

عضل ۴: توان ورسه

$$\underbrace{a \times a \times a \times \dots \times a}_{n \text{ بار}} = a^n$$

بار درری:

a : پایه و n : توان

شال: $3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 3^5 = 243$

$$(-2) \times (-2) \times (-2) \times (-2) \times (-2) \times (-2) = (-2)^6 = +64$$

$$\left(-\frac{1}{5}\right) \left(-\frac{1}{5}\right) \left(-\frac{1}{5}\right) \left(-\frac{1}{5}\right) = \left(-\frac{1}{5}\right)^4 = +\frac{1}{625}$$

نکات:

① عددی که توان ندارد، توان آن ۱ است. $a = a^1$

② هر عدد غیر صفر، به توان صفر، مساوی ۱ است. $a^0 = 1$ ($a \neq 0$)

③ صفر به توان هر عددی غیر از صفر، برابر با صفر است. $0^n = 0$ ($n \neq 0$)

④ عدد ۱ به توان هر عدد دلخواه برابر با ۱ است. $1^a = 1$

⑤ اگر عدد منفی به توان یک عدد مزد برسد، حاصل عددی منفی و اگر به توان عدد زوج برسد،

حاصل مثبت است.

$(-a)^n \begin{cases} \rightarrow -a^n & \text{اگر } n \text{ فرد} \\ \rightarrow +a^n & \text{اگر } n \text{ زوج} \end{cases}$

توان منفی: حاصل هر عدد غیر صفر به توان یک عدد منفی، برابر است با معکوس همان عدد

به توان مثبت.

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} = \left(\frac{1}{a}\right)^n \quad (a \neq 0, n \in \mathbb{N})$$

معکوس

(البته n می تواند سرگام هم باشد. اما در این فصل در مورد توان ها کلی صحبت شده است.)

در حالت کلی:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$$

یا معکوس می شود.

مثال: حاصل عبارات زیر را بیابید.

$$① \quad 7^{-2} = \frac{1}{7^2} = \frac{1}{49}$$

$$② \quad (-5)^{-3} = \frac{1}{(-5)^3} = -\frac{1}{125}$$

$$③ \quad \left(\frac{1}{4}\right)^{-3} = (4)^3 = 64$$

یا: $\frac{1}{\left(\frac{1}{4}\right)^3} = \frac{1}{\frac{1}{64}} = 64$

$$④ \quad \left(-\frac{2}{3}\right)^{-4} = \left(-\frac{3}{2}\right)^4 = +\frac{81}{16}$$

$$⑤ \quad -\sqrt{2}^{-2} = -\frac{1}{\sqrt{2}^2} = -\frac{1}{2}$$

$$\textcircled{7} \quad r r^{-1} + r^{-r} = \frac{1}{r r} + \frac{1}{r^r} = \frac{1}{r r} + \frac{1 \times r}{r \times r} = \frac{1+r}{r r}$$

$$= \frac{r}{r r}$$

$$\textcircled{v} \quad \left(-\frac{r}{r}\right)^{-r} + \left(-\frac{r}{r}\right)^r = \left(-\frac{r}{r}\right)^r + \left(-\frac{r}{r}\right)^r$$

$$= + \frac{r \times r}{r \times r} \frac{1}{r r} = \frac{1 r - 1}{r r} = \frac{r}{r r}$$

$$\textcircled{\wedge} \quad \left(\frac{r}{r}\right)^r + \left(\frac{r}{r}\right)^{-r} = \underbrace{\left(\frac{r}{r}\right)^r + \left(\frac{r}{r}\right)^r}_{\substack{\text{L: } r \times \left(\frac{r}{r}\right)^r = \frac{1}{r} \times \frac{r}{r} = \frac{r}{r} \\ \text{R: } r \times \left(\frac{r}{r}\right)^r = \frac{1}{r} \times \frac{r}{r} = \frac{r}{r}}} = \frac{r}{r r} + \frac{r}{r r} = \frac{1 r}{r r}$$

$$= \frac{r}{r r}$$

$$\textcircled{9} \quad -\frac{1}{(-9)^{-r}} + \frac{r}{(-8)^{-r}} = -1 \times (-9)^r + r(-8)^r =$$

$$-11 + r \times r 8 = -11 + 20 = -31$$

$$(-9)^{-r} = \frac{1}{(-9)^r} \Rightarrow -\frac{1}{(-9)^{-r}} = -\frac{1}{\frac{1}{(-9)^r}} = -\frac{1 \times (-9)^r}{1 \times 1} = -(-9)^r$$

$$\frac{r}{(-8)^{-r}} = \frac{r}{\frac{1}{(-8)^r}} = \frac{r \times (-8)^r}{1 \times 1} = r \times (-8)^r$$

قوانین محاسبهٔ محلیات بین اعداد توان دار:

نتیجه: این قوانین برای توان های منفی هم برقرارند.

* ضرب اعداد توان دار:

① ضرب اعداد توان دار با پایه های یکسان: پایه ها را با نوشتن توان که را با هم جمع می کنیم.

$$a^m \times a^n = a^{m+n} \quad (a \neq 0)$$

② ضرب اعداد توان دار با توان های یکسان: توان ها را با نوشتن و پایه ها را در هم ضرب می کنیم.

$$a^m \times b^m = (ab)^m$$

مثال: حاصل عبارات زیر را بصورت یک عدد توان دار با توان مثبت بنویسید.

$$\textcircled{1} \quad 3^2 \times 3^7 = 3^{2+7} = 3^9$$

$$\textcircled{2} \quad \left(\frac{1}{3}\right)^{-5} \times \left(\frac{3}{1}\right)^9 = \left(\frac{3}{1}\right)^5 \times \left(\frac{3}{1}\right)^9 = \left(\frac{3}{1}\right)^{14}$$

$$\textcircled{3} \quad (-9)^{-3} \times (-9)^{-5} = (-9)^{(-3)+(-5)} = (-9)^{-8} = \left(-\frac{1}{9}\right)^8 = \frac{1}{9^8}$$

$$\textcircled{4} \quad \left(-\frac{2}{5}\right)^{-4} \times \left(-\frac{2}{5}\right)^{-1} = \left(-\frac{2}{5}\right)^{(-4)+(-1)} = \left(-\frac{2}{5}\right)^{-5} = \left(-\frac{5}{2}\right)^5 = \left(\frac{5}{2}\right)^5$$

$$\textcircled{5} \quad a^{-3} \times a^{+3} = a^{(-3)+(+3)} = a^0 = 1$$

$$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$$

$$\text{مثال: } (2^3)^4 = 2^{3 \times 4} = 2^{12}$$

$$2^{3 \times 4} = 2^{12}$$

نتیجه: توان یک توان

* با $a^{m \cdot n}$ ضرب در

$$\textcircled{6} \left(\frac{1}{3}\right)^{-10} \times 27^{-4} \times 9^5 = 3^{10} \times (3^3)^{-4} \times (3^2)^5$$

$$= 3^{10} \times 3^{-12} \times 3^{10} = 3^{10-12+10} = 3^8$$

$$\textcircled{7} \left(\frac{30}{21}\right)^{-5} \times \left(\frac{3}{7}\right)^5 = \left(\frac{21}{30}\right)^5 \times \left(\frac{3}{7}\right)^5 = \left(\frac{21}{30} \times \frac{3}{7}\right)^5$$

$$= 3^5$$

* تقسیم اعداد توان دار:

① تقسیم اعداد توان دار با پایه‌ها متساوی: پایه ساده را نوشته و توان دوم را از اولی کم می‌کنیم.

$$a^m \div a^n = \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

② تقسیم اعداد توان دار با توان‌ها متساوی: توان ساده را نوشته و پایه اول را بر پایه دوم

$$a^m \div b^m = \frac{a^m}{b^m} = \left(\frac{a}{b}\right)^m \quad (b \neq 0)$$

مسائل: حاصل عبارات زیر را به صورت یک عدد توان دار بنویسید.

$$\textcircled{1} \frac{25^4}{5^4} = \left(\frac{25}{5}\right)^4 = 5^4$$

$$\textcircled{2} \frac{9^{-12}}{9^4} = 9^{-12-4} = 9^{-16}$$

$$\textcircled{3} \frac{(xy)^5}{(xy)^{-4}} = (xy)^{5-(-4)} = (xy)^{5+4} = (xy)^9 = x^9 y^9$$

$$\textcircled{F} \frac{a^{-r} \times a^r}{b^r \times b^{-r}} = \frac{a^{-r}}{b^{-r}} = \left(\frac{a}{b}\right)^{-r} = \left(\frac{b}{a}\right)^r$$

$$\textcircled{D} \frac{v^{11} \times \mu^9}{\mu^{-r} \times v^{-1}} = \frac{v^{11}}{v^{-1}} \times \frac{\mu^9}{\mu^{-r}} = v^{11-(-1)} \times \mu^{9-(-r)}$$

$$= v^{12} \times \mu^{1r} = (v \times \mu)^{1r} = r^{1r}$$

$$\underline{L}: \frac{v^{11} \times \mu^9}{\mu^{-r} \times v^{-1}} = \frac{v^{11} \times v^1}{\mu^{-r} \times \mu^{-9}} = \frac{v^{12}}{\mu^{-1r}} = v^{12} \times \mu^{1r} = r^{1r}$$

$$\textcircled{7} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^1 \times (0,2)^7}{\left(\frac{1}{r}\right)^{-2} \times (0,1r)^{-r}} = \frac{(0,2)^7}{(0,2)^{-2}} \times \frac{(0,1r)^1}{(0,1r)^{-r}} = (0,2)^{10} \times (0,1r)^{10}$$

$$= (0,2 \times 0,1r)^{10} = (0,1)^{10}$$

$$\underline{L}: \left(\frac{1}{2}\right)^1 \times \underline{(0,2)^7} \times \left(\frac{1}{r}\right)^{-2} \times \underline{(0,1r)^r}$$

$$= (0,1r)^{10} \times (0,2)^{10} = (0,1)^{10}$$

$$\textcircled{V} \frac{1^v \times \mu^v}{\mu^{\mu} \times (0,1\mu)^{\mu} \times \mu^{\mu}} = \frac{r^r}{r^{\mu} \times \mu^{\mu}} = \frac{r^r}{r^{\mu}} = r^{r-\mu}$$

$$(r \div 0.12a)^{\mu} = (r \div \frac{1}{10})^{\mu} = (r \times 10)^{\mu} = 10^{\mu} r^{\mu}$$

$$\textcircled{1} \frac{(-r)^{\mu} \times r^{\nu}}{r^{\omega} \times (-r)^{\mu}} = \frac{r^{\mu} \times r^{\nu}}{r^{\omega} \times r^{\mu}} = \frac{r^{\mu+\nu}}{r^{\mu+\omega}} = \frac{r^{\nu-\omega}}{r^{\omega-\nu}}$$

$$\textcircled{9} \frac{10^{-r} \times r^{-r} \times r^{\omega}}{10^{-r}} = \frac{10^{-r} \times r^{-r} \times r^{\omega}}{10^{-r} \times 10^{-r}} = \left(\frac{10^{-r} \times r^{\omega}}{10^{-2r}} \right) = \left(\frac{1}{r} \right)^{\omega}$$

$r^r = r$

$$\textcircled{10} \frac{r^r \times r^r}{r^r \times \frac{1}{r}} = \frac{r^r}{r^r} = \frac{(r^r)^r}{r^r} = \frac{r^r}{r^r} = 1$$

$$(a^m \times b^n)^p = a^{mp} \times b^{np}$$

: ai

$$10^{-r} = (r^r \times r^r)^{-r} = r^{-1} \times r^{-r}$$

$$\textcircled{11} \frac{(0.12a)^{-1} \times r^{\omega}}{10^{-\varepsilon} \times 10^{-r}} = \frac{\left(\frac{1}{10}\right)^{-1} \times (10^r)^{\omega}}{(10^m)^{-\varepsilon} \times (10^{\mu})^{-r}} = \frac{(10^{-r})^{-1} \times 10^{\omega}}{10^{-12} \times 10^{-7}} = 10^{17}$$

$$r^{17-(-12)} \times 10^{-(12-7)} = r^{29} \times 10^{-5} = (r \times 10)^{29} = 10^{29} r^{29}$$

$$\textcircled{12} \frac{10^{-r} \times 10^{\omega} \times 9^r}{10^{\mu} \times 9^{-\nu}} = \left(\frac{10}{10}\right)^{\mu} \times \frac{9^r}{9^{-\nu}} = \left(\frac{1}{10}\right)^{\mu} \times 9^{\nu+r}$$

$$= (10^{-1})^{\mu} \times (9^{\nu+r}) = 10^{-\mu} \times 9^{\nu+r} = 10^{-\mu} \times 9^{\nu} \times 9^r = 10^{-\mu} \times 9^{\nu+r}$$

$$\frac{5^2 \times (3^2)^2}{(3 \times 5)^3 \times (3^2)^{-7}} = \frac{\cancel{5^2} \times 3^4}{3^3 \times \cancel{5^3} \times 3^{-14}} = \frac{3^4}{3^{-11}} = 3^{15}$$

نکته: در جمع و تفریق اعداد توان دار، باید حاصل ضرب را یافته و سپس با هم جمع یا تفریق کنیم.

$$\textcircled{13} \quad 3^2 + 5^2 = 9 + 25 = 34$$

