فصل ۲ (عدد های حقیقی)

فهرست

درس اول :عددهای گویا

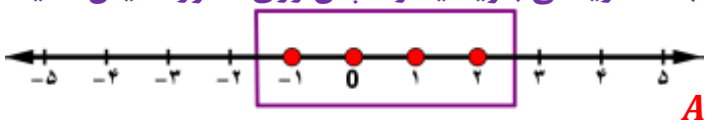
درس دوم: عددهای حقیقی

درس سوم: قدرمطلق و محاسبه ی تقریبی

❖ درس اول عددهای گویا

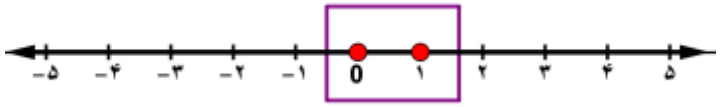
یادآوری. هرکدام از مجموعه های زیر را با نماد ریاضی بنویسید و سپس روی محور نمایش دهید.

الف* A: اعداد صحیح بین ۲- و ۳؛



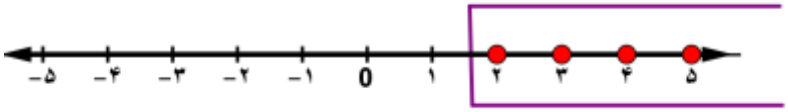
حل: $A = \{x | x \in \mathbb{Z} \ و \ -۲ < x < ۳\}$

ب* B: اعداد حسابی کوچکتر از ۲؛



حل: $B = \{x | x \in \mathbb{W} \ و \ x < ۲\}$

پ* C: اعداد طبیعی بزرگتر یا مساوی ۲؛



حل: $C = \{x | x \in \mathbb{N} \ و \ ۲ \leq x\}$

تمرین۲. الف* مجموعهٔ اعداد گویای بین ۲- و ۳ چند عضو دارد؟

حل: بی شمار عضو دارد

ب* آیا می توان این مجموعه را با نوشتن عضوهایش نمایش داد؟

حل: خیر- چون مجموعهٔ اعداد گویا بی شمار عضو دارد و عدد بعد از هر عدد گویا مشخص نیست بنابراین نمی توان این مجموعه را با نوشتن عضوهایش نمایش داد.

پ*آیا می توان این مجموعه را روی محور نمایش داد؟

حل: خیر

یادآوری

❖ مجموعهٔ اعداد گویا

هر عددی که بتوان آن را به صورت کسر نوشت به طوری که صورت و مخرج آن عدد صحیح بوده و در ضمن، مخرج آن صفر نباشد عددی گویا است.

$\mathbb{N} \subset \mathbb{W} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$

✧**نکته:** مجموعهٔ اعداد گویا را با حرف $\mathbb{Q}$ نشان می دهیم.

✧**نکته:** همهٔ عددهای طبیعی، صحیح و رادیکالی با جذر دقیق، عضو مجموعهٔ اعداد گویا هستند. یعنی ° ° ۰

✧**نکته:** چون مجموعهٔ اعداد گویا بی شمار عضو دارد و عدد بعد از هر عدد گویا مشخص نیست بنابراین مجموعهٔ اعداد گویا را فقط با نماد ریاضی نمایش می دهیم. یعنی $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \mid a,b \in \mathbb{Z} \quad , \quad b \neq 0 \right\}$

✧**نکته:** بین هر دو عدد گویا، بی شمار عدد گویا وجود دارد.

❖ روش های پیدا کردن کسر بین دو کسر

روش ۱(هم مخرج کردن): در این روش ابتدا با کمک مخرج مشترک، کسرها را هم مخرج کرده، سپس عددهای بین دو صورت را با مخرج مشترک می نویسیم.

تمرین۳. الف* سه کسر بین $\frac{1}{6}$ و $\frac{5}{8}$ بنویسید.

حل: $\frac{۱۵}{۲۴} > \frac{۷}{۲۴} > \frac{۶}{۲۴} > \frac{۵}{۲۴} > \frac{۴}{۲۴} \Rightarrow$ و $\frac{۵\times۳}{۸\times۳} = \frac{۱۵}{۲۴}$, $\frac{۱\times۴}{۶\times۴} = \frac{۴}{۲۴}$

ب* دو کسر بین $-\frac{۳}{۸}$ و $-\frac{۴}{۹}$ بنویسید.

حل: $-\frac{۲۷}{۷۲} < -\frac{۳۰}{۷۲} < -\frac{۳۱}{۷۲} < -\frac{۳۲}{۷۲} \Rightarrow$ و $-\frac{۳\times۹}{۸\times۹} = -\frac{۲۷}{۷۲}$, $-\frac{۴\times۸}{۹\times۸} = -\frac{۳۲}{۷۲}$

✧**نکته:**گاهی وقت ها پس از هم مخرج کردن کسرها،بین عددهای صورت، هیچ عدد طبیعی وجود ندارد. در این حالت می توانیم برای به دست آوردن کسرهای خواسته شده، صورت و مخرج دو کسر را درعددی طبیعی که یک واحد بیشتر از تعداد کسرهای خواسته شده است ضرب کنیم. (در واقع، مخرج مشترک را عدد بزرگتری در نظر می گیریم)

تمرین۴. چهار کسر بین $-\frac{۶}{۷}$ و $-\frac{۷}{۸}$ بنویسید.

حل: $-\frac{۴۹}{۵۶} = -\frac{۷\times۷}{۸\times۷}$ و $-\frac{۴۸}{۵۶} = -\frac{۶\times۸}{۷\times۸}$

چون بین عددهای صورت، هیچ عدد طبیعی وجود ندارد و تعداد کسرهای خواسته شده چهار است بنابراین صورت و مخرج را در عدد پنج یا عددی بزرگتر از پنج ضرب می کنیم.

$-\frac{۲۴۵}{۲۸۰} = -\frac{۴۹\times۵}{۵۶\times۵}$ و $-\frac{۲۴۰}{۲۸۰} = -\frac{۴۸\times۵}{۵۶\times۵}$

$-\frac{۲۴۰}{۲۸۰} > -\frac{۲۴۱}{۲۸۰} > -\frac{۲۴۲}{۲۸۰} > -\frac{۲۴۳}{۲۸۰} > -\frac{۲۴۴}{۲۸۰} > -\frac{۲۴۵}{۲۸۰}$

روش۲ (میانگین گرفتن): در این روش، دو کسر را جمع کرده و سپس حاصل جمع را بر ۲ تقسیم می کنیم. برای به دست آوردن تعداد بیشتری کسر،این روش را با کسرهای جدید ادامه می دهیم.

✧**نکته:** میانگین دو عدد دلخواه، دقیقاً وسط آن دو عدد قرار دارد و فاصلهٔ آن از دو عدد به یک اندازه می باشد.

تمرین۵. الف* بین $\frac{2}{3}$ و $\frac{1}{4}$ دو کسر به روش میانگین پیدا کنید.

حل: $\frac{2}{3}$ ، $\boxed{\frac{11}{24}}$ ، $\frac{1}{4}$ $\Rightarrow$ $\frac{11}{12}\div 2=\frac{11}{12}\times\frac{1}{2}=\frac{11}{24}$ $\Rightarrow$ $\frac{2}{3}+\frac{1}{4}=\frac{8+3}{12}=\frac{11}{12}$

حال برای پیدا کردن کسر دیگر کافی است که کسر $\frac{11}{24}$ را با یکی از دو کسر $\frac{1}{4}$ یا $\frac{2}{3}$ در نظر بگیریم و به همین روش عمل کنیم؛

$\frac{17}{24}\div 2=\frac{17}{24}\times\frac{1}{2}=\frac{17}{48}$ $\Rightarrow$ $\frac{1}{4}+\frac{11}{24}=\frac{6+11}{24}=\frac{17}{24}$

$\frac{1}{4}$ ، $\boxed{\frac{17}{48}}$ ، $\boxed{\frac{11}{24}}$ ، $\frac{2}{3}$

ب* بین $\frac{3}{5}$ و $\frac{5}{8}$ کسری بنویسید که فاصلهٔ آن از دو کسر به یک اندازه باشد.

حل: در واقع باید میانگین این دو کسر را حساب کنیم؛

$\frac{49}{80}\div 2=\frac{49}{40}\times\frac{1}{2}=\frac{49}{80}$ $\Rightarrow$ $\frac{3}{5}$ ، $\boxed{\frac{49}{80}}$ ، $\frac{5}{8}$ $\Rightarrow$ $\frac{3}{5}+\frac{5}{8}=\frac{24+25}{40}=\frac{49}{40}$

روش ۳ (جمع صورت ها با هم و مخرج ها با هم): اگر صورت دو کسر را با هم و مخرج ها را نیز با هم جمع کنیم کسر حاصل، بین دو کسر داده شده خواهد بود.

تمرین۶. الف* سه کسر بین $\frac{2}{3}$ و $\frac{4}{5}$ بنویسید.

حل:

$$\frac{2}{3}<\underbrace{\frac{6}{8}}_{3+5}<\underbrace{\frac{10}{13}}_{8+5}<\underbrace{\frac{14}{18}}_{13+5}<\frac{4}{5}$$

$$\frac{2+4}{3+4}\quad\frac{6+4}{8+5}\quad\frac{10+4}{13+5}$$

ب* چهار کسر بین $\frac{1}{2}$ و $\frac{5}{9}$ بنویسید.

حل:

$$\frac{1}{2}<\underbrace{\frac{6}{11}}_{2+9}<\underbrace{\frac{11}{20}}_{11+9}<\underbrace{\frac{16}{29}}_{20+9}<\underbrace{\frac{21}{38}}_{29+9}<\frac{5}{9}$$

$$\frac{1+5}{2+4}\quad\frac{6+5}{11+4}\quad\frac{11+5}{20+9}\quad\frac{16+5}{29+9}$$

❖ نمایش اعشاری اعداد گویا

تعریف: برای محاسبه ی کسر $\frac{5}{4}$ اگر با ماشین حساب عدد ۵ را بر ۴ تقسیم کنیم، حاصل ۱/۲۵ می شود. و برای محاسبه ی کسر $\frac{7}{3}$ اگر با ماشین حساب عدد ۷ را بر ۳ تقسیم کنیم ، حاصل ۲/۳۳۳۳۳... می شود.

پس هر عدد گویا معادل یک عدد اعشاری است.

✓ **مثال:**

$\frac{7}{50}=0/14$ $\quad$ $\frac{2}{3}=0/666666...$ $\quad$ $\frac{3}{8}=0/375$

$\frac{5}{6}=0/8333333...$ $\frac{1}{2}=0/5$ $17=17/0$

عدد اعشاری حاصل از یک عدد گویا به دو حالت کلی زیر تقسیم می شود:

الف)اعداد اعشاری مختوم یا متناهی(باپایان) ب)اعداد اعشاری متناوب

الف)کسری دارای نمایش اعشاری مختوم است که اگر صورت را برمخرج تقسیم کنیم بالاخره باقی مانده صفر می شود. و تعداد رقم های بعد از اعشار آنها متناهی بوده، و در یک رقمی ،قطع شده و تمام می شود.

✓ مثال:

$\frac{1}{8}=0/125$ قسمت اعشاری کسر $\frac{1}{8}$ متناهی(فقط ۱ و ۲ و ۵) است و بعد از رقم ۵ به پایان می رسد.

۶ توجه: عدد صحیحی مانند ۶ نیز مختوم است زیرا اگر به آن مخرج یک($\frac{6}{1}$) بدهیم و صورت را بر مخرج تقسیم کنیم باقی مانده صفر می شود.

ب)کسری دارای نمایش اعشاری متناوب است که با تقسیم صورت کسر بر مخرج آن، باقی مانده هیچ گاه صفر نمی شود و قسمت اعشاری آنها انتها ندارد. در قسمت اعشاری این اعداد یک یا چند رقم به صورت متناوب (یعنی پشت سرهم) تکرار می شوند.و از نماد زیر برای نمایش رقم هایی که تکرار می شود استفاده می کنند.

✓ مثال:

$\frac{5}{9}=0/55555...=0/\overline{5}$ عدد ۵ به صورت متناوب تکرار شده و تمام نمی شود.

$\frac{2}{11}=0/181818...=0/\overline{18}$ عدد ۱۸ به صورت متناوب تکرار شده و تمام نمی شود.

$\frac{7}{6}=1/16666...=1/1\overline{6}$ رقم ۱ ثابت و رقم ۶ به صورت متناوب تکرار شده و تمام نمی شود.

علامت تکرار(-)روی رقمی قرار می گیرد،که بطور متناوب تکرار می شود.

تمرین: به کمک ماشین حساب، نمایش اعشاری کسرهای زیر را به دست آورده و مختوم بودن یا متناوب بودن هر کدام را مشخص کنید.

مختوم $\frac{17}{5}=3/4$ متناوب $\frac{13}{21}=0/\overline{619047}$

مختوم $\frac{1}{4000}=0/00025$ متناوب $\frac{2}{21}=0/095238095...$

مختوم $\frac{7}{8}=0/875$ متناوب $-\frac{1}{33}=-0/030303...$

مختوم (دقت کنید قسمت اعشار عدد متناهی است. و تمام می شود.) $0/777777777777777$

سوال چالشی: بدون استفاده از ماشین حساب و انجام تقسیم چطور می تونیم بفهمیم کسر مختوم است یا متناوب؟

✧**نکته۱:** *قبل از بررسی یک کسر باید مطمئن باشیم صورت و مخرج کسر تا جایی که ممکن است ساده شده باشند.* اگر مخرج کسر را به عامل های اول تجزیه کنیم کسری که مخرج آن فقط عوامل اول ۲ یا ۵ داشته باشد. مختوم یا متناهی است. مانند: $\frac{۱۳}{۲۰}, \frac{۷}{۵}, \frac{۱}{۲}, \ldots$ توجه کسرهایی مانند $\frac{۶}{۱}$ که مخرج آنها یک است و هیچ عامل اولی ندارد. نیز مختوم می باشد.(می دانیم عدد یک نه اول است، نه مرکب)

✓ **مثال:**

مخرج کسر تنها دارای عامل اول ۲ است. مختوم ⟵ $\frac{۷}{۴}=\frac{۷}{۲\times۲}=۱/۷۵$

مخرج کسر دارای عامل اول ۲ و ۵ است. مختوم ⟵ $\frac{۹}{۵۰}=\frac{۹}{۵\times۵\times۲}=۰/۱۸$

کسر قابل ساده شدن است اول ساده می کنیم. مخرج فقط عامل اول ۵ دارد. مختوم ⟵ $\frac{۹۹\div۳}{۷۵\div۳}=\frac{۳۳}{۲۵}=\frac{۳۳}{۵\times۵}=۱/۳۲$

مخرج کسر هیچ عامل اول ندارد. مختوم ⟵ $\frac{۱۰}{۱}$

به عدد مخرج یک می دهیم .مخرج یک هیچ عامل اولی ندارد.مختوم ⟵ $۱۸۵=\frac{۱۸۵}{۱}$

✧**نکته۲:** *قبل از بررسی یک کسر باید مطمعن باشیم صورت و مخرج کسر تا جایی که ممکن است ساده شده باشند.* اگر مخرج کسر را به عوامل اول تجزیه کنیم. و عامل اولی غیر از ۲ یا ۵ مانند ۳,۷,۱۱,..... دیدیم. در این صورت کسر متناوب خواهد بود.

✓ **مثال:**

مخرج دارای عامل اول غیر از ۲ یا ۵ است. متناوب ⟵ $\frac{۳}{۱۱}=۰/۲۷۲۷۲۷\ldots$

مخرج علاوه بر ۲ دارای عامل اول ۳ می باشد. متناوب ⟵ $\frac{۵}{۶}=\frac{۵}{۲\times۳}=۰/۸۳۳۳۳\ldots$

مخرج علاوه بر ۲ و ۵ دارای عامل اول ۷ است. متناوب ⟵ $\frac{۱}{۷۰}=\frac{۱}{۲\times۵\times۷}=۰/۰۱۴۲۸\ldots$

تمرین: نوع عدد اعشاری حاصل از هریک از اعداد گویای زیر را بدون انجام تقسیم مشخص کنید.

$\frac{۱۵}{۲۱}=\frac{۵}{۷}\rightarrow$ متناوب $\quad \frac{۳}{۱۵}=\frac{۱}{۵}\rightarrow$ مختوم $\quad \frac{۷}{۵۰}=\frac{۷}{۲\times۵\times۵}\rightarrow$ مختوم

$\frac{۲}{۵}\rightarrow$ مختوم $\quad \frac{۷}{۳۳}=\frac{۷}{۳\times۱۱}\rightarrow$ متناوب $\quad \frac{۹}{۱۴}=\frac{۹}{۲\times۷}\rightarrow$ متناوب

$\frac{۱۰}{۱۵}=\frac{۲}{۳}\rightarrow$ متناوب $\quad \frac{۱۳}{۱۲}=\frac{۱۳}{۲\times۲\times۳}\rightarrow$ متناوب

سوالات امتحانی حل شده

۱-نمایش اعشاری کسر $\frac{۵}{ع}$ ، مختوم است. (سمنان-خرداد ۹۶) غ ص

حل: غ مخرج عامل غیر از ۲ یعنی ۳ دارد. $\frac{۵}{۲\times۳}$

۲-نمایش اعشاری $\frac{۳}{۱۰}$ عدد به صورت ۰/۳۳۳۳... است.(خراسان شمالی-خرداد۹۵) ص غ

حل: غ $\frac{۳}{۱۰}=۰/۳$

۳-عدد $۰/\overline{۳}$ از عدد $۰/\overline{۳۲}$ کوچکتر است. (تهران نوبت صبح-خرداد۹۶) ص غ

حل: غ رقم دوم اعشار هر دو عدد را مقایسه کنید. ۰/۳۲۳۲۳۲۳۲...>۰/۳۳۳۳۳...

۴-نمایش اعشاری کسر $\frac{۲}{۵}$ .....است.(مختوم-متناوب)(اصفهان-خرداد۹۶)

حل: مختوم زیرا مخرج فقط عامل ۵ دارد.

۵-عدد $۳/\overline{۱۳}$ از ۳/۱۳ .....است.(بزرگتر-کوچکتر-مساوی)(سمنان-خرداد ۹۵)

حل: بزرگترزیرا ۳/۱۳<۳/۱۳۱۳۱۳۱۳... رقم سوم اعشار عدد(۳/۱۳۱۳۱۳...) یک ولی رقم سوم اعشار عدد (۳/۱۳)صفر است.

۶-کدام یک از اعداد زیر نمایش اعشاری مختوم دارد.(تهران-خرداد۹۶)

$\frac{۷}{۳۰}$ $\frac{۱}{۵۵}$ $\frac{۱}{۸}$ $\frac{۳}{۱۷}$

حل: زیرا مخرج فقط عامل ۲ دارد. $\frac{۱}{۸}=\frac{۱}{۲\times۲\times۲}$

۷-کدام کسر نمایش اعشاری متناوب دارد.(قزوین-خرداد۹۶)

$\frac{۷}{۸}$ $\frac{۵}{۹}$ $\frac{۳}{۱۰}$ $\frac{۷}{۲۵}$

حل: مخرج عامل اول ۳ دارد. $\frac{۵}{۹}=\frac{۵}{۳\times۳}$

۸-نمایش اعشاری $\frac{۵}{۱۶}$ برابر است با: .(آذربایجان شرقی-خرداد۹۵)

۰/۳۱۲ $۰/۳\overline{۱}$ $۰/۳۱\overline{۳۵}$ ۰/۳۱۲۵

حل: ۰/۳۱۲۵صورت را بر مخرج تقسیم کنید.

۹-کدام یک از اعداد زیر عدد اعشاری مختوم نمی باشد. .(چهارمحال بختیاری-خرداد۹۵)

$\frac{۲۱}{۳۹}$ $-\frac{۱}{۲}$ $\frac{۱۲}{۱۵}$ $-\frac{۲۱}{۳۵}$

حل: زیرا مخرج عامل اول ۱۳ دارد. $\frac{۲۱\div۳}{۳۹\div۳}=\frac{۷}{۱۳}$

۱۰-حاصل کسر مرکب $\frac{2-\frac{1}{2}+\frac{3}{4}}{\frac{5}{10}-\frac{3}{4}-\frac{1}{2}}$ مساوی عدد $\frac{-1}{3}$ است. (آذربایجان غربی-خرداد۹۵) ص غ

حل: غ یادآوری ترتیب عملیات

۱-اول پرانتزهارا حساب کن۲-حاصل توان۳-در هنگام محاسبه چه داخل پرانتز چه بیرون پرانتز همواره از سمت چپ به راست ضرب و تقسیم را انجام می دهیم۴-پس از ضرب و تقسیم، جمع و تفریق را انجام می دهیم.

صورت: $\frac{2}{1}-\frac{1}{2}+\frac{3}{4}=\frac{8-2+3}{4}=\frac{9}{4}$ مخرج: $\frac{1}{2}-\frac{3}{4}-\frac{1}{2}=-\frac{3}{4}$ صورت بر مخرج $\frac{\frac{9}{4}}{-\frac{3}{4}}=-3$

۱۱-حاصل عبارت مقابل را به دست آورید. (کرمانشاه-خرداد۹۵) $\frac{-1}{2}+\frac{-5}{6}\div\frac{7}{3}=$

حل: $\frac{-1}{2}+\frac{-5}{6}\div\frac{7}{3}=\frac{-1}{2}+\frac{-5}{6}\times\frac{3}{7}=\frac{-1\times7}{2\times7}-\frac{5}{14}=\frac{-7-5}{14}=\frac{-12}{14}=-\frac{6}{7}$

❖ درس دوم عددهای حقیقی

آشنایی با عددهای گُنگ

عددهایی مانند $\sqrt{2},\sqrt{3},\sqrt{6},\sqrt{7},\sqrt{10},\ldots,0/0100100010000\ldots$ که تعداد رقم های اعشار ی آنها بی شمار است و دارای دوره تناوب نیست. **گُنگ یا اَصم** می گوییم.

مجموعه ای که این عددها در آن قرار دارد، مجموعه عددهای گنگ می نامیم و آن را با نماد Q' یا Q^c نمایش می دهیم.

✓ **مثال:**

هیچ نظمی در قسمت اعشاری وجود ندارد. بی پایان و بدون تکرار است. گنگ ⟵ $\sqrt{2}=1/41421562\ldots$

بی پایان و بدون تکرار است. گنگ ⟵ $0/3434434444\ldots$

بی پایان و بدون تکرار است. گنگ ⟵ $0/12112111211112\ldots$

- *توجه در اعداد گویای متناوب یک یا چند عدد بصورت نامتناهی و به طور منظم تکرار می شود ولی در اعداد بالا اعداد به صورت نامنظم ادامه پیدا می کنند و ما نمی توانیم دوره ی تناوب مشخصی برای آنها قائل باشیم.*

✧**نکته۱:** یکی از اعداد معروف گنگ، عدد π است. که در زیر ، تا ۳۰ رقم اعشار نوشته شده است. اما در محاسبات حداکثر تا دو رقم اعشار استفاده می شود.

$\pi=3/14159265358979323846264338327$

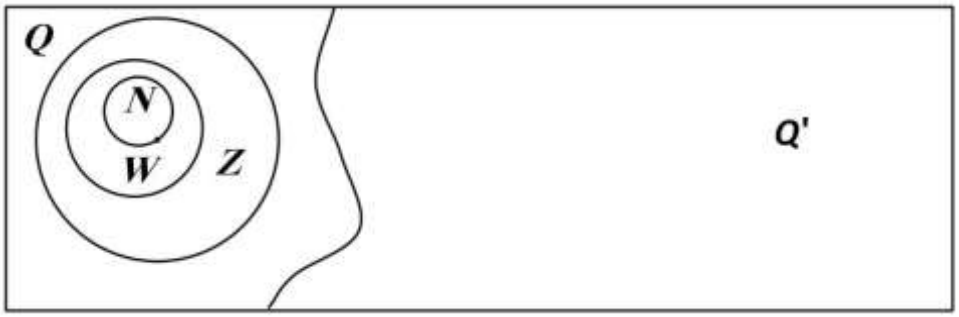
✧**نکته۲:** جذر عددهایی که مربع کامل نیستند، گنگ است.

مانند: $\sqrt{10},\sqrt{0/9},\sqrt{7/5},\sqrt{15},\sqrt{6},\sqrt{20},\sqrt{46}$

- توجه: عددهایی که جذر کامل دارند مثل $1,4,9,16,25,36,\ldots$ این عددها وقتی زیر رادیکال هستند گویا هستند و گنگ نمی باشند. زیرا

$$\sqrt{۰/۴۹}=\sqrt{\frac{۴۹}{۱۰۰}}=\frac{۷}{۱۰}=۰/۷,\sqrt{۲۵}=۵,\sqrt{۱۶}=۴,\sqrt{۹}=۳\ldots.$$

✧**نکته۳:** در نمودار وِن مجموعه های $\mathbb{N},W,\mathbb{Z},\mathbb{Q},\mathbb{Q}'$ به صورت زیر می باشند.



✧**نکته۴:** مجموعه ی اعداد گویا و اعداد گنگ دو مجموعه ی جدا از هم هستند، یعنی اشتراک ندارند، به بیان دیگر عددی وجود ندارد که هم گویا و هم گنگ باشد. $\mathbb{Q}\cap\mathbb{Q}'=\phi$

- ❋توجه طبق نمودار وِن $\mathbb{N}\subseteq W\subseteq\mathbb{Z}\subseteq\mathbb{Q}$

تمرین:کدام عبارت درست و کدام نادرست است.

$\frac{۳}{۷}\in\mathbb{Q}$ ص	$\sqrt{۵}\in\mathbb{Q}'$ ص	ص $۲/۳۰۳۰۰۳۰۰۰۳\ldots\in\mathbb{Q}'$	غ $-۳\in\mathbb{Q}'$
$\mathbb{Q}\cap\mathbb{Q}'=\phi$ ص	$\frac{\sqrt{۹}}{۴}\in\mathbb{Q}'$ غ	$\sqrt{۷}\in\mathbb{Q}$ غ	ص $\sqrt{۳/۷}\in\mathbb{Q}'$
$W\not\subset\mathbb{Q}'$ ص	$\mathbb{N}\subseteq\mathbb{Q}'$ غ	$\mathbb{Z}\subseteq\mathbb{Q}$ ص	ص $\mathbb{Z}\cap\mathbb{Q}'=\phi$

سوالات امتحانی حل شده

۱- $۰/۳\in\mathbb{Q}$ (گیلان-خرداد۹۵) ص غ

حل: ص

۲-عدد $۰/۱\overline{۷}$ گنگ است. (البرز-خرداد۹۶) ص غ

حل:غ گویاست.

۳-عددی وجود دارد که هم گویا و هم گنگ باشد. ص غ

حل:غ مجموعه گویا و گنگ دو مجموعه جدا از هم هستند.

۴-عدد $\sqrt{۹}$ عدد گنگ است. (زنجان -خرداد۹۵) ص غ

حل:غ گویاست. $\sqrt{۹}=۳$

۵-عدد π عددی اصم است. (لرستان-خرداد۹۶) ص غ

حل:ص

۶-عدد...۰/۲۰۲۰۰۲۰۰۰۲ یک عدد گویا است. (قم-خرداد۹۵) ص غ

حل: غ گنگ است.

۷-حاصل جمع دو عدد گنگ همواره عددی گنگ است. ص غ

حل: غ مثال نقض $\sqrt{۳}+(-\sqrt{۳})=۰$

۸-حاصلضرب هر دو عدد گنگ عددی گنگ است. ص غ

حل: غ مثال نقض $\sqrt{۲}\times\sqrt{۸}=\sqrt{۱۶}=۴$

۹-حاصل تقسیم عددی گویای غیر صفر و عدد گنگ برهم، عددی گنگ است. ص غ

حل: صمثال ۲ عددی گویا و $\sqrt{۳}$ عددی گنگ است. حاصل تقسیم $\frac{۲}{\sqrt{۳}},\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ هر دو گنگ هستند.

۱۰-کدام عدد به مجموعه عددهای گنگ تعلق دارد. (بوشهر-خرداد۹۵)

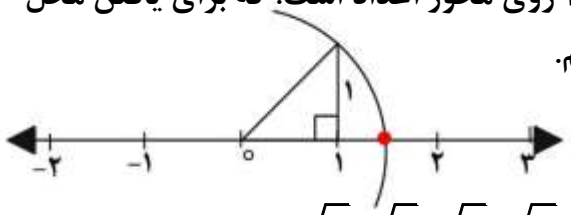
$\sqrt{۱}$ $۰/۲\overline{۳}$ $\sqrt{۳}$ $\frac{۷}{۱۱}$

حل: $\sqrt{۳}$

❖ نمایش هندسی اعداد گنگ

هر عدد گنگ متناظر با یک نقطه روی محور اعداد می باشد.

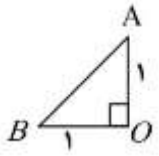
به عنوان مثال نقطه ی نمایش عدد $\sqrt{۲}$ یک نقطه بین دو عدد ۱و ۲ روی محور اعداد است. که برای یافتن محل دقیق در روی محور مطابق شکل از روش هندسی استفاده می کنیم.



برای به دست آوردن محل دقیق اعداد گنگ رادیکالی مانند $\sqrt{۲},\sqrt{۳},\sqrt{۵},\sqrt{۶},\sqrt{۷},.....$ از همین روش که در پایه ی هشتم آموختیم استفاده می کنیم.

یادآوری پایه ی هشتم

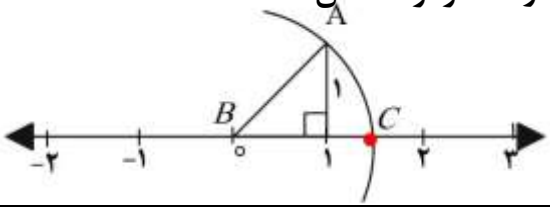
برای رسم پاره خط هایی به طول $\sqrt{۲},\sqrt{۳},\sqrt{۵},\sqrt{۶},\sqrt{۷}$ و .....از رابطه ی فیثاغورس و مثلث قائم الزاویه کمک می گیریم. مثلا برای رسم پاره خطی به طول $\sqrt{۲}$از مثلثی به شکل زیر استفاده می کنیم.



$$AB^{۲}=۱^{۲}+۱^{۲}=۲\rightarrow AB=\sqrt{۲}$$

همان طور که در شکل میبینید. طبق رابطه ی فیثاغورس، مثلث قائم الزاویه با ضلع های قائمه ۱ وتری به اندازه ی $\sqrt{۲}$ به ما می دهد.اگر همین مثلث را روی محور رسم کنیم و کمانی به مرکزنقطه ی ۰ و شعاع $\overline{AB}$ بزنیم.

محل برخورد با محور یعنی نقطه ی C،نقطه ی نمایش $\sqrt{۲}$است.که با رنگ قرمز ● نشان داده شده است.



- ❋توجه برای اینکه راحت تر بتوانیم مثلث قائم الزاویه مورد نظر را پیدا کنیم. عدد زیر رادیکال را به صورت مجموع دو یا چند مربع کامل می نویسیم. این اعداد مربع کامل، مجذور طول اضلاع قائمه ی مثلث هستند. ❋

✓ **مثال:**

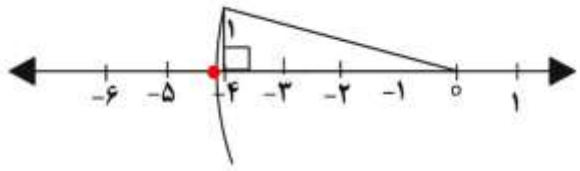
$-\sqrt{17}$

$-\sqrt{17}=-\sqrt{16+1}$

۴ ۱

❋نقطه شروع مبدا مختصات

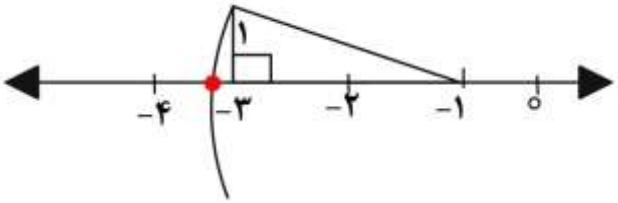
❋چون منفی است به سمت چپ حرکت می کنیم



$-۱-\sqrt{5}$

❋نقطه ی شروع -۱

❋چون $\sqrt{5}$ منفی است به سمت چپ حرکت می کنیم.



$\sqrt{5}$

$\sqrt{5}=\sqrt{4+1}$

۲ ۱

زیرا: $۲^۲+۱^۲=۵$ **برای اینکه طول اضلاع را بفهمیم از ۴ و ۱ جذر می گیریم.**

پس برای رسم $\sqrt{5}$ **داریم:**

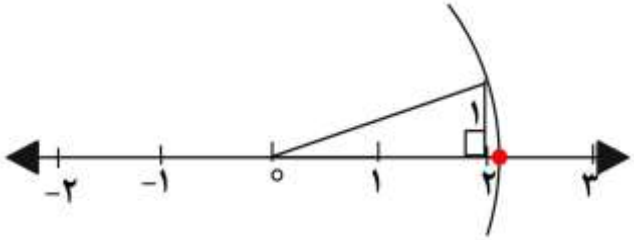
مثلثی به طول اضلاع قائمه ی ۱ و ۲ رسم می کنیم.

❋نقطه ی شروع مبدا مختصات

❋چون $\sqrt{5}$ مثبت است پس به سمت راست حرکت می کنیم.

❋۲واحد به سمت راست

❋یک واحد به سمت بالا

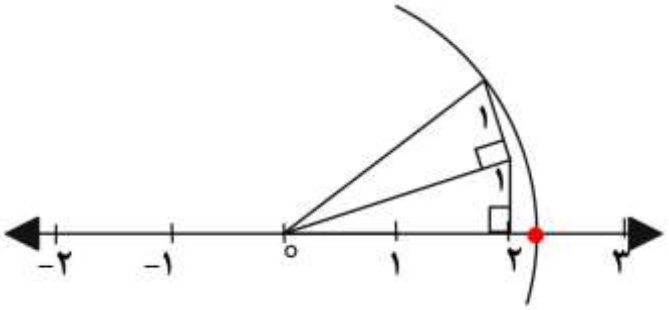


$\sqrt{6}$

$\sqrt{6}=\sqrt{5+1}=\sqrt{4+1+1}$

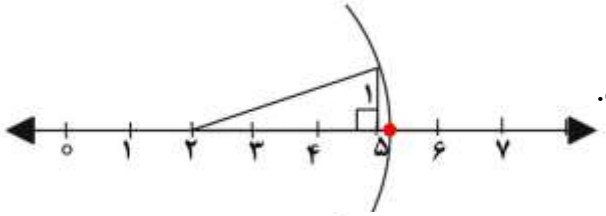
۲ ۱

ابتدا $\sqrt{5}$ **را رسم می کنیم سپس مثل قسمت های قبلی برای بدست آوردن** $\sqrt{6}$ **مثلث قائم الزاویه به طول ضلع قائمه ی۱ روی وتر مثلث اول می سازیم. وکمان می زنیم.**



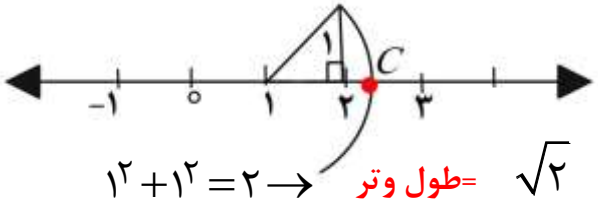
تمرین:

۱-نقطه ی نمایش عدد گنگ $\sqrt{۱۰}+۲$ را روی محور نشان دهید.



حل:

۲- در شکل زیر نقطه ی C چه عددی را نشان می دهد.



حل: اول طول وتر را پیدا می کنیم. $\sqrt{۲}$ =طول وتر $\rightarrow ۱^۲+۱^۲=۲$

*نقطه ی شروع ۱+ است.

* چون از نقطه ی شروع به سمت راست حرکت کرده پس $\sqrt{۲}$ مثبت است. $C=+۱+\sqrt{۲}$

❖ چالش اعداد گنگ و گویا روی محور

*نکته:مربع های کامل $۱,۴,۹,۱۶,۲۵,۳۶,۴۹,۶۴,۸۱,۱۰۰,۱۲۱,.....$

بدون نمایش هندسی،چگونه تشخیص دهیم اعداد گنگ بین کدام دو عدد صحیح متوالی قرار دارند؟

✓ **مثال۱:** $\sqrt{۱۵}$ بین کدام دو عدد صحیح متوالی قرار دارد؟

حل:

باید بررسی کنیم ۱۵ بین مربع کدام دو عدد متوالی قرار می گیرد.

چون ۱۵ بین دو مربع کامل ۹ و ۱۶ قرار دارد.($۹<۱۵<۱۶$)پس $\sqrt{۱۵}$ بین دو عدد $\sqrt{۹}=۳,\sqrt{۱۶}=۴$ قرار دارد. به قسمت زیر دقت کنید.

$$۹<۱۵<۱۶\rightarrow\sqrt{۹}<\sqrt{۱۵}<\sqrt{۱۶}\rightarrow۳=\sqrt{۹}<\sqrt{۱۵}<\sqrt{۱۶}=۴\rightarrow۳<\sqrt{۱۵}<۴$$

پس بین دو عدد صحیح ۳ و۴ قرار می گیرد.

✓ **مثال۲:** $\sqrt{۷}+۲$ بین کدام دو عدد صحیح متوالی قرار دارد؟

حل:

باید بررسی کنیم ۷ بین مربع کدام دو عدد متوالی قرار می گیرد.

چون ۷ بین دو مربع کامل ۴ و ۹ قرار دارد.($۴<۷<۹$)پس $\sqrt{۷}$ بین دو عدد $\sqrt{۴}=۲,\sqrt{۹}=۳$ قرار دارد. به قسمت زیر دقت کنید.

$$۴<۷<۹\rightarrow\sqrt{۴}<\sqrt{۷}<\sqrt{۹}\rightarrow۲<\sqrt{۷}<۳$$

اینجا باید $\sqrt{۷}$ را طبق سوال با عدد ۲ جمع کنیم. ($\sqrt{۷}+۲$)پس دو طرف آن یعنی ۲ و ۳ را هم باید با ۲ جمع کنیم.($۲+۲<۲+\sqrt{۷}<۲+۳$)

$$۲+۲<۲+\sqrt{۷}<۲+۳\rightarrow۴<۲+\sqrt{۷}<۵$$ پس بین دو عدد۴ و ۵ قرار می گیرد.

✧**نکته:** بین هر دو عدد گویا بی شمار عدد گنگ وجود دارد.

✓ **مثال۳:** بین دو عدد ۵ و ۶ چهار عدد گنگ بنویسید.

حل:

*اول ۵ و ۶ را به اعداد رادیکالی تبدیل می کنیم و برای این کار هر عدد را در خودش ضرب می کنیم زیرا

$۵\times۵=۲۵, ۶\times۶=۳۶$

$\sqrt{۲۵}=۵, \sqrt{۳۶}=۶$

$\sqrt{۲۵}<....,.....,.?...,.....<\sqrt{۳۶}$

$\sqrt{۲۵}<\sqrt{۲۶}<\sqrt{۲۷}<\sqrt{۲۸}<\sqrt{۳۰}<\sqrt{۳۶}$

توجه هنوز هم می توانیم بنویسیم .مانند: $\sqrt{۲۵}<\sqrt{۲۶/۱}<\sqrt{۲۷/۵}<\sqrt{۲۷/۵۵}<\sqrt{۳۰/۱}<\sqrt{۳۶}$

*این سوال بی شمار جواب داره یعنی می تونیم هنوز عدد بنویسیم که گنگ باشند. دانش آموز عزیز۳ تا عدد گنگ دیگه رو برای تمرین اضافه کن.

✓ **مثال ۲:**بین دو عدد ۱ و ۲ هفت عدد گنگ بنویسید.

حل:

*اول ۱ و ۲ را به اعداد رادیکالی تبدیل می کنیم و برای این کار هر عدد را در خودش ضرب می کنیم زیرا

$۱\times۱=۱, ۲\times۲=۴$

$\sqrt{۱}=۱, \sqrt{۴}=۲$

$\sqrt{۱}<\sqrt{۱/۵}<\sqrt{۲}<\sqrt{۲/۱}<\sqrt{۳}<\sqrt{۳/۴}<\sqrt{۳/۷}<\sqrt{۳/۹}<\sqrt{۴}$

✧**نکته:** بین هر دو عدد گنگ بی شمار عدد گنگ وجود دارد.

✓ **مثال ۳:** بین دو عدد $\sqrt{۷}, \sqrt{۱۰}$ چهار عدد گنگ بنویسید.

حل:

*دو عدد زیر رادیکال هستند و ما براحتی می توانیم اعداد گنگ را پیدا کنیم.

$\sqrt{۷}<\sqrt{۷/۵}<\sqrt{۸}<\sqrt{۸/۳}<\sqrt{۹/۴}<\sqrt{۹/۷}<\sqrt{۱۰}$

توجه اشتباه رایج شاگردان، $\sqrt{۹}$ را هم به عنوان عدد گنگ می نویسند ولی می دانیم $\sqrt{۹}=۳$ گویاست.

✧**نکته:** بین یک عدد گویا و یک عدد گنگ بی شمار عدد گویا و بی شمار عدد گنگ وجود دارد.

✓ **مثال ۴ :** بین ۲ و $\sqrt{۵}$ چهار عدد گویا و چهار عددگنگ مشخص کنید.

حل:

برای پیدا کردن عدد گویا اول مقدار تقریبی $\sqrt{۵}$ حدود دو رقم اعشار می نویسیم :

$$\sqrt{۵}\simeq ۲/۲۴$$

$$۲<۲/۰۴<۲/۰۹<۲/۱۲<۲/۲۲<\sqrt{۵}\simeq ۲/۲۴$$

برای عدد گنگ اول باید عدد ۲ را زیر رادیکال ببریم و برای اینکار عدد را دو بار در خودش ضرب می کنیم.

$$۲=\sqrt{۴}<\sqrt{۴/۲}<\sqrt{۴/۲۳}<\sqrt{۴/۵}<\sqrt{۴/۸}<\sqrt{۵}$$

✧**جمع بندی:** بین یک عدد گویا و یک عدد گنگ بی شمار عدد گویا و بی شمار عدد گنگ وجود دارد.

✓ **مثال ۵:**مجموعه ی A به صورت $A=\{x\in\mathbb{Q}|۳\le x\le ۵\}$ را در نظر بگیرید. آیا نمایش A به صورت زیر صحیح است چرا



حل:

خیر زیرا بین ۳ و ۵ بی شمار عدد گویا و بی شمار عدد گنگ وجود دارد. و نمودار رسم شده روی محور شامل همه ی اعداد گویا و گنگ از ۳ تا ۵ است. در صورتی که مجموعه A داده شده در سوال ، فقط اعداد گویا ($x\in\mathbb{Q}$)از ۳ تا ۵ را از ما می خواهد.

✓ **مثال ۶:**مجموعه ی A به صورت $A=\{x\in\mathbb{Q}'|-۱<x<۵\}$ را در نظر بگیرید. آیا نمایش A به صورت زیر صحیح است چرا



حل:

خیر زیرا بین ۱- و ۵ بی شمار عدد گویا و بی شمار عدد گنگ وجود دارد. و نمودار رسم شده روی محور شامل همه ی اعداد گویا و گنگ از ۱- تا ۵ است. در صورتی که مجموعه A داده شده در سوال ، فقط اعداد گنگ($x\in\mathbb{Q}'$) از ۱- تا ۵ را از ما می خواهد.

سوالات امتحانی حل شده

۱- عدد $\sqrt{۳}+۱$ بین کدام دو عدد صحیح متوالی قرار دارد.(همدان-خرداد ۹۶)

۱,۰ ۴,۳ ۳,۲ ۲,۱

حل: $\sqrt{۱}<\sqrt{۳}<\sqrt{۴}\rightarrow ۱<\sqrt{۳}<۲\rightarrow ۱+۱<\sqrt{۳}+۱<۲+۱\rightarrow ۲<\sqrt{۳}+۱<۳$

۲- $-۴+\sqrt{۱۰}$ بین کدام دو عدد متوالی قرار دارد. (آذربایجان-خرداد ۹۶)

$-۱,۰$ $\quad ۰,۱$ $\quad ۱,۲$ $\quad ۲,۳$

حل:

$$\sqrt{۹}<\sqrt{۱۰}<\sqrt{۱۶}\rightarrow ۳<\sqrt{۱۰}<۴\rightarrow -۴+۳<-۴+\sqrt{۱۰}<-۴+۴\rightarrow -۱<-۴+\sqrt{۱۰}<۰$$

۳-بین دو عدد ۳ و ۴ دو عدد گنگ بنویسید. (هرمزگان-خرداد ۹۶)

حل: $۳=\sqrt{۹}<\sqrt{۱۰}<\sqrt{۱۱}<\sqrt{۱۶}=۴$

۴- بین $\sqrt{۳}$ و ۴ یک عدد گنگ بنویسید. (البرز-خرداد ۹۶)

حل: $\sqrt{۳}<\sqrt{۱۵}<\sqrt{۱۶}=۴$

۵-عدد $\sqrt{۹۰}-۱۰$ بین کدام اعداد صحیح قرار دارد.

حل:

چون ۹۰ بین دو مربع کامل ۸۱ و ۱۰۰ قرار دارد.($۸۱<۹۰<۱۰۰$)پس $\sqrt{۹۰}$ بین دو عدد ۹،۱۰ ($\sqrt{۸۱}=۹,\sqrt{۱۰۰}=۱۰$)قرار دارد. به قسمت زیر دقت کنید.

$$۸۱<۹۰<۱۰۰\rightarrow \sqrt{۸۱}<\sqrt{۹۰}<\sqrt{۱۰۰}\rightarrow ۹<\sqrt{۹۰}<۱۰$$

اینجا باید طبق سوال $\sqrt{۹۰}$ ، منهای ۱۰ شود. ($\sqrt{۹۰}-۱۰$)پس دو طرف آن یعنی ۹ و ۱۰ را هم باید منهای ۱۰ کنیم.($۹-۱۰<\sqrt{۹۰}-۱۰<۱۰-۱۰$)به قسمت زیر دقت کنید.

$$۹-۱۰<\sqrt{۹۰}-۱۰<۱۰-۱۰\rightarrow -۱<\sqrt{۹۰}-۱۰<۰$$

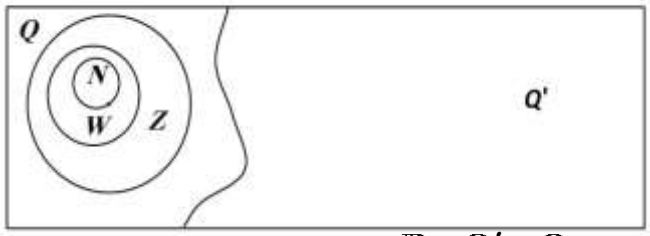
پس بین ۱- و o قرار دارد

❖ اعداد حقیقی

عددها به دو دسته جدا از هم، عددهای گویا و عددهای گنگ تقسیم می شوند. اجتماع مجموعه ی عددهای گویا و عددهای گنگ را مجموعه عددهای حقیقی می نامیم و آن را با نماد $\mathbb{R}$ نمایش می دهیم.

✧**نکته۱:** $\mathbb{R}=\mathbb{Q}'\cup\mathbb{Q}$ تساوی بین سه مجموعه اعداد گویا و گنگ و حقیقی برقرار است.

✧**نکته۲:** نمودار ون:



✧**نکته۳:** $\mathbb{R}-\mathbb{Q}=\mathbb{Q}'$ و $\mathbb{R}-\mathbb{Q}'=\mathbb{Q}$

✓ **مثال:**

$۳/۲۴\in\mathbb{R}$ $\quad ۰/۰۵۰۵۵۰۵۵۵۰۵۵۵.....\in\mathbb{R}$ $\quad -\left(۱+\sqrt{۳}\right)\in\mathbb{R}$

$\pi\in\mathbb{R}$ $\quad \frac{۵}{\sqrt{۲}}\in\mathbb{R}$ $\quad -\frac{۶}{۷}\in\mathbb{R}$ $\quad \sqrt{۳۵}\in\mathbb{R}$ $\quad ۵\in\mathbb{R}$

تمرین:داخل .....علامت $\in$ یا $\notin$قرار دهید.

$-\sqrt{۹}....\mathbb{R}$ $\quad \frac{۹}{۰}....\mathbb{R}$ $\quad \sqrt{۱۷}....\mathbb{R}$ $\quad ۰/۴۷.....\mathbb{Q}$ $\quad -۳.....\mathbb{Z}$

$\frac{۰}{۵}....\mathbb{R}$ $\quad \sqrt{۵/۷}.....\mathbb{Q}'$ $\quad \sqrt{۰/۸۱}.....\mathbb{Q}$ $\quad \sqrt{۰/۴}.....\mathbb{Q}$ $\quad \frac{-۶}{۳}....\mathbb{N}$

حل:

$-\sqrt{۹}..\in..\mathbb{R}$ $\quad \frac{۹}{۰}...\notin.\mathbb{R}$ $\quad \sqrt{۱۷}..\in...\mathbb{R}$ $\quad ۰/۴۷...\in...\mathbb{Q}$ $\quad -۳...\in..\mathbb{Z}$

$\frac{۰}{۵}=۰..\in..\mathbb{R}$ $\quad \sqrt{۵/۷}...\in...\mathbb{Q}'$ $\quad \frac{۹}{۱۰}=\sqrt{\frac{۸۱}{۱۰۰}}=\sqrt{۰/۸۱}..\in...\mathbb{Q}$ $\quad \frac{-۶}{۳}...\notin.\mathbb{N}$

$\sqrt{۰/۴}....\notin..\mathbb{Q}$

*توجه مجموعه ی اعداد گویا و مجموعه ی اعداد گنگ زیر مجموعه ی اعداد حقیقی هستند. $\mathbb{Q}\subset\mathbb{R},\mathbb{Q}'\subset\mathbb{R}$

تمرین:با توجه به مفاهیم قبلی و یا استفاده از نمودار وِن جاهای خالی را پر کنید.

$\mathbb{N}\cup\mathbb{Z}=.....$ $\quad \mathbb{Q}'\cup\mathbb{Q}=....$ $\quad \mathbb{Q}\cup\mathbb{N}=....$ $\quad \mathbb{Q}\cap\mathbb{R}=.....$

$\mathbb{Q}'\cap\mathbb{R}=.....$ $\quad \mathbb{Q}'\cap\mathbb{Z}=.....$ $\quad \mathbb{Q}\cap\mathbb{N}=.....$ $\quad \mathbb{Q}\cup\mathbb{R}=.....$

حل:

$\mathbb{N}\cup\mathbb{Z}=..\mathbb{Z}...$ $\quad \mathbb{Q}'\cup\mathbb{Q}=..\mathbb{R}..$ $\quad \mathbb{Q}\cup\mathbb{N}=..\mathbb{Q}..$ $\quad \mathbb{Q}\cap\mathbb{R}=..\mathbb{Q}...$

$\mathbb{Q}'\cap W=..\phi...$ $\quad \mathbb{Q}'\cap\mathbb{Z}=...\phi....$ $\quad \mathbb{Q}\cap\mathbb{N}=....\mathbb{N}...$ $\quad \mathbb{Q}\cup\mathbb{R}=..\mathbb{R}...$

سوالات امتحانی حل شده

۱-عددی وجود دارد که حقیقی و گنگ باشد. ص غ

حل:ص اعداد گویا و گنگ حقیقی هستند زیرا از اجتماع آنها اعداد حقیقی تشکیل می شود.

۲-هر عدد گویا حقیقی است. (خوزستان-خرداد۹۶) ص غ

حل:ص اعداد گویا و گنگ حقیقی هستند زیرا از اجتماع آنها اعداد حقیقی تشکیل می شود.

۳- $\sqrt{۱}\in\mathbb{R}$ ص غ

حل:ص

۴-از اجتماع دو مجموعه ی $\mathbb{Q},\mathbb{Q}'$ مجموعه ی .....بوجود می آید. (تهران-خرداد۹۶)

حل: مجموعه اعدادحقیقی $\mathbb{R}$

۵-اجتماع مجموعه ی عددهای گویا و عددهای .....مجموعه عددهای حقیقی می نامیم.(صحیح-اصم)

حل: اصم

۶-کدام گزینه کامل شده ی $\mathbb{R}-\mathbb{Q}=$..... است. (آذربایجان-خرداد۹۶)

W $\quad$ $\mathbb{Q}'$ $\quad$ $\mathbb{Z}$ $\quad$ $\mathbb{N}$

۷- کدام گزینه نادرست است. (تهران-خرداد۹۶)

$(\phi\cap\mathbb{Q}')\cup\mathbb{Q}=\mathbb{Q}$ $\quad$ $\mathbb{Q}\subseteq\mathbb{Z}$ $\quad$ $\pi\in\mathbb{R}$ $\quad$ $۱/۱\overline{۶}\in\mathbb{Q}$

۸-کدام گزینه نادرست است. (کردستان-خرداد۹۶)

$\mathbb{Q}\cap\mathbb{Q}'=\phi$ $\quad$ $\mathbb{Q}-\mathbb{Z}=\mathbb{N}$ $\quad$ $\mathbb{Z}\cap W=W$ $\quad$ $\mathbb{Q}\cup\mathbb{Q}'=\mathbb{R}$

۹-کدام گزینه درست است. (کرمان -خرداد۹۵)

$\mathbb{N}\subseteq\mathbb{Z}\subseteq\mathbb{R}\subseteq\mathbb{Q}$ $\quad$ $\mathbb{Q}\subseteq\mathbb{Z}\subseteq\mathbb{R}\subseteq\mathbb{N}$ $\quad$ $\mathbb{N}\subseteq\mathbb{R}\subseteq\mathbb{Q}\subseteq\mathbb{Z}$ $\quad$ $\mathbb{N}\subseteq\mathbb{Z}\subseteq\mathbb{Q}\subseteq\mathbb{R}$

۱۰-با توجه به مجموعه اعداد کدام گزینه صحیح نیست. (کرمانشاه-خرداد۹۶)

$\mathbb{Q}-\mathbb{Q}'=\mathbb{Q}$ $\quad$ $\mathbb{Z}-\mathbb{N}=\mathbb{Z}$ $\quad$ $\mathbb{N}-\mathbb{Z}=\phi$ $\quad$ $W-\mathbb{N}=\{۰\}$

✓ **مثال:** هر یک از مجموعه های زیر را با عضوهایش مشخص کنید.

$$A=\{۵n+۳|n\in\mathbb{N}\},B=\{x^{۲}-۱|x\in\mathbb{Z},-۲\le x<۱\},C=\{x|x\in\mathbb{R},-۲\le x\le۵\}$$

حل:

$A=\{۵n+۳|n\in\mathbb{N}\}=\{۸,۱۳,...\}$

$n=۱,۲,۳,۴,...\rightarrow ۵\times۱+۳=۸,۵\times۲+۳=۱۳,...$

$B=\{x^{۲}-۱|x\in\mathbb{Z},-۲\le x<۱\}=\{۳,۰,-۱\}$

$x=-۲,-۱,۰\rightarrow(-۲)^{۲}-۱=۴-۱=۳,(-۱)^{۲}-۱=۱-۱=۰,(۰)^{۲}-۱=۰-۱=-۱$

$C=\{x|x\in\mathbb{R},-۲\le x\le۵\}=?$

$x=-۱,۱,۱/۵,\sqrt{۲},-\sqrt{۳},\frac{-۳}{۲},...$

*توجه:در قسمت های قبلی یاد گرفتیم بین هر دو عدد حقیقی (گویا یا گنگ) بی شمار عدد حقیقی بصورت گویا یا گنگ وجود دارد. بنابراین مجموعه اعداد حقیقی را نمی توان با اعضا نمایش داد.پس برای نمایش مجموعه اعداد حقیقی از محور استفاده می کنیم. *

❖ محور اعداد حقیقی



اعداد حقیقی را می توان روی یک محور نشان داد که به این محور، محور اعداد حقیقی می گوییم.

*هر نقطه روی این محور نشان دهنده ی یک عدد گویا و یا یک عدد گنگ است.

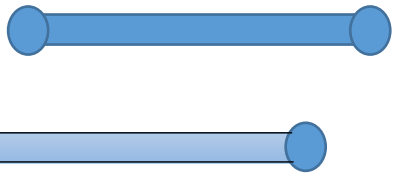
به عبارت دیگر یک تناظر یک به یک بین اعداد حقیقی و نقاط روی محور اعداد حقیقی وجود دارد.

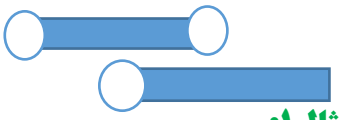
به صورت زیر:

*هر عدد حقیقی فقط یک نقطه را روی محور نشان می دهد و هر نقطه روی محور اعداد حقیقی، نمایش یک عدد حقیقی است.

❖ نمایش هندسی مجموعه ها روی محوراعداد حقیقی

می خواهیم مجموعه های زیر را روی محور اعداد نشان دهیم برای این کار از خط ها و دایره های توپر و توخالی به شکل زیر استفاده می کنیم.





✓ **مثال۱:**

$$A=\{x\in\mathbb{R}\mid ۲<x\leq ۳\}$$

ابتدای خط — انتهای خط

مساوی ندرد دایره توخالی — مساوی دارد دایره توپر

- **توجه:** در علامت های $\geq,\leq$ (بزرگتر مساوی و کوچکتر مساوی) علامت مساوی به معنای آن است که خود عدد هم جزو مجموعه است و ما برای نشان داد نقاط ابتدایی یا انتهایی روی محور آن را با دایره ی تو پر مشخص می کنیم.

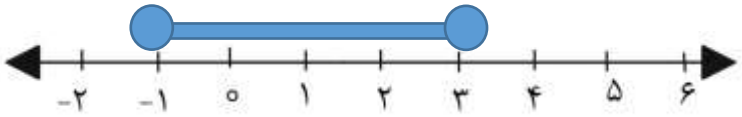
علامت $<,>$ به معنای این است که نقاط ابتدا یا انتهایی جزو مجموعه نیستند و روی محورآن را با دایره ی توخالی نشان می دهیم.

✓ **مثال:** مجموعه های زیر را روی محور اعداد حقیقی نشان دهید.

$$A=\{x\in\mathbb{R}\mid -۱\leq x\leq ۳\}$$

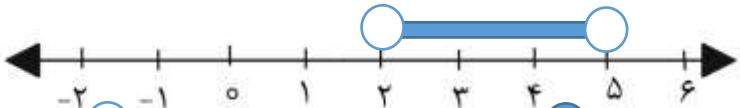
ابتدای خط — انتهای خط

توپر — توپر



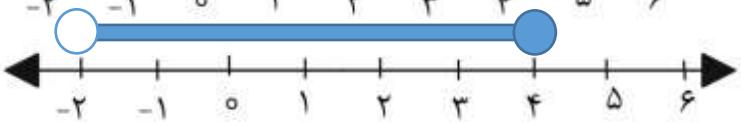
$$B=\{x\in\mathbb{R}\mid ۲<x<۵\}$$

ابتدا و توخالی — انتها و توخالی



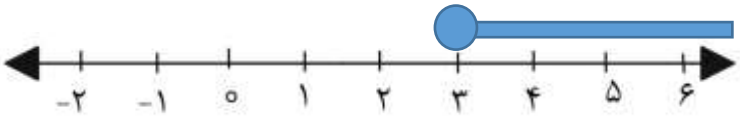
$$C=\{x\in\mathbb{R}\mid -۲<x\leq ۴\}$$

ابتدا و توخالی — انتها و توپر



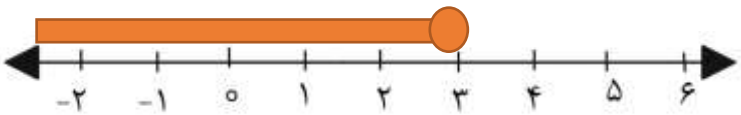
$$D=\{x\in\mathbb{R}\mid x\geq ۳\}$$

ابتدا و توپر





*اشتباه رایج دانش آموزان: عدد ۳ را انتها می گیرند و نمودار را به شکل زیر رسم می کنند.این غلط است.

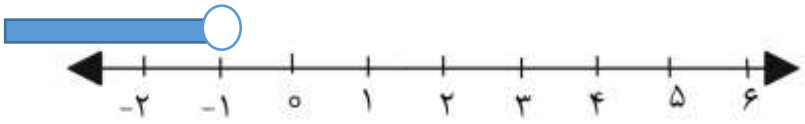


* دقت کنید عبارت را به این صورت بخوانید(X های بزرگتر از ۳)

وقتی می خوانیم بزرگتر یعنی به سمت راست ۳ باید حرکت کنیم. زیرا در محور اعداد حقیقی هر چقدر به سمت راست حرکت کنیم عدد بزرگتر و هر چقدر به سمت چپ حرکت کنیم عدد کوچکتر می شود.

$E=\{x\in\mathbb{R}|x<-۱\}$

انتها و توخالی



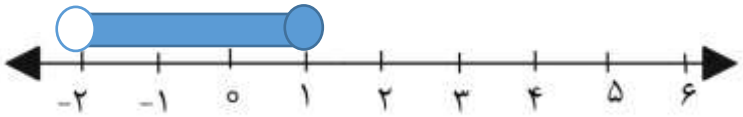
☺ *اشتباه رایج دانش آموزان: عدد ۱- را ابتدا می گیرند.و به شکل زیر رسم می کنند که غلط می باشد.



* دقت کنید عبارت را به این صورت بخوانید(x های کوچکتر از -۱)

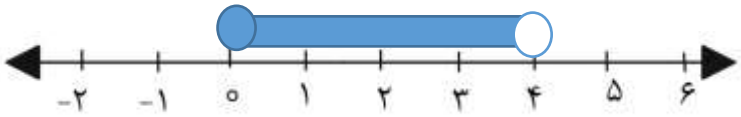
وقتی می خوانیم کوچکتر یعنی به سمت چپ -۱ باید حرکت کنیم. زیرا در محور اعداد حقیقی هر چقدر به سمت چپ حرکت کنیم عدد کوچکتر و هر چقدر به سمت راست حرکت کنیم عدد بزرگتر می شود.

$F=\{x\in\mathbb{R}|۱\geq x>-۲\}$



به جهت علامت ها دقت کنید.

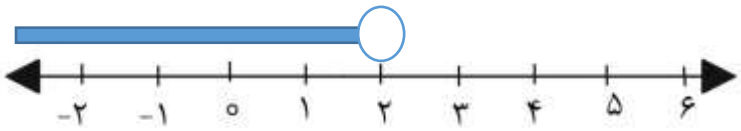
✓ **مثال:** با توجه به محور مجموعه ی متناظر با آن را بنویسید.



حل: ابتدا صفر و توپر ، انتها ۴ و توخالی $A=\{x\in\mathbb{R}|۰\leq x<۴\}$

☺ *دقت کنید $x\in\mathbb{R}$ است. اشتباه رایج شاگردان $x\in\mathbb{Q}$ یا $x\in\mathbb{Z}$ می نویسند.

✓ **مثال۳:**



حل: انتها ۲ و توخالی،حرکت به سمت چپ پس x های کمتر از۲ $A=\{x\in\mathbb{R}|x<۲\}$

☺ *اشتباه رایج شاگردان $x>۲$ می نویسند. دقت کنید حرکت به سمت چپ است.

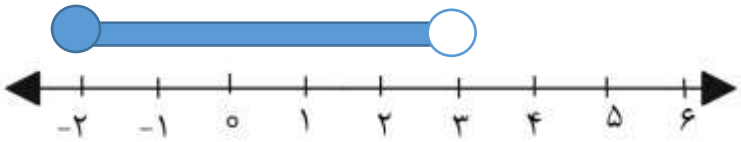
سوالات امتحانی حل شده

۱-الف)مجموعه $A=\{x\in\mathbb{R}\mid -۲\le x<۳\}$ را روی محور نشان دهید. (مرکزی- خرداد۹۶)

ب)در داخل .....علامت $\in$ یا $\notin$قرار دهید.

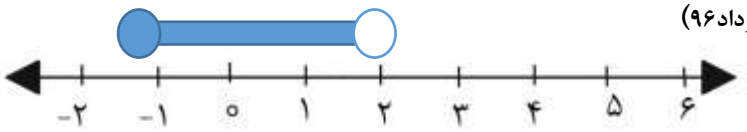
$\sqrt{۸}$.....A

حل:الف



حل :ب) $\sqrt{۸}\in A$ زیرا $\sqrt{۸}\cong ۲/۸۲$ عددی بین ۲ و ۳ است. یا می توانیم از روش قبلی بدون استفاده از ماشین حساب استفاده کنیم. $\sqrt{۴}<\sqrt{۸}<\sqrt{۹}\rightarrow ۲<\sqrt{۸}<۳$

۲-شکل مقابل معرف کدام مجموعه است. (اصفهان- خرداد۹۶)



$\{-۱,۰,۱,۲\}$ $\{۰,۱\}$

$\{x\in\mathbb{R}\mid -۱<x\le ۲\}$ $\{x\in\mathbb{R}\mid -۱\le x<۲\}$

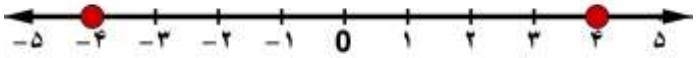
❖ درس سوم قدرمطلق و محاسبه ی تقریبی

فاصلهٔ نقطهٔ نظیر یک عدد حقیقی روی محور اعداد، تا مبدأ(صفر) را قدرمطلق آن عدد می نامند.

قدرمطلق عدد a را با $|a|$ نشان می دهیم.

✓ **مثال:** فاصله نقاط نظیر دو عدد ۴ و ۴- تا مبدأ ، برابر ۴ است؛ پس قدرمطلق هر دو عدد ۴ و (۴-) برابر ۴ است؛

یعنی: $|۴|=|-۴|=۴$.



✧**نکته:** قدرمطلق عدد صفر، مساوی صفر می باشد. یعنی $a=۰ \Rightarrow |a|=۰$

✧**نکته:** قدرمطلق عددهای مثبت، مساوی خود عدد می باشد. یعنی $a>۰ \Rightarrow |a|=a$

✧**نکته:** قدرمطلق عددهای منفی، مساوی قرینهٔ آن عدد می باشد. یعنی $a<۰ \Rightarrow |a|=-a$

تمرین۱. حاصل عبارت های زیر را به دست آورید.

* الف $|-۴/۰۲|=۴/۰۲$ * ب $\left|\frac{-۳}{۸}\right|=\frac{۳}{۸}$ * پ $|\sqrt{۷}|=\sqrt{۷}$ * ت $|۰|=۰$

✧**نکته:** قدر مطلقِ حاصل ضربِ دو عدد، مساوی با حاصل ضرب قدر مطلقِ آنها است. یعنی برای هر دو عدد حقیقی دلخواه مانند a و b ؛ $|a\times b|=|a|\times|b|$

✓ **مثال:**

$$|(-۸)\times(+۶)|=|-۴۸|=۴۸ \\ |-۸|\times|+۶|=۸\times۶=۴۸ \Big\} \Longrightarrow |(-۸)\times(+۶)|=|-۸|\times|+۶|$$

✧**نکته:** قدر مطلقِ حاصل تقسیمِ دو عدد، مساوی با حاصل تقسیم قدر مطلقِ آنهاست. یعنی برای هر دو عدد حقیقی دلخواه مانند a و b که $b \neq 0$ ؛

$$\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$$

✓ **مثال:**

$$\left|\frac{-۲۴}{۲}\right| = |-۱۲| = ۱۲ \quad , \quad \frac{|-۲۴|}{|۲|} = \frac{۲۴}{۲} = ۱۲ \Longrightarrow \left|\frac{-۲۴}{۲}\right| = \frac{|-۲۴|}{|۲|}$$

تمرین۲. آیا قدر مطلقِ حاصل جمعِ دو عدد، همواره مساوی با حاصل جمع قدر مطلقِ آنهاست؟

حل: خیر – مثلاً

$$|-۹+۲| = |-۷| = ۷ \quad , \quad |-۹| + |+۲| = ۹ + ۲ = ۱۱ \Longrightarrow |-۹+۲| \neq |-۹| + |+۲|$$

✧**نکته:** قدرمطلق مجموع دو عدد، از مجموع قدرمطلق آنها کوچکتر یا مساوی است. یعنی برای هر دو عدد حقیقی دلخواه مانند a و b ؛

$$|a+b| \leq |a| + |b|$$

✓ **مثال:**

$$|-۷+۳| = |-۴| = ۴ \quad , \quad |-۷| + |+۳| = +۷ + ۳ = ۱۰ \Longrightarrow |-۷+۳| < |-۷| + |+۳| \quad (۴<۱۰)$$

✓ **مثال:**

$$|۸+۹| = |۱۷| = ۱۷ \quad , \quad |۸| + |۹| = ۸ + ۹ = ۱۷ \Longrightarrow |۸+۹| = |۸| + |۹| \quad (۱۷=۱۷)$$

تمرین۳. حاصل عبارت های زیر را به دست آورید.

الف) $|۹ - ۲۰ + ۷| = \left|\overbrace{۹ - ۲۰}^{-۱۱} + ۷\right| = |-۴| = ۴$

ب) $|(-۶) \times (+۴)| = |-۲۴| = ۲۴$

پ) $|-(-۵+۷)| = \left|-\overbrace{(-۵+۷)}^{۲}\right| = |-۲| = ۲$

ت) $|-۶ \times ۳ + ۷| = \left|\overbrace{-۶ \times ۳}^{-۱۸} + ۷\right| = |-۱۱| = ۱۱$

ث) $|-|۳ - ۱۵|| = \left|-\left|\overbrace{۳ - ۱۵}^{-۱۲}\right|\right| = |-(+۱۲)| = |-۱۲| = ۱۲$

ج) $|-۵^۲| = |-۲۵| = ۲۵$

چ) $\left|\frac{۳}{۲} - \frac{۱}{۳}\right| = \left|\frac{۹-۲}{۶}\right| = \left|\frac{۷}{۶}\right| = \frac{۷}{۶}$

ح) $|-\sqrt{۷} + ۳ + \sqrt{۷}| = |-\cancel{\sqrt{۷}} + ۳ + \cancel{\sqrt{۷}}| = |+۳| = ۳$

خ) $-|-۸ - (-۳)| = -|-۸ + ۳| = -\overbrace{|-۵|}^{+۵} = -۵$

✧**نکته:** برای محاسبهٔ قدرمطلق هایی که دارای عبارت های گنگ هستند، می توان ابتدا مقدار تقریبی عبارت درون قدرمطلق را به دست آورد تا منفی یا مثبت بودن عبارت داخل قدرمطلق مشخص شود. اگر حاصل عبارت درون قدرمطلق منفی شد، عبارت درون قدرمطلق را قرینه کرده و از قدرمطلق خارج می کنیم و اگر حاصل عبارت درون قدرمطلق مثبت شد، عبارت درون قدرمطلق را بدون تغییر از قدرمطلق خارج می کنیم.

تمرین۴. حاصل عبارت های زیر را بدون قدرمطلق بنویسید.

$$|\sqrt{۶}-\sqrt{۷}|$$

حل: چون مقدار $\sqrt{۷}$ از $\sqrt{۶}$ بزرگتر است بنابراین حاصل عبارت درون قدرمطلق همواره منفی است. پس برای محاسبهٔ قدرمطلق باید عبارت درون آن را قرینه کنیم.

$$|\underbrace{\sqrt{۶}-\sqrt{۷}}_{\text{منفی}}| = -(\sqrt{۶}-\sqrt{۷}) = -\sqrt{۶}+\sqrt{۷} = \sqrt{۷}-\sqrt{۶}$$

$$|۷-\sqrt{۱۵}| =$$

حل: مقدار $\sqrt{۴۹} = ۷$ از $\sqrt{۱۵}$ بزرگتر است بنابراین حاصل عبارت درون قدرمطلق همواره مثبت است. پس برای محاسبهٔ قدرمطلق باید عبارت درون آن را بدون تغییر خارج کنیم.

$$|\underbrace{۷-\sqrt{۱۵}}_{\text{مثبت}}| = ۷-\sqrt{۱۵}$$

$$|۶-۵\sqrt{۳}| =$$

حل: مقدار $\sqrt{۷۵} = \sqrt{۲۵\times ۳} = ۵\sqrt{۳}$ از $\sqrt{۳۶} = ۶$ بزرگتر است بنابراین حاصل عبارت درون قدرمطلق همواره منفی است. پس برای محاسبهٔ قدرمطلق باید عبارت درون آن را قرینه کنیم.

$$|\underbrace{۶-۵\sqrt{۳}}_{\text{منفی}}| = -(۶-۵\sqrt{۳}) = -۶+۵\sqrt{۳} = ۵\sqrt{۳}-۶$$

$$|۵-\sqrt{۲}|+|-۱+\sqrt{۲}| = |\overbrace{۵-\sqrt{۲}}^{\text{مثبت}}|+|\overbrace{-۱+\sqrt{۲}}^{\text{مثبت}}| = ۵-\cancel{\sqrt{۲}}-۱+\cancel{\sqrt{۲}} = ۴$$

$$\underbrace{۵=\sqrt{۲۵}>\sqrt{۲}}\quad \underbrace{۱=\sqrt{۱}<\sqrt{۲}}$$

$$|\sqrt{۳}-۲|+|۷+\sqrt{۳}| = |\overbrace{\sqrt{۳}-۲}^{\text{منفی}}|+|\overbrace{۷+\sqrt{۳}}^{\text{مثبت}}| = -(\sqrt{۳}-۲)+۷+\sqrt{۳} =$$

$$\underbrace{\sqrt{۳}<۲=\sqrt{۴}}$$

$$-\cancel{\sqrt{۳}}+۲+۷+\cancel{\sqrt{۳}} = ۹$$

$$|-\sqrt{۶}-۱۱|-|\sqrt{۶}+۲| = |\overbrace{-\sqrt{۶}-۱۱}^{\text{منفی}}|-|\overbrace{\sqrt{۶}+۲}^{\text{مثبت}}| = -(-\sqrt{۶}-۱۱)-(\sqrt{۶}+۲) =$$

$$\cancel{\sqrt{۶}}+۱۱-\cancel{\sqrt{۶}}-۲ = ۹$$

$$|۴-\sqrt{۵}|+|-\sqrt{۵}| = |\overbrace{۴-\sqrt{۵}}^{\text{مثبت}}|+|\overbrace{-\sqrt{۵}}^{\text{منفی}}| = ۴-\sqrt{۵}-(-\sqrt{۵}) = \cancel{۴}-\cancel{\sqrt{۵}}+\cancel{\sqrt{۵}} = ۴$$

$$\underbrace{۴=\sqrt{۱۶}>\sqrt{۵}}$$

$$۴|\sqrt{۳}-۲|+|۱۳+۴\sqrt{۳}|-|-۷| = ۴\times|\overbrace{\sqrt{۳}-۲}^{\text{منفی}}|+|\overbrace{۱۳+۴\sqrt{۳}}^{\text{مثبت}}|-|\overbrace{-۷}^{\text{منفی}}| =$$

$$\sqrt{۳}<۲=\sqrt{۴}$$

$$-۴\times(\sqrt{۳}-۲)+۱۳+۴\sqrt{۳}-(+۷) = -۴\sqrt{۳}+۸+۱۳+۴\sqrt{۳}-۷ = ۱۴$$

$$\left|\frac{۱-\sqrt{۵}}{-۲}\right| = \frac{|\overbrace{۱-\sqrt{۵}}^{\text{منفی}}|}{|-۲|} = \frac{-۱+\sqrt{۵}}{۲}$$

- **توجه:** اعدادی که بین صفر و یک هستند هر چه به توان بزرگتری برسند کوچکتر می شوند.

✓ **مثال:**

$$\left.\begin{array}{l}(۰/۲)^۲ = ۰/۰۴\\(۰/۲)^۳ = ۰/۰۰۸\\(۰/۲)^۴ = ۰/۰۰۱۶\\(۰/۲)^۵ = ۰/۰۰۰۳۲\end{array}\right\} \Longrightarrow (۰/۲)^۲ > (۰/۲)^۳ > (۰/۲)^۴ > (۰/۲)^۵$$

✓ **مثال:** $(۰/۹۲)^{۱۷} > (۰/۹۲)^{۱۹}$ و $\left(\frac{۲}{۳}\right)^{۲۱} < \left(\frac{۲}{۳}\right)^{۱۴}$

تمرین۵. حاصل عبارت های زیر را بدون قدرمطلق بنویسید.

$$|(۰/۵)^{۲۰}-(۰/۵)^{۱۹}| =$$

*الف

حل: مقدار $(۰/۵)^{۱۹}$ از $(۰/۵)^{۲۰}$ بزرگتر است بنابراین حاصل عبارت درون قدرمطلق همواره منفی است. پس برای محاسبهٔ قدرمطلق باید عبارت درون آن را قرینه کنیم.

$$|(۰/۵)^{۲۰}-(۰/۵)^{۱۹}| = -\left((۰/۵)^{۲۰}+(۰/۵)^{۱۹}\right) = -(۰/۵)^{۲۰}+(۰/۵)^{۱۹}$$

$$|(۲/۳)^{۱۲}-(۲/۳)^{۸}| =$$

حل: مقدار $(۲/۳)^{۱۲}$ از $(۲/۳)^{۸}$ بزرگتر است بنابراین حاصل عبارت درون قدرمطلق همواره مثبت است. پس برای محاسبهٔ قدرمطلق، عبارت درون آن را بدون تغییر می نویسیم.

$$|(۲/۳)^{۱۲}-(۲/۳)^{۸}| = (۲/۳)^{۱۲}-(۲/۳)^{۸}$$

تمرین۶. در جاهای خالی علامت $<$ ، $=$ یا $>$ قرار دهید.

$$|\sqrt{۳}-۲| \square |\sqrt{۳}|+|-۲|$$

حل: $|\sqrt{۳}|+|-۲| \simeq ۱/۷+۲ = ۳/۷$ و $|\sqrt{۳}-۲| \simeq \overbrace{|۱/۷-۲|}^{-۰/۳} = ۰/۳$

بنابراین $|\sqrt{۳}-۲| \boxed{<} |\sqrt{۳}|+|-۲|$

$\left|\frac{-\sqrt{۵}}{۲}\right| \square \frac{|-\sqrt{۵}|}{|۲|}$

حل: $\left|\frac{-\sqrt{۵}}{۲}\right| = \frac{\sqrt{۵}}{۲}$ و $\frac{|-\sqrt{۵}|}{|۲|} = \frac{\sqrt{۵}}{۲} \Rightarrow \left|\frac{-\sqrt{۵}}{۲}\right| = \frac{|-\sqrt{۵}|}{|۲|}$

$|۲^۲ - ۳^۲| \square |۲^۲| - |۳^۲|$

حل:
$$\left.\begin{array}{l} |۲^۲ - ۳^۲| = |۴ - ۹| = |-۵| = ۵ \\ |۲^۲| - |۳^۲| = |۴| - |۹| = ۴ - ۹ = -۵ \end{array}\right\} \Rightarrow |۲^۲ - ۳^۲| > |۲^۲| - |۳^۲|$$

تمرین۷. اگر $a = ۲$ ، $b = \frac{۱}{۳}$ و $c = -\frac{۳}{۴}$ باشد، حاصل عبارت $|۴ a - b - c|$ را به دست آورید.

حل: مقادیر داده شده را در عبارت $|4\,a - b - c|$ جایگذاری کرده و حاصل را به دست می آوریم؛

$$|۴ a - b - c| = \left|۴ \times ۲ - \left(\frac{۱}{۳}\right) - \left(-\frac{۳}{۴}\right)\right| = \left|۸ - \frac{۱}{۳} + \frac{۳}{۴}\right| = \left|\frac{۹۶-۴+۹}{۱۲}\right| = \left|\frac{۱۰۱}{۱۲}\right| = \frac{۱۰۱}{۱۲}$$

تمرین۸. اگر $a = -۳$ ، $b = ۱$ و $c = ۷$ باشد، حاصل عبارت $\frac{|b|-c}{|a-b+c|}$ را به دست آورید.

حل: $\frac{|b|-c}{|a-b+c|} = \frac{|۱|-۷}{|-۳-۱+۷|} = \frac{۱-۷}{|۳|} = \frac{-۴}{۳}$

تمرین۹.مقدار عددی هر یک از عبارت های زیر را به ازای مقادیر داده شده به دست آورید.

الف) $a = -۵$ و $b = ۹$: $\frac{|a|+۳|b|}{۴|a-b|} =$

حل: $\frac{|a|+۳|b|}{۴|a-b|} = \frac{|-۵|+۳\times|۹|}{۴\times|-۵-۹|} = \frac{۵+\overbrace{۳\times۹}^{۲۷}}{۴\times|-۱۴|} = \frac{\overbrace{۵+۲۷}^{۳۲}}{\underbrace{۴\times۱۴}_{۵۶}} = \frac{۳۲}{۵۶} = \frac{۴}{۷}$

$a = -۵$ و $b = ۲$: $|a + b| - ۳|ab| =$

حل:
$$|a + b| - ۳|ab| = |-۵ + ۲| - ۳ \times |-۵ \times ۲| = |-۳| - ۳ \times |-۱۰| =$$
$$۳ - \underbrace{۳ \times ۱۰}_{۳۰} = ۳ - ۳۰ = -۲۷$$

$a = -۸$ و $b = \sqrt{۳}$: $|۲ a - b| - b =$

حل:
$$|۲ a - b| - \quad b = |۲ \times (-۸) - \sqrt{۳}| - \sqrt{۳} = \underbrace{|-۱۶ - \sqrt{۳}|}_{-(-۱۶-\sqrt{۳})} - \sqrt{۳} = ۱۶ + \sqrt{۳} - \sqrt{۳} = ۱۶$$

تمرین۱۰. بزرگترین عدد صحیحی که اگر به جای مربع قرار دهیم، نامساوی زیر برقرار باشد چیست؟

$$|۳-۲\times۴| > ۴+\square$$

حل: $|\underbrace{۳-۲\times۴}_{۸}| > ۴+\square \Rightarrow |-۵| > ۴+\square \Rightarrow ۵ > ۴+\square \Rightarrow$

$$\begin{cases} ۵ \not> ۴+\boxed{۱}=۵ \\ ۵ > ۴+\boxed{۰}=۴ \checkmark \\ ۵ > ۴+\boxed{-۱}=۳ \\ ۵ > ۴+\boxed{-۲}=۲ \\ \vdots \end{cases}$$

بنابراین جواب مورد نظر، عدد صحیح صفر می باشد. $\Rightarrow$

تمرین۱۱. عبارت کلامی مربوط به هر یک از رابطه های زیر را بنویسید.

الف* $a>۰$ $\xleftarrow{\text{پاسخ}}$ a عددی مثبت است.

پ* $a\geq ۰$ $\xleftarrow{\text{پاسخ}}$ a عددی نامنفی است.

ب* $a<۰$ $\xleftarrow{\text{پاسخ}}$ a عددی منفی است.

ت* $a\leq ۰$ $\xleftarrow{\text{پاسخ}}$ a عددی نامثبت است.

تمرین۱۲. الف* فرض کنید $a<۰$ و $b<۰$ باشد. طرف دیگر تساوی های زیر را بدون قدرمطلق بنویسید.

۱) $|a| \overset{\text{پاسخ}}{\Rightarrow} |\overbrace{a}^{\text{منفی}}| = -a$

۲) $|b| \overset{\text{پاسخ}}{\Rightarrow} |\overbrace{b}^{\text{منفی}}| = -b$

۳) $|-b| \overset{\text{پاسخ}}{\Rightarrow} |-b| = -|\overbrace{b}^{\text{منفی}}| = -(-b) = b$

۴) $|ab| \overset{\text{پاسخ}}{\Rightarrow} |\overbrace{a\times b}^{\text{مثبت}}| = ab$ چون حاصل ضرب دو عدد منفی همواره مثبت است پس علامت عبارت درون قدر مطلق مثبت می شود.

$(-)\times(-)=+$

۵) $|a+b| \overset{\text{پاسخ}}{\Rightarrow} |\overbrace{\underbrace{a+b}_{(-)+(-)=-}}^{\text{منفی}}| = -(a+b) = -a-b$

چون حاصل جمع دو عدد منفی همواره منفی است پس علامت عبارت درون قدر مطلق منفی می شود.

ب* فرض کنید $a>۰$ و $b<۰$ باشد. طرف دیگر تساوی های زیر را بدون قدرمطلق بنویسید.

۱) $|ab| \overset{\text{پاسخ}}{\Rightarrow} |\overbrace{\underbrace{a\times b}_{+\times-=-}}^{\text{منفی}}| = -(ab) = -ab$

۲) $|a-b| \overset{\text{پاسخ}}{\Rightarrow} |\overbrace{\underbrace{a-b}_{(+)-(-)=+}}^{\text{مثبت}}| = a-b$

پ* فرض کنید $a>b>۰$ و $c<۰$ باشد. طرف دیگر تساوی های زیر را بدون قدرمطلق بنویسید.

۱) $\left|\dfrac{ab}{c}\right| =$

حل: چون علامت a و b مثبت و c منفی است بنابراین علامت کل عبارت $\dfrac{ab}{c}$ منفی می شود. بنابراین هنگام خروج از قدرمطلق باید قرینه شود.

$$\left|\frac{ab}{c}\right| = -\frac{ab}{c}$$

۲) $|abc^{۲}| =$

حل: علامت $c^{۲}$ همواره مثبت است. از طرفی علامت a و b نیز مثبت است بنابراین علامت کل عبارت $abc^{۲}$ مثبت می شود. بنابراین هنگام خروج از قدرمطلق تغییری نمی کند. $|abc^{۲}| = abc^{۲}$

تمرین۱۳. فرض کنید $۰ < x < ۱$ باشد. حاصل عبارت زیر را به دست آورید.

$|x - ۵| + |x + ۷| =$

حل: با توجه به این که x عددی بین ۰ و ۱ است (مانند ۰/۲) پس عبارت $x - ۵$ همواره منفی است.

(مثلاً $x - ۵ = ۰/۲ - ۵ = -۴/۸$) پس هنگام خروج از قدرمطلق، قرینه می شود.

از طرفی عبارت $x + 7$ همواره مثبت است. (مثلاً $x + ۷ = ۰/۲ + ۷ = ۷/۲$) پس هنگام خروج از قدرمطلق، تغییری نمی کند.

$$\overbrace{|\underbrace{x-۵}_{\text{منفی}}|}^{-(x-۵)} + \overbrace{|\underbrace{x+۷}_{\text{مثبت}}|}^{x+۷} = \cancel{-x} + ۵ + \cancel{x} + ۷ = ۱۲$$

تمرین۱۴. فرض کنید $۳ < x < ۴$ باشد. حاصل عبارت زیر را به دست آورید.

$|x - ۴| + |x| =$

حل: با توجه به این که x عددی بین ۳ و ۴ است (مانند ۳/۵) پس عبارت $x - ۴$ همواره منفی است.

(مثلاً $x - ۴ = ۳/۵ - ۴ = -۰/۵$) پس هنگام خروج از قدرمطلق، قرینه می شود.

$$\overbrace{|\underbrace{x-۴}_{\text{منفی}}|}^{-(x-۴)} + \overbrace{|\underbrace{x}_{\text{مثبت}}|}^{x} = \cancel{-x} + ۴ + \cancel{x} = ۴$$

✧**نکته:** جذر توان دوم هر عدد با قدر مطلق آن عدد مساوی است. یعنی $\sqrt{a^{۲}} = |a|$.

✓ **مثال:**

$$\sqrt{(-۳)^{۲}} = \sqrt{۹} = ۳ \quad \Rightarrow \quad \sqrt{(-۳)^{۲}} = |-۳| = ۳$$
$$\sqrt{(+۵)^{۲}} = \sqrt{۲۵} = ۵ \quad \Rightarrow \quad \sqrt{(+۵)^{۲}} = |+۵| = ۵$$
$$\sqrt{(-۱۲)^{۲}} = \sqrt{۱۴۴} = ۱۲ \quad \Rightarrow \quad \sqrt{(-۱۲)^{۲}} = |-۱۲| = ۱۲$$

تمرین۱۵. حاصل عبارت های زیر را به دست آورید.

$$\sqrt{(\sqrt{۷} - ۶)^{۲}} = |\overbrace{\underbrace{\sqrt{۷} - ۶}_{\sqrt{۷}<۶=\sqrt{۳۶}}}^{\text{منفی}}| = -(\sqrt{۷} - ۶) = -\sqrt{۷} + ۶$$

$$\sqrt{(۱ - \sqrt{۵})^{۲}} = |\overbrace{\underbrace{۱ - \sqrt{۵}}_{\sqrt{۱}<\sqrt{۵}}}^{\text{منفی}}| = -(۱ - \sqrt{۵}) = -۱ + \sqrt{۵}$$

$$\sqrt{(2\sqrt{6}-5)^2} = |\underbrace{2\sqrt{6}-5}_{\text{منفی}}| = -(2\sqrt{6}-5) = -2\sqrt{6}+5$$
$$2\sqrt{6}=\sqrt{24}<5=\sqrt{25}$$

$$5\sqrt{(\sqrt{11}-4)^2} = 5\times|\underbrace{\sqrt{11}-4}_{\text{منفی}}| = -5(\sqrt{11}-4) = -5\sqrt{11}+20$$
$$\sqrt{7}<4=\sqrt{16}$$

$$\sqrt{(5+\sqrt{17})^2}-\sqrt{17} = |\underbrace{5+\sqrt{17}}_{\text{مثبت}}| - \sqrt{17} = 5+\sqrt{17}-\sqrt{17} = 5$$

$$\sqrt{(12-\sqrt{31})^2}+|5-\sqrt{31}| = |\underbrace{12-\sqrt{31}}_{\text{مثبت}}| + |\underbrace{5-\sqrt{31}}_{\text{منفی}}| = 12-\sqrt{31}-(5-\sqrt{31}) =$$
$$12=\sqrt{144}>\sqrt{31} \qquad 5=\sqrt{25}<\sqrt{31}$$

$$12-\sqrt{31}-5+\sqrt{31} = 7$$

$$\sqrt{(3-\sqrt{10})^2}-|-9\sqrt{10}| = |\underbrace{3-\sqrt{10}}_{\text{منفی}}| - \overbrace{|-9\sqrt{10}|}^{+9\sqrt{10}} = -(3-\sqrt{10})-(+9\sqrt{10}) =$$
$$3=\sqrt{9}<\sqrt{10}$$

$$-3+\sqrt{10}-9\sqrt{10} = -3-8\sqrt{10}$$

✧**توجه:** در فصل چهار خواهیم دید که برای جمع و تفریق رادیکال هایی که عبارت زیر رادیکال آنها مساوی است، کافی است ضریب آن رادیکال ها را با هم جمعِ جبری کنیم. مثلاً

$$\sqrt{7}-4\sqrt{7} = (1-4)\sqrt{7} = -3\sqrt{7} \qquad \text{و} \qquad \boxed{9}\sqrt{5}-\boxed{2}\sqrt{5} = (9-2)\sqrt{5} = 7\sqrt{5}$$

تمرین۱۶. حاصل عبارت های زیر را به دست آورید.

*الف $x<0 \;،\; y<0 \Rightarrow \sqrt{x^2}+\sqrt{y^2} =$

حل: $\sqrt{x^2}+\sqrt{y^2} = |\underbrace{x}_{\text{منفی}}| + |\underbrace{y}_{\text{منفی}}| = -x-y$

*ب $x<0 \;،\; y>0 \Rightarrow \sqrt{x^2}+\sqrt{y^2} =$

حل: $\sqrt{x^2}+\sqrt{y^2} = |\underbrace{x}_{\text{منفی}}| + |\underbrace{y}_{\text{مثبت}}| = -x+y = y-x$

*پ $x<0 \;،\; y<0 \Rightarrow \sqrt{x^2}-\sqrt{y^2} =$

حل: $\sqrt{x^2}-\sqrt{y^2} = |\underbrace{x}_{\text{منفی}}| - |\underbrace{y}_{\text{منفی}}| = -x-(-y) = -x+y = y-x$

*ت $x<0 \;،\; y>0 \Rightarrow \sqrt{(xy)^2} =$

حل: $\sqrt{(xy)^2} = |\underbrace{x\times y}_{\text{منفی}}| = -(xy) = -xy$
$$-\times+=-$$

❋ث $x<0 \Rightarrow \sqrt{5x^2}-x=$

حل: $\sqrt{5x^2}-x=5\times|\overset{\text{منفی}}{\overbrace{x}}|-x=-5x-x=-6x$

نمونه سوال امتحانی پایان فصل

۱-اگر $a<0,b>0$ آنگاه $|a-b|=b-a$ ص غ

۲- مجموعه عدد های گویا را می توان با محور اعداد نمایش داد. ص غ

۳-عدد ۳/۲۵۲۲۵۲۲۲۵.... عددی گویا است. ص غ

۴- تساوی $\sqrt{a^2}=-a$ به ازای $a<0$ همواره برقرار است. ص غ

۵- حاصل $\mathbb{R}-\mathbb{Q}'$ برابر با مجموعه اعداد .....است.

۶-حاصل عبارت $\sqrt{(\sqrt{5}-3)^2}$ برابر.....است

۷- اگر $x>0,y>0$ و باشد، حاصل $\sqrt{x^2}-\sqrt{y^2}$ برابر با.....است.

۸-عدد $0/3\overline{45}$ از عدد $0/345$ ..... است.(بزرگتر-کوچکتر-مساوی)

۹-مقدار عبارت $|x|+x$ به ازای $x=-2$ برابر کدام گزینه است

۴ -4 ۰ ۲

۱۰-نمایش اعشاری کدام یک از کسرهای زیر مختوم است.

$\frac{2}{3}$ $\frac{8}{20}$ $\frac{5}{12}$ $\frac{7}{11}$

۱۱-عدد $\sqrt{3}+1$ بین کدام دو عدد صحیح متوالی است.

۰,۱ ۴,۳ ۳,۲ ۲,۱

۱۲-کدام گزینه نادرست است

$\mathbb{N}\subset\mathbb{Z}$ $\mathbb{N}\cup\mathbb{Z}=\mathbb{Z}$ $\mathbb{Q}\cap\mathbb{Q}'=\phi$ $\mathbb{Z}\subset\mathbb{N}$

۱۳-الف-بین $\frac{1}{4},\frac{2}{7}$ سه کسر بنویسید.

ب-نمایش اعشاری کسر $\frac{14}{55}$ متناوب است یا مختوم؟

۱۴-مجموعه ی $A=\{x\in\mathbb{R}-2\le x<3\}$ را روی محور نشان دهید.

سپس با توجه به مجموعه A درستی و نادرستی عبارت های زیر را مشخص کنید.

$-2\in A$ $+3\in A$ $\sqrt{5}+1\in A$

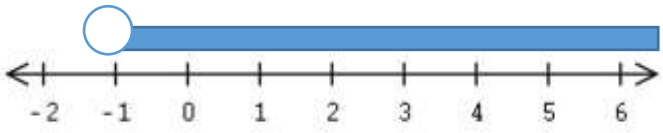
۱۵- بین دو عدد ۵ و ۶ چهار عدد گنگ بنویسید

۱۶-عدد $-۳-\sqrt{۵}$ را روی محور نشان دهید.

۱۷-حاصل عبارت مقابل را به دست آورید.

$$\left(-۲\frac{۵}{۶}+۳\frac{۱}{۲}\right)\div\left(-۱-\frac{۱}{۹}\right)\times\frac{۵}{۳}$$

۱۸-با توجه به محور مجموعه ی متناظر را بنویسید.



۱۹-در مورد مجموعه $A=\{x\in\mathbb{Q}'\,|\,-۲<x<۳\}$ کدام درست و کدام نادرست است.

$۱/۵۳۵۵۳۵۵۳....\in A$ $\quad\pi\notin A$ $\quad\sqrt{۵}\in A$ $\quad-\frac{۱}{۳}\notin A$ $\quad\frac{۵}{۳}\in A$

$-\frac{\sqrt{۲}}{\sqrt{۸}}\in A$ $\quad۰\in A$

۲۰-حاصل عبارت های زیر را بدون استفاده از قدر مطلق بدست آورید.

الف) $\left|۵-\sqrt{۵}\right|+\left|-۴-\sqrt{۵}\right|$ $\qquad$ ب) $\sqrt{\left(۳-\sqrt{۱۰}\right)^{۲}}+-\sqrt{۱۰}$

۲۱- حاصل عبارت های زیر را به ازای مقادیر داده شده بنویسید.

الف-اگر $a=-۲,b=۳,c=-۴$ باشد، $|a+b|+۵|c-b|$

ب-اگر $a=-۲,b=\sqrt{۳},c=۳$ باشد، $|۲a-b+c|$