز بصورت متناوب تکرار می شود .

$$\frac{۲}{۳} = ۰/۶۶۶... = ۰/\overline{۶} \qquad ۳ \rightarrow ۳$$

$$\frac{۲۵}{۳۳} = ۰/۷۵۷۵۷۵... = ۰/\overline{۷۵} \qquad ۳۳ \rightarrow ۳ \times ۱۱$$

روش شناسایی کسرهایی با نمایش اعشاری متناوب ساده : کسرهای کوچک ناپذیری که عوامل اول مخرج آنها هر عدد اولی بجز ۲ و ۵ باشد . (اصلاً عوامل ۲ و ۵ را نبینیم)

$$\frac{14 \div 2}{122 \div 2} = \frac{7}{61} \rightarrow 61$$

$$\frac{4}{11} \rightarrow 11$$

۲) متناوب مرکب : همه‌ی ارقام بعد از ممیز آنها متناوباً تکرار نمی‌شوند .

$$\frac{7}{6} = 1.1666\ldots = 1.1\overline{6} \qquad 6 \rightarrow 2 \times 3$$

$$\frac{5}{66} = 0.0757575\ldots = 0.0\overline{75} \qquad 66 \rightarrow 2 \times 3 \times 11$$

روش شناسایی کسرهایی با نمایش اعشاری متناوب مرکب : کسرهای کوچک ناپذیری که علاوه بر عوامل ۲ یا ۵ ، حتماً عوامل دیگری بجز ۲ و ۵ نیز داشته باشند .

$$\frac{13}{75} \rightarrow 3 \times 5^2$$

مثال : نمایش اعشاری هر یک از کسرهای زیر را بنویسید و نوع آنها را با ذکر دلیل مشخص کنید .

۱) $\frac{14 \div 7}{35 \div 7} = \frac{2}{5} = 0.4$ ، $5 \rightarrow$ فقط ۵ ، مختوم

۲) $\frac{2}{24} = \frac{1}{12} = 0.08\overline{3}$ ، $12 \rightarrow 3 \times 2^2$ ، متناوب مرکب

۳) $\frac{6}{22} = \frac{3}{11} = 0.\overline{27}$ ، متناوب ساده

۴) $\frac{15}{70} = \frac{3}{14} = 0.2\overline{142857}$ ، $14 \rightarrow 2 \times 7$ ، متناوب مرکب

نکته : معادل هر عدد اعشاری متناوب ، یک کسر با صورت و مخرج صحیح (و مخرج مخالف صفر) وجود دارد . بنابراین اعداد اعشاری متناوب (ساده یا مرکب) نیز عدد گویا هستند .

۳ نامختوم غیرمتناوب (حتی اگر الگو داشته باشند)

۳٫۱۲۲۳۳۳...   ۴٫۳۴۵۷۱۹...

* معادل اعداد اعشاری نامختوم غیرمتناوب ، کسر گویا نداریم . بنابراین این دسته از اعداد گنگ محسوب می‌شوند .

$\pi = ۳٫۱۴۱۵۹۲۶۵۳۵...$

☐ تبدیل اعداد اعشاری متناوب ساده به کسر

۱ عدد اعشاری را مساوی A قرار می‌دهیم .

۲ طرفین معادله به دست آمده را در ۱۰^n ضرب می‌کنیم که n تعداد ارقام بعد از ممیز است .

۳ دو معادله‌ی ایجاد شده را از هم کم می‌کنیم و مقدار A را به دست می‌آوریم .

مثال : کسر گویای مربوط به اعداد اعشاری زیر را بنویسید .

۱ $۰٫\overline{۲۳}$

$A = ۰٫\overline{۲۳}$ $\xrightarrow{\times ۱۰۰}$ $۱۰۰A = ۲۳٫\overline{۲۳}$

$\Rightarrow ۱۰۰A - A = ۲۳٫\overline{۲۳} - ۰٫\overline{۲۳}$

$۹۹A = ۲۳$

$A = \frac{۲۳}{۹۹}$

۲) $۲,\overline{۲۳۵}$

$$A = ۲,\overline{۲۳۵}$$

$$\xrightarrow{\times ۱۰۰۰} ۱۰۰۰A = ۲۲۳۵,\overline{۲۳۵}$$

$$\Rightarrow ۱۰۰۰A - A = ۲۲۳۵,\overline{۲۳۵} - ۲,\overline{۲۳۵}$$

$$۹۹۹A = ۲۲۳۳$$

$$A = \frac{۲۲۳۳}{۹۹۹}$$

□ تبدیل اعداد اعشاری متناوب مرکب به کسر:

۱) عدد اعشاری را مساوی A قرار می‌دهیم.

۲) طرفین معادله ایجاد شده را در ۱۰^p که p تعداد ارقام غیرگردش بعد از ممیز ضرب می‌کنیم.
(برای تبدیل به عدد اعشاری متناوب ساده)

$۲,۳۱\overline{۴}$

$$A = ۲,۳۱\overline{۴} \quad (۱)$$

$$\xrightarrow{\times ۱۰^۲} ۱۰۰A = ۲۳۱,\overline{۴} \quad (۲)$$

$$\xrightarrow{\times ۱۰} ۱۰۰۰A = ۲۳۱۴,\overline{۴} \quad (۳)$$

$$(۲),(۳) \Rightarrow ۱۰۰۰A - ۱۰۰A = ۲۳۱۴,\overline{۴} - ۲۳۱,\overline{۴}$$

$$۹۰۰A = ۲۰۸۳ \Rightarrow A = \frac{۲۰۸۳}{۹۰۰}$$

۳) طرفین معادله دوم ایجاد شده را در ۱۰^n ضرب می‌کنیم که n تعداد ارقام گردش است.

۴) طرفین معادله (۲) و (۳) را از هم کم می‌کنیم و مقدار A را به دست می‌آوریم.

□ روش های مقایسه کسرها:

① نمایش تقریبی روی محور

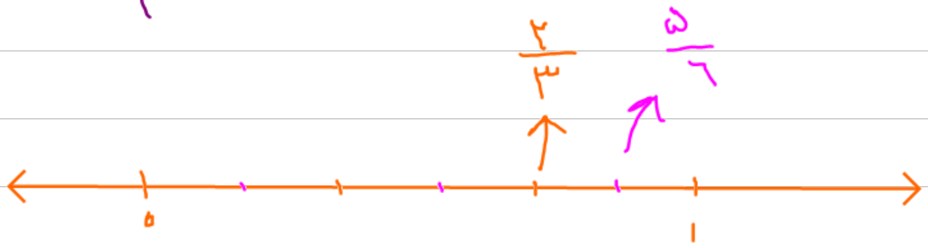
② هم مخرج کردن (یا صورت ها را یکی کنیم)

③ نمایش اعشاری

مثال: کسرهای زیر را به هر ۳ روش مقایسه کنید.

$\frac{2}{3}$ و $\frac{5}{6}$

① نمایش روی محور



$\frac{2}{3} < \frac{5}{6}$

② هم مخرج کردن

$\frac{2\times 2}{3\times 2} = \frac{4}{6} < \frac{5}{6}$

③ نمایش اعشاری:

$\frac{2}{3} = 0/\overline{6} < \frac{5}{6} = 0/8\overline{3}$

$0/666\ldots \qquad 0/8333\ldots$

مثال: اعداد زیر را از کوچک به بزرگ مرتب کنید.

$\frac{1}{2} = 0/5 \ ,\ \frac{6}{5} = 1\frac{1}{5} \ ,\ 1 \ ,\ -\frac{3}{2} \ ,\ \frac{2}{9} < \frac{1}{2} \ ,\ \frac{3}{8} < \frac{1}{2} \ ,\ \frac{7}{12} > \frac{1}{2}$

$-\frac{3}{2} < \frac{2}{9} < \frac{3}{8} < \frac{1}{2} < \frac{7}{12} < 1 < \frac{6}{5}$

$\frac{۱۶}{۷۲} = \frac{۲}{۹} < \frac{۳}{۸} = \frac{۲۷}{۷۲}$

مقایسه کنید :

$۰٫۳\overline{۳} > ۰٫۳۲$ ($۰٫۳۳۳...$)

$۰٫۶۶۶۵ < ۰٫\overline{۶} = ۰٫۶۶۶۶...$

$۲٫\overline{۷۳} > ۲٫\overline{۷۰۳}$

$۲٫۷۳۷۳۷۳...$ $۲٫۷۰۳۷۰۳...$

$۰٫۲۴ < ۰٫۲\overline{۴} = ۰٫۲۴۴۴...$

□ پیدا کردن اعداد گنگ یا گویا بین اعداد گنگ یا گویا :

* نوشتن چند گویا بین دو عدد :

(۱) میانگین گیری : اگر $\frac{a}{b}$ و $\frac{c}{d}$ دو عدد گویا باشند ، $\frac{\frac{a}{b} + \frac{c}{d}}{2}$ عددی بین

$\frac{a}{b}$ و $\frac{c}{d}$ است .

(۲) هم مخرج کردن ← (۱) مخرج ها را یکی می کنیم .

(۲) اگر امکان نوشتن اعداد نبود ، صورت و مخرج هر کسر را

در یک عدد بیشتر از تعداد خواسته شده ضرب می کنیم .

مثال : ۳ گویا بین $\frac{۱}{۲}$ و $\frac{۱}{۳}$ بنویسید .

$\frac{۱}{۳} < \frac{۹}{۲۴} < \frac{۵}{۱۲} < \frac{۱۱}{۲۴} < \frac{۱}{۲}$

① میانگین گیری

$$\frac{\frac{1}{3}+\frac{1}{2}}{2}=\frac{\frac{2+3}{6}}{2}=\frac{\frac{5}{6}}{2}=\frac{5}{12}$$ → بین $\frac{1}{3}$ و $\frac{1}{2}$

$$\frac{\frac{1}{3}+\frac{5}{12}}{2}=\frac{\frac{4+5}{12}}{2}=\frac{\frac{9}{12}}{\frac{2}{1}}=\frac{9}{24}$$ → وسط $\frac{1}{3}$ و $\frac{5}{12}$

$$\frac{1}{3} \quad \frac{9}{24} \quad \frac{5}{12} \quad \frac{11}{24} \quad \frac{1}{2}$$

$$\frac{\frac{5}{12}+\frac{1}{2}}{2}=\frac{\frac{5+6}{12}}{2}=\frac{\frac{11}{12}}{2}=\frac{11}{24}$$

② هم مخرج کردن :

$$\frac{1\times 2}{3\times 2}=\frac{2\times 4}{6\times 4}=\frac{8}{24}$$

$$\frac{1\times 3}{2\times 3}=\frac{3\times 4}{6\times 4}=\frac{12}{24}$$

$$\frac{8}{24}=\frac{1}{3}<\frac{9}{24}<\frac{10}{24}<\frac{11}{24}<\frac{1}{2}=\frac{12}{24}$$

مثال : ٤ عدد بین ۱ و $\frac{4}{5}$ بنویسید.

$$1=\frac{1\times 5}{1\times 5}=\frac{5\times 5}{5\times 5}=\frac{25}{25}$$

$$\frac{4\times 5}{5\times 5}=\frac{20}{25}$$

$$\frac{20}{25}=\frac{4}{5}<\frac{21}{25}<\frac{22}{25}<\frac{23}{25}<\frac{24}{25}<1=\frac{25}{25}$$

مثال : بین دو عدد $\sqrt{2}$ و $\sqrt{10}$ ، شش عدد بنویسید.

$$\sqrt{2}<\sqrt{3}<\sqrt{5}<\sqrt{6}<\sqrt{7}<\sqrt{8}<\sqrt{8.5}<\sqrt{10}$$

$$\frac{\sqrt{5}+\sqrt{6}}{2}$$ ← می‌توان این را هم گرفت

مثال: بین دو عدد ۴ و ۵، سه عدد گنگ بنویسید.

$4=\sqrt{16}$

$5=\sqrt{25}$

$$\sqrt{16}=4<\sqrt{17}<\sqrt{18}<\sqrt{21}<5=\sqrt{25}$$

مثال: سه عدد گویا بین $\sqrt{5}$ و $\sqrt{10}$ بنویسید.

$\sqrt{5}\simeq 2.2$

$$\sqrt{5}<2.4<2.54<3<\sqrt{10}$$

$\sqrt{10}\simeq 3.1$

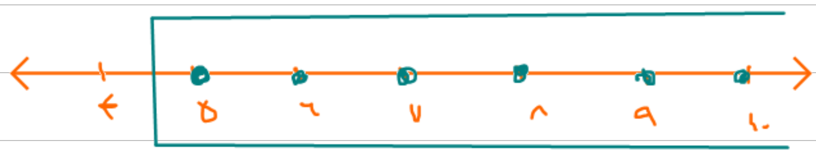
نکته: بین هر دو عدد گنگ یا گویا، بی‌شمار عدد گنگ یا گویا وجود دارد.

نمایش مجموعه‌ها روی محور اعداد حقیقی:

مثال: مجموعه‌های زیر را به صورت امکان روی محور اعداد حقیقی نشان دهید.

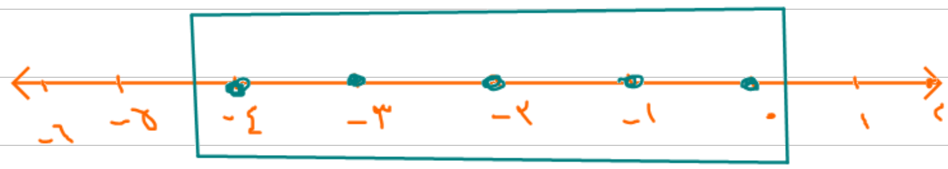
(۱) عددهای طبیعی بزرگتر یا مساوی ۵

$$\{x\in\mathbb{N}\mid x\geq 5\}=\{5,6,7,8,\dots\}$$



(۲) اعداد صحیح بین ۵- و ۱

$$\{x\in\mathbb{Z}\mid -5<x<1\}=\{-4,-3,-2,-1,0\}$$

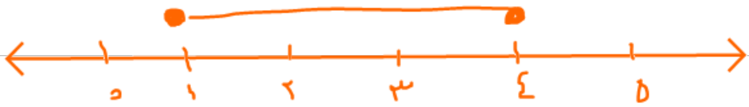


۳) اعداد حقیقی بین ۲ و ۵

$\{x \in \mathbb{R} \mid 2 < x < 5\}$

۴) $\{x \in \mathbb{R} \mid -3 \leq x < 1\}$

۵) $\{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leq x \leq 4\}$



۶) $\{x \in \mathbb{Q} \mid -1 \leq x \leq 1\}$

نمی‌توان نشان داد. زیرا در این بازه بی‌شمار عدد گویا
و بی‌شمار عدد گنگ وجود دارد که قابل تفکیک از هم نیستند.