

جلسه ششم - عددهای حقیقی - عددهای حقیقی

آیا همه اعداد گویا هستند؟! خیر!

چه نوع اعدادی گویا به حساب نمی آیند؟

۱. اعداد رادیکالی که جذر دقیق ندارند. (مربع کامل نیستند). $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{6}, \dots$

۲. اعداد اعشاری که ارقام اعشاری آن ها به صورت نامنظم و تا بی نهایت ادامه دارد. $1/2560749\dots$

۳. اعداد خاص مانند عدد پی. π

اعداد گنگ: اعدادی که گویا نباشند را اعداد گنگ (اصم) می گوئیم و با نماد $\mathbb{Q}'$ نشان می دهیم.

مثال: اعداد گنگ را مشخص کنید.

$\sqrt{35}-1$, 0 , $7/35$, $4/159$, $2/374\dots$, $\sqrt{2/25}$, $-\sqrt{25}$, $3/14$

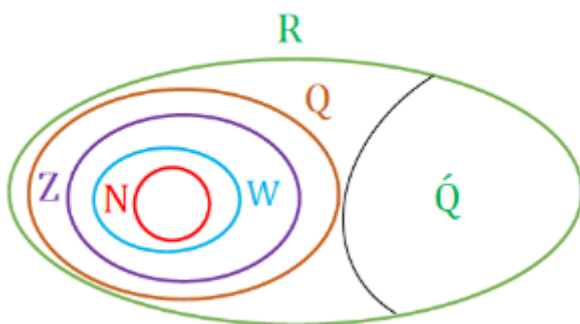
نکته: اعداد گنگ و گویا هیچ عضو مشترکی ندارند. $\mathbb{Q} \cap \mathbb{Q}' = \emptyset$

نکته: از اجتماع مجموعه اعداد گنگ و گویا، مجموعه اعداد حقیقی به وجود می آید که آن را با حرف $\mathbb{R}$ نشان می دهند.

$$\mathbb{Q} \cup \mathbb{Q}' = \mathbb{R}$$

نکته: هر عدد حقیقی که گویا نباشد گنگ است و برعکس، هر عدد اعشاری که گنگ نباشد، گویاست.

نکته: نمودار ون مجموعه اعداد گنگ و گویا به صورت زیر است:



$$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{W} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$$

تمرین: در جای خالی از علامت های $\in, \notin, \subseteq, \not\subseteq$ استفاده کنید.

$\mathbb{Z} \square \mathbb{Q}'$	$-0/3 \square \mathbb{Q}$	$\frac{\pi}{4} \square \mathbb{Q}'$	$\sqrt{3} \square \mathbb{R}$
$\mathbb{Q} \square \mathbb{Q}'$	$2/2371 \square \mathbb{Q}'$	$4/63 \square \mathbb{Q}$	$\sqrt{81} \square \mathbb{Q}'$

نکته: بین هر دو عدد گنگ دلخواه می توان بیشمار عدد گنگ نوشت، همچنین بین هر دو عدد گویا نیز می توان بیشمار عدد گنگ نوشت.

مثال: بین $\sqrt{3}, \sqrt{7}$ سه عدد گنگ بنویسید.

مثال: بین دو عدد ۵ و ۷ دو عدد گنگ بنویسید.

مثال: بین دو عدد ۲ و ۳ دو عدد گنگ بنویسید.

مثال: بین دو عدد ۱ و $\sqrt{2}$ دو عدد گویا بنویسید.

نمایش اعداد گنگ روی محور: در سال گذشته با نمایش اعداد گنگ روی محور آشنا شدیم. برای مشخص کردن نقاط نظیر برخی اعداد گنگ روی محور، می توان از مثلث قائم الزاویه و رابطه فیثاغورس استفاده کرد.

مثال: نقاط نظیر $1 + \sqrt{2}, 2 - \sqrt{5}$ را روی محور اعداد نمایش دهید.

محل قرار گرفتن عدد گنگ بدون رسم محور: مثلاً اگر بخواهیم تشخیص دهیم $\sqrt{56}$ بین کدام دو عدد صحیح متوالی قرار دارد ابتدا باید بدانیم اولین عدد قبل و بعد از ۵۶ که جذر کامل دارد، کدام است. پس داریم:

$$\sqrt{49} < \sqrt{56} < \sqrt{64} \Rightarrow 7 < \sqrt{56} < 8$$

مثال: تعیین کنید اعداد $A = -3 + \sqrt{17}, B = -7 - \sqrt{98}$ بین کدام دو عدد صحیح متوالی قرار دارند؟

نمایش مجموعه اعداد حقیقی روی محور: با توجه به اینکه در مجموعه اعداد حقیقی، بین هر دو عدد دلخواه، بی شمار عضو وجود دارد، برای نشان دادن اعضا می توانیم آنها را روی محور نشان می دهیم.

مثال: هر یک از مجموعه های زیر را روی محور اعداد حقیقی نشان دهید.

$$A = \{x \in \mathbb{R} \mid 2 \leq x < 3\}$$

$$B = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -2\}$$

$$C = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leq x \leq 5\}$$

$$D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 6\}$$

مثال: مجموعه متناظر با هر یک از محورهای زیر را بنویسید.

