

درس اول: توان صحیح

$$\underbrace{a \times a \times a \times \dots \times a}_{n \text{ بار}} = a^n$$

بار درص:

a: پایه

n: توان

مثال:  $3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 3^5 = 243$

$$(-2) \times (-2) \times (-2) \times (-2) \times (-2) = (-2)^5 = -32$$

$$\left(-\frac{1}{5}\right) \left(-\frac{1}{5}\right) \left(-\frac{1}{5}\right) \left(-\frac{1}{5}\right) = \left(-\frac{1}{5}\right)^4 = +\frac{1}{625}$$

نکات:

$$a = a^1$$

① عددی که توان ندارد، توان آن ۱ است.

$$a^0 = 1$$

$$(a \neq 0)$$

② هر عدد غیر از صفر به توان صفر برابر است با ۱.

$$0^n = 0$$

$$(n \neq 0)$$

③ صفر به توان هر عدد غیر از صفر، برابر صفر است.

$$1^n = 1$$

④ عدد ۱ به توان هر عدد دگوا، برابر ۱ است.

⑤ اگر عدد منفی به توان یک عدد فرد برسد، حاصل عددی منفی و اگر به توان یک عدد زوج برسد،

حاصل عددی مثبت است.

$$(-a)^n \begin{cases} \rightarrow -a^n, & a > 0, n \text{ فرد} \\ \rightarrow +a^n, & a > 0, n \text{ زوج} \end{cases}$$

درس اول: توان صحیح

در سال‌های گذشته با توان‌های طبیعی یک عدد آشنا شده‌اید؛ به طور مثال می‌دانید:

$$2^3=8 \quad \text{و} \quad (-5)^2=25 \quad \text{و} \quad \left(\frac{3}{4}\right)^4 = \frac{81}{256} \quad \text{و} \quad \left(\frac{-1}{2}\right)^5 = \frac{-1}{32}$$

همچنین می‌دانید که اگر  $a$  عددی غیرصفر باشد،  $a^0=1$ .

آیا توان منفی یک عدد (ناصفر) هم معنی دارد؟ مثلاً حاصل  $2^{-3}$  چیست؟ به کمک فعالیت زیر

پاسخ این سؤال را می‌توان پیدا کرد:

Handwritten notes showing the derivation of negative powers:

$$1 \div 2 = \frac{1}{2} = 2^{-1}$$

$$\frac{1}{2} \div 2 = \frac{1}{2^2} = 2^{-2}$$

$$\frac{1}{2^2} \div 2 = \frac{1}{2^3} = 2^{-3}$$

فعالیت

جدول زیر را در نظر بگیرید و به سؤالات پاسخ دهید:

16	8	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4} = \frac{1}{2^2}$	$\frac{1}{8} = \frac{1}{2^3}$	$\frac{1}{16} = \frac{1}{2^4}$	$\frac{1}{32} = \frac{1}{2^5}$
$2^4$	$2^3$	$2^2$	$2^1$	$2^0$	$2^{-1}$	$2^{-2}$	$2^{-3}$	$2^{-4}$	$2^{-5}$

از توان‌ها بعد از  $2^0$  کم می‌کنیم.

$$2^{-4} = \frac{1}{2^4} = \frac{1}{16}$$

$$2^{-5} = \frac{1}{2^5} = \frac{1}{32}$$

الف) عددهای سطر اول جدول با هم چه ارتباطی دارند؟

ب) هر یک از عددهای سطر دوم چه رابطه‌ای با عدد بالای آن دارد؟

ج) توان‌های عددهای سطر دوم تا  $2^0$  با یکدیگر چه رابطه‌ای دارد؟

د) این الگو را ادامه دهید و در جاهای خالی عددهای مناسب بنویسید.

ه) به کمک جدول، تساوی‌های زیر را کامل کنید:

$$2^{-3} = \frac{1}{2^3}$$

$$2^{-4} = \frac{1}{2^4}$$

$$2^{-5} = \frac{1}{2^5}$$

به طور کلی اگر  $a$  یک عدد غیرصفر باشد و  $n$  یک عدد طبیعی باشد، آن گاه:

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} \quad a \neq 0, \quad n \in \mathbb{N}$$

مثال:

الف)  $7^{-2} = \frac{1}{7^2} = \frac{1}{49}$

ج)  $\left(\frac{2}{3}\right)^{-4} = \frac{1}{\left(\frac{2}{3}\right)^4} = \frac{1}{\frac{16}{81}} = \frac{81}{16}$

ب)  $\left(\frac{1}{5}\right)^{-2} = \frac{1}{\left(\frac{1}{5}\right)^2} = \frac{1}{\frac{1}{25}} = 25$

د)  $(-2)^{-3} = \frac{1}{(-2)^3} = -\frac{1}{8}$

توان منفی: حاصل عدد غیر صفر به توان یک عدد منفی، برابر است با معکوس عدد به توان مثبت

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} = \left(\frac{1}{a}\right)^n \quad (a \neq 0, n \in \mathbb{N})$$

یا به سبب توان

\* البته  $n$  می تواند کسری هم باشد (یا اعداد غیر از  $\mathbb{N}$ ) اما در این فصل فقط در مورد توان ها که صحیح مثبت شده است

مثال:  $6^{-2} = \frac{1}{6^2} = \left(\frac{1}{6}\right)^2 = \frac{1}{36}$

روابط کلی:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \frac{1}{\left(\frac{a}{b}\right)^n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$$

یا به سبب توان

مثال: حاصل عبارات زیر را بنویسید.

①  $7^{-2} = \frac{1}{7^2} = \frac{1}{49}$

②  $(-5)^{-3} = \frac{1}{(-5)^3} = \left(-\frac{1}{5}\right)^3 = -\frac{1}{125}$

③  $\left(\frac{1}{4}\right)^{-3} = (4)^3 = 64$

$$\textcircled{4} \quad \left(-\frac{r}{r}\right)^{-r} = \left(-\frac{r}{r}\right)^r = +\frac{1}{17}$$

$$\textcircled{5} \quad -v^{-r} = -\left(\frac{1}{v}\right)^r = -\frac{1}{r \cdot 9} \quad (-v)^{-r} = \left(-\frac{1}{v}\right)^r = \frac{1}{r \cdot 9}$$

$$\textcircled{6} \quad r r^{-1} + r^{-r} = \frac{1}{r r} + \frac{1}{r r} = \frac{1}{r r} + \frac{1 \times r}{r r} = \frac{1+r}{r r} = \frac{r}{r r}$$

$$\textcircled{7} \quad \left(-\frac{r}{r}\right)^{-r} + \left(-\frac{r}{r}\right)^r = \left(-\frac{r}{r}\right)^r + \left(-\frac{r}{r}\right)^r = \frac{r \times r}{r \times r} = \frac{1}{1} = \frac{r}{r}$$

$$\frac{1r-1}{r v} = \frac{r}{r v}$$

$$\textcircled{8} \quad \frac{1}{(-9)^{-r}} + \frac{r}{(-8)^{-r}} = -\frac{(-9)^r}{1} + \frac{r \times (-8)^r}{1}$$

$$(-9)^{-r} = \frac{1}{(-9)^r}$$

$$\frac{1}{(-9)^{-r}} = \frac{1}{\frac{1}{(-9)^r}} = \frac{1 \times (-9)^r}{1 \times 1} = -(-9)^r$$

$$\frac{r}{(-8)^{-r}} = \frac{\frac{r}{1}}{\frac{1}{(-8)^r}} = \frac{r \times (-8)^r}{1 \times 1} = r \times (-8)^r$$

$$(-8)^{-r} = \frac{1}{(-8)^r}$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$$

$$\textcircled{9} \left(\frac{3}{4}\right)^4 + \left(\frac{4}{3}\right)^4 = \left(\frac{3}{4}\right)^4 + \left(\frac{3}{4}\right)^4$$

$$= \frac{9}{16} + \frac{9}{16} = \frac{18}{16} = \frac{9}{8}$$

یا:  $2 \times \left(\frac{3}{4}\right)^4 = 2 \times \frac{9}{16} = \frac{9}{8}$

□ قوانین محاسبات عملیات بین اعداد توان دار:

\* این قوانین برای توان های مثبت هم برقرار است.

\* ضرب اعداد توان دار:

① ضرب اعداد توان دار با پایه یکسان: پایه مساوی را ننویسید و توان ها را با هم جمع می کنیم.

$$a^m \times a^n = a^{m+n} \quad (a \neq 0)$$

② ضرب اعداد توان دار با توان های مساوی: توان مساوی را ننویسید و پایه ها را در هم ضرب می کنیم.

$$a^m \times b^m = (a \cdot b)^m$$

مثال: حاصل عبارات زیر را بصورت یک عدد با توان مثبت بنویسید.

①  $3^2 \times 3^7 = 3^{2+7} = 3^9$

②  $\left(\frac{3}{8}\right)^5 \times \left(\frac{8}{3}\right)^{-5} = \left(\frac{3}{8}\right)^5 \times \left(\frac{3}{8}\right)^5 = \left(\frac{3}{8}\right)^{5+5} = \left(\frac{3}{8}\right)^{10}$

یا:  $\left(\frac{3}{8} \times \frac{3}{8}\right)^5 = \left(\left(\frac{3}{8}\right)^2\right)^5 = \left(\frac{3}{8}\right)^{10}$

$$\textcircled{3} \quad (-9)^{-4} \times (-9)^{-5} = (-9)^{(-4)+(-5)} = (-9)^{-9} = \left(-\frac{1}{9}\right)^9 = +\left(\frac{1}{9}\right)^9$$

توان نرح

$$\textcircled{4} \quad \left(-\frac{2}{5}\right)^{-4} \times \left(-\frac{2}{5}\right)^{-1} = \left(-\frac{2}{5}\right)^{-4-1} = \left(-\frac{2}{5}\right)^{-5} = \left(-\frac{5}{2}\right)^5 = +\left(\frac{5}{2}\right)^5$$

$$\textcircled{5} \quad a^{-4} \times a^4 = a^{-4+4} = a^0 = 1$$

نتیجہ: توان سب توان

$$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$$

$$(2^3)^4 = 2^{3 \times 4} = 2^{12}$$

$$2^3 \times 2^3 \times 2^3 \times 2^3 = 2^{3+3+3+3} = 2^{12}$$

با  $a^{m \cdot n}$  فرق دار۔

$$2^{3 \times 4} = 2^{12}$$

$$\textcircled{6} \quad \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} \times 2^{-4} \times 2^5 = 2^1 \times (2^3)^{-4} \times (2^2)^5 = 2^1 \times 2^{-12} \times 2^{10} = 2^{1-12+10} = 2^{-1} = \frac{1}{2}$$

$$\textcircled{7} \quad \left(\frac{20}{21}\right)^{-5} \times \left(\frac{21}{20}\right)^5 = \left(\frac{21}{20}\right)^5 \times \left(\frac{21}{20}\right)^5 = 1$$

□ تقسیم اعداد توان دار

① تقسیم اعداد توان دار با پایه یکسان: پایه مساوی را نوشته و توان دومی را از اولی کم می کنیم.

$$a^m \div a^n = \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} \quad (a \neq 0)$$

② تقسیم اعداد توان دار با توان مساوی: توان مساوی را نوشته و پایه اول را بر پایه دوم تقسیم می کنیم.

$$a^m \div b^m = \frac{a^m}{b^m} = \left(\frac{a}{b}\right)^m \quad (b \neq 0)$$

مثال: حاصل عبارات زیر را بصورت یک عدد توان دار بنویسید.

①  $\frac{5^4}{5^4} = \left(\frac{5^4}{5^4}\right)^1 = 1^4$

②  $\frac{5^{-12}}{5^3} = 5^{-12} \div 5^3 = 5^{-12-3} = 5^{-15} = \frac{1}{5^{15}}$

③  $\frac{(xy)^8}{(xy)^{-4}} = (xy)^{8-(-4)} = (xy)^{8+4} = (xy)^{12} = x^{12}y^{12}$

④  $\frac{a^{-2} \times a^r}{b^r \times b^{-1}} = \frac{a^{-2}}{b^{-r}} = \left(\frac{a}{b}\right)^{-r} = \left(\frac{b}{a}\right)^r$

⑤  $\frac{v^{11} \times 3^9}{3^{-3} \times v^{-1}} = \frac{v^{11}}{v^{-1}} \times \frac{3^9}{3^{-3}} = v^{11-(-1)} \times 3^{9-(-3)} = v^{12} \times 3^{12} = (v \times 3)^{12} = 21^{12}$

$$\textcircled{7} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^1 \times (0,10)}{\left(\frac{1}{4}\right)^{-2} \times (0,12)^{-2}} = \frac{(0,12)^1 \times (0,10)^{-1}}{(0,12)^{-2} \times (0,12)^{-2}} = \frac{(0,12)^1}{(0,12)^{-2}} \times \frac{(0,10)^{-1}}{(0,12)^{-2}}$$

$$(0,12)^{1-(-2)} \times (0,10)^{-1-(-2)} = (0,12)^{1+2} \times (0,10)^{-1+2} = (0,12 \times 0,10)^{1+1} \\ = (0,11)^{1+1}$$

$$\begin{aligned} \therefore \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^1 \times \left(\frac{1}{4}\right)^{-1}}{\left(\frac{1}{4}\right)^{-2} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{-2}} &= \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^1 \times \left(\frac{1}{4}\right)^{-1} \times \left(\frac{1}{4}\right)^2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2}{\left(\frac{1}{4}\right)^{-2} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{-2}} \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^{1+2} \times \left(\frac{1}{4}\right)^{-1+2} = \left(\frac{1}{2} \times \frac{1}{4}\right)^{1+1} \\ &= \frac{1}{\left(\frac{1}{4}\right)^{-2}} = 1 \times \left(\frac{1}{4}\right)^2 \\ \left(\frac{1}{4}\right)^{-2} &= (0,25)^{-2} = (0,11)^{1+1} \end{aligned}$$

$$\textcircled{8} \frac{1^V \times 2^V \div 2^V}{2^W \div (0,12)^W \times 2^W} = \frac{2^W}{2^W} = 2^W$$

$$(2 \div 0,12)^W = (2 \div \frac{1}{8})^W = (2 \times 8)^W = 16^W$$

$$\textcircled{9} \frac{(-3)^{11} \times 2^7}{2^0 \times (-3)^{12}} = \frac{-3^{11} \times 2^7}{2^0 \times 3^{12}} = - \frac{3^{11} \times 2^7}{2^0 \times 3^{12}} = - \frac{1}{2^1 \times 3^1} = - \frac{1}{2 \times 3} = - \frac{1}{6}$$

$$\textcircled{9} \frac{10^{-2} \times 2^{-2} \times (20)^0}{1^{-2}} = \frac{10^{-2} \times 2^{-2}}{1^{-2} \times 20^{-2}} = \left( \frac{10^{-2} \times 2^{-2}}{1 \times 20} \right)^{-2}$$

$$= \left(\frac{1}{20}\right)^{-2} = 20^2 = 400$$



$$(10) \frac{2^3 \times 2^4}{2^{-4} \times \frac{1}{2} \times 2^3} = \frac{2^7}{2^{-4}} = \frac{(2^7)^1}{2^{-4}} = \frac{2^7}{2^{-4}} = 2^{7-(-4)} = 2^{11}$$

نکته: تجزیه اعداد به اعداد اول در این سوالات بسیار کمک کننده است.

$$(a^m \cdot b^n)^p = a^{mp} \cdot b^{np}$$

مثال:  $12^{-4} = (2^2 \times 3)^{-4} = 2^{-8} \times 3^{-4}$

$$(11) \frac{(0,125)^{-1} \times 2^6}{125^{-4} \times 1^{-2}} = \frac{(2^{-3})^{-1} \times 2^6}{(5^3)^{-4} \times (2^2)^{-2}} = \frac{2^3 \times 2^6}{5^{-12} \times 2^{-4}} = 2^{3+6-(-4)} \times 5^{12-(-12)} = 2^{13} \times 5^{24} = 10^{24}$$

$$(0,125)^{-1} = \left(\frac{1}{8}\right)^{-1} = (8^{-1})^{-1} = 8^{(-1)(-1)} = 8^1 = (2^3)^1 = 2^3$$

$$(12) \frac{5^{-2} \times 5^3 \times 9^2}{|5^3| \times 9^{-7}} = \frac{5^1 \times (3^2)^2}{5^3 \times 3^3 \times (3^2)^{-7}} = \frac{5^1 \times 3^4}{5^3 \times 3^3 \times 3^{-14}} = 5^{1-3} \times 3^{4-3+14} = 5^{-2} \times 3^{15} = \frac{3^{15}}{5^2}$$

→  $(5 \times 3)^3 = 5^3 \times 3^3$

\* در جمع و تفریق اعداد توان دار، باید حاصل ضرب را باید انیم، پس با هم جمع کنیم.

$$(13) 3^2 + 5^2 = 9 + 25 = 34$$

$$!!! * 3^2 + 5^2 \neq (3+5)^2$$

$$!!! a^2 + b^2 \neq (a+b)^2$$





