

فصل ۴: توان درسته

درس اول: توان صحیح

$$\underbrace{a \times a \times a \times \dots \times a}_{n \text{ بار}} = a^n$$

بار درون:

ا: پایه

n: توان

مثال: $3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 3^5 = 243$

$$(-2) \times (-2) \times (-2) \times (-2) \times (-2) = (-2)^5 = -32$$

$$\left(-\frac{1}{5}\right) \left(-\frac{1}{5}\right) \left(-\frac{1}{5}\right) \left(-\frac{1}{5}\right) = \left(-\frac{1}{5}\right)^4 = +\frac{1}{625}$$

نکات:

① عددی که توان ندارد، توان آن ۱ است. $a = a^1$

② هر عدد غیر از صفر به توان صفر برابر است با ۱. $a^0 = 1$
($a \neq 0$)

③ صفر به توان هر عدد غیر از صفر، برابر صفر است. $0^n = 0$ ($n \neq 0$)

④ عدد ۱ به توان هر عدد دلخواه برابر ۱ است. $1^n = 1$

⑤ اگر عدد منفی به توان یک عدد فرد برسد، حاصل عددی منفی و اگر به توان یک عدد زوج برسد،

حاصل عددی مثبت است. حاصل عددی مثبت است.

$(-a)^n$ $\begin{cases} \rightarrow -a^n, a > 0, n \text{ فرد} \\ \rightarrow +a^n, a > 0, n \text{ زوج} \end{cases}$

درس اول: توان صحیح

در سال‌های گذشته با توان‌های طبیعی یک عدد آشنا شده‌اید؛ به طور مثال می‌دانید:

$$2^3=8 \quad \text{و} \quad (-5)^2=25 \quad \text{و} \quad \left(\frac{3}{4}\right)^4=\frac{81}{256} \quad \text{و} \quad \left(\frac{-1}{2}\right)^5=\frac{-1}{32}$$

همچنین می‌دانید که اگر a عددی غیرصفر باشد، $a^0=1$.

آیا توان منفی یک عدد (ناصفر) هم معنی دارد؟ مثلاً حاصل 2^{-3} چیست؟ به کمک فعالیت زیر

پاسخ این سؤال را می‌توان پیدا کرد:

فعالیت

جدول زیر را در نظر بگیرید و به سؤالات پاسخ دهید:

۱۶	۸	۴	۲	۱	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4} = \frac{1}{2^2}$	$\frac{1}{8} = \frac{1}{2^3}$	$\frac{1}{16} = \frac{1}{2^4}$	$\frac{1}{32} = \frac{1}{2^5}$
2^4	2^3	2^2	2^1	2^0	2^{-1}	2^{-2}	2^{-3}	2^{-4}	2^{-5}

الف) عددهای سطر اول جدول با هم چه ارتباطی دارند؟

ب) هر یک از عددهای سطر دوم چه رابطه‌ای با عدد بالای آن دارد؟

ج) توان‌های عددهای سطر دوم تا 2^0 با یکدیگر چه رابطه‌ای دارد؟

د) این الگو را ادامه دهید و در جاهای خالی عددهای مناسب بنویسید.

ه) به کمک جدول، تساوی‌های زیر را کامل کنید:

$$2^{-3} = \frac{1}{2^3}$$

$$2^{-4} = \frac{1}{2^4}$$

$$2^{-5} = \frac{1}{2^5}$$

به طور کلی اگر a یک عدد غیرصفر باشد و n یک عدد طبیعی باشد، آن‌گاه:

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} \quad a \neq 0, \quad n \in \mathbb{N}$$

مثال:

الف) $7^{-2} = \frac{1}{7^2} = \frac{1}{49}$

ج) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-4} = \frac{1}{\left(\frac{2}{3}\right)^4} = \frac{1}{\frac{16}{81}} = \frac{81}{16}$

ب) $\left(\frac{1}{5}\right)^{-2} = \frac{1}{\left(\frac{1}{5}\right)^2} = \frac{1}{\frac{1}{25}} = 25$

د) $(-2)^{-3} = \frac{1}{(-2)^3} = -\frac{1}{8}$

توان منفی: حاصل هر عدد غیر صفر به توان یک عدد منفی، برابر است با معکوس آن عدد به توان مثبت.

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} = \left(\frac{1}{a}\right)^n \quad (a \neq 0, n \in \mathbb{N})$$

یا به سبب این بود.

* البته n می تواند کسری هم باشد (یا اعداد غیر از \mathbb{N}) اما در این فصل فقط در مورد توان ها که صحیح مثبت شده است.

مثال: $6^{-2} = \frac{1}{6^2} = \left(\frac{1}{6}\right)^2 = \frac{1}{36}$

رابطه کلی: $\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \frac{1}{\left(\frac{a}{b}\right)^n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$

یا به سبب این بود.

مثال: حاصل عبارات زیر را بنویسید.

① $7^{-2} = \frac{1}{7^2} = \frac{1}{49}$

② $(-5)^{-3} = \frac{1}{(-5)^3} = \left(-\frac{1}{5}\right)^3 = -\frac{1}{125}$

③ $\left(\frac{1}{4}\right)^{-3} = (4)^3 = 64$

$$\textcircled{4} \quad \left(-\frac{r}{r}\right)^{-r} = \left(-\frac{r}{r}\right)^r = +\frac{1}{17}$$

$$\textcircled{5} \quad -v^{-r} = -\left(\frac{1}{v}\right)^r = -\frac{1}{r \cdot 9} \quad (-v)^{-r} = \left(-\frac{1}{v}\right)^r = \frac{1}{8 \cdot 9}$$

$$\textcircled{6} \quad r r^{-1} + r^{-r} = \frac{1}{r r} + \frac{1}{r r} = \frac{1}{r r} + \frac{1 \times r}{17 \times r} = \frac{1+r}{r r} = \frac{r}{r r}$$

$$\textcircled{7} \quad \left(-\frac{r}{r}\right)^{-r} + \left(-\frac{r}{r}\right)^r = \left(-\frac{r}{r}\right)^r + \left(-\frac{r}{r}\right)^r = \frac{r \times r}{9 \times r} - \frac{1}{r v} = \frac{1r-1}{r v} = \frac{r}{r v}$$

$$\textcircled{8} \quad \frac{1}{(-9)^{-r}} + \frac{r}{(-8)^{-r}} = -\frac{(-9)^r}{1} + \frac{r \times (-8)^r}{1}$$

$$(-9)^{-r} = \frac{1}{(-9)^r}$$

$$\frac{1}{(-9)^{-r}} = \frac{1}{\frac{1}{(-9)^r}} = \frac{1 \times (-9)^r}{1 \times 1} = -(-9)^r$$

$$\frac{r}{(-8)^{-r}} = \frac{\frac{r}{1}}{\frac{1}{(-8)^r}} = \frac{r \times (-8)^r}{1 \times 1} = r \times (-8)^r$$

$$(-8)^{-r} = \frac{1}{(-8)^r}$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$$

$$\textcircled{9} \left(\frac{3}{4}\right)^2 + \left(\frac{4}{3}\right)^{-2} = \underbrace{\left(\frac{3}{4}\right)^2 + \left(\frac{3}{4}\right)^2}_{\text{یا: } 2 \times \left(\frac{3}{4}\right)^2 = 2 \times \frac{9}{16} = \frac{9}{8}}$$

$$= \frac{9}{16} + \frac{9}{16} = \frac{18}{16} = \frac{9}{8}$$

□ قوانین محاسبات عملیات بین اعداد توان دار:

* این قوانین برای توان‌ها که منفی هم برقرار است.

* ضرب اعداد توان دار:

① ضرب اعداد توان دار با پایه‌های مساوی: پایه‌های مساوی را نوشته و توان‌ها را با هم جمع می‌کنیم.

$$a^m \times a^n = a^{m+n} \quad (a \neq 0)$$

② ضرب اعداد توان دار با توان‌های مساوی: توان‌های مساوی را نوشته و پایه‌ها را در هم ضرب می‌کنیم.

$$a^m \times b^m = (a \cdot b)^m$$

مثال: حاصل عبارات زیر را بصورت یک عدد با توان مثبت بنویسید.

$$\textcircled{1} 3^2 \times 3^7 = 3^{2+7} = 3^9$$

$$\textcircled{2} \left(\frac{3}{8}\right)^5 \times \left(\frac{8}{3}\right)^{-5} = \left(\frac{3}{8}\right)^5 \times \left(\frac{3}{8}\right)^5 = \left(\frac{3}{8}\right)^{5+5} = \left(\frac{3}{8}\right)^{10}$$

یا: $\left(\frac{3}{8} \times \frac{3}{8}\right)^5 = \left(\left(\frac{3}{8}\right)^2\right)^5 = \left(\frac{3}{8}\right)^{10}$

$$\textcircled{3} \quad (-9)^{-3} \times (-9)^{-5} = (-9)^{(-3)+(-5)} = (-9)^{-8} = \left(-\frac{1}{9}\right)^8 = +\left(\frac{1}{9}\right)^8$$

توان نرح

$$\textcircled{4} \quad \left(-\frac{2}{5}\right)^{-3} \times \left(-\frac{2}{5}\right)^{-1} = \left(-\frac{2}{5}\right)^{-3-1} = \left(-\frac{2}{5}\right)^{-4} = \left(-\frac{5}{2}\right)^4 = +\left(\frac{5}{2}\right)^4$$

$$\textcircled{5} \quad a^{-3} \times a^3 = a^{-3+3} = a^0 = 1$$

نتیجہ: توان سب توان

$$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$$

$$\textcircled{6} \quad (2^3)^4 = 2^{3 \times 4} = 2^{12}$$

$$2^3 \times 2^3 \times 2^3 \times 2^3 = 2^{3+3+3+3} = 2^{12}$$

یا $a^{m \cdot n}$ فرق دار۔

$$2^{3 \times 4} = 2^{12}$$

$$\textcircled{6} \quad \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} \times 2^{-3} \times 2^5 = 2^1 \times (2^3)^{-1} \times (2^2)^5$$

$$= 2^1 \times 2^{-3} \times 2^{10} = 2^{1-3+10} = 2^8$$

$$\textcircled{7} \quad \left(\frac{20}{21}\right)^{-5} \times \left(\frac{21}{20}\right)^5 = \left(\frac{21}{20}\right)^5 \times \left(\frac{20}{21}\right)^5 = 1$$

□ تقسیم اعداد توان دار

① تقسیم اعداد توان دار با پایه یکسان: پایه مساوی را نوشته و توان دومی را از اولی کم می‌کنیم.

$$a^m \div a^n = \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} \quad (a \neq 0)$$

② تقسیم اعداد توان دار با توان مساوی: توان مساوی را نوشته و پایه اول را بر پایه دوم تقسیم می‌کنیم.

$$a^m \div b^m = \frac{a^m}{b^m} = \left(\frac{a}{b}\right)^m \quad (b \neq 0)$$

مثال: حاصل عبارات زیر را بصورت یک عدد توان دار بنویسید.

$$\textcircled{1} \frac{5^4}{5^4} = \left(\frac{5^4}{5^4}\right)^4 = 5^4$$

$$\textcircled{2} \frac{5^{-12}}{5^3} = 5^{-12} \div 5^3 = 5^{-12-3} = 5^{-15} = \frac{1}{5^{15}}$$

