

ریاضی نهم

فصل اول | مجموعه‌ها و احتمال

تعریف مجموعه:

در ریاضی برای بیان نمایش دسته‌ای از اشیاء کاملاً مشخص و متمایز استفاده می‌شود.

(۱) اگر ماه‌های فصل پاییز را در داخل دو آکولاد قرار دهیم و بنویسیم:

{آذر، آبان، مهر}

یک مجموعه تشکیل داده‌ایم که به هر یک از ماه‌های مهر، آبان و آذر یک عضو از این مجموعه می‌گوییم.

(۲) اعضای مجموعه را با (و) یا (،) از هم جدا می‌کنیم.

(۳) برای نامگذاری مجموعه‌ها از حروف بزرگ انگلیسی استفاده می‌کنیم.

سه نکته‌ی مهم مجموعه‌ها:

$$\{1, 1, 2, 3\} = \{1, 2, 2, 3\}$$

۱- در مجموعه‌ها تکرار عضو بی‌معناست.

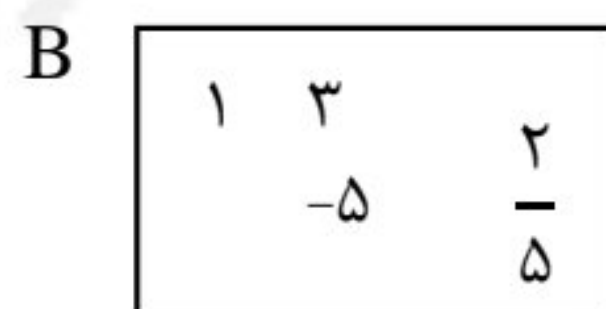
$$\{1, 2, 3\} = \{2, 3, 1\}$$

۲- در مجموعه ترتیب مهم نیست.

۳- مجموعه باید خوش تعریف باشد یعنی اعضاء کامل مشخص باشند.

* مجموعه را می‌توانیم با استفاده از یک منحنی یا خط شکسته بسته نمایش دهیم که به آن، نمایش مجموعه با نمودار

ون می‌گوئیم.



مثال: مجموعه‌ی اعداد زوج اول را بنویسید و نمودار ون آن را نمایش دهید.

مثال: مجموعه سه عدد فرد متوالی را بنویسید و نمودار ون آن را نمایش دهید.

عضویت: در مجموعه $A = \{b, \text{الف}, \text{مریم}, 5\}$ برای نشان دادن این که 5 عضوی از مجموعه‌ی A است از نماد $\in$ استفاده می‌کنیم و می‌نویسیم $5 \in A$ که 5 عضو A خوانده می‌شود و اگر بخواهیم بگوئیم سارا عضو مجموعه A نیست از نماد $\notin$ استفاده می‌کنیم می‌نویسیم $\notin A$ سارا می‌خوانیم سارا عضو A نیست.

مجموعه تهی: مجموعه‌ای را که هیچ عضوی نداشته باشد مجموعه تهی می‌نامیم و با نماد $\emptyset$ یا $\{\}$ نمایش می‌دهیم مانند مجموعه اعداد طبیعی کمتر از صفر.

نکته $\{0\}$ یا $\{\{\}\}$ یا $\{\emptyset\}$ هر کدام دارای یک عضو هستند و تهی نیستند.

مثال: با توجه به مجموعه مقابل درستی یا نادرستی گزاره‌های زیر را بررسی کنید.

$$A = \left\{ 5, \{\}, -3, \frac{2}{9}, 0.01, 3\frac{2}{5} \right\}$$

$$-3 \in A \quad \{\} \notin A \quad 0.01 \notin A \quad \frac{2}{5} \in A$$

امتیازی: با توجه به مجموعه‌ی $A = \{0, 1, \{2\}, \{1, 2\}\}$ کدام گزینه درست است؟

$$\emptyset \in A \quad \{0, 1\} \in A \quad \{1\} \notin A \quad \{2\} \notin A$$

نکته: تعداد اعضای مجموعه‌ی A را با $n(A)$ نمایش می‌دهند.

مثال: اگر $A = \{a, b, b, c, d\}$ باشد $n(A)$ چقدر است؟

دو مجموعه برابر: دو مجموعه را برابر گوئیم در صورتی که عضوهایشان کاملاً یکسان باشد به عبارتی هر عضو مجموعه‌ی اول، عضوی از مجموعه‌ی دوم و هر عضوی از مجموعه‌ی دوم عضوی از مجموعه‌ی اول باشد. (هرچی اولی داشت، دومی هم داشته باشد)

مثال: مجموعه عددهای طبیعی بزرگتر از 7 و کوچکتر از 11؟

مجموعه سه عدد متوالی که میانگین آن‌ها با 9 برابر باشد؟

مثال: جاهای خالی را کامل کنید.

$$\left\{ 5, \dots, \frac{2}{5}, 4, \frac{9}{3} \right\} = \left\{ \frac{2}{5}, 3, \frac{-\sqrt{144}}{(-2)^2}, \dots, \sqrt{25} \right\}$$

نکته: اگر عضوی در A باشد که در B نباشد یا عضوی در B باشد که عضو A نباشد، در این صورت مجموعه‌ی A با B برابر نیست می‌نویسیم $A \neq B$

زیرمجموعه: اگر همه‌ی اعضای مجموعه‌ی A داخل مجموعه‌ی B باشد می‌گوئیم A زیرمجموعه‌ی B است و می‌نویسیم $A \subseteq B$

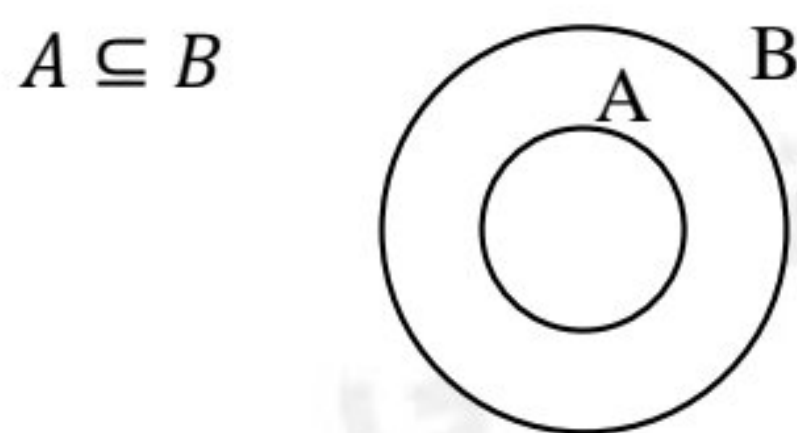
$$A = \{1, 2, 3\} \quad B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

اگر عضوی در A باشد که در B نباشد می‌نویسیم $A \not\subseteq B$ و می‌خوانیم A زیرمجموعه‌ی B نیست.

$$A = \{a, b, c, d\}$$

$$B = \{a, b, c\} \quad A \not\subseteq B$$

نمودار ون برای نمایش زیرمجموعه:



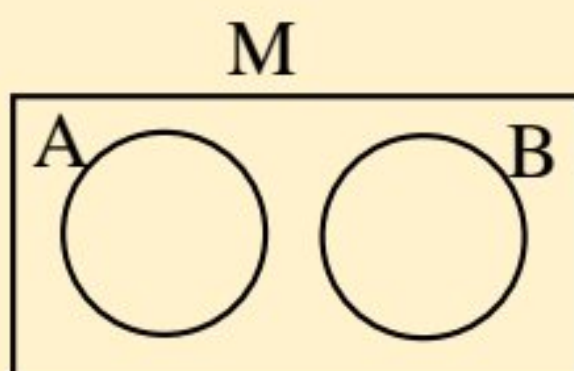
ویژگی‌های زیرمجموعه بودن:

۱- هر مجموعه، زیرمجموعه‌ی خودش است. $A \subseteq A$

۲- مجموعه‌ی تهی زیرمجموعه‌ی هر مجموعه‌ای است. $\emptyset \subseteq A$

۳- اگر دو مجموعه زیرمجموعه هم باشند، آن گاه با هم مساوی‌اند. $\begin{cases} A \subseteq B \\ B \subseteq A \end{cases} \rightarrow A = B$

تذکر: وقتی زیرمجموعه‌های یک مجموعه را مورد بررسی قرار می‌دهیم به آن مجموعه مرجع می‌گویند و آن را با M یا U نمایش می‌دهند.



$$A \subseteq M$$

$$B \subseteq M$$

امتیازی: اگر $A = \{0, 1, \emptyset\}$ باشد، کدام رابطه درست است؟

$$1 \subseteq A \quad (۴)$$

$$\{\emptyset\} \not\subseteq A \quad (۳)$$

$$\{1\} \subseteq A \quad (۲)$$

$$\{1\} \in A \quad (۱)$$

نوشتن تمام زیرمجموعه‌های یک مجموعه: (نظم ذهنی: اول $\emptyset$ ، بعد خود مجموعه، بعد تک عضو، بعد دو عضو و...)

$$A = \{1, 2\} \rightarrow$$

$$A = \{1, 2, 3\} \rightarrow$$

سؤال) زیرمجموعه‌های $A = \{2, \{2\}\}$ را بنویسید.

سؤال) زیرمجموعه‌های $A = \{1, \{1\}, \{\emptyset\}\}$ را بنویسید.

سؤال) تعداد کل زیرمجموعه‌های یک مجموعه‌ی n عضوی چقدر است؟

$$A = \{a, b\} \rightarrow \emptyset \quad \{a, b\} \quad \{a\} \quad \{b\}$$

$$B = \{a, b, c\} \rightarrow \emptyset \quad \{a, b\} \quad \{a\} \quad \{b\} \quad \{c\} \quad \{a, b\} \quad \{b, c\} \quad \{b, c\}$$

$$C = \{a, b, c, d\} \rightarrow$$

مجموعه‌ی ۱۰ عضوی چند زیرمجموعه دارد؟

مجموعه‌ی n عضوی چند زیرمجموعه دارد؟

تعداد کل زیرمجموعه‌های یک مجموعه‌ی n عضوی ←

تعداد کل زیرمجموعه‌های غیرتهی یک مجموعه‌ی n عضوی ←

تعداد کل زیرمجموعه‌های محض یک مجموعه‌ی n عضوی ←

زیرمجموعه‌ی محض (سِرِه): به تمام زیرمجموعه‌های یک مجموعه به جز خود آن مجموعه، زیرمجموعه محض یا سِرِه می‌گویند.

سؤال) تعداد زیرمجموعه‌های محض غیرتهی یک مجموعه‌ی n عضوی چقدر است؟

مجموعه‌ی توانی A : به مجموعه‌ی تمام زیرمجموعه‌های A مجموعه‌ی توانی A می‌گویند و آن را با $P(A)$ نشان می‌دهند.

$$A = \{1, 2\} \rightarrow P(A) = \{\{1\}, \{2\}, \{1, 2\}, \emptyset\}$$

مثال: اگر $A = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ باشد، $P(P(A))$ چند عضو دارد؟

$$((2^2)^2)^2 \quad (4)$$

$$(2^2)^2 \quad (3)$$

$$2^2 \quad (2)$$

$$(1) \text{ صفر}$$

نکته: هر مجموعه غیرتهی حداقل ۲ زیرمجموعه دارد. دقت کنید مجموعه‌ی تهی فقط یک زیرمجموعه دارد.

نمایش مجموعه: هر مجموعه را می‌توان به چهار مدل نوشت:

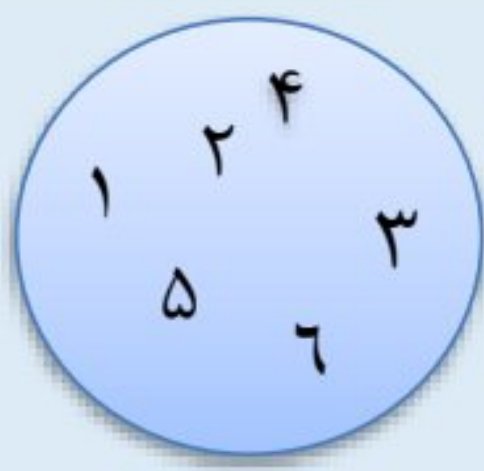
۱- به زبان فارسی

مجموعه اعداد طبیعی کوچکتر از ۷

۲- با اعضاء

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

۳- با نمودار ون



۴- به زبان ریاضی (با نمادهای ریاضی)

$$\{x | x \in \mathbb{N}, x < 7\}$$