

توان m را a بار در خودش ضرب می‌کنیم \rightarrow a m بار

مثال $\left\{ \begin{aligned} 2^5 &= 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 32 \\ \left(-\frac{1}{3}\right)^2 &= \left(-\frac{1}{3}\right) \times \left(-\frac{1}{3}\right) = +\frac{1}{9} \end{aligned} \right.$

و بزرگتر؟

۱- هر عدد به توان ۱ برابر است با همان عدد

مثال: $(-1 \dots)^1 = -1 \dots$

۲- هر عدد غیر صفر به توان صفر برابر است با ۱

$a^0 = 1$
($a \neq 0$)

$(\text{هر چه})^0 = 1$

۳- صفر به توان هر عدد غیر صفر برابر است با صفر

$0^n = 0$
($n \neq 0$)

مثال: $(0 \times \sqrt{8})^7 = 0^7 = 0$

۴- ۱ به توان هر عدد برابر است با ۱

$1^n = 1$
مثال: $1 \dots = 1$

۵- اگر عددی بین صفر و ۱ باشد، هر چه به توان عدد بزرگتری برسد، کوچکتر می‌شود.

مثال: $\left(\frac{1}{2}\right)^2 > \left(\frac{1}{2}\right)^3$
 $\frac{1}{4} > \frac{1}{8}$
 که کسر کوچکتر از راه

۶- اگر عددی بزرگتر از ۱ باشد، هر چه به توان عدد بزرگتری برسد، بزرگتر می‌شود.

مثال: $\left(\frac{5}{4}\right)^2 < \left(\frac{5}{4}\right)^3$

$$v > 1 \Rightarrow v^4 > v^3 > v^2 > v^1 > v_0 = 1$$

ست: اگر $1 < x < \infty$ و a, b اعداد طبیعی باشند و $a > b$ باشد، کدام نامکابری درست است؟ $\frac{1}{x} > \frac{1}{x^a}$ (درستی؟) $\frac{1}{x} < \frac{1}{x^a}$ (درستی؟)

(1) $x^a > \frac{1}{x^a}$ ← مثال نقض: $x = \frac{1}{3}, a = 2 \Rightarrow (\frac{1}{3})^2 < \frac{1}{(\frac{1}{3})^2} = 9$

(2) $x^a < x^b$ ← مثال نقض: $x = \frac{1}{3}, a = 2, b = 3 \Rightarrow (\frac{1}{3})^2 > (\frac{1}{3})^3$

(3) $x^b < 0$ ← x یک عدد مثبت است و b توان صحیح درجه n بر x باز مثبت خواهد بود.

(4) $x^b < x^a$ ✓

7. اگر پایه منفی باشد و توان زوج باشد، حاصل عددی مثبت و اگر پایه منفی و توان فرد باشد، حاصل عددی منفی است. (توان زوج منفی حواره است)

$$(-3)^2 = +9$$

$$(-2)^{100} = +2^{100}$$

$$(-3)^3 = -27$$

$$(-2)^{99} = -2^{99}$$

8. اگر پایه منفی و علامت منفی داخل پرانتز باشد و پیرانتر b توان یک عدد زوج باشد، منفی هم به توان هر عدد اما در غیر این صورت توان فقط برای عدد است نه برای منفی.

$$(-2)^4 = +16$$

$$-2^4 = -16$$

توان 4 فقط برای 2 است.

سؤال: اعداد زیر را از کوچک به بزرگ مرتب کنید.

$$(-5)^0, (-3)^3, (\frac{2}{5})^3, (\frac{2}{5})^4, -1, (-3)^2, 3^4$$

$$+1, -27, (\frac{2}{5})^3 > (\frac{2}{5})^4, -1, +9, +81$$

بین منسوب

$$(-3)^3 < -1^0 < \left(\frac{2}{5}\right)^4 < \left(\frac{2}{5}\right)^3 < (-5)^0 < (-3)^2 < 3^4$$

جدول توان های صحیح

| | | | | | | | |
|-----------------|-------------|--------------|-------------|-------------|-------------|---------------|---------------|
| $2^0 = 1$ | $3^0 = 1$ | $4^0 = 1$ | $5^0 = 1$ | $6^0 = 1$ | $7^0 = 1$ | $8^0 = 1$ | $9^0 = 1$ |
| $2^1 = 2$ | $3^1 = 3$ | $4^1 = 4$ | $5^1 = 5$ | $6^1 = 6$ | $7^1 = 7$ | $8^1 = 8$ | $9^1 = 9$ |
| $2^2 = 4$ | $3^2 = 9$ | $4^2 = 16$ | $5^2 = 25$ | $6^2 = 36$ | $7^2 = 49$ | $8^2 = 64$ | $9^2 = 81$ |
| $2^3 = 8$ | $3^3 = 27$ | $4^3 = 64$ | $5^3 = 125$ | $6^3 = 216$ | $7^3 = 343$ | $8^3 = 512$ | $9^3 = 729$ |
| $2^4 = 16$ | $3^4 = 81$ | $4^4 = 256$ | $5^4 = 625$ | | | $8^4 = 4096$ | |
| $2^5 = 32$ | $3^5 = 243$ | $4^5 = 1024$ | | | | | |
| $2^6 = 64$ | $3^6 = 729$ | $4^6 = 4096$ | | | | $8^5 = 32768$ | $9^5 = 59049$ |
| $2^7 = 128$ | | | | | | | |
| $2^8 = 256$ | | | | | | | |
| $2^9 = 512$ | | | | | | | |
| $2^{10} = 1024$ | | | | | | | |
| $2^{11} = 2048$ | | | | | | | |
| $2^{12} = 4096$ | | | | | | | |

محاسبه اعداد توان دار:

۱- ضرب اعداد توان دار

پایه های مساوی به پایه بیان نوشته و توان هارا با هم جمع می کنیم.

$$a^m \times a^n = a^{m+n}$$

مثال: $3^2 \times 3^5 = 3^{2+5} = 3^7$

عدت (تمرین امتیاز)

توان هارا به توان بیان نوشته و پایه هارا در هم ضرب می کنیم.

$$a^m \times b^m = (ab)^m$$

مثال: $2 \times 3^5 = (2 \times 3)^5 = 6^5$

نتیجه: اگر هم پایه در هم توان بیان بود، به دگرگناه از زیر از در حالت بالا استفاده می کنیم.

مثال: $3^2 \times 3^2 = 3^{2+2} = 3^4$
 $(3 \times 3)^2 = 9^2$

مثال: حاصل عبارات زیر را بصورت یک عدد توان دار بنویسید.

① $7^3 \times 7 \times 7^1 \times 7^2 = 7^{3+1+1+2} = 7^7$

② $10^2 \times (1/5)^4 \times 3^2 \times 4^4 = 30^2 \times 30^4 = 30^{2+4} = 30^6$
 $(10 \times 3)^2 = 30^2$

③ $(-\frac{3}{4})^4 \times (-4)^4 \times (\frac{1}{9})^4 = (-\frac{3}{4} \times (-4) \times \frac{1}{9})^4 = (\frac{1}{3})^4$

۲- توان یک توان: توان هارا در هم ضرب می کنیم.

$$(a^m)^n = (a^n)^m = a^{mn}$$

مثال: $(2^3)^4 = 2^{3 \times 4} = 2^{12}$

عدت (تمرین امتیاز)

نتیجه: $(a^m)^n \neq a^{m^n}$

$$d\tilde{w} : r^r = r^q$$

$$(r^r)^r = r^7$$

$$\textcircled{r} (r^r)^r - r^r + (r^r)^{d^0} = r^7 - r^r + r^r = 7r - 207 + r = -100$$

$$\textcircled{d} (d^r)^r \times \left(\left(\left(-\frac{1}{r} \right)^r \right)^{d^0} \right) \times r^r \times 1^r$$
$$= \underbrace{d^r \times 1 \times r^r \times 1^r}_{(d \times r)^r = 1^r} = 1^r \times 1^r = 1^{r+r} = 1^{11}$$

تعریف: سوالات مشخص شده از کتاب درسی

توان

یادآوری در سال گذشته، ضرب دو عدد توان دار با پایه‌های مساوی و نیز توان‌های مساوی را یاد گرفتید. این قواعد را با نمادهای ریاضی به صورت زیر می‌نویسیم.
اگر a عددی دلخواه و m و n دو عدد طبیعی باشند:

$$a^m \times a^n = a^{m+n} \quad a^m \times b^m = (a \times b)^m$$

(یا برای سادگی: $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ و $a^m \cdot b^m = (ab)^m$)

برای آمادگی بیشتر، تمرین‌های زیر را انجام دهید.

۱- حاصل هر یک از عبارات‌های زیر را به صورت یک عدد توان دار بنویسید.

$$2^6 \times 2^3 = \quad \left(-\frac{2}{3}\right)^7 \times \left(-\frac{2}{3}\right)^5 = \quad 8^2 \times 2^3 = \quad (-6)^4 \times \left(\frac{1}{2}\right)^4 =$$

$$2^5 \times 3^2 \times 6^5 \times 4^2 = \quad 3 \times \left(\frac{3}{5}\right)^3 \times 11 = \quad 3^6 \times 14^4 = \quad 2^2 \times 8^5 \times 4^3 =$$

۲- حاصل هر یک را به صورت عبارتی توان دار بنویسید.

$$a^2 \times a^4 = a^{10}$$

$$x^4 \times y^4 = (xy)^4$$

$$(ab)^5 \times a^2 \times b^4 = a^7 b^9$$

$$(xy)^2 \times (xy)^4 = (xy)^6$$

$$125 \times 18^2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 =$$

$$8a \times (2a)^2 \times 2a^2 = 2^3 \times a^3 \times 2^2 \times a^2 \times 2a^2 = 2^7 a^7 = (2a)^7$$

$$\frac{(2a)^3}{a^2} = \frac{2^3 a^3}{a^2} = 2^3 a = 8a$$

۳- حجم مکعبی به ضلع $2a$ چند برابر حجم مکعبی به ضلع a است؟

$$(2a)^3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^3 = 10^3$$

۳ ضلع

۴- جاهای خالی را با عددها و حرف‌های مناسب پر کنید.

$$18^0 = (6 \times 3)^0$$

$$a^4 = a^2 \times a^5$$

$$7^0 \times 4^5 = 4^5$$

$$\left(-\frac{7}{2}\right)^7 \times \left(-\frac{7}{2}\right)^2 = \left(-\frac{7}{2}\right)^9$$

$$(4 \times 3)^6 = 4^6 \times 3^6$$

فعالیت



حاصل عبارت $2^3 \times 2^3 \times 2^3 \times 2^3$ را به دو روش زیر می‌توان نشان داد.

$$2^3 \times 2^3 \times 2^3 \times 2^3 = 2^{3+3+3+3} = 2^{12} \qquad 2^3 \times 2^3 \times 2^3 \times 2^3 = (2^3)^4$$

با مقایسه تساوی‌های بالا، آیا می‌توان نتیجه گرفت: $(2^3)^4 = 2^{12}$

اکنون، درستی تساوی‌های زیر را به هر روشی که می‌توانید بررسی کنید.

$$(7^2)^5 = 7^{10} \qquad \left[\left(\frac{1}{4} \right)^3 \right]^4 = \left(\frac{1}{4} \right)^{12}$$

$$\left[(-2)^3 \right]^7 = (-2)^{21} \qquad (a^4)^4 = a^{16}$$

آنچه را فراگرفته‌اید به صورت قانون کلی بیان کنید.

اگر a عددی دلخواه و m و n عددهایی طبیعی باشند، آنگاه:

تعریف: سوالات مشخص شده از کتاب بررسی $(a^m)^n = a^{\quad}$

کار در کلاس



۱- حاصل عبارت‌های زیر را به صورت توان‌دار بنویسید.

$$(5^2)^4 = 5^{28} \qquad \left[\left(\frac{2}{3} \right)^2 \right]^3 = \left(\frac{2}{3} \right)^6 \qquad [(-6)^2]^5 = (-6)^{10} = 6^{10}$$

$$\left[\left(-\frac{1}{4} \right)^3 \right]^4 = \left(-\frac{1}{4} \right)^{12} = \left(\frac{1}{4} \right)^{12} \qquad (18^2)^4 = (18)^8 \qquad (x^2)^4 = x^{2 \times 4} = x^8$$

$$[(ab)^3]^2 = (ab)^6 \qquad (xy^2)^3 = x^3 y^6 \qquad (2^m)^n = 2^{mn}$$

تعریف: توان متضمن شده از توان بدوی

۲- کدام یک از تساوی‌های زیر، درست و کدام نادرست است؟ توضیح دهید.

$(3^2)^4 = 3^2 \times 3^4$ ✗
 $(3^2)^4 = 3^8$ ✓
 $(5^2)^2 = 5^4$ ✗
 $(3 \times 2)^5 = (3 \times 4)^5 = 12^5$ ✗
 $3^5 \times (2^2)^5 = 12^5$ ✓
 $((-2)^2)^3 = 2^6$ ✓
 $(-2)^7 = 2^7$ ✗

$3^5 + 3^5 = 3^{10}$ ✗
 $3^5 \times 3^5 = (3^5)^2$ ✓
 $3^2 + 2 = 3^4$ ✗
 $(3^2)^2 = 3^4$ ✗
 $(3 \times 3)^2 = 9^2$ ✗
 $3^2 \times 3^2 = 9^4$ ✗
 $a^2 \cdot a = 1$ ✗

توان ۶ متناظر با ۱۴ نیست

$(-4^6) = 4^6$ ✗ →

۳- حاصل عبارت $[(-5)^2]^3 \times (-5)^2$ برابر کدام یک از اندازه‌های زیر است؟

$(-5)^7 \times (-5)^2 = (-5)^9$ (الف)
 $(-5)^8$ (ب)

$3^2 = 3^2$
 $(3^2)^5 = 3^2 \times 5 = 3^{10}$

۴- در جاهای خالی عدد مناسب قرار دهید.

$9^5 = (3^2)^5 = 3^{10}$
 $(3^2)^5$

تمرین



۱- حجم مکعبی به ضلع ۸cm را به صورت یک عدد توان دار بنویسید که پایه آن عدد ۲ باشد.

۲- بیست و هفت برابر عدد 9^5 را به صورت یک عدد توان دار بنویسید.

۳- حاصل هر یک از عبارات‌های زیر را به صورت یک عبارت توان دار بنویسید.

$[(-3)^2]^2 =$

$[(3^2)^2] =$

$$(a^m \times b^n)^c = a^{mc} \times b^{nc} \quad - ۳$$

نکته: ما هم تجزیه کردن در محاسبات اعداد توان در بیاریم البته است.

$$\textcircled{۶} \quad ۱۶^۳ \times ۳۲^۴ = (۲^۴)^۳ \times (۲^۵)^۴ = ۲^{۱۲} \times ۲^{۲۰} = ۲^{۳۲}$$

$$\textcircled{۷} \quad (۲۵^۲ \times ۳۲^۳)^۲ \times ۱۵^۳ \times ۷^۱$$

$$((۲۵^۲)^۲ \times (۳۲^۳)^۲) \times ۱۵^۳ \times ۷^۱ = (۵^۴ \times ۲^{۱۵})^۲ \times ۱۵^۳ \times ۷^۱$$

$$= \underline{۵^۸} \times \underline{۲^{۳۰}} \times \underline{۱۵^۳} \times \underline{۷^۱} = (۲ \times ۱۵)^۳ \times (۵ \times ۷)^۸ = ۳۰^۳ \times ۳۵^۸$$

توجه: $(a^m + b^n)^c \neq a^{mc} + b^{nc}$

مثال: $(۳ + ۲^۴)^۲ = ۳^۲ + ۲^۸$
 $\hookrightarrow ۷^۲ = ۴۹$
 $\hookrightarrow ۹ + ۱۶ = ۲۵$
 $۴۹ \neq ۲۵$

۴- جمع و تفریق اعداد توان دار:

در جمع و تفریق اعداد توان دار، ابتدا اهر عدد را به توان می رسانیم سپس با هم جمع یا تفریق می کنیم.

$$\textcircled{۸} \quad (۲^۴ + ۲^۲) - (۳^۳ - ۳^۲) = (۱۶ + ۴) - (۲۷ - ۹) = ۲۰ - ۱۸ = ۲$$

حالت خاص در جمع و تفریق اعداد توان دار:

جمع و تفریق اعداد توان دارین : تعداد آنها را بدین آنگاه ضرب میکنیم.

$$\textcircled{9} \quad 2^5 + 2^5 + 2^5 + 2^5 = 4 \times 2^5 = 2^2 \times 2^5 = 2^7$$

$$\textcircled{10} \quad 1^1 + 1^1 + 1^1 = 3 \times 1^1 = 3 \times (2^0)^1 = 3 \times 3^0 = 3^1$$

$$\textcircled{11} \quad 3 \times 3^2 \times 3^3 \times \dots \times 3^6 = 3^{1+2+3+\dots+6} = 3^{55}$$

نتیجه: $1 + 2 + 3 + 4 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$
 $1 + 2 + 3 + \dots + 11 = \frac{1 \times 11}{2} = 55$

$$\textcircled{12} \quad \underbrace{5^2 + 5^2 + 5^2 + 5^2 + 5^2}_{5 \times 5^2 = 5^3} + 5^2 + 5^3 + 5^2 + 5^3 = 5^3 + 5^3 + 5^2 + 5^2 + 5^3 = 5 \times 5^3 = 5^4$$

$$\textcircled{13} \quad 15^1 \times 2^2 = 15^1 \times (2^2)^1 = (15 \times 4)^1 = 60$$

$$\textcircled{14} \quad 125 \times ((5^2)^3)^2 = 5^3 \times 5^{12} = 5^{15}$$

سؤال: ۳۲ برابر عدد 16^2 را بصورت یک عدد توان دار بنویسید.

$$32 \times 16^2 = 2^5 \times (2^4)^2 = 2^5 \times 2^8 = 2^{13}$$

۵. تقسیم اعداد توان دار

← پایه‌ها مساوی: پایه‌ی بیان را نوشته و توان‌ها را از هم کم می‌کنیم. (توان اول نشان توان دوم)

$$a^m \div a^n = \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

مثال: $3^7 \div 3^2 = 3^{7-2} = 3^5$

← توان‌ها مساوی: توان بیان را نوشته و پایه‌ها را بر هم تقسیم می‌کنیم.

$$a^m \div b^m = \frac{a^m}{b^m} = \left(\frac{a}{b}\right)^m$$

مثال: $\frac{10^3}{2^3} = \left(\frac{10}{2}\right)^3 = 5^3$

نکته: تقریباً امیازن

نکته: اگر هم پایه و هم توان بیان بود، حاصل هواره برابر ۱ خواهد بود.

$$\frac{a^m}{a^m} \rightarrow a^{m-m} = a^0 = 1$$

$$\frac{a^m}{a^m} \rightarrow \left(\frac{a}{a}\right)^m = 1^m = 1$$

مثال: حاصل عبارات زیر را به صورت یک عدد توان دار بنویسید.

① $9^7 \div 9^3 = 9^{7-3} = 9^4$

② $35^7 \div 7^7 = (35 \div 7)^7 = 5^7$

