

مضرب ۴: توان ورسته

$$\underbrace{a \times a \times a \times \dots \times a}_{n \text{ بار}} = a^n$$

باید درسی:

$a$ : پایه و  $n$ : توان

مثال:  $3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 3^5 = 243$

$$(-2) \times (-2) \times (-2) \times (-2) \times (-2) \times (-2) = (-2)^6 = +64$$

$$\left(-\frac{1}{5}\right) \left(-\frac{1}{5}\right) \left(-\frac{1}{5}\right) \left(-\frac{1}{5}\right) = \left(-\frac{1}{5}\right)^4 = +\frac{1}{625}$$

نکات:

① عددی که توان ندارد، توان آن ۱ است.  $a = a^1$

② هر عدد غیر صفر، به توان صفر، مساوی ۱ است.  $a^0 = 1 \quad (a \neq 0)$

③ صفر به توان هر عددی غیر از صفر، برابر با صفر است.  $0^n = 0 \quad (n \neq 0)$

④ عدد ۱ به توان هر عدد دلخواه برابر با ۱ است.  $1^a = 1$

⑤ اگر عدد منفی به توان یک عدد فرد برسد، حاصل عددی منفی و اگر به توان عدد زوج برسد،

حاصل مثبت است.

$(-a)^n \begin{cases} \rightarrow -a^n & \text{اگر } a > 0 \text{ و } n \text{ فرد} \\ \rightarrow +a^n & \text{اگر } a > 0 \text{ و } n \text{ زوج} \end{cases}$

توان منفی: حاصل هر عدد غیر صفر به توان یک عدد منفی، برابر است با معکوس همان عدد

به توان مثبت

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} = \left(\frac{1}{a}\right)^n \quad (a \neq 0, n \in \mathbb{N})$$

معکوس

(البته  $n$  می تواند لیکر هم باشد. اما در این فصل در مورد توان ها که طبع صحبت شده است.)

در حالت کلی:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$$

یا معکوس می شود.

مثال: حاصل عبارات زیر را بیابید.

$$① \quad 7^{-2} = \frac{1}{7^2} = \frac{1}{49}$$

$$② \quad (-5)^{-3} = \frac{1}{(-5)^3} = -\frac{1}{125}$$

$$③ \quad \left(\frac{1}{4}\right)^{-3} = (4)^3 = 64$$

یا:

$$\frac{1}{\left(\frac{1}{4}\right)^3} = \frac{1}{\frac{1}{64}} = 64$$

$$④ \quad \left(-\frac{2}{3}\right)^{-4} = \left(-\frac{3}{2}\right)^4 = +\frac{81}{16}$$

$$⑤ \quad -\sqrt{2}^{-2} = -\frac{1}{\sqrt{2}^2} = -\frac{1}{2}$$

$$\textcircled{7} \quad r r^{-1} + r^{-1} r = \frac{1}{r r} + \frac{1}{r r} = \frac{1}{r r} + \frac{1 \times r}{r \times r} = \frac{1+r}{r r}$$

$$= \frac{r}{r r}$$

$$\textcircled{v} \quad \left(-\frac{r}{r}\right)^{-r} + \left(-\frac{r}{r}\right)^r = \left(-\frac{r}{r}\right)^r + \left(-\frac{r}{r}\right)^r$$

$$= + \frac{r \times r}{r \times r} \frac{1}{r r} = \frac{1 r - 1}{r r} = \frac{r}{r r}$$

$$\textcircled{\wedge} \quad \left(\frac{r}{r}\right)^r + \left(\frac{r}{r}\right)^{-r} = \underbrace{\left(\frac{r}{r}\right)^r + \left(\frac{r}{r}\right)^r}_{= \frac{r}{r}} = \frac{r}{r r} + \frac{r}{r r} = \frac{1 r}{r r}$$

$$= \frac{r}{r r}$$

↳  $r \times \left(\frac{r}{r}\right)^r = \frac{1}{r r} r = \frac{r}{r r} = \frac{r}{r r}$

$$\textcircled{9} \quad -\frac{1}{(-9)^{-r}} + \frac{r}{(-8)^{-r}} = -1 \times (-9)^r + r(-8)^r =$$

$$-11 + r \times 20 = -11 + 20 = -31$$

$$(-9)^{-r} = \frac{1}{(-9)^r} \Rightarrow -\frac{1}{(-9)^{-r}} = -\frac{1}{\frac{1}{(-9)^r}} = -\frac{1 \times (-9)^r}{1 \times 1} = -(-9)^r$$

$$\frac{r}{(-8)^{-r}} = \frac{r}{\frac{1}{(-8)^r}} = \frac{r \times (-8)^r}{1 \times 1} = r \times (-8)^r$$

قوانین محاسبهٔ محلیات بین اعداد توان دار:

نتیجه: این قوانین برای توان های منفی هم برقرارند.

\* ضرب اعداد توان دار:

① ضرب اعداد توان دار با پایه های یکسان: پایه ها را با نوشتن توان که را با هم جمع می کنیم.

$$a^m \times a^n = a^{m+n} \quad (a \neq 0)$$

② ضرب اعداد توان دار با توان های یکسان: توان ها را نوشته و پایه ها را در هم ضرب می کنیم.

$$a^m \times b^m = (ab)^m$$

مثال: حاصل عبارات زیر را بصورت یک عدد توان دار با توان مثبت بنویسید.

$$\textcircled{1} \quad 3^2 \times 3^7 = 3^{2+7} = 3^9$$

$$\textcircled{2} \quad \left(\frac{1}{3}\right)^{-5} \times \left(\frac{3}{1}\right)^9 = \left(\frac{3}{1}\right)^5 \times \left(\frac{3}{1}\right)^9 = \left(\frac{3}{1}\right)^{14}$$

$$\textcircled{3} \quad (-9)^{-3} \times (-9)^{-5} = (-9)^{(-3)+(-5)} = (-9)^{-8} = \left(-\frac{1}{9}\right)^8 = \frac{1}{9^8}$$

$$\textcircled{4} \quad \left(-\frac{2}{5}\right)^{-4} \times \left(-\frac{2}{5}\right)^{-1} = \left(-\frac{2}{5}\right)^{(-4)+(-1)} = \left(-\frac{2}{5}\right)^{-5} = \left(-\frac{5}{2}\right)^5 = \left(\frac{5}{2}\right)^5$$

$$\textcircled{5} \quad a^{-3} \times a^{+3} = a^{(-3)+(+3)} = a^0 = 1$$

$$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$$

مثال:  $(2^3)^4 = 2^{3 \times 4} = 2^{12}$

$$2^{3 \times 4} = 2^{12}$$

نتیجه: توان یک توان

\* با  $a^{m \cdot n}$  ضرب در

$$\textcircled{6} \quad \left(\frac{1}{3}\right)^{-10} \times 27^{-4} \times 9^5 = 3^{10} \times (3^3)^{-4} \times (3^2)^5$$

$$= 3^{10} \times 3^{-12} \times 3^{10} = 3^{10-12+10} = 3^8$$

$$\textcircled{7} \quad \left(\frac{30}{21}\right)^{-5} \times \left(\frac{3}{7}\right)^5 = \left(\frac{21}{30}\right)^5 \times \left(\frac{3}{7}\right)^5 = \left(\frac{21}{30} \times \frac{3}{7}\right)^5$$

$$= 3^5$$

\* تقسیم اعداد توان دار:

① تقسیم اعداد توان دار با پایه‌ها متساوی: پایه ساده را نوشته و توان دوم را از اولی کم می‌کنیم.

$$a^m \div a^n = \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

② تقسیم اعداد توان دار با توان‌ها متساوی: توان ساده را نوشته و پایه اول را بر پایه دوم

$$a^m \div b^m = \frac{a^m}{b^m} = \left(\frac{a}{b}\right)^m \quad (b \neq 0)$$

مسائل: حاصل عبارات زیر را به صورت یک عدد توان دار بنویسید.

$$\textcircled{1} \quad \frac{25^4}{5^4} = \left(\frac{25}{5}\right)^4 = 5^4$$

$$\textcircled{2} \quad \frac{9^{-12}}{9^4} = 9^{-12-4} = 9^{-16}$$

$$\textcircled{3} \quad \frac{(xy)^5}{(xy)^{-4}} = (xy)^{5-(-4)} = (xy)^{5+4} = (xy)^9 = x^9 y^9$$

$$\textcircled{f} \frac{a^{-r} \times a^r}{b^r \times b^{-r}} = \frac{a^{-r}}{b^{-r}} = \left(\frac{a}{b}\right)^{-r} = \left(\frac{b}{a}\right)^r$$

$$\textcircled{d} \frac{v^{11} \times w^9}{w^{-r} \times v^{-1}} = \frac{v^{11}}{v^{-1}} \times \frac{w^9}{w^{-r}} = v^{11-(-1)} \times w^{9-(-r)}$$

$$= v^{12} \times w^{9+r} = (v \times w)^{12} = v^{12} w^{9+r}$$

$$\textcircled{c} \frac{v^{11} \times w^9}{w^{-r} \times v^{-1}} = \frac{v^{11} \times v^1}{w^{-r} \times w^{-9}} = \frac{v^{12}}{w^{-r-9}} = v^{12} \times w^{r+9} = v^{12} w^{r+9}$$

$$\textcircled{7} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^1 \times (0,2)^7}{\left(\frac{1}{4}\right)^{-2} \times (0,4)^{-2}} = \frac{(0,2)^7}{(0,2)^{-2}} \times \frac{(0,2)^1}{(0,2)^{-2}} = (0,2)^{1+7-(-2)} \times (0,2)^{1-(-2)}$$

$$= (0,2 \times 0,2)^{1+1} = (0,4)^2$$

$$\textcircled{c} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^1 \times (0,2)^7 \times \left(\frac{1}{4}\right)^2 \times (0,4)^2}{\left(\frac{1}{4}\right)^{-2} \times (0,4)^{-2}} = (0,2)^{1+7+2+2} \times (0,4)^{2+2} = (0,2)^{12} \times (0,4)^4 = (0,2)^{12+4} = (0,2)^{16}$$

$$\textcircled{v} \frac{1^v \times w^v \div r^r}{r^w \div (0,4)^w \times w^w} = \frac{r^r}{1^w \times w^w} = \frac{r^r}{r^w} = r^{r-w}$$

$$(r \div 0.12a)^r = (r \div \frac{1}{5})^r = (r \times 5)^r = 5^r$$

$$(8) \frac{(-r)^{11} \times r^r}{r^0 \times (-r)^{1r}} = \frac{r^{11} \times r^r}{r^0 \times r^{1r}} = \frac{r^{11} r^r}{r^{1r}} = \frac{r^{11}}{r^r} = r^{11-r}$$

$$(9) \frac{1^{-r} \times r^{-r} \times r^0}{\lambda^{-r}} = \frac{1^{-r} \times r^{-r}}{\lambda^{-r} \times \delta^{-r}} = \left( \frac{1 \times r}{\lambda \times \delta} \right)^{-r} = \left( \frac{1}{r} \right)^r$$

$r^r = r$

$$(10) \frac{\cancel{\lambda} \times r^r}{r^r \times \cancel{\frac{1}{\lambda}}} = \frac{r^r}{r^r} = \frac{(r^r)^r}{r^r} = \frac{r^r}{r^r} = 1$$

$$(a^m \times b^n)^p = a^{mp} \times b^{np}$$

: ai

$$1r^{-r} = (r^r \times r^r)^{-r} = r^{-1} \times r^{-r}$$

$$(11) \frac{(0.12a)^{-1} \times r^0}{(r^0)^{-1} \times \lambda^{-r}} = \frac{\left(\frac{1}{r}\right)^{-1} \times (a^r)^0}{(a^m)^{-1} \times (r^m)^{-r}} = \frac{\overbrace{\left(\frac{1}{r}\right)^{-1} \times a^0}^{r^{1r}}}{\delta^{-1r} \times r^{-1r}} = r^{1r} \times \delta = (r \times \delta)^{1r} = 10^{1r}$$

$$(12) \frac{\delta^{-r} \times \delta^0 \times a^r}{1a^m \times a^{-v}} = \left(\frac{\delta}{10}\right)^r \times \frac{a^r}{a^{-v}} = \left(\frac{1}{r}\right)^r \times a^r = (r^{-1})^r \times (r^r)^r = r^{-r} \times r^{1r} = r^{10}$$

$$L: \frac{5^2 \times (3^2)^2}{(3 \times 5)^3 \times (3^2)^{-7}} = \frac{\cancel{5^2} \times 3^4}{3^3 \times \cancel{5^3} \times 3^{-14}} = \frac{3^4}{3^{-11}} = 3^{15}$$

نکته: در جمع و تفریق اعداد توان دار، باید حاصل ضرب را بنویسد و سپس با هم جمع یا تفریق کنیم.

$$(13) \quad 3^2 + 5^2 = 9 + 25 = 34$$

نکته: در بعضی موارد، می توان جمع را به ضرب تبدیل کرد و از قوانین ضرب استفاده کرد.

$$\star + \star + \star = 3 \times \star$$

$$(هفت تیر) \quad 5 \text{ تیر} + 2 \text{ تیر} = 7 \text{ تیر}$$

$$(جاری) \quad 3 \text{ کی} + 3 \text{ کی} + 3 \text{ کی} = 9 \text{ کی}$$

$$3n + 3n + 3n = 3 \times 3n = 9n$$

$$(15) \quad 5^3 + 5^3 + 5^3 + 5^3 + 5^3 = 5 \times 5^3 = 5^4$$

$$(16) \quad 2^4 + 2^4 + 2^4 + 2^4 = 4 \times 2^4 = 2^2 \times 2^4 = 2^6$$

$$(17) \quad 3 \times 7^4 + 4 \times 7^4 = 7 \times 7^4 = 7^5$$

$$(18) \quad 1 \times 3^5 - 3^5 = 9 \times 3^5 = 3^2 \times 3^5 = 3^7$$

$$(19) \quad \frac{11 \times 9^{-5} - 1 \times 9^{-5}}{4 \times 3^{-7} + 2 \times 3^{-7}} = \frac{3 \times 9^{-5}}{9 \times 3^{-7}} = \frac{3 \times (3^2)^{-5}}{3^2 \times 3^{-7}} = \frac{3 \times 3^{-10}}{3^{-5}} = \frac{3^{-9}}{3^{-5}} = 3^{-9 - (-5)} = 3^{-9+5} = 3^{-4} = \frac{1}{3^4}$$



$$\begin{aligned}
 & \frac{(2 \cdot 10^8)}{(5 \cdot 10^5)^7} = \frac{(2 \times 10^8)}{(5 \times 10^5)^7} = \frac{2 \times 10^8}{5^7 \times 10^{-14}} \\
 & = \frac{2^{-9} \times 10^{26}}{5^7} = \frac{2^{-9} \times 2^{26} \times 5^{26}}{5^7} = \frac{2^{17} \times 5^{19}}{5^7} = 2^{17} \times 5^{12} \\
 & 10^8 = \frac{10^8}{10^0} = \frac{2^8 \times 5^8}{10^0} = 2^8 \times 10^{-0} \\
 & 5 \cdot 10^5 = \frac{5}{10^1} = \frac{5}{2 \cdot 5} = 5 \times 10^{-2}
 \end{aligned}$$

معادلات توانی: معادلاتی که مجهول آنها در توان قرار می‌گیرد.

برای حل معادلات توانی، باید پایه‌ها را دوطرف مساوی را یکسان کرد. بنابراین اگر دو عبارت توانی در

بایر پایه یکسان باشند، توان‌ها را می‌توانیم برابر می‌شوند.

مثال: معادله مجهول را حل کنید.

$$(1) \quad 2^{2x-1} = 5^5 \Rightarrow 2^{2x-1} = 5^5 \Rightarrow 2x-1 = 5 \Rightarrow 2x = 6 \Rightarrow \boxed{x=3}$$

$$(2) \quad 9^{9x-27} = \frac{1}{5} \Rightarrow 9^{9x-27} = 5^{-1} \Rightarrow 9x-27 = -1 \Rightarrow 9x = 26 \Rightarrow \boxed{x=3}$$

$$\begin{aligned}
 (3) \quad 9^x \times 27^x &= \left(\frac{1}{3}\right)^{-3} \\
 (3^2)^x \times (3^3)^x &= 3^3 \\
 3^{2x} \times 3^{3x} &= 3^3 \Rightarrow 3^{5x} = 3^3 \Rightarrow 5x = 3 \\
 &\Rightarrow \boxed{x = \frac{3}{5}}
 \end{aligned}$$