فصل ۷

توان :

$$a^m$$

$m \to$ توان

$a \leftarrow$ پایه

$\longrightarrow$ a را m بار در خودش ضرب می‌کنیم

مثال

$$\begin{cases} ۲^۵ = ۲ \times ۲ \times ۲ \times ۲ \times ۲ = ۳۲ \\ \left(-\frac{۱}{۳}\right)^۲ = \left(-\frac{۱}{۳}\right) \times \left(-\frac{۱}{۳}\right) = +\frac{۱}{۹} \end{cases}$$

ویژگی‌ها :

۱ـ هر عدد به توان ۱ برابر است با همان عدد $\qquad a^1 = a$

مثال : $(-۱۰۰)^۱ = -۱۰۰$

۲ـ هر عدد غیر صفر به توان صفر، برابر است با ۱ $\qquad a^0 = 1 \quad (a \neq 0)$

$$(\text{هرچی})^0 = 1$$

۳ـ صفر به توان هر عدد غیر صفر برابر است با صفر. $\qquad 0^n = 0 \quad (n \neq 0)$

مثال : $(0 \times \sqrt{8})^7 = 0^7 = 0$

۴ـ یک به توان هر عدد برابر است با ۱ $\qquad 1^n = 1$

مثال : $1^{100} = 1$

۵ـ اگر عددی بین صفر و یک باشد، هرچه به توان عدد بزرگتری برسد، کوچکتر می‌شود.

مثال : $0 < \frac{1}{2} < 1 \Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^2 > \left(\frac{1}{2}\right)^3$

$\leftarrow$ کسر کوچکتر از ۱ $\qquad \frac{1}{4} \qquad \frac{1}{8}$

۶ـ اگر عددی بزرگتر از ۱ باشد، هرچه به توان عدد بزرگتری برسد، بزرگتر می‌شود.

مثال : $\frac{5}{4} > 1 \Rightarrow \left(\frac{5}{4}\right)^2 < \left(\frac{5}{4}\right)^3$

$۷ > ۱ \Rightarrow ۷^{۴} > ۷^{۳} > ۷^{۲} > ۷^{۱} > ۷^{۰} = ۱$

تست: اگر $۰ < x < ۱$ و a و b اعداد طبیعی باشند و $a < b$ باشد، کدام نامساوی درست است؟ $\frac{۱}{۲}$ (ویژگی ۵) $\left(\frac{۱}{۲}\right)^{۳} < \left(\frac{۱}{۲}\right)^{۲}$

۱) $x^{a} > \frac{۱}{x^{a}}$ ← مثال نقض: $x = \frac{۱}{۳}$ و $a = ۲ \Rightarrow \underbrace{\left(\frac{۱}{۳}\right)^{۲}}_{\frac{۱}{۹}} \not> \frac{۱}{\left(\frac{۱}{۳}\right)^{۲}} \to ۹$

۲) $x^{a} < x^{b}$ ← مثال نقض: $x = \frac{۱}{۳}, a = ۲, b = ۳ \Rightarrow \underbrace{\left(\frac{۱}{۳}\right)^{۲}}_{\frac{۱}{۹}} \not< \underbrace{\left(\frac{۱}{۳}\right)^{۳}}_{\frac{۱}{۲۷}}$

۳) $x^{b} < ۰$ ← x یک عدد مثبت است و به توان هر عددی که برسد باز مثبت خواهد بود.

۴) $x^{b} < x^{a}$ ✓

۷. اگر پایه منفی باشد و توان زوج باشد، حاصل عددی مثبت، و اگر پایه منفی و توان فرد باشد، حاصل عددی منفی است. (توان زوج منفی خوار است)

$(-۲)^{۱۰۰} = +۲^{۱۰۰}$ $\qquad$ $(-۳)^{۲} = +۹$

$(-۲)^{۹۹} = -۲^{۹۹}$ $\qquad$ $(-۳)^{۳} = -۲۷$

۸. اگر پایه منفی و علامت منفی داخل پرانتز باشد و پرانتز به توان یک عدد رسیده باشد، منفی هم به توان می‌رسد اما در غیر این صورت توان فقط برای عدد است نه برای منفی.

$(-۲)^{۴} = +۱۶$

$-۲^{۴} = -۱۶$

توان ۴ فقط برای ۲ است.

مثال: اعداد زیر را از کوچک به بزرگ مرتب کنید.

$۳^{۴}$ ، $(-۳)^{۲}$ ، $-۱^{۱۰}$ ، $\left(\frac{۲}{۵}\right)^{۴}$ ، $\left(\frac{۲}{۵}\right)^{۳}$ ، $(-۳)^{۳}$ ، $(-۵)^{۰}$

$+۸۱$ ، $+۹$ ، -۱ ، $\underbrace{\left(\frac{۲}{۵}\right)^{۳} > \left(\frac{۲}{۵}\right)^{۴}}_{\text{بین صفر و یک}}$ ، -۲۷ ، $+۱$

$$(-3)^3 < -1^{10} < \left(\frac{2}{5}\right)^4 < \left(\frac{2}{5}\right)^3 < (-5)^0 < (-3)^2 < 3^4$$

جدول توان‌های مهم

$2^0=1$	$3^0=1$	$4^0=1$	$5^0=1$	$6^0=1$	$7^0=1$	$8^0=1$	$9^0=1$
$2^1=2$	$3^1=3$	$4^1=4$	$5^1=5$	$6^1=6$	$7^1=7$	$8^1=8$	$9^1=9$
$2^2=4$	$3^2=9$	$4^2=16$	$5^2=25$	$6^2=36$	$7^2=49$	$8^2=64$	$9^2=81$
$2^3=8$	$3^3=27$	$4^3=64$	$5^3=125$	$6^3=216$	$7^3=343$	$8^3=512$	$9^3=729$
$2^4=16$	$3^4=81$	$4^4=256$	$5^4=625$			$8^4=4096$	
$2^5=32$	$3^5=243$	$4^5=1024$					
$2^6=64$	$3^6=729$	$4^6=4096$				$11^0=1$	$13^0=1$
						$11^1=11$	$13^1=13$
$2^7=128$						$11^2=121$	$13^2=169$
$2^8=256$							
$2^9=512$							
$2^{10}=1024$							
$2^{11}=2048$							
$2^{12}=4096$							

محاسبات اعداد توان دار:

۱- ضرب اعداد توان دار

پایه‌ها مساوی ← پایه یکسان را نوشته و توان‌ها را با هم جمع می‌کنیم.

$a^m \times a^n = a^{m+n}$ مثال: $۳^{۲} \times ۳^{۵} = ۳^{۲+۵} = ۳^{۷}$

علت (تمرین امتیازی)

توان‌ها مساوی ← توان یکسان را نوشته و پایه‌ها را در هم ضرب می‌کنیم.

$a^m \times b^m = (ab)^m$ مثال: $۲^{۵} \times ۳^{۵} = (۲\times۳)^{۵} = ۶^{۵}$

نکته: اگر هم پایه و هم توان یکسان بود، به دلخواه از یکی از دو حالت بالا استفاده می‌کنیم.

مثال: $۳^{۲} \times ۳^{۲} \rightarrow ۳^{۲+۲} = ۳^{۴}$

$\rightarrow (۳\times۳)^{۲} = ۹^{۲}$

مثال: حاصل عبارات زیر را به صورت یک عدد توان دار بنویسید.

۱) $۶^{۳} \times ۶ \times ۶^{۱۰} \times ۶^{۲} = ۶^{۳+۱+۱۰+۲} = ۶^{۱۶}$

۲) $۱۰^{۲} \times (۷٫۵)^{۴} \times ۳^{۲} \times ۴^{۴} = ۳۰^{۲} \times ۳۰^{۴} = ۳۰^{۲+۴} = ۳۰^{۶}$

$(۷٫۵\times۴)^{۴} = ۳۰^{۴}$

$(۱۰\times۳)^{۲} = ۳۰^{۲}$

۳) $\left(-\frac{۳}{۴}\right)^{۴} \times (-۴)^{۴} \times \left(\frac{۱}{۹}\right)^{۴} = \left(-\frac{\cancel{۳}^{۱}}{\cancel{۴}_{۱}} \times (-\cancel{۴}^{۱}) \times \frac{۱}{\cancel{۹}_{۳}}\right)^{۴} = \left(\frac{۱}{۳}\right)^{۴}$

۲- توان یک توان: توان‌ها را در هم ضرب می‌کنیم.

$$(a^m)^n = (a^n)^m = a^{mn}$$

مثال: $(۲^{۳})^{۴} = ۲^{۳\times۴} = ۲^{۱۲}$

علت (تمرین امتیازی)

نکته: $(a^m)^n \neq a^{m^n}$

مثال : $۲^{۳^{۲}} = ۲^{۹}$ ، $۳^{۲} \to ۹$

$(۲^{۳})^{۲} = ۲^{۶}$

۴) $(۲^{۲})^{۳} - ۲^{۲^{۳}} + (۲^{۲})^{۵^{۰}} = ۲^{۶} - ۲^{۸} + ۲^{۲} = ۶۴ - ۲۵۶ + ۴ = -۱۸۸$

۵) $(۵^{۲})^{۴} \times \left(\left(\left(-\frac{۱}{۳}\right)^{۲}\right)^{۰}\right)^{۵} \times ۲^{۸} \times ۱۰^{۳}$ ، $۲ \cdot ۰ \cdot ۵ \to ۰$

$= \underbrace{۵^{۸} \times ۱ \times ۲^{۸}}_{(۵\times۲)^{۸} = ۱۰^{۸}} \times ۱۰^{۳} = ۱۰^{۸} \times ۱۰^{۳} = ۱۰^{۸+۳} = ۱۰^{۱۱}$

تکلیف: سوالات مشخص شده از کتاب درسی

یادآوری در سال گذشته، ضرب دوعدد توان‌دار با پایه‌های مساوی و نیز توان‌های مساوی را یاد گرفتید. این قواعد را با نمادهای ریاضی به‌صورت زیر می‌نویسیم.

اگر a عددی دلخواه و m و n دو عدد طبیعی باشند :

$a^m\times a^n=a^{m+n}$ $\qquad$ $a^m\times b^m=(a\times b)^m$

(یا برای سادگی : $a^m.a^n=a^{m+n}$ و $a^m.b^m=(ab)^m$)

برای آمادگی بیشتر، تمرین‌های زیر را انجام دهید.

۱ــ حاصل هر یک از عبارت‌های زیر را به‌صورت یک عدد توان‌دار بنویسید.

$(-۶)^۴\times(\frac{۱}{۲})^۴=$ $\qquad$ $۸^۳\times۲^۳=$ $\qquad$ $(-\frac{۲}{۳})^۷\times(-\frac{۲}{۳})^۵=$ $\qquad$ $۲^۶\times۲^۳=$

$۲^۳\times۸^۵\times۴^۳=$ $\qquad$ $۳۶\times۱۴۴=$ $\qquad$ $۳\times(\frac{۳}{۵})^۰\times۸۱=$ $\qquad$ $۲^۵\times۳^۲\times۶^۵\times۴^۲=$

۲ــ حاصل هر یک را به‌صورت عبارتی توان‌دار بنویسید.

$(ab)^۵\times a^۳\times b^۴=$ $\qquad$ $x^۴\times y^۴=$ $\qquad$ $a^۲\times a^۸=$

$۸a\times(۲a)^۳\times۲a^۳=$ $\qquad$ $۱۲۵\times۱۸^۳\times(\frac{۱}{۹})^۳=$ $\qquad$ $(xy)^۲\times(xy)^۷=$

۳ــ حجم مکعبی به ضلع ۲a چند برابر حجم مکعبی به ضلع a است ؟

۴ــ جاهای خالی را با عددها و حرف‌های مناسب پرکنید.

$۷^{\bigcirc}\times۴^۵=۴^۵$ $\qquad$ $a^۸=a^۳\times a^{\bigcirc}$ $\qquad$ $۱۸^۵=(۶\times\bigcirc)^۵$

$(۴\times۳)^۶=\bigcirc^۶\times\bigcirc^۶$ $\qquad$ $(-\frac{۷}{۲})^{\bigcirc}\times(-\frac{۷}{۲})^۲=(-\frac{۷}{۲})^۹$

فعّالیت

حاصل عبارت $۲^{۳}\times۲^{۳}\times۲^{۳}\times۲^{۳}$ را به دو روش زیر می‌توان نشان داد.

$$۲^{۳}\times۲^{۳}\times۲^{۳}\times۲^{۳}=(۲^{۳})^{۴} \qquad ۲^{۳}\times۲^{۳}\times۲^{۳}\times۲^{۳}=۲^{۳+۳+۳+۳}=۲^{۱۲}$$

با مقایسهٔ تساوی‌های بالا، آیا می‌توان نتیجه گرفت : $(۲^{۳})^{۴}=۲^{۱۲}$

اکنون، درستیِ تساوی‌های زیر را به هر روشی که می‌توانید بررسی کنید.

$$\left[(\frac{۱}{۲})^{۳}\right]^{۴}=(\frac{۱}{۲})^{۱۲} \qquad (۷^{۲})^{۵}=۷^{۱۰}$$

$$(a^{۲})^{۴}=a^{۸} \qquad \left[(-۲)^{۳}\right]^{۷}=(-۲)^{۲۱}$$

آنچه را فراگرفته‌اید به‌صورت قانون کلی بیان کنید.

اگر a عددی دلخواه و m و n عددهایی طبیعی باشند، آن‌گاه :

$(a^{m})^{n}=a^{\boxed{}}$

تکلیف : سؤالات مشخص شده از کتاب بررسی

کار در کلاس

۱ــ حاصل عبارت‌های زیر را به‌صورت توان‌دار بنویسید.

$\left[(-۶)^{۲}\right]^{۵}=$ $\qquad \left[(\frac{۲}{۳})^{۲}\right]^{۳}=$ $\qquad (۵^{۷})^{۴}=$

$(x^{۴})^{۸}=$ $\qquad (۱۸^{۲})^{۷}=$ $\qquad \left[(-\frac{۱}{۷})^{۳}\right]^{۴}=$

$(۲^{m})^{n}=$ $\qquad (xy^{۲})^{۳}=$ $\qquad \left[(ab)^{۳}\right]^{۲}=$

تکلیف: سؤالات مشخص شده از کتاب درسی

۲ــ کدام یک از تساوی‌های زیر، درست و کدام نادرست است؟ توضیح دهید.

$۳^۵\times۳^۵=(۳^۵)^۲$	$(۳^۲)^۴=۳^۲\times۳^۴$
$(۳^۰)^۲=۳^۲$	$(۳^۲)^۴=۳^۸$
$۳^۲\times۳^۲=۹^۴$	$(۵^۳)^۲=۵^۹$
$a^۲.a^۰=۱$	$۳^۵\times(۲^۲)^۵=۱۲^۵$
$(-۴^۶)=۴^۶$	$((-۲)^۳)^۲=۲^۶$

۳ــ حاصل عبارت $[(-۵)^۲]^۳\times(-۵)^۲$ برابر کدام‌یک از اندازه‌های زیر است؟

الف) $(-۵)^۸$

ب) $-۵^۸$

۴ــ در جاهای خالی عدد مناسب قرار دهید.

$$۹^۵=(۳^{\bigcirc})^۵=۳^{\bigcirc}$$

تمرین

۱ــ حجم مکعبی به ضلع ۸cm را به‌صورت یک عدد توان‌دار بنویسید که پایه آن عدد ۲ باشد.

۲ــ بیست و هفت برابر عدد $۹^۵$ را به‌صورت یک عدد توان‌دار بنویسید.

۳ــ حاصل هر یک از عبارت‌های زیر را به‌صورت یک عبارت توان‌دار بنویسید.

$[(۳^۲)]^۲=$ $\qquad$ $[(-۳)^۲]^۲=$