$$\sqrt{(\frac{۱}{۳})^۳} = \sqrt{(\frac{۱}{۳})^۲ \times (\frac{۱}{۳})^۱} = \cancel{\sqrt{(\frac{۱}{۳})^۲}} \times \sqrt{\frac{۱}{۳}}$$

$$\frac{۱}{۳} \times \sqrt{\frac{۱}{۳}}$$

$$\sqrt{۱۲۸} = \sqrt{۲^۷} = \sqrt{۲^۶ \times ۲} = \sqrt{۲^۶} \times \sqrt{۲} = ۲^۳ \times \sqrt{۲} = ۸\sqrt{۲}$$

یا: $\sqrt{۱۲۸} = \sqrt{۶۴ \times ۲} = \sqrt{۶۴} \times \sqrt{۲} = ۸\sqrt{۲}$

ریشه nام

$\sqrt[n]{a^n}$:

- n زوج $\Rightarrow \sqrt[n]{a^n} = |a|$
- n فرد $\Rightarrow \sqrt[n]{a^n} = a$

$۲^۴ = ۱۶$ و $(-۲)^۴ = ۱۶$

ریشه چهارم ۱۶؟ ۲ و ۲-

ریشه زوج $\sqrt[۴]{۱۶} = +۲$

نکته: اعداد منفی، ریشه زوج ندارند.

مثال: عبارات زیر را ساده کنید.

۱) $\sqrt[۵]{۱۰^۵} = ۱۰$

۲) $\sqrt[\cancel{۷}]{(-۳)^{\cancel{۷}}} = -۳$

۳) $\sqrt[\cancel{۴}]{(-۹)^{\cancel{۴}}} = |-۹| = ۹$

۴) $\sqrt[\cancel{۳}]{(-۱۲)^{\cancel{۳}}} = -۱۲$

ریشه زوج

۵) $\sqrt[\cancel{۴}]{(-۱۵)^{\cancel{۴}}} = |-۱۵| = ۱۵$

$\sqrt[۴]{-۱۶} \rightarrow$ بی‌معنی

$\sqrt[۴]{\underbrace{(-۲)^۳}_{\text{منفی}}} \rightarrow$ بی‌معنی

ضرب و تقسیم رادیکال‌ها:

زمانی که فرجه‌ی رادیکال‌ها یکسان باشد، می‌توان آن‌ها را در هم ضرب یا بر هم تقسیم نمود.

برای هر دو عدد مثبت a و b داریم:

$$\sqrt{a}\times\sqrt{b}=\sqrt{ab} \quad , \quad \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a}{b}} \quad (b\neq 0)$$

برای هر دو عدد دلخواه a و b داریم:

$$\sqrt[3]{a}\times\sqrt[3]{b}=\sqrt[3]{ab} \qquad \frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}}=\sqrt[3]{\frac{a}{b}} \quad (b\neq 0)$$

در حالت کلی برای فرجه n داریم:

$$\sqrt[n]{a}\times\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{ab}$$

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}=\sqrt[n]{\frac{a}{b}} \quad (b\neq 0)$$

اگر n زوج بود، a و b باید مثبت باشند.

توجه مهم: $\sqrt[n]{a\pm b}\neq\sqrt[n]{a}\pm\sqrt[n]{b}$

مثال: حاصل عبارات زیر را بیابید.

۱) $\sqrt[3]{2}\times\sqrt[3]{4}=\sqrt[3]{2\times 4}=\sqrt[3]{8}=\sqrt[3]{2^3}=2$

۲) $-\frac{\sqrt{20}}{\sqrt{5}}=-\sqrt{\frac{20}{5}}=-\underbrace{\sqrt{4}}_{\sqrt{2^2}=|2|=2}=-2$

۳) $-3\times\underbrace{\sqrt{27}}_{3\times\sqrt{3}}\times 4\sqrt{3}=-9\sqrt{3}\times 4\sqrt{3}=-36\sqrt{3\times 3}$

$=-36\underbrace{\sqrt{3^2}}_{3}=-36\times 3=-108$

$$\sqrt{27}=\sqrt{3^3}=\sqrt{3^2\times 3}=\underbrace{\sqrt{3^2}}_{3}\times\sqrt{3}=3\times\sqrt{3}=3\sqrt{3}$$

یا : $-3\sqrt{27}\times 4\sqrt{3}=-12\times\underbrace{\sqrt{27}\times\sqrt{3}}=-12\times 9=-108$

$\sqrt{27\times 3}=\sqrt{81}=9$

۴) $$\sqrt[3]{\frac{216}{343}}=\frac{\sqrt[3]{216}}{\sqrt[3]{343}}=\frac{\sqrt[3]{6^3}}{\sqrt[3]{7^3}}=\frac{6}{7}$$

نکته : $\sqrt[n]{a^m}\Leftarrow a^{\frac{m}{n}}$

توجه: زمانی که فرجه (n) زوج باشد، مقدار مثبت بیرون می‌آید.

۵) $\sqrt{5^4}=5^{\frac{4}{2}}=5^2=25$

۶) فرجه زوج $\sqrt[4]{(-2)^{12}}=\left|(-2)^{\frac{12}{4}}\right|=+2^3=8$

۷) فرجه فرد $\sqrt[5]{(-2)^{10}}=(-2)^{\frac{10}{5}}=(-2)^2=+4$

۸) $\sqrt[7]{(-3)^{21}}=(-3)^{\frac{21}{7}}=(-3)^3=-27$

نکته : $\left(\sqrt[n]{a}\right)^m=\sqrt[n]{a^m}$ ← توجه: اگر فرجه (n) زوج باشد، باید $a\geq 0$ باشد.

۹) $\left(\sqrt[3]{2}\right)^2=\sqrt[3]{2^2}=\sqrt[3]{4}$

۱۰) $\left(\sqrt[5]{-3}\right)^4=\sqrt[5]{(-3)^4}=\sqrt[5]{81}$

(۱۱) $\dfrac{\sqrt{2}\times\sqrt{45}}{\sqrt{10}} = \sqrt{\dfrac{2\times 45}{10}} = \sqrt{\dfrac{90}{10}} = \sqrt{9} = 3$

نکته: $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n.m]{a}$

(۱۲) $\sqrt[3]{\sqrt[5]{-7}} = \sqrt[3\times 5]{-7} = \sqrt[15]{-7}$

(۱۳) $\sqrt{\sqrt[3]{5}} = \sqrt[2\times 3]{5} = \sqrt[6]{5}$

(۱۴) $\sqrt{8\sqrt[3]{8}} = \sqrt{8\times 2} = \sqrt{16} = 4$

$\sqrt[3]{2^3} = 2$

(۱۵) $\sqrt[3]{5\sqrt{25}} = \sqrt[3]{5\times 5} = \sqrt[3]{25}$

$\sqrt{25} \to 5$

جمع و تفریق رادیکال‌ها:

جملاتی که همهٔ رادیکال‌های آنها دقیقاً مانند هم باشند را می‌توان باهم جمع یا از هم کم کرد.

یعنی جملاتی که فرجه و عبارت داخل رادیکال آنها دقیقاً یکسان باشند.

مثال: حاصل عبارات زیر را در صورت امکان ساده کنید.

(۱) $\sqrt{2} + 2\sqrt{2} = 3\sqrt{2}$

(۲) $5\sqrt[3]{3} - 12\sqrt[3]{3} = -7\sqrt[3]{3}$

(۳) $8\sqrt{5} - 2\sqrt{5} + 3\sqrt{5} = 9\sqrt{5}$

(۴) $4\sqrt{8} + 9\sqrt{7} - 10\sqrt{8} - \sqrt{7} = 8\sqrt{7} - 6\sqrt{8}$

۵) $\sqrt{2}+\sqrt[3]{2}$ ساده نمی‌شود

۶) $\frac{1}{3}\sqrt{5}+\frac{2}{5}\sqrt{3}+\frac{1}{3}\sqrt{3}-\frac{2}{5}\sqrt{5}$

$$\left(\frac{1}{3}-\frac{2}{5}\right)\sqrt{5}+\left(\frac{2}{5}+\frac{1}{3}\right)\sqrt{3}$$

$$\left(\frac{5-6}{15}\right)\sqrt{5}+\frac{6+5}{15}\sqrt{3}$$

$$-\frac{1}{15}\sqrt{5}+\frac{11}{15}\sqrt{3}=\frac{1}{15}\left(-\sqrt{5}+11\sqrt{3}\right)$$

ساده کردن رادیکال ها: ابتدا عبارت زیر رادیکال را به صورت حاصل ضرب عوامل اول تجزیه کرده و تا جایی که ممکن است از زیر رادیکال به صورت ضریب خارج می‌کنیم.

۱) $\sqrt{\underset{9\times 8}{72}}=\sqrt{3^2\times 2^3}=\sqrt{3^2\times 2^2\times 2}=\sqrt{3^2}\times\sqrt{2^2}\times\sqrt{2}$

$$=3\times 2\times\sqrt{2}=6\sqrt{2}$$

یا: $\sqrt{36\times 2}=\sqrt{36}\times\sqrt{2}=6\sqrt{2}$

۲) $\sqrt{\underset{4\times 5}{20}\times 25\times 49}=\sqrt{4\times 5\times 25\times 49}=\sqrt{4}\times\sqrt{25}\times\sqrt{49}\times\sqrt{5}$

$$2\times 5\times 7\sqrt{5}=70\sqrt{5}$$

یا: $\sqrt{2^2\times 5\times 5^2\times 7^2}=2\times 5\times 7\sqrt{5}=70\sqrt{5}$

۳) $\frac{\sqrt{\overset{۴\times۲}{۸}}}{\sqrt{۲}} + \sqrt[۳]{\frac{۵^۶}{۲۷}} = \frac{۲\cancel{\sqrt{۲}}}{\cancel{\sqrt{۲}}} + \frac{\sqrt[۳]{۵^۶}}{\sqrt[۳]{۳^۳}}$

$= ۲ + \frac{۵^۲}{۳} = ۲ + \frac{۲۵}{۳} = \frac{۶+۲۵}{۳} = \frac{۳۱}{۳}$

یا: $\sqrt{\frac{۸}{۲}} = \sqrt{۴} = ۲$

۴) $\sqrt{۷۲} - \sqrt{۳۲} + \sqrt{۱۸}$

$\sqrt{۳۶\times۲} - \sqrt{۱۶\times۲} + \sqrt{۹\times۲}$

$۶\sqrt{۲} - ۴\sqrt{۲} + ۳\sqrt{۲} = ۵\sqrt{۲}$

۵) $\sqrt{۵۰} + \sqrt[۳]{۲۴} + \sqrt[۳]{۸۱} - \sqrt{۱۲۸}$

$\sqrt{۲۵\times۲} + \sqrt[۳]{۸\times۳} + \sqrt[۳]{۲۷\times۳} - \sqrt{۶۴\times۲}$

$= \underline{۵\sqrt{۲}} + \underline{\underline{۲\sqrt[۳]{۳}}} + \underline{\underline{۳\sqrt[۳]{۳}}} - \underline{۸\sqrt{۲}}$

$= -۳\sqrt{۲} + ۵\sqrt[۳]{۳}$

۶) $\sqrt{۴۸}\left(\sqrt{۳} + \sqrt{۲}\right)$

$\sqrt{۴۸\times۳} + \sqrt{۴۸\times۲}$

$\sqrt{۴^۲\times۳\times۳} + \sqrt{۴^۲\times۳\times۲}$

$= \sqrt{۴^۲\times۳^۲} + \sqrt{۴^۲\times۶}$

$۴\times۳ + ۴\sqrt{۶} = ۱۲ + ۴\sqrt{۶}$